Н.В.Емельянов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

Допущено УМО
по классическому университетскому образованию РФ
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных
заведений, обучающихся по специальности
ВО 03.05.01 - Астрономия

2015 г.

Е м е л ь я н о в Н. В. **Основы теории возмущения в небесной механике.** – М.: Физический факультет МГУ, 2015. 126 с.
ISBN 978-5-600-00866-3

Предлагается учебное пособие по специальному курсу для для использования в учебном процессе на кафедрах астрономических специальностей, геодезии и геодинамики.

Теория возмущений в небесной механике является основой для построения аналитических теорий движения небесных тел. Создавалась она классиками небесной механики Лагранжем, Лапласом, Пуанкаре, А. М. Ляпуновым. Целью было построение моделей движения планет и создание эфемерид планет. Методами теории возмущений делались попытки исследования устойчивости Солнечной системы. Теория возмущений постоянно развивалась по мере появления новых математических методов. Значительный толчок в своем развитии она получила благодаря появлению в математике канонической формы обыкновенных дифференциальных уравнений и методов канонических преобразований. Остаются актуальными задачи эволюции орбит небесных тел и устойчивости движения, которые могут решаться только аналитическими методами, включая теорию возмущений. В небесной механике теория возмущений имеет свою классическую форму, отличающуюся красотой и стройностью.

Данный спецкурс входит в учебный план кафедры небесной механики, астрометрии и гравиметрии физического факультета МГУ.

Библиогр. 12 назв.

Р е ц е н з е н т ы:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры астрономии и космической геодезии физического факультета Томского государственного университета *Т.В. Бордовицына* ,
доктор технических наук, профессор кафедры астрономии и космической геодезии МИИГАиК *С.Н. Яшкин* .

ISBN 978-5-600-00866-3

Оглавление

Предисловие автора

Предлагаемое учебное пособие в форме курса лекций составлено в соответствии с учебной программой кафедры небесной механики, астрометрии и гравиметрии физического факультета Московского Государственного Университета имени М.В.Ломоносова.

В основу курса лекций положено содержание специального курса, который читается для студентов старших курсов кафедры на протяжении последних 30 лет. Сначала, до 1991 года лекции читались профессором Е.П. Аксеновым, затем автром настоящего пособия. Большая часть содержания написана по лекциям Е.П. Аксенова. Автор постарался сохранить порядок изложения методов теории возмущений, принятый в учебниках Г.Н. Дубошина (1975) и М. Ф. Субботина (1968).

Содержание курса лекций было частично адаптировано автором в соответстви со стилем и содержанием работ по практической небесной механике, ведущихся в отделе небесной механики Государственного астрономического института имени П.К. Штернберга МГУ. В частности, добавлены определения основных понятий, дана постановка задач практической небесной механики.

В целом предлагаемый курс лекций является необходимым этапом при подготовке специалистов по небесной механике и астрометрии.

Редакционная правка рукописи была сделана доцентом кафедры небесной механики, астрометрии и гравиметрии физического факультета МГУ Ширминым Г.И.

Глава 1. **Введение**

1.1. Основные понятия и определения небесной механики

Небесная механика – область астрономической науки, которая занимается изучением движений небесных тел под действием естественных сил природы.

Предметом небесной механики являются механические формы движения материи.

Цель небесной механики - познание законов природы, управляющих механическими движениями небесных тел.

Объекты исследований.

Объекты исследований в небесной механике - всевозможные материальные образования от мельчайших частиц космической пыли до колоссальных систем типа звездных скоплений, галактик и скоплений галактик.

Основным понятием в небесной механике является небесное тело. Исследуются движения естественных и существующих или проектируемых искусственных небесных тел. Однако фактически на этом пути оперируют с моделями небесных тел, которых в природе не существует, но которые в известной мере мало отличаются от реальных небесных тел. Примерами таких объектов могут служить материальная точка или абсолютно твердое однородное тело, ограниченное трехосным однородным эллипсоидом.

Законы движения. Реальным проявлением движения небесных тел является изменение их взаимного расположения, которое определяется взаимными расстояниями. Для задания движения системы небесных тел следует задать закон изменения их взаимных расстояний во времени. Для математического описания законов движения используются те или иные функции времени.

Для удобного отображения движения небесных тел оперируют понятиями системы отсчета, системы координат и шкалы времени. Абстрактное понятие системы координат так или иначе связывают с реальными объектами. Примерами могут служить Гринвичский меридиан на Земле или внегалактические радиоисточники излучения. Абстрактное понятие шкалы времени реализуется реальными физическими процессами. Примерами могут служить вращение Земли или электромагнитное излучение атома.

Законы взаимодействия. Основой для изучения движения небесных тел являются строго установленные из наблюдений законы физики, которые описывают взаимодействия тел или воздействия на них той среды, в которой они движутся. Математической формой законов взаимодействия небесных тел оказываются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют взаимные расстояния между небесными телами или их координаты.

Методы исследований. От других астрономических дисциплин небесная механика отличается лишь методами исследования, среди которых следует выделить следующие три группы методов: *аналитические, численные, качественные.*

Аналитические методы дают возможность получать набор аналитических соотношений, позволяющих рассчитывать положения и скорости небесных тел на заданные моменты времени, минуя какие-либо промежуточные их значения. Недостатками аналитических методов являются большая трудоемкость и нарастающая громоздкость выкладок с ростом необходимой точности расчета движения. Кроме того, аналитические методы не дают возможности судить о свойствах исследуемых движений на очень больших интервалах времени. Еще одним их недостатком является то, что применимы они не ко всем космическим объектам.

Ограничения, свойственные аналитическим методам, не распространяются на *численные методы*, которые пригодны для расчета движений любых небесных тел и их систем с наперед заданной точностью. С внедрением в научные исследования мощных вычислительных машин или компьютеров считавшаяся прежде чрезмерной трудоемкость численных методов перестала быть препятствием для их применения. Но и у них есть своя ахиллесова пята — это неуклонное накопление погрешности с увеличением интервала интегрирования при невозможности строгих оценок роста этой погрешности. Еще один недостаток этих методов — численная форма представления результатов и неизбежность расчета промежуточных этапов, хотя зачастую целью исследования является конечная конфигурация или состояние движения в конце интегрирования.

Качественные методы небесной механики позволяют судить о свойствах движений небесных тел без полного интегрирования (аналитического или численного) дифференциальных уравнений.

Аналитические, численные и качественные методы продолжают применяться в современной небесной механике, причем красота и высокая эффективность аналитических методов удачно сочетается с простотой и универсальностью методов численных, а все это дополняется космогонической важностью выводов, получаемых качественными методами исследований.

Механическая модель. В небесной механике используют понятие механической модели. Модель описывается составом движущихся объектов, их свойствами, заданием сил, действующих на отдельные компоненты модели. Механические модели используются либо для приближенного описания движений небесных тел, либо как основа для разработки более точных методов описания их движений.

Задачей небесной механики считается построение и исследование различных механических моделей. Конечная цель – это изучение и описание движений реальных небесных тел.

Механическая модель, будучи, как правило, приближенным описанием движения системы реальных небесных тел, может принципиально от нее отличаться. В частности, свойства тел в модели могут не соответствовать реальности, а законы действующих сил могут задаваться специальным образом. Примерами могут служить задача о движении конечного числа **материальных точек**, в которой небесные тела не имеют размеров, или **ограниченная задача трех тел**, в которой взаимодействие тел не удовлетворяет третьему закону Ньютона. Когда принимаются во внимание формы и размеры небесных тел, говорят о **поступательно-вращательном движении**. Рассматривают относительное движение в задаче двух тел, когда начало системы отсчета помещается в центр масс одного из них, и барицентрическое движение, при котором начало помещено в центр масс обоих тел. Механической моделью движения трех и более материальных точек может быть модель движения в неизменной плоскости. В ограниченной задаче трех тел может рассматриваться модель кругового движения двух из них.

Результат решения задачи небесной механики – это либо вычисленые на заданный момент времени положение и скорость небесного тела, либо найденные свойства его движения. Если изучается движение реального небесного тела, то решение должно быть максимально близким к результатам наблюдений. При этом точность теории должна быть лучше точности наблюдений. В этом случае успешный прогноз движения небесного тела обеспечивается не только точностью наблюдений, но также достаточной величиной интервала времени, на котором выполнены наблюдения.

Мы не знаем точно, как устроены небесные тела и по каким точным законам они движутся. Поэтому приходится довольствоваться изучением моделей движения, выдвигая ту или иную смелую гипотезу о том, что наши модели мало отличаются от действительности.

Наблюдения. Измеряемые величины. Источником наших знаний о небесных телах являются наблюдения. Наблюдая, мы не можем довольствоваться констатацией факта наличия небесного тела на небе. В процессе астрономических наблюдений выполняются измерения тех или иных величин. Делается это с помощью разнообразных приборов. В отличие от координат, измеряемая величина всегда реальна. Она образуется в измерительном приборе. Астрономы имеют дело с богатым разнообразием приборов и измеряемых величин.

В дальнейшем мы будем говорить о наблюдениях небесных тел, всегда предполагая при этом получение значений той или иной *измеряемой величины* на некоторый момент времени – *момент измерения.*

Точность астрономических измерений достигла уже такого уровня, что стала заметной неадекватность ньютоновой механики наблюдаемому движению небесных тел. В более точной общей теории относительности (ОТО) время течет различно в любых двух точках пространства. Для связи шкал времени в рамках ОТО нужно учитывать движение тел и их массы.

Параметры движения. Изучая планеты и спутники, звезды и галактики мы неявно предполагаем, что все время остаются постоянными некоторые параметры, присущие небесным телам и их движению. К ним относятся массы, размеры и формы тел, параметры орбит и многие другие величины. Эти параметры невозможно непосредственно измерить с помощью имеющихся приборов. Однако их значения реально проявляют себя в наблюдаемом движении небесных тел. Будем называть в дальнейшем такие величины *параметрами движения* небесных тел.

В небесной механике также изучается движение небесных тел с переменными массами. Например, движение так называемой нормальной звезды, масса которой уменьшается со временем, и темп потери масс составляет от $10^{-12}M_\odot$ до $10^{-7}M_\odot$ в год. Масса нейтронной звезды увеличивается с темпом акреции от $10^{-7}M_\odot$ до $10^{-4}M_\odot$ в год. Здесь $M_\odot$ – масса Солнца. Возможны случаи, когда не только массы, но и формы и размеры звезд могут изменяться, например, в задаче о движении звезды в тесных двойных звездных системах.

Системы координат. Измеряемые величины не дают наглядных представлений о конфигурации системы тел и тем более непригодны непосредственно для выражения общих законов движения. Удобным средством описания пространственного расположения тел и направлений на небесные светила являются системы координат. Когда говорят о положении светила или об ориентации тела в некоторой системе координат, имеются в виду абстрактные оси координат в пространстве и воображаемые линии на небе. Системы координат выбираются так, чтобы дать ясное представление о законах и свойствах движения небесных тел.

Выбор системы координат обусловлен удобством описания и изучения движения конкретного небесного тела. Начало и оси координат связывают либо с деталями объекта, например с гринвичским меридианом Земли, либо с его динамическими свойствами, например, с главными осями инерции тела, либо со свойствами движения, например с осью вращения тела, либо с положением тела в некоторый момент времени, либо выбирают систему координат другим специальным образом.

Чаще других используются системы прямоугольных или декартовых координат и обозначают ее начало буквой O, а оси буквами x, y, z. Столь же часто применяются системы сферических координат с обозначением центрального расстояния буквой r, широты - буквой φ и долготы - буквой λ.

Законы движения небесных тел – это зависимости координат тел от времени и параметров движения. Зависимости могут принимать различные формы. Чаще всего используются аналитические функции, описывающие явную зависимость координат от времени. В некоторых случаях зависимость дается в неявной форме, тогда координаты получаются путем вычислений по формулам последовательными приближениями. Закон движения может иметь форму числовых таблиц, в которых значения координат небесных тел заданы на ряд фиксированных моментов времени, обычно следующих с каким-то постоянным шагом. При таком численном задании закона движения теряется зависимость координат от параметров движения небесного тела. В этом случае затруднен анализ свойств движения, и мы ограничены тем интервалом времени, для которого координаты были вычислены.

Координаты небесных тел являются абстрактными понятиями. Их нельзя измерить никакими приборами. Системы координат моделируются с помощью формул и алгоритмов и являются составной частью модели движения небесных тел.

Модель движения небесного тела. В общем случае под моделью движения небесного тела мы будем подразумевать некоторую совокупность средств, позволяющих определять значения измеряемой величины на любые заданные моменты времени при известных значениях параметров движения небесных тел.

Реализации модели движения небесного тела могут иметь весьма различные формы. Это могут быть математические формулы, написанные вручную на бумаге или опубликованные в виде печатного материала. Это могут быть напечатанные числовые таблицы значений координат. В настоящее время и формулы и таблицы отображаются в памяти компьютеров. При этом формулы преобразуются в алгоритмы вычислений, а таблицы доступны вычислительным программам, решающим те или иные задачи. Однако даже в эпоху мощной вычислительной техники в нескольких научных центрах мира создаются и печатаются в форме астрономических ежегодников координаты основных небесных тел, вычисленные на несколько лет вперед.

Откуда же берутся законы движения небесных тел? В старые времена они устанавливались в кинематической форме почти эмпирически из простых наблюдений. Сейчас же, конечно, законы движения находят в процессе решения дифференциальных уравнений движения относительно координат небесных тел. Составляют эти уравнения на основе строго установленных законов физики, которые описывают взаимодействия тел или воздействия на них той среды, в которой они движутся. Это делается в рамках какой-либо механической модели. Четко фиксируются все факторы, влияющие на движение каждого тела системы и включенные в рассматриваемую модель. Процесс установления законов движения небесных тел, а также его результат – сами законы движения, называют теорией движения. Именно этим занимается небесная механика.

В подавляющем большинстве задач небесной механики невозможно получить точное решение дифференциальных уравнений движения. Приходится довольствоваться либо приближенным решением используемых точных уравнений, либо точным решением более приближенных уравнений. Применяются как аналитические, так и численные методы решения дифференциальных уравнений. В обоих случаях решение обладает погрешностью.

Результаты и выводы небесной механики явно и незримо присутствуют во многих других областях науки и практической деятельности человека.

1.2. Задачи практической небесной механики

Итак, мы определили основные понятия небесной механики. Теперь выясним, в каких соотношениях они находятся и как они служат целям практического познания природы.

Решая задачи небесной механики, мы получаем возможность находить положение и скорость небесного тела на заданные моменты времени в прошлом или в будущем. Этот результат должен наилучшим образом согласовываться с данными наблюдений. Пример таких результатов – это вычисление эфемерид небесных тел.

В результате решения задач небесной механики могут определяться свойства движения небесного тела. При этом само движение, т. е. положение и скорость на заданные моменты времени, может оставаться неизвестным. В качестве свойства движения небесных тел может рассматриваться его устойчивость. В других случаях нас интересует близость движения группы тел к резонансному движению. Известна также и проблема неопределенности решения детерминированных уравнений движения.

Рассмотрим подробнее порядок построения модели движения реальных небесных тел.

На Рис. 1 изображена схема изучения динамики небесных тел на основе наблюдений. На любом этапе исследований мы фиксируем состав изучаемой системы небесных тел. Установленные на текущий момент времени законы взаимодействия тел (гравитационное притяжение, сопротивление среды) позволяют записать дифференциальные уравнения движения. Используя аналитические методы можно найти общее решение уравнений движения. Подставляя в это общее решение значения произвольных постоянных (параметров движения) получим искомую модель движения системы небесных тел. Решая уравнения движения методами численного интегрирования при известных начальных условиях (параметров движения) также получаем модель движения системы небесных тел. Некоторые предварительные значения параметров движения обычно бывают известны из предшествующих исследований. Для построения модели движения потребуются также значения физических праметров, входящих в уравнения движения посредством законов взаимодействия (например, массы тел).

Основным процессом изучения динамики небесных тел является

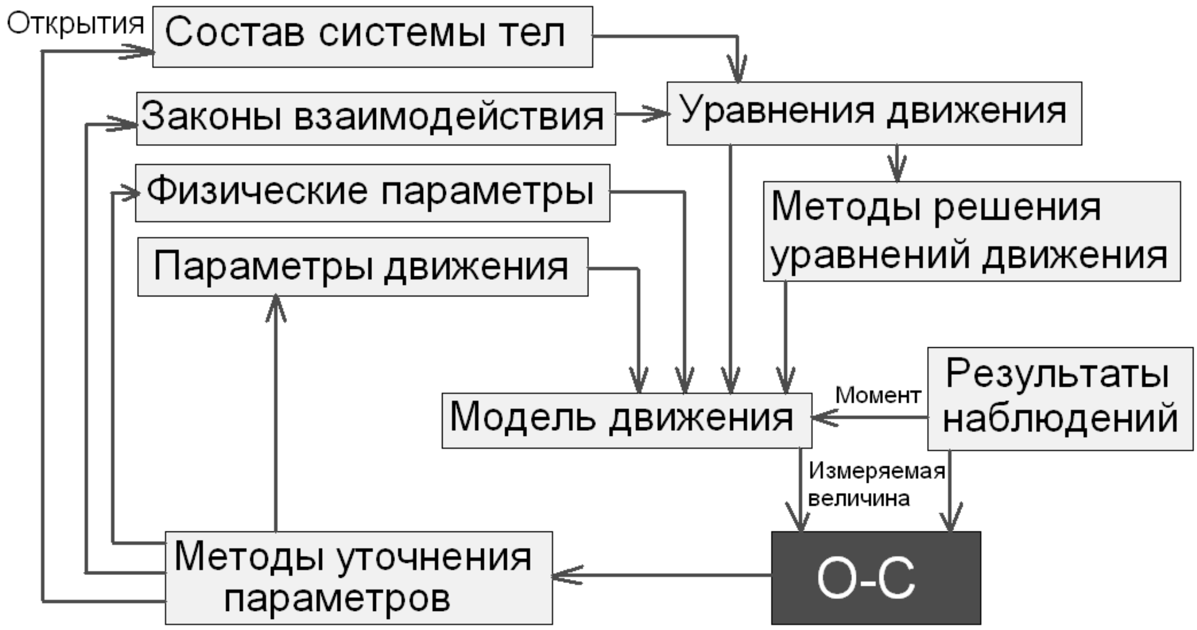

Рис. 1: Схема процесса изучения динамики небесных тел.

уточнение модели на основе астрономических наблюдений. Наблюдения дают нам значения измеряемых величин. Назовем их измеренными значениями. С другой стороны мы имеем модель движения, которая для того и служит, чтобы предвычислять измеряемые величины. Мы можем вычислить измеряемые величины именно на моменты наблюдений. Результаты называются вычисленными значениями измеряемой величины. Разные по происхождению значения одной и той же величины будут различаться между собой. Эту разность значений мы обозначаем на Рис. 1 символически через "О-С"(O – observatum, C – calculatum). Разность естественна, так как в ней присутствует погрешность наблюдений и погрешность модели движения небесного тела. Однако в некоторых случаях разности "О-С"будут превышать погрешность модели и погрешность наблюдений. Новые, более точные наблюдения обнаруживают рассогласование модели с действительностью. В этих случаях рассогласованию приписывают наиболее простую и наиболее вероятную причину – неточность принятых значений параметров движения небесного тела. В дело включается процесс, называемый уточнением параметров движения из наблюдений. Чаще всего желаемое согласование теории с наблюдениями достигается путем уточнения параметров, и разности "О-С"снова оказываются в пределах погрешностей модели и наблюдений.

В некоторых редких случаях не удается добиться согласования теории с наблюдениями – разности "О-С"остаются значительными. Тогда приходится совершенствовать применяемые методы решения уравнений движения и методы вычислений. Это наиболее трудоемкая часть небесной механики. Заново пересматриваются факторы, влияющие на движение каждого небесного тела. Выводятся новые, более точные формулы теории. Как следствие, формулы становятся более длинными. Разрабатываются и применяются более точные методы вычислений. Как следствие, необходимое вычислительное время существенно увеличивается. В результате выполнения всей этой весьма трудоемкой работы удается согласовать результаты теории и наблюдений.

В еще более редких случаях рассогласование теории с наблюдениями остается существенным, сколько ни пытаются исследователи уточнить параметры движения и усовершенствовать модель движения. В результате обобщения фактов, проверки новых гипотез и высшего напряжения интеллекта совершается открытие. Могут быть открыты ранее неизвестные небесные тела или новые законы взаимодействия небесных тел. В такой ситуации резко расширяются наши общие представления об окружающем мире. Делается обобщение основных законов природы. Примером может служить экспериментальное подтверждение общей теории относительности при анализе необъяснимой части скорости движения перигелия орбиты Меркурия.

Приведенная здесь схема, как любая схема, суха и ограниченна, так как она лишь в общем виде отражает разнообразные научные изыскания и накопление фактов, фантазии и ошибки.

Отметим, что описанный процесс имеет также сугубо практическую направленность. Модель движения небесных тел является основой для отслеживания возможных опасностей со стороны космоса. Модель движения небесных тел также непосредственно используется для проектирования и обеспечения полетов автоматических и пилотируемых околоземных и межпланетных аппаратов – искусственных небесных тел различного назначения.

1.3. Место теории возмущений в небесной механике

Решение практических задач небесной механики содержит этап вычислений на основе модели движения. Однако модель движения нужно построить.

Начальный этап решения любой задачи небесной механики – это составление дифференциальных уравнений движения небесных тел. Исходная информация для этого заключается в описании применяемой механической модели. Знание законов взаимодействия позволяет записать уравнения в некотором общем виде. Для задач изучения свойств движения иногда этого бывает достаточно. Однако во многих случаях составление уравнений – это непростой процесс. Дело в том, что уравнения нужно решать. Даже в случае численного интегрирования уравнений движения нужно вычилять правые части обыкновенных дифференциальных уравнений. Их исходная запись часто представляет собой некоторый "полуфабрикат" уравнений, которые нужно решать.

Методы численного интегрирования уравнений движения требуют выполнения огромного количества арифметических операций, ранее затруднявших их применение. Прогресс в компьютерной технике позволяет преодолевать эту трудность. Поэтому при решении многих практических задач небесной механики методы численного интегрирования имеют значительные преимущества по сравнению с аналитическими методами.

Некоторые задачи небесной механики могут быть решены только аналитическими методами решения уравнений движения. Аналитическое решение позволяет вычислять положение и скорость небесного тела по явным функциям времени. Кроме того, такое решение дает сразу все интересующие нас свойства движения. В других случаях аналитическое решение обладает преимуществами по точности на заданный момент времени, либо по длительности интервала времени при заданной точности, либо по скорости вычислений.

При применении аналитических методов решения успех дела существенно зависит от формы записи дифференциальных уравнений движения небесного тела. Часто приходится разлагать правые части уравнений в бесконечные ряды, брать от рядов их конечные отрезки и заменять тем самым исходные уравнения на более приближенные.

Суровая реальность состоит в том, что только для некоторых простейших механических моделей известны точные аналитические решения уравнений движения, которые можно записать в виде формул для вычислений положения небесного тела или для анализа свойств движения. В большинстве задач точные решения не найдены. В некоторых случаях даже доказано, что решений в форме явных выражений просто не существует. Тогда приходится довольствоваться приближенными решениями. Так возникает задача получения аналитического решения с конечной, но любой наперед заданной точностью. Именно этой цели служат **методы теории возмущений** .

Основная идея теории возмущений состоит в следующем. Наряду с изучаемой механической моделью рассматривают близкую к ней, но другую модель, для которой известно однако точное аналитическое решение уравнений движения. Составляются дифференциальные уравнения относительно величин, представляющих разности законов движения в двух моделях. В силу малости этих разностей уравнения можно решать известными приближенными методами с конечной, но любой наперед заданной точностью. Чтобы эти методы оказались практически применимыми, приходится строить разложения правых частей уравнений в бесконечные ряды. Этот процесс обычно приводит к чрезвычайно громоздким формулам. Прогресс в компьютерной технике и средствах программирования позволяет преодолевать и эту трудность. В итоге на этом пути образовалось огромное множество способов построения уравнений и методов их аналитического решения. Все это и составляет предмет теории возмущений в небесной механике.

На схеме процесса изучения динамики реальных небесных тел на основе наблюдений (см. Рис. 1) теория возмущений заключается в части "Методы решения уравнений движения".

Заметим, что методы теории возмущений не только дают приемлемую приближенную модель движения небесного тела, но во многих случаях позволяют выполнить качественный анализ уравнений движения с целью получить свойства решения без вывода формул самого решения.

Возникнув в небесной механике, теория возмущений применяется также в других областях науки. Например, в квантовой механике. Формы описания методов теории возмущений могут быть различными. Даже в небесной механике используются несколько вариантов изложения методов теории возмущений. Здесь мы рассматриваем теорию возмущений в применении к уравнениям движения относительно прямоугольных координат небесных тел, а также к уравнениям движения, записанным в форме канонических уравнений Гамильтона.

1.4. Сведения, необходимые для изучении теории возмущений

Здесь перечислены сведения, которые нужно знать для изучения методов теории возмущений. Эти сведения содержатся в учебниках по математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, а также в учебниках по теоретической и небесной механике.

Предметом теории возмущения являются дифференциальные уравнения. Для ее изучения необходимо знать основы теории дифференциальных уравнений. Рассматриваются как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и уравнения в частных производных.

Нужно уметь отвечать на следующие вопросы. Что является общим решением тех или иных уравнений? Что в них задано, а что нужно определить? Как записывается общий вид решения. Что такое первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений? Что такое общий интеграл? Как соотносятся общий интеграл и общее решение? Что такое полный интеграл уравнения в частных производных?

Потребуется знание некоторых теорем об аналитических функциях. В частности, нужна теорема Эйлера об однородных функциях.

В данном изложении методов теории возмущений используется решение задачи двух тел. Необходимо знать формулы кеплеровского движения. Методы рассматриваются в приложении к задаче о движении N материальных точек. Нужно знать уравнения движения в этой механической модели.

При изложении методов предполагается, что читатель знает основы классической механики.

В заключение перечислим основные учебники, учебные пособия и книги, в которых изложены методы теории возмущений в небесной механике. Описание методов, близкое к той форме, в которой были написаны классические работы по небесной механике, содержится в учебниках (Дубошин, 1975; Субботин, 1968; Шарлье, 1966). Более широкий класс асимптотических методов изложен в учебном пособии (Холшевников, 1985). Соременный практический подход к методам небесной механики сделан в книге (Мюррей, Дермотт, 2009). Помочь в понимении канонических уравнений может книга (Герасимов, Винников, Мушаилов, 1996). Задача двух тел подробно рассмотрена в учебном пособии (Холшевников, Титов, 2007). Полезными будут Лекции по небесной механике (Лукьянов, Ширмин, 2009).

Глава 2. **Основной принцип теории возмущений**

2.1. Принцип теории возмущений для уравнений движения в прямоугольных координатах

Теория возмущений применяется во многих областях науки. Основная идея всюду одна и та же. Различаются лишь формы методов и вид формул. Рассмотрим здесь один из вариантов изложения принципов теории возмущений в форме, наиболее часто применяемой в небесной механике.

Для простоты и наглядности объяснения ограничимся рассмотрением таких механических моделей, в которых движение материальной точки описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{1}$$

где x, y, z – координаты материальной точки в некоторой системе прямоугольных координат, t – время, а U – силовая функция. Будем предполагать, что силовая функция не зависит явно от времени. В большинстве задач силовая функция имеет такой вид, что точное аналитическое решение уравнений движения найти невозможно.

Если действующие силы таковы, что нельзя их выразить через силовую функцию, метод теории возмущений можно построить аналогично изложенному ниже.

Разложим силовую функцию на два слагаемых

$$U = V + R$$

при соблюдении следующих двух условий:

1. После замены в уравнениях движения силовой фукнкции U на функцию V может быть найдено их общее аналитическое решение.

2. По крайней мере в области рассматриваемого движения выполняется неравенство $|R| \ll |V|$.

Разумеется, что не в любой задаче такое разбиение возможно. По крайней мере выполнение первого условия уже позволяет формально строить решение первоначальных уравнений (1) методами теории возмущений. Однако практический интерес представляют случаи, когда выполняется также и второе условие.

Наряду с исходными уравнениями (1) рассмотрим также уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{2}$$

которые получаются из исходных заменой U на V.

При выполнении второго условия две механические модели, описываемые уравнениями (1) и (2) будут близки одна к другой. Уравнения (2) называют уравнениями невозмущенного движения, а исходные уравнения (1) – уравнениями возмущенного движения. Слагаемое R называют возмущающей функцией. Исходные уравнения (1) можно записать в форме

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z},$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{\partial(V+R)}{\partial y}, \quad \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{\partial(V+R)}{\partial z}, \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\partial(V+R)}{\partial x}, \tag{3}$$

где переменные $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ являются искомыми функциями.

Согласно первому условию применимости теории возмущений должно быть известно общее решение уравнений невозмущенного движения (2). Запишем это общее решение в виде

$$\begin{aligned} x &= \overline{x}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ y &= \overline{y}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ z &= \overline{z}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{x} &= \dot{\overline{x}}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{y} &= \dot{\overline{y}}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{z} &= \dot{\overline{z}}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \end{aligned} \tag{4}$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – произвольные постоянные интегрирования, а $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \dot{\overline{x}}, \dot{\overline{y}}, \dot{\overline{z}}$ – известные явные функции от семи аргументов.

Теперь временно отвлечемся от происхождения соотношений (4) и будем рассматривать их лишь как формулы замены переменных x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ на переменные c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 в уравнениях возмущенного движения (3). Заменяются зависимые переменные – искомые функции. В итоге преобразований получим дифференциальные уравнения возмущенного движения относительно новых переменных, искомых функций времени $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ в виде

$$\frac{dc_i}{dt} = A_i(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \tag{5}$$

Точное аналитическое решение уравнений (5) также, как и уравнений (1), найти невозможно. Однако они имеют одно очевидное преимущество. Если в уравнениях (3) положить $R = 0$, то они превратятся в уравнения (2), а в соответствующем решении (4) аргументы c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 будут постоянными величинами. Тогда преобразование (4) будет преобразованием переменных $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ к константам и времени. Следовательно в преобразованных уравнениях (5) правые части, равные производным от констант, окажутся равными нулю. При R не равной нулю и соблюдении второго условия примененимости теории возмущений $|R| \ll |V|$ правые части уравнений (5) будут содержать множителем некоторый малый параметр. Это позволяет находить приближенное решение уравнений возмущенного движения методом малого параметра. Успех применения метода малого параметра зависит в первую очередь от величины самого малого параметра, то есть от отношения $|R|/|V|$. Поэтому при разложении силовой функции U на два слагаемых V и R естественно стремление уменьшить величину $|R|$ при сохранении первого условия примененимости теории возмущений.

Общее решение уравнений (5) можно записать в следующем общем виде:

$$\begin{aligned} c_1 &= C_1(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6), \\ c_2 &= C_2(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6), \\ c_3 &= C_3(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6), \\ c_4 &= C_4(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6), \\ c_5 &= C_5(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6), \\ c_6 &= C_6(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6), \end{aligned} \tag{6}$$

где $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ – произвольные постоянные. Если мы найдем это решение, то подставляя формулы (6) в соотношения (4) можно получить искомое общее решение исходных уравнений возмущенного движения (3)

$$\begin{aligned} x &= x(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6), \\ y &= y(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6), \\ z &= z(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6), \\ \dot{x} &= \dot{x}(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6). \end{aligned} \tag{7}$$

Во многих задачах небесной механики в качестве уравнений невозмущенного движения рассматриваются уравнения задачи двух тел с силовой функцией

$$V = \frac{\mu}{r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \tag{8}$$

где μ - гравитационный параметр задачи двух тел. В этих случаях соотношения (4) представляют собой формулы кеплеровского движения, а величины $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ - кеплеровские элементы орбиты.

Заметим, что разложение силовой функции U на два слагаемых с сохранением первого условия теории возмущений может быть сделано не единственным способом. В слагаемое V может быть включено влияние различных факторов. Главное условие - мы должны иметь общее аналитическое решение уравнений движения с силовой функцией V. Это решение может быть получено различными способами, в том числе и с помощью методов теории возмущений. Поэтому мы говорим об уравнениях невозмущенного движения, уравнениях возмущенного движения и возмущающей функции каждый раз по отношению к выбранной функции V.

В разнообразии задач небесной механики вид уравнений движения при применении методов теории возмущений может быть различным, однако общая схема изложенного здесь подхода сохраняется.

2.2. Примеры механических моделей, для которых применима теория возмущений

В общем случае при рассмотрении движения произвольного числа небесных тел совсем не очевидно, что выполняются условия примененимости методов теории возмущений. Однако в соотношениях размеров большинства реальных небесных тел, расстояний между ними и свойствах их движения существует определенная иерархия. Параметры движения планет Солнечной системы и почти всех их спутников удовлетворяют условиям, необходимым для решения дифференциальных уравнений движения методами теории возмущений. Рассмотрим несколько конкретных случаев, которые приводят к фундаментальным задачам теории движения тел Солнечной системы.

Сначала упростим рассмотрение системы Солнца, планет и спутников, полагая, что все эти тела являются материальными точками. Тогда к ним подойдет механическая модель задачи о движении $n+1$ материальной точки. Среди этих точек будут Солнце, планеты и их спутники. Поместим начало координат в одно из тел. В одних случаях это может быть Солнце, в других - одна из больших планет. Опишем движение системы $n+1$ материальных точек уравнениями относительного движения

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial(V_i + R_i)}{\partial x_i}, \quad \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial(V_i + R_i)}{\partial y_i}, \quad \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial(V_i + R_i)}{\partial z_i}, \tag{9}$$

где

$$V_i = \frac{G(m_0 + m_i)}{r_i}, \quad R_i = G\sum_{j=1}^{n}{}' m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right),$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}, \quad r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2},$$

G – гравитационная постоянная, x_i, y_i, z_i, m_i $(i = 1, 2, ..., n)$ – прямоугольные координаты и массы тел, соответственно, а m_0 – масса центрального тела. Штрих у знака суммы означает, что отсутствует слагаемое при $j = i$.

Рассмотрим несколько фундаментальных задач.

Планетная задача.

Будем изучать движение n планет под действием притяжения Солнца и их взаимного притяжения. Все тела будем считать материальными точками. Малым влиянием других тел пренебрежем. Начало системы координат поместим в Солнце. При применении теории возмущений уравнения (9) будут уравнениями возмущенного движения. В данном случае для уравнений невозмущенного движения при $R_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ известно общее решение, так как система уравнений распадается на n независимых систем уравнений движения двух тел, для каждого из которых известно общее решение. Таким образом первое условие применения методов теории возмущений здесь выполняется. Проверим теперь выполнение второго условия. Рассмотрим отношение R_i/V_i. Из уравнений относительного движения следует

$$\frac{R_i}{V_i} = \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{m_0 + m_i} \left[\frac{r_i}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j)}{r_j^3} \right]. \tag{10}$$

Здесь $i = 1, 2, ..., n$.

Параметры орбит восьми больших планет Солнечной системы таковы, что планеты не испытывают ни тесных сближений с Солнцем, ни тесных взаимных сближений. Поэтому величины $x_i, y_i, z_i, \Delta_{ij}, r_i$ можно считать величинами примерно одного порядка. С другой стороны, слагаемые в формуле (10) имеют множители

$$\frac{m_j}{m_0 + m_i},$$

которые являются малыми параметрами в силу малости масс планет по сравнению с массой Солнца. Таким образом выполнение второго условия применения методов теории возмущений в планетной задаче обеспечивается малостью масс планет по сравнению с массой Солнца. При решении уравнений возмущенного движения (5) малыми параметрами будут отношения

$$\varepsilon_j = \frac{m_j}{m_0} \quad (j = 1, 2, ..., n)\ .$$

При необходимости выбрать один малый параметр можно выбрать максимальный из $\varepsilon_j \quad (j = 1, 2, ..., n)$. В Солнечной системе максимальное отношение m_j/m_0 оказывается для Юпитера и равно $1/1047$. Таким образом, для планет Солнечной системы оба условия применимости теории возмущений выполняются.

Спутниковая задача.

Рассмотрим движение системы спутников некоторой планеты под действием сил притяжения планеты, Солнца и взаимного притяжения спутников. Притяжением других планет пренебрежем в силу их удаленности. Притяжением Солнца, несмотря на его удаленность, пренебречь нельзя, так как оно имеет большую массу. Центральным телом будет планета. С ней и совместим начало системы координат. Солнце будем считать телом номер 1 $(i = 1)$. Уравнения при $i = 1$ рассматривать не будем, так как они определяют относительное движение планеты и Солнца.

В рассматриваемой спутниковой задаче для уравнений невозмущенного движения при $R_i = 0 \quad (i = 2, 3, ..., n)$ также известно общее решение, так как система уравнений распадается на независимые системы уравнений движения двух тел. Таким образом первое условие применения методов теории возмущений выполняется. Проверим теперь выполнение второго условия. Рассмотрим выражение

$$\frac{R_i}{V_i} = \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{m_0 + m_i} \left[\frac{r_i}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j)}{r_j^3} \right] \tag{11}$$

для $i = 2, ..., n$. Малость слагаемых при $j = 2, ..., n$ обеспечивается малостью масс спутников m_j по сравнению с массой планеты m_0. Слагаемое при $j = 1$ (влияние притяжения Солнца) требует особого рассмотрения. Обозначим это слагаемое в величине R_i через $(R_i)_1$, а в величине $\frac{R_i}{V_i}$ – через $(\frac{R_i}{V_i})_1$.

Воспользуемся соотношениями

$$x_i x_1 + y_i y_1 + z_i z_1 = r_i r_1 \cos H_{1i}, \quad \Delta_{i1}^2 = r_i^2 + r_1^2 - 2\, r_i r_1 \cos H_{1i}.$$

Здесь r_i – планетоцентрическое расстояние спутника, r_1 – гелиоцентрическое расстояние планеты, а H_{1i} – угол между планетоцентрическими направлениями на спутник и на Солнце. Найдем для $(R_i)_1$

$$(R_i)_1 = G\, m_1 \left(\frac{1}{\Delta_{i1}} - \frac{x_i x_1 + y_i y_1 + z_i z_1}{r_1^3} \right) =$$

$$= G\, m_1 \left(\frac{1}{\sqrt{r_i^2 + r_1^2 - 2\, r_i \cos H_{1i}}} - \frac{r_i r_1 \cos H_{1i}}{r_1^2} \right).$$

Вынесем за скобки множитель $1/r_1$. Получим

$$(R_i)_1 = G\, m_1\, \frac{1}{r_1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_i^2}{r_1^2} - 2\, \frac{r_i}{r_1} \cos H_{1i}}} - \frac{r_i \cos H_{1i}}{r_1} \right).$$

Очевидно, что пока спутник остается спутником планеты, отношение r_i/r_1 будет малым. Разложим полученное выражение в ряд Лежандра по степеням малого параметра r_i/r_1. Будем иметь

$$(R_i)_1 = G\, m_1\, \frac{1}{r_1} \left[1 + \left(\frac{r_i}{r_1}\right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right) + ... \right],$$

где невыписанные члены имеют более высокий порядок малости, чем $(\frac{r_i}{r_1})^2$.

Возмущающая функция R_i входит в уравнения движения только под знаком производных по координатам x_i, y_i, z_i. Производные от первого слагаемого дадут нуль. Поэтому его можно опустить. Оставляя только самое существенное слагаемое в разложении, получим

$$(R_i)_1 = G\, m_1\, \frac{r_i^2}{r_1^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right).$$

Тогда, пренебрегая массой спутника m_i по сравнению с массой планеты m_0, слагаемое в величине отношения $\frac{R_i}{V_i}$, обусловленное притяжением Солнца, можно записать в виде

$$\left(\frac{R_i}{V_i} \right)_1 = \frac{m_1}{m_0}\, \frac{r_i^3}{r_1^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right).$$

Здесь мы пренебрегли массой спутника m_i по сравнению с массой планеты m_0.

Несмотря на то, что масса Солнца m_1 во много раз больше массы планеты m_0, отношение $(\frac{R_i}{V_i})_1$ для спутников планет оказывается малой величиной за счет того, что расстояния спутников до планеты r_i малы по сравнению с расстоянием r_1 планеты до Солнца. Таким образом, выполнение второго условия применимости методов теории возмущений в спутниковой задаче обеспечивается малостью масс спутников $m_2, m_3, ..., m_n$ по сравнению с массой планеты m_0, а также малостью расстояний спутников до планеты по сравнению с расстоянием планеты до Солнца.

В итоге можно сделать вывод, что в спутниковой задаче при решении уравнений возмущенного движения (5) используются следующие малые параметры:

$$\varepsilon_j = \frac{m_j}{m_0}, \quad \varepsilon_i' = \frac{m_1}{m_0}\, \frac{r_i^3}{r_1^3} \quad (i, j = 2, 3, ..., n).$$

Здесь индекс i означает номер спутника, движение которого мы изучаем, а индекс j – номер возмущающего спутника.

В качестве примера рассмотрим движение искусственного спутника Земли. В этом случае основными возмущающими телами будут Солнце ($j = 1$), а также Луна ($j = 2$) как один их спутников. Если орбита искусственного спутника расположена вблизи Земли, то отношение r_3/r_2 мало, и малый параметр для возмущающей функции от Луны будет определяться формулой

$$\varepsilon_3'' = \frac{m_2}{m_0}\, \frac{r_3^3}{r_2^3} \;,$$

где m_2/m_0 - отношение массы Луны к массе Земли. Любопытно, что в случае спутника Земли малый параметр для возмущающей функции от Солнца

$$\varepsilon_3' = \frac{m_1}{m_0} \frac{r_3^3}{r_1^3}$$

имеет примерно такой же порядок, что и для возмущающей функции от Луны. Если рассматривать спутник со средним расстоянием от центра Земли 8000 км, и вместо r_1, r_2, r_3 взять их средние значения, то получим, что $\varepsilon_3' = 1.15 \cdot 10^{-7}$, $\varepsilon_3'' = 5.09 \cdot 10^{-8}$. Если же орбита искусственного спутника имеет примерно такие же размеры, как и орбита Луны, то отношение r_3/r_2 не мало, и малость параметра обеспечивается только малостью отношения массы Луны к массе Земли.

Для Луны малый параметр, характеризующий малость возмущающей функции от Солнца равен 0.00546.

Приведенные примеры представляют спутниковые задачи, в которых теория возмущений оказывается применимой.

Задача о движении спутника несферичной планеты.

Рассмотрим теперь пример движения в задаче двух тел, когда одно из тел (спутник) можно считать пассивно гравитирующей материальной точкой, а другое (планета) создает нецентральное гравитационное поле. Уравнения движения спутника в этом случае можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial z}, \tag{12}$$

где

$$V = \frac{G\,m}{r}, \quad R = \frac{G\,m}{r}\,\varepsilon\,X(x,y,z),$$

x, y, z – планетоцентрические прямоугольные координаты спутника, m - масса планеты, G – универсальная гравитационная постоянная, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ε – постоянный параметр, а $X(x,y,z)$ – некоторая известная функция. Очевидно, что при $R = 0$ уравнения движения спутника имеют известное решение задачи двух тел, и первое условие применимости теории возмущений выполняется. Величину ε можно выбрать так, чтобы функция $X(x,y,z)$ в области движения спутника принимала значения, мало отличающиеся от единицы. Тогда ε характеризует малость возмущающей функции.

Известные гравитационные поля Земли, других больших планет и многих естественных спутников планет мало отличаются от поля притяжения материальной точки. При этом несферичность характеризуется главным образом сжатием тела. В этих случаях

$$\varepsilon = J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2,$$

где a - среднее расстояние спутника от центра планеты, r_0 - средний радиус планеты, а J_2 - параметр, характеризующий сжатие планеты.

Например, для искусственного спутника Земли, движущегося на среднем расстоянии 8000 км, имеем

$$J_2 = 1.08 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon = 0.00055.$$

Таким образом, условия применимости методов теории возмущений в данном случае также выполняются.

Другие случаи применения теории возмущений.

Рассмотренные выше конфигурации небесных тел являются лишь примерами применения теории возмущений в небесной механике. Отметим здесь только еще одну группу задач, когда в качестве невозмущенного рассматривается движение, описываемое частным решением уравнений движения. Возмущенное движение происходит вблизи этого невозмущенного. Малые параметры в таких задачах характеризуются разностью координат в возмущенном и невозмущенном движениях, а дополнительным условием применимости теории возмущений является сохранение малости этих разностей по крайней мере на исследуемом интервале времени.

При рассмотрении различных малых параметров в задачах небесной механики следует отличать параметры, которые характеризуют малость возмущающей функции, и малые параметры другой природы. Возмущающая функция может разлагаться в ряды по степеням также и этих других малых параметров. Это часто делается для обеспечения возможности представления решения уравнений возмущенного движения в форме (5).

Отметим еще случаи, когда силы, действующие на небесное тело, не имеют силовой функции. Примером таких сил служит сила сопротивления атмосферы, действующая на искусственный спутник Земли. В таких случаях исходные уравнения движения в прямоугольных координатах записываются в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = V_x + R_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = V_y + R_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = V_z + R_z, \tag{13}$$

где слагаемые V_x, V_y, V_z должны выбираться так, чтобы можно было найти общее решение уравнений движения при отбрасывании слагаемых R_x, R_y, R_z. Эти последние слагаемые называются компонентами возмущающего ускорения. Для возможности применения теории возмущений необходимо, чтобы R_x, R_y, R_z были малы по сравнению с V_x, V_y, V_z .

2.3. Уравнения Лагранжа для кеплеровских элементов орбиты

Общий алгоритм построения решения уравнений движения методами теории возмущений изложен в начале этой главы. Исходные уравнения (3) после замены переменных с помощью преобразования (4) приводятся к уравнениям (5). Если задан конкретный вид функции V, то уравнения (5) можно привести к явному виду, где в правых частях будет фигурировать возмущающая функция R, рассматриваемая как функция от $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ и времени t.

Рассмотрим такое преобразование для наиболее часто применяемой в практической небесной механике в качестве функции V силовой функции задачи двух тел. Такой выбор обусловлен общей иерархией в движении тел Солнечной системы. Движение каждой планеты происходит под действием притяжения Солнца. Другие планеты и другие небесные тела влияют своим притяжением относительно слабо. Спутник потому и является спутником планеты, поскольку движется в основном под действием ее притяжения. Другие спутники и даже Солнце лишь слегка искажают кеплеровское движение спутника.

Формулы (4), если в них c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 считаются постоянными, определяют закон движения, который называют промежуточным движением. Движение происходит по траектории, называемой промежуточной орбитой. Уравнения (5) называются уравнениями для элементов промежуточной орбиты.

Таким образом в данном рассмотрении мы имеем

$$V = \frac{\mu}{r}, \tag{14}$$

где μ – гравитационный параметр пары тел, а r – расстояние между двумя телами. Чаще всего начало координат помещают в одно из тел, которому присвоим номер 0. Тогда $\mu = G(m_0 + m_1)$, где G – универсальная гравитационная постоянная, а $m_0 + m_1$ – сумма масс тел. В случае, когда начало координат располагается в барицентре двух тел, имеем $\mu = G\,\frac{m_0^3}{(m_0+m_1)^2}$

Успех дальнейших действий существенно зависит от того, как выбраны произвольные постоянные $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$. В практике исследователей за последние три столетия были рассмотрены и успешно применялись множество вариантов. Для простоты понимания основных принципов, рассмотрим здесь один из них, который имел большое число применений.

Решение задачи двух тел описывает движение, которое называется кеплеровым, поскольку происходит по законам Кеплера. Так как мы рассматриваем движение тел Солнечной системы, имеющей определенную иерархию, ограничимся эллиптическим типом движения. В соответствии с кеплеровым движением выбирают и произвольные постоянные интегрирования, которые называются кеплеровыми элементами орбиты. Перечислим здесь кеплеровы элементы, а также связанные с ними моменты времени.

n — среднее движение, размерность радиан/ед.времени;
e — эксцентриситет, безразмерный;
i — наклон (угол между вектором момента количества движения и осью z), рад.;
M_0 — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии M в начальный момент времении — эпоху), рад.;
ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;
Ω — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости Oxy между осью x и линией узлов), рад.;
t_0 — начальный момент времени — эпоха элементов;
t — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

В кеплеровом движении наряду со средней аномалией M рассматривают также функцию времени

$$l = M + \omega + \Omega,$$

которая называется средней долготой. Соответствующий параметр $l_0 = M_0 + \omega + \Omega$ называется средней долготой в эпоху. Рассматривается также элемент $\pi = \omega + \Omega$, называемый долготой перицентра.

Наряду со средним движением n в качестве параметра орбиты будем рассматривать также большую полуось орбиты a, связанную с n третьим законом Кеплера

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\ .$$

Средняя аномалия M в кеплеровом движении является линейной функцией времени

$$M = n(t - t_0) + M_0.$$

В некоторых задачах удобно вместо элемента M_0 использовать параметр τ – некоторый из моментов прохождения тела через перицетр. В перицетре орбиты средняя аномалия M равна нулю. Поэтому связь τ с M_0 дается формулой

$$M_0 = -n(\tau - t_0).$$

Для определения координат тела на заданные моменты времени используются несколько промежуточных переменных. Главная из них – это истинная аномалия v, определенная как угол между радиусом-вектором тела и направлением на перицентр орбиты. Далее используется величина $u = v + \omega$, называемая аргуметом широты. Формулы, определяющие зависимость координат от времени и элементов орбиты в задаче двух тел можно найти в учебниках и учебных пособиях (Дубошин, 1975; Субботин, 1968; Холшевников, Титов, 2007; Лукьянов, Ширмин, 2009).

Замену переменных в уравнениях (3) делают с помощью формул кеплеровского движения. Поскольку функция R в явном виде не задана, частные производные от нее по координатам выражаются через частные производные по кеплеровым элементам. Процедура такой замены подробно описана в в учебнике Г.Н.Дубошина (1975). Она называется **основной операцией**.

В результате основной операции для новой переменной $c_4 = M_0$ получается уравнение

$$\frac{dM_0}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial e} + (t - t_0)\frac{3}{2}\frac{n}{a}\frac{da}{dt}$$

которое создает проблему при последующем интегрировании. Множитель $\frac{da}{dt}$ выражается через периодические по времени функции, что приводит к смешанным возмущениям первого порядка в элементе M_0. В итоге решение уравнений (5) методом малого параметра оказывается достаточно точным лишь на весьма ограниченных интервалах времени. Проблемы можно избежать, если в качестве новых искомых функций взять величины $a, e, i, M, \omega, \Omega$. Вместо средней аномалии в эпоху M_0 взята средняя аномалия M.

Для краткости записи уравнений для элементов промежуточной орбиты сделаем простые переобозначения:

$$\alpha_1 = a, \ \ \alpha_2 = e, \ \ \alpha_3 = i, \ \ \beta_1 = M, \ \ \beta_2 = \omega, \ \ \beta_3 = \Omega. \tag{15}$$

В результате замены переменных уравнения возмущенного движения небесного тела можно записать в следующем общем виде:

$$\begin{gathered} \frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j} \ \ , \\ \frac{d\beta_i}{dt} = n_i - \sum_{j=1}^{3} a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \\ (i = 1, 2, 3) \ . \end{gathered} \tag{16}$$

В этих уравнениях n_i, a_{ij} – функции, зависящие только от от элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и постоянной μ. В случае кеплеровской промежуточной орбиты n_2, n_3 , а также некоторые из девяти функций a_{ij} , равны нулю. Однако это обстоятельство не упрощает решение уравнений. Запись уравнений (16) в таком общем виде позволяет применять их также для некоторых некеплеровых промежуточных орбит. Методы решения этих уравнений рассмотрены в следующей главе.

Заметим, что в уравнениях (16) возмущающая функция R обозначена той же буквой, что и в уравнениях (3). Однако здесь она является функцией от элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ и времени t.

Рассмотрим теперь явный вид уравнений для элементов промежуточной орбиты в случае набора (15)

$$\begin{aligned} &\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \ \frac{\partial R}{\partial M} \ , \\ &\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{ena^2} \ \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \ \frac{\partial R}{\partial \omega} \ , \\ &\frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \ \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \ \frac{\partial R}{\partial \Omega} \ , \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na}\ \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2}\ \frac{\partial R}{\partial e}\ , \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\ \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\ \frac{\partial R}{\partial i}\ , \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\ \frac{\partial R}{\partial i}\ .
\end{aligned} \tag{18}$$

Множители в правых частях уравнений можно заменить согласно соотношениям

$$\frac{1}{na^2} = \frac{na}{\mu}\ ,\quad \frac{1}{na} = \frac{na^2}{\mu}\ , \tag{19}$$

вытекающим из третьего закона Кеплера.

В небесной механике применяются и другие варианты элементов кеплеровой промежуточной орбиты. Особого внимания заслуживают два из них. Орбиты множества естественных спутников планет являются почти круговыми и лежат вблизи плоскости экватора планеты. В таких случаях положение спутника на орбите в первую очередь определяется средней долготой λ, а ориентация орбиты – долготой перицентра π. Эти величины связаны с M, ω, Ω соотношениями

$$\lambda = M + \omega + \Omega\ ,\quad \pi = \omega + \Omega\ . \tag{20}$$

Уравнения составляются относительно функций λ, π и Ω. Элементами промежуточной орбиты считаются π, Ω и λ_0 – средняя долгота в эпоху t_0 . В этом случае вместо уравнений (17), (18) нужно решать уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\ \frac{\partial R}{\partial \lambda}\ , \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\ \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\ \frac{\partial R}{\partial \pi}\ , \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\ \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda}\right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\ \frac{\partial R}{\partial \Omega}\ ,
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{dt} &= n - \frac{2}{na}\ \frac{\partial R}{\partial a} + e\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\ \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\ \frac{\partial R}{\partial i}\ , \\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\ \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\ \frac{\partial R}{\partial i}\ , \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\ \frac{\partial R}{\partial i}\ .
\end{aligned} \tag{22}$$

Правые части уравнения для i и Ω имеют особенности при $i = 0$, а правые части уравнений для e и ω имеют особенности при $e = 0$. Эти обстоятельства требуют особого внимания при решении уравнений, так как для могих возмущающих факторов выражение возмущающей функции R имеет такой вид, что эти особенности компенсируются наличием e в числителе.

Заметим, что в публикациях на английском языке часто вместо π для обозначения долготы перицентра используется символ ϖ.

Теперь рассмотрим вариант элементов промежуточной орбиты, при которых уравнения не имеют особенностей при эксцентриситете и наклоне орбиты, равных нулю. Такие элементы придумал Лагранж для изучения вековых возмущений планет. Они теперь так и называются – элементы Лагранжа. Уравнения для a и λ не имеют особенностей, а остальные элементы нужно заменить другими. Обычно элементы Лагранжа обозначаются в литературе через h, k, p, q . С рассмотренными выше элементами они связаны соотношениями

$$h = e \sin \pi, \quad k = e \cos \pi \ , \tag{23}$$

$$p = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega \ . \tag{24}$$

После замены переменных уравнения для элементов Лагранжа будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \left(\frac{\partial R}{\partial k} - \frac{h}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) + \frac{k \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \ , \\
\frac{dk}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \left(\frac{\partial R}{\partial h} + \frac{k}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) - \frac{h \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \ ,
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= \frac{\sec^3 i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p}{2na^2\sqrt{1-e^2} \cos i \cos^2 \frac{i}{2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) \ , \\
\frac{dq}{dt} &= -\frac{\sec^3 i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial p} - \frac{q}{2na^2\sqrt{1-e^2} \cos i \cos^2 \frac{i}{2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) \ .
\end{aligned} \tag{26}$$

Для полного состава к ним нужно добавить приведенные уже выше уравнения для большой полуоси a и средней долготы λ

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \ , \\
\frac{d\lambda}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + e \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \ .
\end{aligned} \tag{27}$$

В правых частях уравнений (25), (26), (27) содержатся частные производные от возмущающей функции по величинам, которые не являются искомыми функциями в этих уравнениях. Это нормально. Так следует оставить. Дело в том, что возмущающая функция получается сначала, как функция от переменных $a, e, i, \lambda, \pi, \Omega$. Поскольку в правых частях уравнений не встречаются производные по h, k, p, q, то можно сначала найти производные от R по элементам $a, e, i, \lambda, \pi, \Omega$, а потом переходить в них к переменным h, k, p, q.

2.4. Оскулирующая орбита и оскулирующие элементы

Рассмотрим теперь различные интерпретации основного принципа теории возмущений, встречающиеся в литературе по небесной механике.

В нашем рассмотрении уравнения возмущенного движения в прямоугольных координатах (3) мы заменили на уравнения в элементах промежуточного движения (5), используя замену переменных (4). После интегрирования уравнений в элементах мы получим шесть функций времени $c_1(t), c_2(t), c_3(t), c_4(t), c_5(t), c_6(t)$. Если мы подставим эти функции в соотношения (4), то полученные таким образом функции времени $x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$ будут удовлетворять уравнениям возмущенного движения (3).

Эти рассуждения составляют основную идею метода Лагранжа вариации произвольных постоянных. В учебнике Г.Н. Дубошина (1975) дается следующая формулировка метода Лагранжа: *решение уравнений возмущенного движения определеяется теми же формулами, как и решение уравнений невозмущенного движения, но величины $a, e, i, M_0, \omega, \Omega$ рассматриваются в этих формулах не как постоянные, а как некоторые функции времени, определяемые так, чтобы уравнения возмущенного движения удовлетворялись.*

Рассмотрим одно важное соотношение между решениями уравнений возмущенного движения и уравнений невозмущенного движения.

Выпишем здесь снова уравнения возмущенного движения в прямоугольных координатах

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=\dot{x}, \quad \frac{dy}{dt}=\dot{y}, \quad \frac{dz}{dt}=\dot{z},\\&\frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{\partial(V+R)}{\partial x}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{\partial(V+R)}{\partial y}, \quad \frac{d\dot{z}}{dt}=\frac{\partial(V+R)}{\partial z},\end{aligned} \tag{28}$$

Соответствующие уравнения невозмущенного движения получаются из предыдущих, если в них положить $R=0$. Общее решение уравнений невозмущенного движения запишем в виде

$$\begin{aligned}x&=\overline{x}(t,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6),\\y&=\overline{y}(t,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6),\\z&=\overline{z}(t,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6),\\\dot{x}&=\dot{\overline{x}}(t,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6),\\\dot{y}&=\dot{\overline{y}}(t,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6),\\\dot{z}&=\dot{\overline{z}}(t,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6),\end{aligned} \tag{29}$$

где c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6 – произвольные постоянные интегрирования, а $\overline{x},\overline{y},\overline{z},\dot{\overline{x}},\dot{\overline{y}},\dot{\overline{z}}$ – известные функции от семи аргументов, определяемые в частном случае формулами кеплерова промежуточного движения. Подставляя в левые и правые части уравнений возмущенного движения (28) выражения для координат из соотношений (29), получим уравнения возмущенного движения отноносительно элементов промежуточной орбиты

$$\frac{dc_i}{dt}=A_i(t,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6), \quad (i=1,2,3,4,5,6). \tag{30}$$

По Лагранжу это уравнения относительно вариаций произвольных постоянных. Общее решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}c_1&=C_1(t,p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6),\\c_2&=C_2(t,p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6),\\c_3&=C_3(t,p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6),\\c_4&=C_4(t,p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6),\\c_5&=C_5(t,p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6),\\c_6&=C_6(t,p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6),\end{aligned} \tag{31}$$

где p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6 – произвольные постоянные интегрирования. После подстановки этого общего решения в формулы замены переменных (29) получим общее решение уравнений возмущенного движения в координатах

$$
\begin{aligned}
x &= x(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
y &= y(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
z &= z(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
\dot{x} &= \dot{x}(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
\dot{y} &= \dot{y}(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
\dot{z} &= \dot{z}(t, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Выберем и зафиксируем значения этих последних произвольных постоянных. Зададим произвольно некоторый момент времени $t = t_0$ и вычислим для этого момента значения функций $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ по формулам (31). Получим

$$
\begin{aligned}
c_1^{(0)} &= C_1(t_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
c_2^{(0)} &= C_2(t_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
c_3^{(0)} &= C_3(t_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
c_4^{(0)} &= C_4(t_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
c_5^{(0)} &= C_5(t_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
c_6^{(0)} &= C_6(t_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Подставляя теперь эти постоянные в формулы (29), имеем

$$
\begin{aligned}
x &= \overline{x}(t, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}, c_4^{(0)}, c_5^{(0)}, c_6^{(0)}),\\
y &= \overline{y}(t, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}, c_4^{(0)}, c_5^{(0)}, c_6^{(0)}),\\
z &= \overline{z}(t, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}, c_4^{(0)}, c_5^{(0)}, c_6^{(0)}),\\
\dot{x} &= \dot{\overline{x}}(t, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}, c_4^{(0)}, c_5^{(0)}, c_6^{(0)}),\\
\dot{y} &= \dot{\overline{y}}(t, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}, c_4^{(0)}, c_5^{(0)}, c_6^{(0)}),\\
\dot{z} &= \dot{\overline{z}}(t, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}, c_4^{(0)}, c_5^{(0)}, c_6^{(0)}).
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Очевидно, что эти последние соотношения (34) представляют некоторое невозмущенное движение, в частном случае кеплерово движение.

Положим теперь в формулах (34) и в формулах (32) $t = t_0$. В обоих случаях получим одни и те же значения координат и компонент скорости тела. Однако, будучи равными для момента t_0 они различаются для любых соседних моментов времени, так как представляют разные движения: невозмущенное и возмущенное. Траектории, описываемые соотношениями (34) и (32) различны, но они соприкасаются в точке для момента $t = t_0$. Это особое соприкасание, поскольку в этой точке скорости тела в обоих движениях равны между собой.

Если мы выполним описанную процедуру для некоторого другого момента времени $t = t_1$, то получим для этого момента по формулам (32) координаты и скорость в вомущенном движении. Вычисляя для этого момента значения функций $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ по формулам (31), получим

$$
\begin{aligned}
c_1^{(1)} &= C_1(t_1, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
c_2^{(1)} &= C_2(t_1, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
c_3^{(1)} &= C_3(t_1, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
c_4^{(1)} &= C_4(t_1, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
c_5^{(1)} &= C_5(t_1, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\\
c_6^{(1)} &= C_6(t_1, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Соответствующие зависимости от времени

$$
\begin{aligned}
x &= \overline{x}(t, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, c_4^{(1)}, c_5^{(1)}, c_6^{(1)}),\\
y &= \overline{y}(t, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, c_4^{(1)}, c_5^{(1)}, c_6^{(1)}),\\
z &= \overline{z}(t, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, c_4^{(1)}, c_5^{(1)}, c_6^{(1)}),\\
\dot{x} &= \dot{\overline{x}}(t, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, c_4^{(1)}, c_5^{(1)}, c_6^{(1)}),\\
\dot{y} &= \dot{\overline{y}}(t, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, c_4^{(1)}, c_5^{(1)}, c_6^{(1)}),\\
\dot{z} &= \dot{\overline{z}}(t, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, c_4^{(1)}, c_5^{(1)}, c_6^{(1)}).
\end{aligned}
\tag{36}
$$

представляют некоторое невозмущенное движение, в котором для момента $t = t_1$ координаты и скорость совпадают с координатами и скоростью в возмущенном движении. Траектория этого невозмущенного движения в точке для момента $t = t_1$ касается траектории возмущенного движения. Однако эта траектория невозмущенного движения отличается от той траектории невозмущенного движения, которая дается формулами (34).

Изменяя моменты $t_0, t_1, ...$ непрерывным образом мы будем иметь бесчисленное множество невозмущенных движений и одно возмущенное движение, которое в каждый момент времени совпадает с нектоþрым невозмущенным движением. В случае кеплеровского промежуточного движения все траектори из построенного семейства являются кривыми конического сечения (эллипсы, параболы или гиперболы) и имеют общий фокус. Траектория возмущенного движения является огибающей этого семейства.

Траектории семейства невозмущенных движений называются оскулирующими орбитами, а их элементы – оскулирующими элементами.

В методе Лагранжа истинная траектория рассматривается как постоянно и непрерывно изменяющаяся оскулирующая орбита кеплеровского движения. В каждый момент времени координаты и скорость в возмущенном движении совпадают с координатами и скоростью одной из оскулирующих кеплеровских орбит.

Глава 3. **Метод малого параметра**

3.1. Метод малого параметра Ляпунова-Пуанкаре

Применение теории возмущений для решения уравнений движения небесного тела состоит из нескольких этапов. Рассмотрим формулировку задачи, которая часто встречалась в классических работах и часто рассматривается в современных исследованиях. Предположим, что силы, действующие на небесное тело, имеют силовую функцию. Исходные уравнения движения небесного тела запишем в прямоугольных координатах в следующем виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{37}$$

Первый этап применения теории возмущений состоит в разложении силовой функции U на два слагаемых $U = V + R$ при условии, что известно общее аналитическое решение уравнений движения при $R = 0$. Формулы, представляющие полученное общее решение как функции времени, содержат призвольные постоянные. Далее эти формулы используются для замены переменных в исходных уравнениях движения. Роль новых зависимых переменных играют входящие в формулы произвольные постоянные. Решение уравнений движения при $R = 0$ задает траекторию, которая называется промежуточной орбитой. Новые зависимые переменные называются элементами промежуточной орбиты. Таким образом составляются уравнения движения относительно элементов промежуточной орбиты. Они содержат только возмущающую функцию R . Преимущества этих уравнений над исходными состит в том, что при $R = 0$ их решение становится тривиальным, а при R малой по сравнению с V уравнения движения можно решать методом малого параметра. Рассмотрим теперь, как это делается на практике.

Возьмем в качестве функции V силовую функцию задачи двух тел. Это не единственно возможный вариант. В небесной механике используются и другие случаи промежуточного движения. Однако решение задачи двух тел чаще всего применяется на практике как основа для построения решения уравнений движения небесных тел.

Таким образом в данном рассмотрении мы имеем

$$V = \frac{\mu}{r}, \tag{38}$$

где μ – постоянная, а r – расстояние между двумя телами. Чаще всего начало координат помещают в одно из тел, которому присвоим номер "0". Тогда $\mu = G(m_0 + m_1)$, где G – универсальная гравитационная постоянная, а $m_0 + m_1$ – сумма масс тел. В случае, когда начало координат располагается в барицентре двух тел, имеем $\mu = G\,\frac{m_0^3}{(m_0+m_1)^2}$

Для удобства восприятия метода воспроизведем здесь рассмотренные в предыдущей главе определения кеплеровых элементов. При этом также ограничимся эллиптическим типом промежуточного движения.

n — среднее движение, размерность радиан/ед.времени;

e — эксцентриситет, безразмерный;

i — наклон (угол между вектором момента количества движения и осью z), рад.;

M_0 — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии M в начальный момент времении — эпоху), рад.;

ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;

Ω — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости Oxy между осью абсцисс Ox и линией узлов), рад.;

t_0 — начальный момент времени — эпоха элементов;

t — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

Наряду со средним движением n в качестве параметра орбиты будем рассматривать также большую полуось орбиты a, связанную с n законом

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\ .$$

Применения теории возмущений оказываются проще, если в качестве новых искомых функций времени взять величины $a, e, i, M, \omega, \Omega$. Вместо средней аномалии в эпоху M_0 взята средняя аномалия M, которая в кеплеровом движении является известной линейной функцией времени

$$M = M_0 + n(t - t_0)\ .$$

Для краткости записи уравнений относительно элементов промежуточной орбиты сделаем простые переобозначения:

$$\alpha_1 = a,\ \ \alpha_2 = e,\ \ \alpha_3 = i,\ \ \beta_1 = M,\ \ \beta_2 = \omega,\ \ \beta_3 = \Omega. \qquad (39)$$

В результате замены переменных уравнения возмущенного движения небесного тела можно записать в следующем общем виде:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j} \quad ,$$

$$\frac{d\beta_i}{dt} = n_i - \sum_{j=1}^{3} a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \tag{40}$$

$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

В этих уравнениях n_i, a_{ij} – функции, зависящие только от от элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и постоянной μ. В случае кеплеровской промежуточной орбиты n_2, n_3 , а также некоторые из девяти функций a_{ij} , равны нулю. Однако это обстоятельство не упрощает решение уравнений. Запись уравнений (40) в таком общем виде позволяет применять их также для некоторых некеплеровых промежуточных орбит.

Рассмотрим метод решения уравнений (40). Это наиболе часто применяемые уравнения. В случаях других вариантов элементов решение строится аналогично.

Метод решения основан на малости возмущающей функции R по сравнению с функцией V, поэтому он называется методом малого параметра. В литературе этот метод называется методом малого параметра Ляпунова-Пуанкаре.

Для изложения метода малого параметра нужно ввести понятие порядка малости. В разных задачах фиксация порядка малости может быть сделана не единственным способом. Дело в том, что на практике возмущающая функция R, выраженная через элементы промежуточной орбиты, содержит множество членов – разных по величине слагаемых. Для выражения возмущающей функции применяют разложения в ряды по степеням различных малых параметров. Присвоение каждому слагаемому того или иного порядка малости является иногда условным. Фактическая величина малых параметров зависит также от области рассматриваемого движения. При построении решения многократно перемножаются величины разных порядков малости. В зависимости от требуемой точности решения заранее выбирается максимальный учитываемый порядок малости. Члены более высоких порядков в процессе построения решения отбрасываются. В каждой конкретной теории движения имеются свои особенности.

Для общего изложения метода мы примем, что малость возмущающей функции обеспечивается некоторым малым параметром, содержащимся в ней как общий множитель. Будем считать этот параметр первого порядка малости. Таким образом разложение R начнется с члена первого порядка малости.

Для краткости изложения не будем выписывать явно сам малый параметр. Однако каждой величине будет присвоен определенный порядок малости. Этот порядок будем записывать с помощью верхнего индекса в круглых скобках.

Во многих задачах возмущающая функция просто пропорциональна малому параметру. Тогда она является величиной первого порядка малости $R^{(1)}$. В ряде других задач возмущающая функция зависит от малого параметра более сложным образом. Кроме того, она может содержать несколько разных малых параметров. Самому большому из них присваивается первый порядок малости, тогда другие малые параметры могут быть первого, второго или еще большего порядка малости. В этих случаях можно добиться упрощений при получении решения, если рассматривать разложение возмущающей функции в следующем общем виде:

$$R = R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)} + \dots \,. \tag{41}$$

Введем еще обозначения

$$A_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j} \quad ,$$

$$B_i = -\sum_{j=1}^{3} a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \tag{42}$$

$$(i = 1, 2, 3) \;.$$

Теперь уравнения для элементов промежуточной орбиты можно записать в виде

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = A_i^{(1)} + A_i^{(2)} \quad + \dots \,,$$

$$\frac{d\beta_i}{dt} = n_i^{(0)} + n_i^{(1)} + \dots + B_i^{(1)} + B_i^{(2)} \quad + \dots \,, \tag{43}$$

$$(i = 1, 2, 3) \;.$$

Заметим, что в частном случае кеплеровской промежуточной орбиты $n_2 = n_3 = 0$ и $n_1^{(s)} = 0$ при $s > 1$.

Правые части уравнений (43) зависят от искомых функций α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 и явно от времени t. Однако $n_i^{(s)}$ зависят только от $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. В случае кеплеровской промежуточной орбиты

$$n_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\alpha_1^3}}.$$

Будем искать решение уравнений (43) в виде рядов по степеням малых параметров, т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i^{(0)} + \alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} + \ldots\,, \\ \beta_i &= \beta_i^{(0)} + \beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)} + \ldots\,, \\ & \qquad\qquad (i = 1, 2, 3)\ . \end{aligned} \tag{44}$$

Первые слагаемые представляют собой решение уравнений невозмущенного движения. Другие слагаемые мы называем возмущениями элементов промежуточной орбиты. Каждое из них имеет тот или иной порядок малости.

Здесь мы строим формальное решение. Вопросы существования такого решения и сходимости построенных рядов будут рассмотрены ниже.

Итак, подставим ряды (44) в уравнения (43). Затем приравняем в левой и правой частях уравнений члены одинакового порядка малости. Каждое из слагаемых в правых частях этих уравнений зависит от $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Поэтому их придется разложить в ряды Тейлора по степеням малого параметра. Разложение делается по схеме

$$f(a+\varepsilon) = f(x)|_{x=a} + \frac{1}{1!}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}\varepsilon + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x=a}\varepsilon^2 + \ldots,$$

где a - значение аргумента функции $f(x)$, относительно которого отсчитывается малое приращение ε. Таким образом, в аргументах функций $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, n_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \ldots)$ приращениями будут бесконечные суммы $\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} + \ldots$, $\beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)} + \ldots$.

Для членов нулевого порядка малости получим

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i^{(0)}}{dt} &= 0\ , \\ \frac{d\beta_i^{(0)}}{dt} &= (n_i^{(0)})_0\ . \end{aligned} \tag{45}$$

Здесь и далее символы $(...)_0$ обзначают значения функций при $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$.

Решение уравнений (45) тривиально:

$$\alpha_i^{(0)} = \alpha_{i0}^{(0)}, \quad \beta_i^{(0)} = (n_i^{(0)})_0(t - t_0) + \beta_{i0}^{(0)} \ , \tag{46}$$

Здесь $\alpha_{i0}^{(0)}$, $\beta_{i0}^{(0)}$ $(i = 1, 2, 3)$ - произвольные постоянные интегрирования. При этом постоянные $(n_i^{(0)})_0$ зависят от $\alpha_{i0}^{(0)}$. Решение (46) описывает промежуточное невозмущенное движение.

Теперь выделим и приравняем в правых и левых частях уравнений (43) члены первого порядка малости с учетом (44). Получим

$$\frac{d\alpha_i^{(1)}}{dt} = (A_i^{(1)})_0 \ ,$$
$$\frac{d\beta_i^{(1)}}{dt} = (B_i^{(1)})_0 + (n_i^{(1)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \tag{47}$$
$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Здесь $(A_i^{(1)})_0$, $(B_i^{(1)})_0$ являются известными функциями времени в силу подстановок $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$ и равенств (46). Заметим, что произвольные постоянные $\alpha_i^{(0)}, \beta_{i0}^{(0)}$ входят сюда буквенно, их значения пока неопределены.

Решение первых трех из шести уравнений (47) имеет вид

$$\alpha_i^{(1)} = \int (A_i^{(1)})_0 dt + \alpha_{i0}^{(1)} \tag{48}$$
$$(i = 1, 2, 3) \ ,$$

где $\alpha_{i0}^{(1)}$ - новые произвольные постоянные. Эти постоянные войдут в решение аддитивно вместе с такими же постоянными из решений для членов других порядков. Полученные суммы будут представлять независимые постоянные, которыми можно распорядиться позже. Будем считать, что эти суммы и есть те произвольные постоянные, которые возникли при получении членов нулевого порядка. Тогда $\alpha_{i0}^{(1)}$ следует положить равными нулю. Аналогично будем поступать и при поиске членов других порядков.

Чтобы построить решение, нужно взять неопределенный интеграл в правой части соотношения (48). Выражение возмущающей функции через элементы промежуточной орбиты оказывается весьма сложным. В разных конкретных случаях разрабатываются специальные методы разложения возмущающей функции для того, чтобы можно было взять интеграл в соотношении (48). Допустим, что это удалось. Тогда $\alpha_i^{(1)}$ и правые части остальных трех уравнений (47) становятся известными функциями времени. Теперь решение для $\beta_i^{(1)}$ выражается через неопределенный интеграл

$$\beta_i^{(1)} = \int \left[(B_i^{(1)})_0 + (n_i^{(1)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \right] dt + \beta_{i0}^{(1)} \qquad (49)$$

$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Согласно объяснению, данному выше, произвольные постоянные $\beta_{i0}^{(1)}$ мы также положим равными нулю.

Аналогично строится решение для членов второго порядка малости. Сначала находим

$$\alpha_i^{(2)} = \int \left[(A_i^{(2)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} \right] dt + \\ + \alpha_{i0}^{(2)} \qquad (50)$$

$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Произвольные постоянные $\alpha_{i0}^{(2)}$, аналогично постоянным из других порядков, полагаем равными нулю, считая, что они вошли слагаемыми в произвольные постоянные при получении членов нулевого порядка.

Подинтегральное выражение в (50) оказывается известной функцией времени. Допустим, что эту функцию удалось проинтегрировать в известных функциях. Тогда решение для $\beta_i^{(2)}$ выражается в виде

$$\beta_i^{(2)} = \int \left[(B_i^{(2)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \alpha_k^{(1)} \right] dt + \beta_{i0}^{(2)} \qquad (51)$$

$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Произвольные постоянные $\beta_{i0}^{(2)}$ также полагаем равными нулю.

Таким образом последовательно находится решение для членов следующих, более высоких порядков малости. Всякий раз нужно интегрировать новую известную функцию времени, а новые произвольные постоянные полагать равными нулю. Так как при получении подинтегральных выражений в правых частях уравнений делались подстановки $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$, то с учетом (46) все слагаемые рядов (44) оказываются зависимыми от произвольных постоянных $\alpha_{i0}^{(0)}$, $\beta_{i0}^{(0)}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Выполняя построение с точностью до некоторого заданного порядка малости, мы получаем решение уравнений возмущенного движения в зависимости от времени и шести независимых произвольных постоянных интегрирования

$$\begin{gathered}\alpha_i = \alpha_i(\alpha_{10}^{(0)}, \alpha_{20}^{(0)}, \alpha_{30}^{(0)}, \beta_{10}^{(0)}, \beta_{20}^{(0)}, \beta_{30}^{(0)})\ , \\ \beta_i = \beta_i(\alpha_{10}^{(0)}, \alpha_{20}^{(0)}, \alpha_{30}^{(0)}, \beta_{10}^{(0)}, \beta_{20}^{(0)}, \beta_{30}^{(0)}) \\ (i = 1, 2, 3)\ .\end{gathered} \tag{52}$$

Это решение будет найдено с точностью до заданного порядка малости.

Произвольные постоянные в решении для возмущений каждого порядка мы полагали равными нулю. В этом случае значения получаемых функций (48), (49), (50), (51) в начальный момент времени $t = t_0$ не обращаются в нули. В итоге решения уравнений возмущенного движения и уравнений невозмущенного движения не совпадают при $t = t_0$. Совпадения можно добиться, если для возмущений каждого порядка выбирать произвольные постоянные так, чтобы возмущения оказывались равными нулю при $t = t_0$. В случае возмущений первого порядка соответствующее решение запишется в виде

$$\alpha_i^{(1)} = \int\limits_{t_0}^{t} (A_i^{(1)})_0 dt \tag{53}$$

$$(i = 1, 2, 3)\ ,$$

$$\beta_i^{(1)} = \int\limits_{t_0}^{t} \left[(B_i^{(1)})_0 + (n_i^{(1)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \right] dt \tag{54}$$

$$(i = 1, 2, 3)\ .$$

Заметим, что возмущающую функцию нужно разлагать в бесконечные ряды. На практике приходится брать в этом разложении огромное число членов. Столь же длинные выражения получаются и при построении решения. В процессе получении членов второго и более высоких порядков малости необходимо перемножать получаемые ряды. Громозкость выражений и трудоемкость построения быстро возрастают с увеличением максимального порядка малости.

Методом малого параметра мы находим всегда лишь приближенное решение уравнений возмущенного движения. Успех построения решения существенно зависит от способов и форм разложения возмущающей функции. Для этого вводятся специфические для конкретной задачи дополнительные малые параметры.

Сходимость рядов в методе малого параметра Ляпунова-Пуанкаре. Изложенный выше метод позволяет построить формальное решение уравнений возмущенного движения в виде частичной суммы ряда с точностью до заданного порядка малого параметра. Построение будет иметь смысл, если это приближенное решение окажется близким к истинному. Для этого достаточно доказать сходимость получаемых рядов. В книге Субботина (1968) приводится доказательство теоремы Пуанкаре о сходимости рядов, представляющих решение уравнений возмущенного движения, для случая двух переменных. Теорема применима для систем любого порядка. Ее можно сформулировать следующим образом.

Пусть возмущающая функция R в уравнениях возмущенного движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial z}, \tag{55}$$

пропорциональна некоторому малому параметру ε. Пусть при $\varepsilon = 0$ система уравнений (55) имеет при некоторых начальных условиях общее решение, непрерывное на интервале времени $[t_0, t_0 + T]$. Тогда существует такое положительное число $\varepsilon_1(T)$, что если $\varepsilon < \varepsilon_1(T)$, то степенные ряды, построенные по методу малого параметра, будут абсолютно сходящимися при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Теорема Пуанкаре справедлива также в случаях, когда выражения для действующих сил не имеют силовой функции.

Теорема Пуанкаре утверждает лишь существование положительного предела $\varepsilon_1(T)$ для значений малого параметра. Нахождение этого предела во многих конкретных задачах оказывается практически неосуществимым. Пуанкаре указывает некоторую конечную величину $\varepsilon_1(T)$. Однако его оценка оказазалась столь заниженной, что она оказалась непригодной для реальных систем небесных тел. Несколько реальных оценок найдено К.В. Холшевниковым (Холшевников, 1985). Доказано, что они точные, т. е. достигаются для некоторых систем, удовлетворяющих найденным условиям.

Для описания движения многих реальных небесных тел приходится пользоваться методами теории возмущений без проверки сходимости получаемых рядов. Последовательное убывание величин $\alpha_i^{(0)}, \alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \dots\ , \ \beta_i^{(0)}, \beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}, \dots$, дает лишь необходимое условие сходимости и может служить признаком приближения решения к истинному решению. Проверить правильность и точность получаемого решения можно путем сравнения с результатами наблюдений.

3.2. Метод последовательных приближений Пикара

Приближенное решение уравнений возмущенного движения можно также строить методом последовательных приближений. При этом на первый взгляд может показаться, что никаких разложений по степеням малого параметра не нужно делать ни в уравнениях движения, ни в форме решения.

Рассмотрим схему применения метода последовательных приближений. Уравнения возмущенного движения (40) с учетом обозначений (42) можно записать в виде

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = A_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t) ,$$
$$\frac{d\beta_i}{dt} = n_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + B_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t) \tag{56}$$
$$(i = 1, 2, 3) .$$

В качестве нулевого приближения можно взять решение уравнений невозмущенного движения

$$\alpha_i^{(0)} = \alpha_{i0}^{(0)}, \quad \beta_i^{(0)} = (n_i^{(0)})_0 (t - t_0) + \beta_{i0}^{(0)} , \tag{57}$$

Здесь $\alpha_{i0}^{(0)}$, $\beta_{i0}^{(0)}$ $(i = 1, 2, 3)$ - произвольные постоянные, а постоянные $(n_i^{(0)})_0$ зависят от $\alpha_{i0}^{(0)}$. Подставим это решение в правые части уравнений возмущенного движения (56). Получим первое приближение решения этих уравнений в виде

$$\overline{\alpha}_i^{(1)} = \int\limits_{t_0}^{t} A_i(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \beta_3^{(0)}, t)dt \ + \alpha_{i0}^{(0)},$$

$$\overline{\beta}_i^{(1)} = \int\limits_{t_0}^{t} n_i(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)})dt + \tag{58}$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} B_i(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \beta_3^{(0)}, t) + \beta_{i0}^{(0)}$$

$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Здесь подинтегральные выражения оказываются известными функциями времени. Предположим, что мы смогли проинтегрировать эти выражения в известных функциях. Тогда первое приближение уравнений возмущенного движения будет также представлено известными функциями времени.

Продолжая процесс последовательных приближений дальше, получим второе приближение в виде

$$\overline{\alpha}_i^{(2)} = \int\limits_{t_0}^{t} A_i(\overline{\alpha}_1^{(1)}, \overline{\alpha}_2^{(1)}, \overline{\alpha}_3^{(1)}, \overline{\beta_1}^{(1)}, \overline{\beta}_2^{(1)}, \overline{\beta}_3^{(1)}, t)dt \ + \alpha_{i0}^{(0)},$$

$$\overline{\beta}_i^{(2)} = \int\limits_{t_0}^{t} n_i(\overline{\alpha}_1^{(1)}, \overline{\alpha}_2^{(1)}, \overline{\alpha}_3^{(1)})dt + \tag{59}$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} B_i(\overline{\alpha}_1^{(1)}, \overline{\alpha}_2^{(1)}, \overline{\alpha}_3^{(1)}, \overline{\beta_1}^{(1)}, \overline{\beta}_2^{(1)}, \overline{\beta}_3^{(1)}, t) + \beta_{i0}^{(0)}$$

$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Снова пришли к необходимости вычислять неопределенные интегралы от некоторых известных функций времени.

Для любого приближения имеем

$$\overline{\alpha}_i^{(k)} = \int\limits_{t_0}^{t} A_i(\overline{\alpha}_1^{(k-1)}, \overline{\alpha}_2^{(k-1)}, \overline{\alpha}_3^{(k-1)}, \overline{\beta}_1^{(k-1)}, \overline{\beta}_2^{(k-1)}, \overline{\beta}_3^{(k-1)}, t)dt +$$

$$+\alpha_{i0}^{(0)},$$

$$\overline{\beta}_i^{(k)} = \int\limits_{t_0}^{t} n_i(\overline{\alpha}_1^{(k-1)}, \overline{\alpha}_2^{(k-1)}, \overline{\alpha}_3^{(k-1)})dt + \tag{60}$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} B_i(\overline{\alpha}_1^{(k-1)}, \overline{\alpha}_2^{(k-1)}, \overline{\alpha}_3^{(k-1)}, \overline{\beta}_1^{(k-1)}, \overline{\beta}_2^{(k-1)}, \overline{\beta}_3^{(k-1)}, t) + \beta_{i0}^{(0)}$$

$$(i = 1, 2, 3)\ .$$

Процесс можно продолжать до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность решения.

В каждом приближении произвольные постоянные интегрирования выбираются так, чтобы при $t = t_0$ решение уравнений возмущенного движения и решение уравнений невозмущенного движения совпадали. Заметим, что для некоторых задач такой выбор оказывается подходящим, однако это не единственный способ выбора произвольных постоянных.

На основании теоремы Пикара можно утверждать, что при достаточно общих предположениях относительно функций в правых частях уравнений (56) процесс последовательных приближений, определяемый рекуррентными соотношениями (60), будет сходящимся при $k \to \infty$. В пределе получим функции точно удовлетворяющие уравнениям (56).

Заметим, что в каждом данном приближении можно получать более точное решение, если в формулы для $\overline{\beta}_i^{(k)}$, $(i = 1, 2, 3)$ вместо $\overline{\alpha}_i^{(k-1)}$ подставлять $\overline{\alpha}_i^{(k)}$, которые предварительно находятся в данном приближении.

При решении уравнений методом последовательных приближений или методом малого параметра на каждом этапе решения необходимо интегрировать функции, найденные на предыдущих этапах. Подинтегральные выражения в практических задачах имеют весьма сложный вид. Чтобы обеспечить возможность интегрирования в известных функциях, приходится разлагать возмущающую функцию в различные ряды, используя дополнительные малые параметры. Поэтому успех решения задачи на практике определяется удачным выбором формы разложения возмущающей функции.

4.1. Разложение возмущающей функции. Вековые и периодические возмущения

При составлении уравнений движения возмущающая функция выражается через координаты небесного тела. Для применения теории возмущений необходимо выразить возмущающую функцию через элементы промежуточной орбиты. С этой целью выполняется разложение возмущающей функции по степеням различных новых малых параметров. Для реализации метода малого параметра интегрирования уравнений возмущенного движения небесного тела необходимо взять неопределенные интегралы в выражениях для членов каждого порядка малости в разложениях решения. Разложение возмущающей функции выполняется так, чтобы неопределенные интегралы можно было взять.

В конкретных задачах о движении тел Солнечной системы дополнительными параметрами часто фигурируют отношения больших полуосей орбит, а также эксцентриситеты и наклоны. Из обзора работ, выполненных в этом направлении, можно составить следующий общий вид разложения возмущающей функции:

$$
\begin{gathered}
R(a,e,i,M,\omega,\Omega,t) = \overline{R}(a,e,i) + \sum_{k_1,k_2,k_3,j_1,j_2,\dots,j_m} \\
\Big[R^{(c)}_{\dots}(a,e,i)\ \cos(k_1M + k_2\omega + k_3\Omega + j_1\lambda_1 + j_2\lambda_2 + \dots + j_m\lambda_m) + \\
+R^{(s)}_{\dots}(a,e,i)\ \sin(k_1M + k_2\omega + k_3\Omega + j_1\lambda_1 + j_2\lambda_2 + \dots + j_m\lambda_m)\Big]\,.
\end{gathered}
\tag{61}
$$

В этом разложении индексы суммирования $k_1, k_2, k_3, j_1, j_2, ..., j_m$ принимают всевозможные целые значения. Коэффициенты $R^{(c)}_{\dots}$, $R^{(s)}_{\dots}$ проидексированы по всем индексам суммирования. При практических вычислениях бесконечный ряд заменяют частичной суммой, а пределы суммирования ограничивают в зависимости от принятой точности определения возмущений. Слагаемое суммы при $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, $j_1 = 0$, $j_2 = 0$, $..., j_m = 0$ выписано отдельно как $\overline{R}(a,e,i)$. Оно называется вековым членом, поскольку не зависит от элементов M, ω, Ω и времени явно, и может порождать в решении вековые возмущения. Время входит в выражение (61) явно посредством величин $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, которые являются известными линейными функциями времени.

Рассмотрим два примера разложения возмущающей функции.

Первый пример – задача о движении планеты, под действием притяжения Солнца и возмущающего влияния другой планеты. В этом случае считается, что теория движения возмущающей планеты построена и оскулирующие элементы ее орбиты известны. В общем выражении (61) $m = 3$, а величины $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ оказываются аналогичными аргументам кеплерового движения M, ω, Ω, но для возмущающей планеты. Они являются известными линейными функциями времени, поскольку включают в себя все вековые возмущения в движении этой возмущающей планеты. Явный вид разложения возмущающей функции в планетной задаче можно найти, например, в книге (Мюррей, Дермотт, 2009), где в качестве дополнительных малых параметров разложения используются только эксцентриситеты орбит планет. В классических работах Лагранжа, Лапласа и Леверье, кроме того, фигурирует еще один малый параметр – взаимный наклон орбит двух планет.

Второй пример – задача о движении искусственного спутника Земли под возмущающим воздействием ее несферичности. Для этого примера в общей формуле (61) полагается $m = 1$, $j_1 = -k_3$, а в качестве λ_1 фигурирует Гринвичское звездное время, которое считается известной линейной функцией времени. Для этой задачи разложение возмущающей функции можно взять в публикациях (Брумберг, 1967; Каула, 1970). Дополнительным малым параметром является только эксцентриситет орбиты спутника. Используется также разложение силовой функции притяжения несферичного тела в ряд по сферическим функциям. В разложении берется конечная сумма с учетом убывания коээфициентов разложения.

Попробуем подставить разложение возмущающей функции (61) в уравнения возмущенного движения в элементах промежуточной орбиты

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j} \ ,$$

$$\frac{d\beta_i}{dt} = n_i - \sum_{j=1}^{3} a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \tag{62}$$

$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Здесь мы будем использовать обозначения

$$\alpha_1 = a, \;\; \alpha_2 = e, \;\; \alpha_3 = i, \;\; \beta_1 = M, \;\; \beta_2 = \omega, \;\; \beta_3 = \Omega, \tag{63}$$

а также

$$A_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j} \;\; , \tag{64}$$

$$B_i = -\sum_{j=1}^{3} a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \tag{65}$$

$$(i = 1, 2, 3) \; .$$

Очевидно, что вычисление частных производных от возмущающей функции по элементам не изменяет общего вида выражения. Умножения частных производных на коэффициенты a_{ij} также не изменяет общего вида выражения. Таким образом, правые части уравнений для элементов промежуточной орбиты будут иметь такой же общий вид (61), как и возмущающая функция.

Рассмотрим теперь операции вывода возмущений первого порядка (см. Главу 3). Сначала нужно определить

$$\alpha_i^{(1)} = \int (A_i^{(1)})_0 dt + \alpha_{i0}^{(1)} \tag{66}$$

$$(i = 1, 2, 3) \; .$$

Затем последовательно

$$\beta_i^{(1)} = \int \left[(B_i^{(1)})_0 + (n_i^{(1)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \right] dt + \beta_{i0}^{(1)} \tag{67}$$

$$(i = 1, 2, 3) \; .$$

Здесь операция $(...)_0$ означает подстановку вместо элементов α_1, α_2, α_3 их постоянных значений $\alpha_{10}^{(0)}, \alpha_{20}^{(0)}, \alpha_{30}^{(0)}$, а вместо элементов β_1, β_2, β_3 линейных функций времени

$$\beta_i^{(0)} = (n_i^{(0)})_0 (t - t_0) + \beta_{i0}^{(0)} \;\; (i = 1, 2, 3).$$

Рассмотрим сначала операции над вековым членом разложения возмущающей функции $\overline{R}(a, e, i)$. Подстановляя его в формулу (64), получим

$$\overline{A}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial \overline{R}}{\partial \beta_j} = 0 \ \ (i = 1, 2, 3).$$

Теперь очевидно, что вековой член разложения возмущающей функции не дает никакого вклада в возмущения $\alpha_i^{(1)}$.

После подстановки векового члена в формулу (65), а затем в (67) получим постоянные слагаемые под знаком интеграла по времени t. Эти слагаемые будут известны и дадут нам в возмущениях $\beta_i^{(1)}$ линейные по времени члены, которые принято называть *вековыми возмущениями* .

Рассмотрим теперь подстановку всех остальных слагаемых разложения (61), кроме векового члена. Коэффициенты при синусах и косинусах станут постоянными величинами, а аргументы синусов и косинусов обратятся в известные линейные функции времени, поскольку аргументы $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m$ также являются известными линейными функциями времени. В итоге подинтегральные выражения превратятся в сумму выражений вида $a\sin(\sigma t + C)$, $b\cos(\sigma t + C)$. Интегрирование по времени t тривиально:

$$\int a\sin(\sigma t{+}C)dt = -\frac{a}{\sigma}\cos(\sigma t{+}C), \quad \int b\cos(\sigma t{+}C)dt = \frac{b}{\sigma}\sin(\sigma t{+}C).$$

Здесь коэффициенты a, b, частоты σ и начальные фазы C зависят от индексов суммирования. Теперь видно, что кроме векового члена все остальные члены разложения возмущающей функции после подстановки их в выражения для $(A_i^{(1)})_0$, $(B_i^{(1)})_0$, а затем формулы для $\alpha_i^{(1)}$ и $\beta_i^{(1)}$ дадут нам только периодические по времени члены в возмущениях всех шести элементов. При этом в элементах α_i мы получим только периодические возмущения первого порядка.

Постоянное слагаемое $(n_i^{(1)})_0$ под интегралом в формуле (67) порождает вековые возмущения в элементах β_i. В этой же формуле коэффициенты $\left(\frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j}\right)_0$ оказываются известными постоянными коэффициентами при уже найденных возмущениях первого порядка в элементах α_i . Поскольку эти возмущения, как функции времени, оказались синусами или косинусами линейных по времени функций, то их интегрирование согласно формуле (67) снова дает только периодические возмущения.

В итоге заключаем, что возмущения первого порядка в элементах a, e, i содержат только периодические, а в элементах ω, Ω и функции M – периодические и вековые возмущения.

Факт, что возмущения первого порядка в большой полуоси не содержат вековых членов, был установлен Лагранжем и составляет вывод его соответствующей теоремы.

4.2. Способ Пуассона

Рассмотрим операции получения возмущений второго порядка методом малого параметра Ляпунова-Пуанкаре (см. Главу 3).

Уравнения для элементов промежуточной орбиты мы рассматриваем в виде

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = A_i^{(1)} + A_i^{(2)} \quad + \dots ,$$
$$\frac{d\beta_i}{dt} = n_i^{(0)} + n_i^{(1)} + \dots + B_i^{(1)} + B_i^{(2)} \quad + \dots , \tag{68}$$
$$(i = 1, 2, 3) .$$

Решение этих уравнений ищем в виде рядов по степеням малых параметров, т. е.

$$\alpha_i = \alpha_i^{(0)} + \alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} + \dots ,$$
$$\beta_i = \beta_i^{(0)} + \beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)} + \dots , \tag{69}$$
$$(i = 1, 2, 3) .$$

Здесь верхние индексы в круглых скобках означают порядок малости относительно совокупности параметров соответствующего члена разложения.

Возмущения второго порядка в элементах α_i находятся по формулам

$$\alpha_i^{(2)} = \int \left[(A_i^{(2)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} \right] dt + $$
$$+\alpha_{i0}^{(2)} \tag{70}$$
$$(i = 1, 2, 3) .$$

Произвольные постоянные $\alpha_{i0}^{(2)}$ можно положить равными нулю, так как они входят в решение уравнений (68) аддитивно вместе с произвольными постоянными, появляющимися в членах других порядков малости. Подинтегральная функция в (70) оказывается известной функцией времени. Если эту функцию удалось проинтегрировать, то возмущения второго порядка в элементах β_i найдутся по формуле

$$\beta_i^{(2)} = \int \left[(B_i^{(2)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \alpha_k^{(1)} \right] dt + \beta_{i0}^{(2)} \quad (71)$$
$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Рассмотрим в подинтегральных выражениях последних двух формул слагаемые

$$\left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)}, \quad \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} \quad (i, j = 1, 2, 3) \ . \qquad (72)$$

После подстановки в уравнения для элементов промежуточной орбиты возмущающей функции в форме (61) становится ясно, что левые сомножители в выражениях (72) могут содержать только периодические члены. С другой стороны, мы получили ранее, что в возмущениях первого порядка $\beta_j^{(1)}$ могут содержаться как периодические, так и вековые, т. е. линейные по времени члены. Произведение периодических членов на вековые даст в подинтегральном выражении смешанные члены, что после интегрирования приведет к появлению в решении смешанных членов в возмущениях второго порядка. Смешанными членами мы называем произведения вида $t \sin at$, где t - время, а a - постоянная. Появление таких выражений в возмущениях второго порядка является следствием применяемого метода. Это не означает неизбежного неограниченного возрастания возмущений во времени, так как мы получаем таким образом только начальные члены разложения возмущений по степеням малых параметров. Полный ряд, представляющий возмущения, может оказаться разложением ограниченной функции на бесконечном интервале времени.

Оказывается существует способ, основная идея которого была предложена еще французским математиком Пуассоном, позволяющий исключить в решении смешанные члены по крайней мере второго, а возможно и более высоких порядков малости. Рассмотрим этот способ в приложении к уравнениям возмущенного движения (68).

Предположим, что все возмущения элементов α_i не содержат вековых и смешанных членов и все возмущения элементов β_i не содержат смешанных членов по крайней мере до некоторого порядка малости. Однако возмущения элементов α_i могут содержать периодические, а элементов β_i – периодические и вековые члены любых порядков. Обозначим суммы вековых членов данного порядка малости k через $\overline{\alpha}_i^{(k)}$, $\overline{\beta}_i^{(k)}$ а суммы периодических членов порядка k через $\tilde{\alpha}_i^{(k)}$, $\tilde{\beta}_i^{(k)}$. Теперь представим разложение искомого решения уравнений возмущенного движения в виде

$$\begin{gathered}\alpha_i = \overline{\alpha}_i^{(0)} + \tilde{\alpha}_i^{(1)} + \tilde{\alpha}_i^{(2)} + ..., \\ \beta_i = \overline{\beta}_i^{(0)} + \overline{\beta}_i^{(1)} + \overline{\beta}_i^{(2)} + ... + \tilde{\beta}_i^{(1)} + \tilde{\beta}_i^{(2)} + ..., \\ (i = 1, 2, 3)\ .\end{gathered} \tag{73}$$

Как было показано выше, по крайней мере $\overline{\alpha}_i^{(1)} = 0$ для $i = 1, 2, 3$ и возмущения первого порядка всех элементов не содержат смешанных членов.

По методу малого параметра нужно делать разложение правых частей уравнений по степеням малого параметра по схеме

$$f(a+\varepsilon) = f(x)|_{x=a} + \frac{1}{1!}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}\varepsilon + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=a}\varepsilon^2 + ...,$$

где a - значение аргумента функции $f(x)$, относительно которого отсчитывается малое приращение ε. Согласно способу Пуассона центрами разложения (a) считаются $\overline{\alpha}_i^{(0)}$ и бесконечные суммы $\overline{\beta}_i^{(0)} + \overline{\beta}_i^{(1)} + \overline{\beta}_i^{(2)} + ...$ вековых членов, а приращениями (ε) – бесконечные суммы $\tilde{\alpha}_i^{(1)} + \tilde{\alpha}_i^{(2)} + ...$, $\tilde{\beta}_i^{(1)} + \tilde{\beta}_i^{(2)} + ...$ периодических слагаемых.

При этих предположениях вместо выражений 72, входящих в формулы для возмущений второго порядка, мы будем иметь

$$\left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j}\right)_0 \tilde{\beta}_j^{(1)},\ \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j}\right)_0 \tilde{\beta}_j^{(1)}\ \ (i, j = 1, 2, 3)\ . \tag{74}$$

Эти выражения представляют собой произведения сумм периодических членов. Таким образом в возмущениях второго порядка исключены смешанные члены.

Легко показать, что если все возмущения элементов α_i не содержат вековых и смешанных членов и все возмущения элементов β_i не содержат смешанных членов по крайней мере до порядка малости $(k-1)$ включительно, то все возмущения порядка k не будут содержать смешанных членов.

4.3. Вековые и смешанные возмущения элементов орбит планет и спутников

Вопрос о наличии в возмущениях элементов орбит планет и спутников вековых и смешанных членов очень важен, так как от его решения зависят выводы об устойчивости Солнечной системы. Возмущения мы можем находить только методом малого параметра. Поэтому исследовать мы можем только частичные суммы рядов по степеням малого параметра.

Планетная задача

В аналитической теории движения больших планет Солнечной системы, которую строили Лагранж и Лаплас, по рассматриваемому вопросу получены следующие результаты.

Как было показано выше, возмущения первого порядка малости в большой полуоси a, эксцентриситете e и наклоне i не содержат вековых членов. По отношению к большой полуоси это утверждение принято называть теоремой Лагранжа. Для больших планет Солнечной системы в 1809 году Пуассону удалось доказать, что возмущения второго порядка больших полуосей не содержат вековых членов. Попытки найти вековые возмущения третьего порядка или доказать их отсутствие делались многими математиками 19-го и 20-го веков. Окончательно аналитические выражения для вековых возмущений третьего порядка в больших полуосях планет дал в 1958 году Меффруа. Казалось бы, что наличие вековых возмущений больших полуосей орбит планет, а также эксцентриситетов и наклонов, может свидетельствовать об орбитальной неустойчивости Солнечной системы. Однако еще Лагранж указывал на то, что наличие вековых членов в рядах, представляющих решение дифференциальных уравнений не обязательно влечет неограниченность этого решения. Если, например ограниченную по времени функцию $\sin \varepsilon t$ разложить в степенной ряд

$$\sin \varepsilon t = \varepsilon t - \frac{1}{6}\varepsilon^3 t^3 + \dots\ ,$$

то любой отрезок этого ряда представит неограниченную функцию времени. Вполне возможно, что ряды, отрезки которых мы получаем методом малого параметра, представляют ограниченные возмущения элементов орбит планет. Кроме того, сходимость рассматриваемых рядов доказана только на ограниченных интервалах времени (см. теорему Пуанкаре в предыдущей главе). Поэтому нельзя основывать на таком решении какие-либо заключения относительно свойств движения на бесконечно большом интервале времени.

Таким образом, выводы Лагранжа и Пуассона о том, что в больших полуосях орбит планет нет вековых возмущений первого и второго порядков, не решают вопроса об орбитальной устойчивости Солнечной системы. Однако из этих выводов можно заключить, что даже если Солнечная система и распадается, то чрезвычайно медленно.

Задача о движении спутника несферичной планеты

При моделировании движения спутника несферичной планеты силовая функция учитывает не только притяжение планеты, как материальной точки, но также и притяжение масс, распределенных внутри ее поверхности. В этой спутниковой задаче также, как и в планетной задаче, применяется общая форма разложения возмущающей функции (61). Однако имеются некоторые особенности в применении метода малого параметра при интегрировании уравнений возмущенного движения. Одна особенность заключается в том, что все большие планеты представляют собой сжатые у полюсов тела. Другие же проявления несферичности планеты оказываются существенно меньшими. Поскольку распределение масс внутри планеты неизвестно, то силовую функцию внешнего гравитационного поля представляют в форме разложения по специальным (шаровым или сферическим) функциям. В этом разложении можно выделить три группы слагаемых. Первая группа состоит из одного члена - силовой функции притяжения материальной точки. Это слагаемое принимают в качестве силовой функции в уравнениях невозмущенного движения. Вторая группа слагаемых описывает сжатие планеты. Поскольку речь идет не о геометрической форме планеты, а о ее гравитационном поле, то говорят о динамическом сжатии планеты. Третья группа слагаемых - это все оставшиеся члены разложения. Они описывают другие свойства динамической несферичности планеты. В теориях движения спутников планет в разложении силовой функции члены, описывающие динамическое сжатие планеты, считаются членами первого порядка малости. Остальные члены оказываются второго порядка малости. Это весьма точно соответствует гравитационному полю Земли и близко гравитационным полям других больших планет. По этим причинам, возмущающую функцию в спутниковой задаче представляют в форме суммы двух слагаемых

$$R = R^{(1)} + R^{(2)},$$

где первое слагаемое характеризует сжатие планеты, а второе – другие свойства ее несферичности. Аналогично на два слагаемых разлагают правые части уравнений для элементов промежуточной орбиты.

В общем разложении возмущающей функции (61) аргументами синусов и коснусов будут величины

$$D_{k_1,k_2,k_3} = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3(\beta_3 - S), \tag{75}$$

где S - Гринвичское звездное время, которое считается известной линейной функцией времени.

В данном случае уравнения для элементов промежуточной орбиты можно записать в виде

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = A_i^{(1)} + A_i^{(2)} \ ,$$
$$\frac{d\beta_i}{dt} = n_i^{(0)} + B_i^{(1)} + B_i^{(2)} \ , \tag{76}$$
$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Заметим, что здесь мы приняли кеплеровскую промежуточную орбиту. Поэтому $n_2 = n_3 = 0$.

Уравнения возмущенного движения спутника планеты решаются методом малого параметра по способу Пуассона. Сначала находятся вековые возмущения первого порядка в элементах β_i $(i = 1, 2, 3)$, то есть

$$\overline{\beta}_i^{(1)} = (\overline{B}_i^{(1)})_0(t - t_0) = \dot{\beta}_i^{(1)}(t - t_0) \ \ (i = 1, 2, 3) \ . \tag{77}$$

Здесь $\overline{B}_i$ получается от вековой части возмущающей функции $\overline{R}$, а $\dot{\beta}_i^{(1)}$ оказывается известной постоянной. Затем находятся периодические возмущения первого порядка в элементах α_i и β_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$\tilde{\alpha}_i^{(1)} = \int (A_i^{(1)})_0 dt \tag{78}$$
$$(i = 1, 2, 3) \ ,$$

$$\tilde{\beta}_i^{(1)} = \int \left[(B_i^{(1)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \right] dt \qquad (79)$$

$$(i = 1, 2, 3) \; .$$

После интегрирования в последних соотношениях общий член возмущений элементов будет иметь вид

$$\frac{P^{(1)}}{k_1(n_1^{(0)} + \dot{\beta}_1^{(1)}) + k_2\dot{\beta}_2^{(1)} + k_3(\dot{\beta}_3^{(1)} - \dot{S})} \left(\begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right) D_{k_1,k_2,k_3} \; , \qquad (80)$$

где для разных слагаемых берется синус или косинус от аргумента D_{k_1,k_2,k_3} (75), а $P^{(1)}$ - известные постоянные первого порядка малости.

Заметим, что в разложении возмущающей функции существует слагаемое, в котором $k_1 = 0, \; k_3 = 0$. Такие слагаемые называются долгопериодическими, поскольку аргументом синуса или косинуса будет медленно изменяющаяся величина $k_2\dot{\beta}_2^{(1)}(t-t_0)$. Это слагаемое даст нам периодические возмущения вида

$$\frac{P^{(1)}}{k_2\dot{\beta}_2^{(1)}} \left(\begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right) D_{0,k_2,0} \; . \qquad (81)$$

Здесь мы видим, что при поиске возмущений первого порядка малости получились возмущения нулевого порядка. На первый взгляд кажется, что в данной задаче метод малого параметра неприменим. Однако здесь природа сделала нам "подарок". При вычислении в возмущающей функции слагаемого, в котором $k_1 = 0, \; k_3 = 0$, оказывается, что соответствующий коэффициент точно равен нулю. Таким образом, метод малого параметра остается применимым, однако на каждом этапе вычислений порядок малости получаемых долгопериодических возмущений получается на единицу меньше.

В задаче о движении спутника несферичной планеты возмущения элементов промежуточной орбиты имеют одно очень важное свойство. Оказывается, что возмущения всех порядков малости в элементах α_i имеют только периодические, а в элементах β_i $(i = 1, 2, 3)$ только периодические и вековые члены. Доказательство этого заключения можно найти, например, в статье (Аксенов, 1966).

4.4. Выводы Лагранжа и Лапласа об устойчивости Солнечной системы

4.4.1. Понятие устойчивости Солнечной системы по Лагранжу

Прежде, чем излагать результаты, полученные Лагранжем и Лапласом, следует уточнить, что мы имеем в виду под устойчивостью Солнечной системы. Выше мы уже употребили выражение "Солнечная система не распадается". Это очень близко к строгому оределению понятия устойчивости по Лагранжу. Движение системы материальных точек называется устойчивым в смысле Лагранжа, если все взаимные расстояния всегда остаются ограниченными, так что ни одна из точек не удаляется неограниченно далеко от всех остальных.

Проверить, устойчива ли Солнечная система в смысле Лагранжа, не представляется возможным. Однако классикам небесной механики удалось доказать некоторые условные свойства устойчивости.

4.4.2. Попытка доказать неустойчивость Солнечной системы

Если не удается доказать устойчивость, то может быть стоит попытаться доказать неустойчивость Солнечной системы. Для этого достаточно доказать нарушение одного из необходимых условий устойчивости. Выведем здесь одно из необходимых условий устойчивости по Лагранжу движения системы материальных точек. Для этого рассмотрим формулу Лагранжа-Якоби

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} = 2U + 4h \tag{82}$$

для функции

$$\Psi = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{n} {\sum_{j=0}^{n}}' m_i m_j \Delta_{ij}^2 \tag{83}$$

от взаимных расстояний между точками $\Delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2, ..., n)$. Здесь m_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ - массы точек, m - сумма всех масс, h есть полная энергия системы в ее движении относительно общего центра инерции, а U - полная силовая функция системы, т. е.

$$U = \frac{G}{2} \sum_{i=0}^{n} {\sum_{j=0}^{n}}' \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}. \tag{84}$$

Даже если предположить, что рассматриваемая система неустойчива по Лагранжу, то мы должны все же полагать, что система существует бесконечно долго, иначе вообще нечего будет рассматривать. Это означает, что по крайней мере одно из взаимных расстояний Δ_{ij} $(i, j = 0, 1, 2, ..., n)$ не обращается в бесконечность, то есть остается ограниченным. Отсюда следует, что существует некоторый минимум функции U на бесконечном интервале времени. Обозначая этот минимум через $\underline{U}$, будем иметь неравентства

$$0 < \underline{U} \leq U \ , \tag{85}$$

справедливые для любого момента времени.

Из (82) и (85) следует также неравенство

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} \geq 2\underline{U} + 4h \ . \tag{86}$$

Проинтегрируем это неравентство дважды по времени в пределах от t_0 до t. Получим следующее неравенство:

$$\Psi \geq \Psi_0 + \dot{\Psi}_0(t - t_0) + (\underline{U} + 2h)(t - t_0)^2 \ , \tag{87}$$

где Ψ_0 есть начальное значение величины Ψ, а $\dot{\Psi}_0$ – начальное значение производной по времени от величины Ψ.

Допустим, что $h \geq 0$. Тогда из неравенства (87) следует, что Ψ неограниченно растет со временем, и система оказывается неустойчивой по Лагранжу. Следовательно условие $h < 0$ является необходимым условием устойчивости системы в смысле Лагранжа.

Из наблюдений следует, что в настоящее время полная энергия h системы Солнца и больших планет в ее движении относительно их общего центра инерции отрицательна. Следовательно необходимое условие устойчивости Солнечной системы выполняется. Однако из этого еще не следует заключать, что Солнечная система действительно устойчива.

4.4.3 Теорема Лапласа об устойчивости Солнечной системы

Выше были рассмотрены некоторые свойства возмущений элементов орбит планет, движущихся под действием притяжения Солнца и взаимного притяжения. Ни классикам небесной механики, ни современным исследователям не удалось доказать, что возмущения больших полуосей планет представляются ограниченными функциями.

Однако известно, что даже если большие полуоси орбит и возрастают неограниченно, то это возрастание очень медленное. Коэффициент возрастания пропорционален по крайней мере третьей степени отношения масс планет к массе Солнца.

Очевидно, что существование Солнечной системы не обеспечивается устойчивостью по Лагранжу. Планеты могут столкнуться одна с другой. Кроме того, даже при постоянных больших полуосях орбит может случиться, что эксцентриситеты приблизятся к единице. Это может привести к таким траекториям планет, которые пересекают поверхность Солнца. В итоге все планеты могут просто упасть на Солнце. Изучением такой возможности занимались Лагранж и Лаплас.

Лаплас изучал вопрос о пределах изменений эксцентриситетов и взаимных наклонов орбит планет Солнечной системы на больших интервалах времени. Он доказал теорему, из которой следует, что если большие полуоси орбит планет будут всегда близкими к тем, что мы имеем сейчас, то эксцентриситеты и взаимные наклоны орбит останутся столь же малыми, что и сейчас.

Для доказательства теоремы Лаплас использовал интегралы площадей, справедливые для уравнений движения планет, рассматриваемых вместе с Солнцем как система материальных точек. Массы планет по сравнению с массой Солнца m_0 можно считать малыми величинами. Тогда в системе координат с центром в Солнце с точностью до первых степеней масс планет интегралы площадей можно приближенно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}\sum_{s=1}^{n} m_s(y_s\dot{z}_s - z_s\dot{y}_s) = c_1' \ , \\ \sum_{s=1}^{n} m_s(z_s\dot{x}_s - x_s\dot{z}_s) = c_2' \ , \\ \sum_{s=1}^{n} m_s(x_s\dot{y}_s - y_s\dot{x}_s) = c_3' \ , \end{gathered} \tag{88}$$

где m_s $(s = 1, ...n)$ – массы планет, x_s, y_s, z_s – их координаты, а c_1', c_2', c_3' – произвольные постояннные интегрирования.

Выразим теперь в равенствах (88) прямоугольные координаты через оскулирующие элементы кеплеровских эллиптических орбит планет. Получим

$$\sum_{s=1}^{n} m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s(1-e_s^2)} \sin i_s \sin \Omega_s = c_1' \ ,$$

$$-\sum_{s=1}^{n} m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s(1-e_s^2)} \sin i_s \cos \Omega_s = c_2' \ , \tag{89}$$

$$\sum_{s=1}^{n} m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s(1-e_s^2)} \cos i_s = c_3' \ ,$$

где a_s, e_s, i_s, Ω_s – большие полуоси, эксцентриситеты, наклоны и долготы узлов орбит планет, $\mu_s = G(m_0 + m_s)$ – гравитационный параметр системы двух тел Солнце-планета, а G – универсальная гравитационная постоянная.

Система прямоугольных координат с центром в Солнце и с неизменными направлениями осей была выбрана произвольно. Теперь выберем ось z направленной вдоль вектора момента количества движения Солнечной системы. Тогда окажется $c_1' = 0$, $c_2' = 0$, $c_3' = c$, а соотношения (89) примут вид

$$\sum_{s=1}^{n} m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s(1-e_s^2)} \sin i_s \sin \Omega_s = 0 \ ,$$

$$\sum_{s=1}^{n} m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s(1-e_s^2)} \sin i_s \cos \Omega_s = 0 \ , \tag{90}$$

$$\sum_{s=1}^{n} m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s(1-e_s^2)} \cos i_s = c \ .$$

Плоскость, перпендикулярная вектору момента количества движения планет, называется неизменной плоскостью Лапласа. Наклоны орбит планет в выбранной системе координат будут отсчитываться от плоскости Лапласа.

Обозначим через $a_s^{(0)}$, $e_s^{(0)}$, $i_s^{(0)}$ значения больших полуосей, эксцентриситетов и наклонов орбит планет в некоторый начальный момент времени t_0.

Сформулируем теорему Лапласа следующим образом:
Если величины $e_s^{(0)}$, $i_s^{(0)}$ все весьма малы, величины a_s в течение некоторого промежутка времени $[t_0, t_0 + T]$ весьма мало отличаются

от своих начальных значений $a_s^{(0)}$, величины $m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}$ суть величины одного и того же порядка, **то** для всех моментов времени в промежутке $[t_0, t_0+T]$ величины $e_s,\ i_s$ будут также оставаться весьма малыми.

Доказательство. Положим $a_s = a_s^{(0)} + \alpha_s\ (\alpha_s \ll a_s^{(0)})$. Согласно условию теоремы, все α_s суть функции времени, имеющие в промежутке времени $[t_0, t_0+T]$ весьма малые числовые значения. Разложим выражения $\sqrt{a_s}$ в ряды Тейлора по малым отношениям $\alpha_s/a_s^{(0)}$. Получим

$$\sqrt{a_s} = \sqrt{a_s^{(0)}}\left(1+\frac{\alpha_s}{a_s^{(0)}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a_s^{(0)}}\left(1+\frac{\alpha_s}{2a_s^{(0)}}+...\right) .$$

Подстановка этих выражений в третью из формул (90) дает

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}\sqrt{(1-e_s^2)}\cos i_s = c+\alpha , \tag{91}$$

где через α обозначена некоторая функция времени, которая получается после суммирования всех получающихся членов первого и более высоких порядков малости относительно $\alpha_s/a_s^{(0)}$. Эта функция принимет в промежутке времени $[t_0, t_0+T]$ весьма малые числовые значения и обращается в нуль при $t=t_0$.

Обозначим через $\overline{c}$ постоянную величину, определяемую формулой

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}} = \overline{c} . \tag{92}$$

Вычтем почленно равенство (91) из равенства (92). Получим уравнение

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}(1-\sqrt{1-e_s^2}\cos i_s) = \overline{c}-c-\alpha ,$$

которое можно также написать в виде

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}\frac{\sin^2 i_s + e_s^2\cos^2 i_s}{1+\sqrt{1-e_s^2}\cos i_s} = \tilde{c}-\alpha , \tag{93}$$

где $\tilde{c} = \overline{c} - c$.

Положим в уравнении (93) $t = t_0$. Имея в виду, что α обращается в нуль в начальный момент времени, найдем

$$\tilde{c} = \sum_{s=1}^{n} m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s^{(0)}} \frac{\sin^2 i_s^{(0)} + {e_s^{(0)}}^2 \cos^2 i_s^{(0)}}{1 + \sqrt{1 - {e_s^{(0)}}^2} \cos i_s^{(0)}} \ . \tag{94}$$

Теперь можно оценить величину константы $\tilde{c}$. Так как по условию теоремы все $e_s^{(0)}$, $i_s^{(0)}$ весьма малы, а величины $m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s^{(0)}}$ суть величины одного и того же порядка, то численное значение $\tilde{c}$ также будет весьма мало. Таким образом имеем

$$\tilde{c} \ll 1 \ , \quad \tilde{c} - \alpha \ll 1 \ .$$

Возвращаясь к уравнению (93), мы видим, что левая часть равенства также должна быть малой в промежутке времени $[t_0, t_0 + T]$. Это может быть только если все e_s, i_s остаются малыми на этом же промежутке времени. Теорема доказана.

В настоящее время эксцентриситеты и наклоны к плоскости Лапласа орбит больших планет весьма малы, а величины $m_s \sqrt{\mu_s} \sqrt{a_s^{(0)}}$ имеют значения приблизительно одинакового порядка. С другой стороны, благодаря тому, что в возмущениях больших полуосей планетных орбит нет вековых возмущений первого порядка малости, большие полуоси будут мало отличаться от их начальных значений в течение длительного времени. Следовательно, по теореме Лапласа эксцентриситеты и наклоны орбит больших планет будут столь же долго оставаться малыми. Так что планеты не смогут упасть на Солнце. Однако распространить этот вывод на космогонические интервалы времени нельзя.

Выводы на основе теоремы Лапласа оказываются приближенными из-за того, что мы пренебрегли наличием в Солнечной системе других небесных тел, то есть астероидов и комет. Поскольку массы этих тел весьма малы по сравнению с массами больших планет, можно полагать, что на ограниченных, но достаточно длительных интервалах времени влияние малых тел не изменит выводов о состоянии Солнечной системы.

4.4.4 Вывод Якоби о соотношении долгот узлов орбит в двухпланетной системе

В классических трудах и в некоторых учебниках этот вывод называется еще **Теоремой Якоби об исключении узлов в двухпланетной задаче.**

Рассмотрим задачу о движении двух планет под действием притяжения Солнца и их взаимного притяжения. Похожей на такую модель оказывается система "Солнце-Юпитер-Сатурн". Действительно, массы других планет существенно меньше масс Юпитера и Сатурна.

Возьмем два первых равенства из (90) для случая $n = 2$

$$m_1\sqrt{\mu_1}\sqrt{a_1(1-e_1^2)}\sin i_1 \sin\Omega_1 + m_2\sqrt{\mu_2}\sqrt{a_2(1-e_2^2)}\sin i_2 \sin\Omega_2 = 0 \ , \tag{95}$$

$$m_1\sqrt{\mu_1}\sqrt{a_1(1-e_1^2)}\sin i_1 \cos\Omega_1 + m_2\sqrt{\mu_2}\sqrt{a_2(1-e_2^2)}\sin i_2 \cos\Omega_2 = 0 \ .$$

Перепишем их в виде

$$m_1\sqrt{\mu_1}\sqrt{a_1(1-e_1^2)}\sin i_1 \sin\Omega_1 = -m_2\sqrt{\mu_2}\sqrt{a_2(1-e_2^2)}\sin i_2 \sin\Omega_2 \ ,$$

$$m_1\sqrt{\mu_1}\sqrt{a_1(1-e_1^2)}\sin i_1 \cos\Omega_1 = -m_2\sqrt{\mu_2}\sqrt{a_2(1-e_2^2)}\sin i_2 \cos\Omega_2 \ .$$

Теперь разделив почленно первое равенство на второе, получим соотношение, впервые выведенное Якоби:

$$\operatorname{tg}\Omega_1 = \operatorname{tg}\Omega_2 \ . \tag{96}$$

Из соотношения (96) следует, что либо должно быть $\Omega_1 = \Omega_2$, либо $\Omega_1 = \Omega_2 \pm 180°$. В первом случае оба слагаемых в каждом из уравнений (95) имеют одинаковые знаки, и их сумма не может быть раной нулю. Следовательно, остается вариант

$$\Omega_1 = \Omega_2 \pm 180°. \tag{97}$$

Из равенства (97) следует следующее свойство движения двух планет.

Если за основную плоскость взята неизменяемая плоскость Лапласа, то направление на восходящий узел одной планеты совпадает с направлением на нисходящий узел другой планеты.

Это свойство выполняется точно в рамках задачи о движении двух планет.

4.5. Классификация возмущений в движении планет

Рассмотрим в общем виде процесс определения возмущений различных порядков в элементах орбит планет методом малого параметра Ляпунова-Пуанкаре. Будем исходить из общего вида разложения возмущающей функции (61). Ограничимся рассмотрением возмущений орбиты одной планеты, обусловленных силой притяжения другой. В этом случае в формуле (61) $\lambda_1 = M', \lambda_2 = \omega', \lambda_2 = \Omega'$ суть такие же величины, как и M, ω, Ω, но относящиеся к возмущающей планете. В частности, $\dot{M}' = n'$ есть среднее движение возмущающей планеты. При интегрировании уравнений для возмущений какого-либо порядка в результате интегрирования будут получаться возмущения вида

$$\frac{C^{(m)}}{\sigma} \cos D, \quad \frac{S^{(m)}}{\sigma} \sin D \ ,$$

где

$$D = k_1 M + k_2 \omega + k_3 \Omega + j_1 M' + j_2 \omega' + j_3 \Omega' \ ,$$

$$\sigma = \dot{D} = k_1 n + k_2 \dot{\omega} + k_3 \dot{\Omega} + j_1 n' + j_2 \dot{\omega}' + j_3 \dot{\Omega}' \ ,$$

а $C^{(m)}, S^{(m)}$ зависят от остальных элементов орбит возмущаемой и возмущающей планет, а также содержат множителями малый параметр в степени m .

В выражении для σ скорости изменений элементов $\dot{\omega}$, $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}'$, $\dot{\Omega}'$ малы по сравнению со средними движениями n, n', поскольку вызваны взаимными возмущениями планет. Поэтому численные значения σ определяются в основном слагаемыми $k_1 n + j_1 n'$. При суммировании индексы k_1, j_1 могут иметь разные знаки. При некоторых значениях средних движений могут найтись такие индексы k_1, j_1, что $k_1 n + j_1 n' = 0$. Практически это означает, что в некоторых случаях возмущенного движения планет величина σ близка к нулю и называется малым знаменателем. Величина возмущении в этих случаях может быть весьма большой. Движение планет, при котором $k_1 n + j_1 n'$ близко к нулю называется резонансным. Само соотношение $k_1 n + j_1 n' = 0$ называется резонансным соотношением.

Поскольку экцентриситеты e, e', а также взаимный наклон орбит J для больших планет, малы, то для упрощения выкладок обычно используются разложения по степеням малых параметров $e, e', \nu = \sin^2 \frac{J}{2}$. Как уже было отмечено выше, в возмущениях могут появляться слагаемые, пропорциональные целым положительным степеням времени t. В процессе применения метода малого параметра интегрирование по времени выражений $\cos D$, $\sin D$ может выполняться многократно. В силу всех указанных обстоятельств возмущения каждого из элементов орбиты планеты будут представлены суммой слагаемых следующего общего вида:

$$\frac{A^{(m)} t^p e^{\alpha} e'^{\alpha'} \nu^{\beta}}{\sigma_1^{q_1} \sigma_2^{q_2} \ldots} \left(\begin{smallmatrix} \sin \\ \cos \end{smallmatrix}\right) D \; . \tag{98}$$

Как сумма всех полученных слагаемых, так и каждое из слагаемых называются возмущениями или неравенствами соответствующего орбитального элемента. В сумме встретится слагаемое, в котором

$$k_1 = k_2 = k_3 = j_1 = j_2 = j_3 = 0 \text{ и, следовательно, } D = 0 \; .$$

Такое слагаемое называется вековым возмущением. Если $p = 0$, то возмущение называется периодическим, а если $p \neq 0$ и $D \neq 0$ – то смешанным. Коэффициент $A^{(m)}$ зависит от больших полуосей орбит планет и имеет порядок малости m.

В процессе получения возмущений, а еще лучше перед этим, важно выяснить, какие из возмущений будут наиболее значительными, а какими можно в данной задаче пренебречь. Для оценки важности отдельных возмущений употребляется несколько характеристик.

Прежде всего следует учитывать порядок возмущения m. Чем ниже порядок, тем больше при прочих равных условиях влияние рассматриваемого возмущения.

Другая важная характеристика – это степень возмущения, определяемая суммой степеней $\alpha + \alpha' + \beta$. При малых эксцентриситетах и взаимном наклоне орбит вклад соответствующего возмущения существенно зависит от его степени.

В случаях движения планет, близкого к резонансу, вклад возмущений, в которых $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ малы, оказывается очень большим. Важной характеристикой возмущения становится суммарная степень малых делителей $q = q_1 + q_2 + \ldots$.

Очевидна важность вековых возмущений. Их влияние тем больше, чем больше степень p.

Пуанкаре показал, что важность отдельных возмущений в данной задаче определяется еще двумя характеристиками. Разность $m - p$ он назвал рангом возмущения, а разность $m - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q$ – классом возмущения. Пуанкаре доказал, что каждая их этих характеристик не может быть отрицательной, если отсутствуют резонансы между орбитальными движениями.

Важность учета тех или иных возмущений зависит от поставленной задачи, в частности от интервала времени, на котором моделируется движение планет.

Для не очень больших промежутков времени важнейшими являются возмущения наиболее низких порядков. Для более значительных интервалов времени величина возмущения может зависеть уже от его класса, а для очень больших интервалов времени порядка десятков тысяч и более лет влияние возмущений определяется рангом.

Глава 5. **Метод Лагранжа-Лапласа определения вековых возмущений планет**

5.1. Элементы Лагранжа

В предыдущих разделах рассмотрены уравнения движения относительно кеплеровых элементов. Эти уравнения называют уравнениями Лагранжа в оскулирующих элементах. Рассмотрим одно важное обстоятельство, связанное с этими уравнениями. Дело в том, что в некоторых случаях эти уравнения не годятся для решения задачи. Их нужно заменить другими. Рассмотрим это подробнее.

Для удобства восприятия воспроизведем здесь рассмотренные выше определения кеплеровых элементов.

n — среднее движение, размерность радиан/ед.времени;
e — эксцентриситет, безразмерный;
i — наклон (угол между вектором момента количества движения и осью z), рад.;
M_0 — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии M в начальный момент времении — эпоху), рад.;
ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;
Ω — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости Oxy между осью абсцисс x и линией узлов), рад.;
t_0 — начальный момент времени — эпоха элементов;
t — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

Применяются также комбинации кеплеровых элементов
$\varpi = \omega + \Omega$ — долгота перицентра, рад.;
$\varepsilon = \omega + \Omega + M_0$ — средняя долгота в поху, рад.

Воспроизведем здесь только три из шести уравнений Лагранжа

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2}\,\frac{\partial R}{\partial e}\,,\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\,\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial i}\,,\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial i}\,.
\end{aligned} \tag{99}$$

Правые части этих уравнений имеют особенности типа полюсов при

$e = 0$ и $i = 0$. При решении практических задач нулевых эксцентриситетов и наклонов не бывает, однако при малых эксцентриситетах и наклонах возникают вычислительные трудности и потеря точности вычислений. Лагранж сделал замену элементов промежуточной орбиты, как искомых функций в уравнениях возмущенного движения, которая позволила избежать указанных выше особенностей в уравнениях при $e = 0$ и $i = 0$. Новые переменные h, k, p, q связаны с кеплеровскими элементами следующими соотношениями:

$$h = e \sin \varpi, \quad k = e \cos \varpi,$$
$$p = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega. \tag{100}$$

Элемены h, k называют еще эксцентрическими, а элементы p, q – обликическими.

Уравнения относительно элементов Лагранжа имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= a_1 \frac{\partial R}{\partial k} - h a_2 \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + k a_3 \frac{\partial R}{\partial i}, \\
\frac{dk}{dt} &= -a_1 \frac{\partial R}{\partial h} - k a_2 \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - h a_3 \frac{\partial R}{\partial i}, \\
\frac{dp}{dt} &= b_1 \frac{\partial R}{\partial q} - p b_2 \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\
\frac{dq}{dt} &= -b_1 \frac{\partial R}{\partial p} - q b_2 \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right),
\end{aligned} \tag{101}$$

где

$$a_1 = \frac{\sqrt{1 - h^2 - k^2}}{na^2}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{1 - h^2 - k^2}}{na^2(1 + \sqrt{1 - h^2 - k^2})}, \tag{102}$$

$$a_3 = \frac{1}{na^2 \sqrt{1 - h^2 - k^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2} - 1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2} + 1}}, \tag{103}$$

$$b_1 = \frac{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}{na^2 \sqrt{1 - h^2 - k^2}}, \tag{104}$$

$$b_2 = \frac{(1 + p^2 + q^2)^{1/2}}{na^2 [1 + (1 + p^2 + q^2)^{-1/2}] \sqrt{1 - h^2 - k^2}}. \tag{105}$$

Правые части этих уравнений содержат частные производные от возмущающей функции R по кеплеровским элементам. Эти производные можно взять заранее, еще до замены переменных.

Элементы a и M_0, а также уравнения для них остаются неизменными.

Заметим, что при малых эксцентриситетах и наклонах орбиты можно рассматривать возмущения элементов Лагранжа в виде рядов по степеням этих малых величин. Задаваясь некоторой точностью вычислений, можно ограничиться членами определенного порядка малости. Заметим также, что коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 имеют нулевой, а коэффициент a_3 – первый порядок малости относительно малых эксцентриситета и наклона орбиты.

5.2. Определение вековых возмущений планет

Классики небесной механики пытались в первую очередь сделать какие-нибудь заключения об устойчивости Солнечной системы. Было ясно, что при взаимных возмущениях планет конфигурации орбит на больших интервалах времени определяются вековыми возмущениями орбитальных элементов. В результате применения метода малого параметра для интегрирования уравнений возмущенного движения в элементах орбит планет получаются вековые возмущения разных порядков малости. Из процедуры применения метода малого параметра оказывается, что вековые возмущения наинизшего порядка порождаются вековым членом в разложении возмущающей функции. По классификации Пуанкаре это возмущения нулевого ранга. Можно попытаться вычислить сразу все возмущения нулевого ранга, оставляя в разложении возмущающей функции только вековой член и интегрируя получаемые таким образом уравнения. Построить точное решение этих уравнений невозможно, однако используя малость эксцентриситетов и наклонов орбит планет можно заменить точные уравнения некоторым приближенным их вариантом, допускающим точное решение. Поскольку при этом не используются разложения по малым массам планет, то такое решение даст нам все возмущения нулевого ранга.

По теореме Лагранжа вековые возмущения нулевого ранга в больших полуосях орбит отсутствуют. Влиянием периодических возмущений больших полуосей орбит на конфигурацию планетной системы, по сравнению с влиянием на нее возмущений других элементов, мы можем пренебречь. Поэтому будем считать большие полуоси постоянными. Возмушения в средней аномалии M не изменяют размер, форму и плоскость орбиты планеты и на устойчивость Солнечной системы никак не влияют. Поэтому можно ограничиться рассмотрением вековых возмущений только в остальных четырех элементах орбит.

Если за основную плоскость принять плоскость Лапласа Солнечной системы, то действительно оказывается, что эксцентриситеты и наклоны орбит по крайней мере восьми больших планет достаточно малы. Решение получится тем более точным, чем меньшими будут значения эксцентриситетов и наклонов орбит. Поэтому придется перейти от кеплеровских оскулирующих элементов к эксцентрическим и облическим элементам Лагранжа. Уравнения относительно лагранжевых элементов не имеют особенностей при нулевых эксцентриситетах и наклонах орбит.

Следуя по указанному пути нужно прежде всего получить разложение вековой части возмущающей функции по степеням эсцентриситетов и наклонов орбит. Здесь мы возьмем готовый результат, выведенный в учебнике М.Ф.Субботина (1968). Будем рассматривать совокупность n планет. Запишем разложение вековой части возмущающей функции, обусловленной возмущениями элементов орбиты планеты номер μ под действием притяжения планеты номер ν в виде

$$\begin{gathered}\overline{R}_{\mu,\nu} = Gm_\nu\{M_{\mu,\nu} + N_{\mu,\nu}[e_\mu^2 + e_\nu^2 - \operatorname{tg}^2 i_\mu - \operatorname{tg}^2 i_\nu + \\ +2\operatorname{tg} i_\mu \operatorname{tg} i_\nu \cos(\Omega_\nu - \Omega_\mu)] - 2P_{\mu,\nu} e_\mu e_\nu \cos(\varpi_\nu - \varpi_\mu) + ...\}\end{gathered} \qquad (106)$$

или

$$\begin{aligned}\overline{R}_{\mu,\nu} = Gm_\nu\{M_{\mu,\nu} + N_{\mu,\nu}[h_\mu^2 + h_\nu^2 + k_\mu^2 + k_\nu^2 - p_\mu^2 - p_\nu^2 - q_\mu^2 - \\ -q_\nu^2 + 2(p_\mu p_\nu + q_\mu q_\nu)] - 2P_{\mu,\nu}(h_\mu h_\nu + k_\mu k_\nu) + ...\}\ .\end{aligned} \qquad (107)$$

Здесь через $M_{\mu,\nu}, N_{\mu,\nu}, P_{\mu,\nu}$ обозначены функции от a_μ, a_ν, симметричные относительно этих величин. Таким образом, имеем $M_{\mu,\nu} = M_{\nu,\mu}$, $N_{\mu,\nu} = N_{\nu,\mu}$, $P_{\mu,\nu} = P_{\nu,\mu}$.

Для большей простоты формул предположим, что время t отсчитывается от некоторого начального момента времени – эпохи элементов так, что в начальный момент $t = 0$.

Далее, чтобы получить точное решение уравнений для эксцентрических и облических элементов Лагранжа, ограничимся в разложении возмущающей функции выписанными здесь членами. Тогда с принятой точностью сами уравнения можно записать в следующем виде:

$$\frac{dh_\mu}{dt} = \frac{1}{n_\mu a_\mu^2}\frac{\partial \overline{R}_\mu}{\partial k_\mu}\ ,\ \ \frac{dk_\mu}{dt} = -\frac{1}{n_\mu a_\mu^2}\frac{\partial \overline{R}_\mu}{\partial h_\mu}, \qquad (108)$$

$$\frac{dp_\mu}{dt} = \frac{1}{n_\mu a_\mu^2}\frac{\partial \overline{R}_\mu}{\partial q_\mu}\ , \quad \frac{dq_\mu}{dt} = -\frac{1}{n_\mu a_\mu^2}\frac{\partial \overline{R}_\mu}{\partial p_\mu}\ , \tag{109}$$

где

$$\overline{R}_\mu = {\sum_{\nu=1}^{n}}' \overline{R}_{\mu,\nu} \quad (\mu = 1, 2, ..., n)\ , \tag{110}$$

Штрих у знака суммы означает, что пропущено слагаемое при $\nu = \mu$. Построенные дифференциальные уравнения оказываются линейными относительно искомых функций $h_\mu, k_\mu, p_\mu, q_\mu \quad (\mu = 1, 2, ..., n)$.

Подставим выражение для $\overline{R}_{\mu,\nu}$ (107) в формулу (110), а найденное таким образом выражение для $\overline{R}_\mu$ в уравнения (108). Получим

$$\frac{dh_\mu}{dt} = \left(\frac{2G}{n_\mu a_\mu^2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu N_{\mu\nu}\right) k_\mu - {\sum_{\nu=1}^{n}}' \left(\frac{2G}{n_\mu a_\mu^2} m_\nu P_{\mu\nu}\right) k_\nu\ ,$$

$$\frac{dk_\mu}{dt} = -\left(\frac{2G}{n_\mu a_\mu^2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu N_{\mu\nu}\right) h_\mu + {\sum_{\nu=1}^{n}}' \left(\frac{2G}{n_\mu a_\mu^2} m_\nu P_{\mu\nu}\right) h_\nu\ .$$

Обозначая

$$A_{\mu,\mu} = \frac{2G}{n_\mu a_\mu^2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu N_{\mu\nu}, \quad A_{\mu,\nu} = \frac{2G}{n_\mu a_\mu^2} m_\nu P_{\mu\nu} \ \ (\nu \neq \mu)\ , \tag{111}$$

последние два уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dh_\mu}{dt} &= A_{\mu,\mu} k_\mu - {\sum_{\nu=1}^{n}}' A_{\mu,\nu} k_\nu\ , \\ \frac{dk_\mu}{dt} &= -A_{\mu,\mu} h_\mu + {\sum_{\nu=1}^{n}}' A_{\mu,\nu} h_\nu\ , \end{aligned} \tag{112}$$

В результате аналогичных преобразований уравнений (109) получим

$$\begin{aligned} \frac{dp_\mu}{dt} &= -A_{\mu,\mu} q_\mu + {\sum_{\nu=1}^{n}}' B_{\mu,\nu} q_\nu\ , \\ \frac{dq_\mu}{dt} &= A_{\mu,\mu} p_\mu - {\sum_{\nu=1}^{n}}' B_{\mu,\nu} p_\nu\ , \end{aligned} \tag{113}$$

где
$$B_{\mu,\nu} = \frac{2G}{n_\mu a_\mu^2} m_\nu N_{\mu\nu} \;\; (\nu \neq \mu) \; .$$

Поскольку мы предполагаем, что большие полуоси планет постоянны, коэффициенты $A_{\mu,\mu}$, $A_{\mu,\nu}$ и $B_{\mu,\nu}$ также будут постоянными. В итоге получаем две системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (112), (113).

Решают такие уравнения следующим методом. Сначала находим частные решения. Для уравнений (112) частные решения будем искать в виде
$$h_\mu = q^{(\mu)} \sin(gt + \beta_\mu) \; , \quad k_\mu = q^{(\mu)} \cos(gt + \beta_\mu) \; ,$$

где $q^{(\mu)}, g, \beta_\mu$ – неопределенные постоянные. Подставляя эти функции времени в уравнения (112), получим
$$q^{(\mu)} g \cos(gt + \beta_\mu) = A_{\mu,\mu} q^{(\mu)} \cos(gt + \beta_\mu) - \\ - {\sum_{\nu=1}^{n}}' A_{\mu,\nu} q^{(\nu)} \cos(gt + \beta_\nu) \; , \qquad (114)$$

$$-q^{(\mu)} g \sin(gt + \beta_\mu) = -A_{\mu,\mu} q^{(\mu)} \sin(gt + \beta_\mu) + \\ + {\sum_{\nu=1}^{n}}' A_{\mu,\nu} q^{(\nu)} \sin(gt + \beta_\nu) \; . \qquad (115)$$

Постоянные β_μ были до сих пор произвольными. Поскольку мы ищем частные решения, то положим их все равными некоторой одной произвольной постоянной β, т. е. $\beta_\mu = \beta \quad (\mu = 1, 2, ...n)$. Тогда, сокращая в левых и правых частях уравнений (114) на $\cos(gt+\beta)$, а в левых и правых частях уравнений (115) на $\sin(gt + \beta)$, получим одну и ту же систему уравнений
$$\begin{gathered} (A_{1,1} - g) q^{(1)} - A_{1,2} q^{(2)} - ... - A_{1,n} q^{(n)} = 0 \; , \\ -A_{2,1} q^{(1)} + (A_{2,2} - g) q^{(2)} - ... - A_{2,n} q^{(n)} = 0 \; , \\ ... \\ -A_{n,1} q^{(1)} - A_{n,2} q^{(2)} - ... + (A_{n,n} - g) q^{(n)} = 0 \; , \end{gathered} \qquad (116)$$

относительно постоянных $q^{(\mu)}, g$.

Сделаем в уравнениях (116) замену искомых величин по формуле

$$q^{(\mu)} = \frac{1}{a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}} L^{(\mu)} \quad (\mu = 1, 2, ..., n) \ . \tag{117}$$

Затем каждое из уравнений с номером μ умножим на $a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}$. Получим уравнения относительно новых искомых величин $L^{(\mu)}$ в виде

$$\begin{aligned} &(A_{1,1} - g)L^{(1)} + \overline{A}_{1,2}L^{(2)} + ... + \overline{A}_{1,n}L^{(n)} = 0 \ , \\ &\overline{A}_{2,1}L^{(1)} + (A_{2,2} - g)L^{(2)} + ... + \overline{A}_{2,n}L^{(n)} = 0 \ , \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ... \\ &\overline{A}_{n,1}L^{(1)} + \overline{A}_{n,2}L^{(2)} + ... + (A_{n,n} - g)L^{(n)} = 0 \ , \end{aligned} \tag{118}$$

где

$$\overline{A}_{\mu,\nu} = -\frac{a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}}{a_\nu\sqrt{m_\nu n_\nu}} A_{\mu,\nu} \ . \tag{119}$$

Чтобы уравнения (118) относительно $L^{(\mu)}$ имели кроме тривиального еще другие решения, необходимо, чтобы определитель матрицы коэффициентов уравнений был равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} - g & \overline{A}_{1,2} & ... & \overline{A}_{1,n} \\ \overline{A}_{21} & A_{2,2} - g & ... & \overline{A}_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \overline{A}_{n1} & \overline{A}_{n2} & ... & A_{n,n} - g \end{vmatrix} = 0. \tag{120}$$

Это соотношение следует рассматривать как уравнение относительно неизвестной постоянной g.

Теперь, учитывая, что $N_{\mu,\nu} = N_{\nu,\mu}, P_{\mu,\nu} = P_{\nu,\mu}$ а также равенства (111) и (119) можно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \overline{A}_{\mu,\nu} = -\frac{a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}}{a_\nu\sqrt{m_\nu n_\nu}} A_{\mu,\nu} &= -\frac{a_\mu^2 m_\mu n_\mu}{a_\nu\sqrt{m_\nu n_\nu}\ \ a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}} A_{\mu,\nu} = \\ &= -\frac{a_\mu^2 m_\mu n_\mu}{a_\nu\sqrt{m_\nu n_\nu}\ \ a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}} \frac{2Gm_\nu}{n_\mu a_\mu^2} P_{\mu,\nu} = \\ &= -\frac{a_\nu^2 m_\nu n_\nu}{a_\nu\sqrt{m_\nu n_\nu}\ \ a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}} \frac{2Gm_\mu}{n_\nu a_\nu^2} P_{\nu,\mu} = \\ = -\frac{a_\nu^2 m_\nu n_\nu}{a_\nu\sqrt{m_\nu n_\nu}\ \ a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}} A_{\nu,\mu} &= -\frac{a_\nu\sqrt{m_\nu n_\nu}}{a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}} A_{\nu,\mu} = \overline{A}_{\nu,\mu} \end{aligned} \tag{121}$$

Теперь видно, что матрица коэффициентов уравнений (118) оказывается симметричной. Следовательно уравнение (120) имеет n действительных корней $g_1, g_2, ..., g_n$.

В общем случае среди действительных корней $g_1, g_2, ..., g_n$ могут оказаться равные. Рядом исследователей показано, что и в этом случае решения всегда ограничены. Ссылки на соответствующие работы можно найти в книге Субботина (1968) и книге Холшевникова (Холшевников, 1985).

Для каждого из корней $g_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, ..., n)$ можно получить решение уравнений (118) с точностью до произвольного постоянного множителя, который можно положить равным единице, поскольку мы ищем частные решения дифференциальных уравнений. Это решение запишем в виде

$$L_\lambda^{(1)}, L_\lambda^{(2)}, ..., L_\lambda^{(n)} \ .$$

Соответствующее решение уравнений (116) найдется по формуле

$$q_\lambda^{(\mu)} = \frac{1}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}} L_\lambda^{(\mu)} \quad (\mu = 1, 2, ..., n) \ . \tag{122}$$

Общее решение уравнений (108) составляется как сумма линейных комбинаций частных решений с коэффициентами, являющимися независимыми произвольными постоянными интегрирования. При этом в каждом частном решении произвольная постоянная β выбирается независимо. Общее решение будет иметь вид

$$\begin{gathered} h_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n} C_\lambda \frac{L_\lambda^{(\mu)}}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}} \sin(g_\lambda t + \beta_\lambda) \ , \\ k_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n} C_\lambda \frac{L_\lambda^{(\mu)}}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}} \cos(g_\lambda t + \beta_\lambda) \\ (\mu = 1, 2, ..., n) \ , \end{gathered} \tag{123}$$

где $C_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, ..., n)$ – независимые произвольные постоянные.

Общее решение уравнений (109) находится аналогично. Частные решения ищем в виде

$$p_\mu = p^{(\mu)} \sin(ft + \gamma_\mu) \ , \quad q_\mu = p^{(\mu)} \cos(ft + \gamma_\mu) \ ,$$

Делая замену

$$p^{(\mu)} = \frac{1}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}} M^{(\mu)} \quad (\mu = 1, 2, ..., n) \ , \tag{124}$$

составляем линейные однородные уравнения относительно $M^{(\mu)}$ в виде

$$
\begin{aligned}
&(A_{1,1}-f)M^{(1)}+\overline{B}_{1,2}M^{(2)}+...+\overline{B}_{1,n}M^{(n)}=0\ ,\\
&\overline{B}_{2,1}M^{(1)}+(A_{2,2}-f)M^{(2)}+...+\overline{B}_{2,n}M^{(n)}=0\ ,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ...\\
&\overline{B}_{n,1}M^{(1)}+\overline{B}_{n,2}M^{(2)}+...+(A_{n,n}-f)M^{(n)}=0\ ,
\end{aligned}
\tag{125}
$$

где

$$
\overline{B}_{\mu,\nu}=-\frac{a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}}{a_\nu\sqrt{m_\nu n_\nu}}B_{\mu,\nu}\ .
\tag{126}
$$

Для построения нетривиального решения для $M^{(\mu)}$ накладываем следующее условие на определитель матрицы коэффициентов:

$$
\begin{vmatrix}
A_{1,1}-f & \overline{B}_{1,2} & ... & \overline{B}_{1,n}\\
\overline{B}_{21} & A_{2,2}-f & ... & \overline{B}_{2n}\\
... & ... & ... & ...\\
\overline{B}_{n1} & \overline{B}_{n2} & ... & A_{n,n}-f
\end{vmatrix}=0.
\tag{127}
$$

Для каждого из n действительных корней этого уравнения f_1, f_2, ..., f_n решаем уравнения (125) и строим затем общее решение уравнений Лагранжа (109) для облических переменных p_μ, q_μ в виде

$$
\begin{aligned}
p_\mu&=\sum_{\lambda=1}^{n}D_\lambda\frac{M_\lambda^{(\mu)}}{a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}}\sin(f_\lambda t+\gamma_\lambda)\ ,\\
q_\mu&=\sum_{\lambda=1}^{n}D_\lambda\frac{M_\lambda^{(\mu)}}{a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}}\cos(f_\lambda t+\gamma_\lambda)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad(\mu=1,2,...,n)\ ,
\end{aligned}
\tag{128}
$$

где $D_\lambda, \gamma_\lambda$ $(\lambda=1,2,...,n)$ – произвольные постоянные интегрирования.

Чтобы построить модель движения планет, наиболее близкую к действительности, нужно сначала определить из наблюдений значения элементов Лагранжа на начальный момент времени $t=0$. Обозначим эти значения следующим образом:

$$
h_\mu^{(0)}=h_\mu(0)\ ,\quad k_\mu^{(0)}=k_\mu(0)\ ,\quad p_\mu^{(0)}=p_\mu(0)\ ,\quad q_\mu^{(0)}=q_\mu(0)\ ,\qquad(\mu=1,2,...,n)\ .
\tag{129}
$$

Затем нужно определить значения произвольных постоянных $C_\lambda, \beta_\lambda, D_\lambda, \gamma_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, ..., n)$. Они найдутся из соотношений

$$
\begin{aligned}
h_\mu^{(0)} &= \sum_{\lambda=1}^{n} C_\lambda \frac{L_\lambda^{(\mu)}}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}} \sin\beta_\lambda \ , \\
k_\mu^{(0)} &= \sum_{\lambda=1}^{n} C_\lambda \frac{L_\lambda^{(\mu)}}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}} \cos\beta_\lambda \\
p_\mu^{(0)} &= \sum_{\lambda=1}^{n} D_\lambda \frac{M_\lambda^{(\mu)}}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}} \sin\gamma_\lambda \ , \\
q_\mu^{(0)} &= \sum_{\lambda=1}^{n} D_\lambda \frac{M_\lambda^{(\mu)}}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}} \cos\gamma_\lambda \\
& \qquad\qquad (\mu = 1, 2, ..., n) \ .
\end{aligned}
\tag{130}
$$

В итоге элементы орбит планет, как функции времени, найдутся в виде

$$
\begin{aligned}
h_\mu &= \sum_{\lambda=1}^{n} E_\lambda^{(\mu)} \sin(g_\lambda t + \beta_\lambda) \ , \\
k_\mu &= \sum_{\lambda=1}^{n} E_\lambda^{(\mu)} \cos(g_\lambda t + \beta_\lambda) \\
p_\mu &= \sum_{\lambda=1}^{n} F_\lambda^{(\mu)} \sin(f_\lambda t + \gamma_\lambda) \ , \\
q_\mu &= \sum_{\lambda=1}^{n} F_\lambda^{(\mu)} \cos(f_\lambda t + \gamma_\lambda) \\
& \qquad\qquad (\mu = 1, 2, ..., n) \ ,
\end{aligned}
\tag{131}
$$

где коэффициенты $E_\lambda^{(\mu)}$ и $F_\lambda^{(\mu)}$ определяются соотношениями

$$
E_\lambda^{(\mu)} = C_\lambda \frac{L_\lambda^{(\mu)}}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}} \ , \quad F_\lambda^{(\mu)} = D_\lambda \frac{M_\lambda^{(\mu)}}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}} \ .
$$

На этом завершается вывод общего решения уравнений для оскулирующих элементов орбит планет. Остается применить его для Солнечной системы и посмотреть, как изменяются орбиты планет Солнечной системы на больших интервалах времени.

5.3. Эволюция орбит планет

В предыдущем разделе получено общее решение дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов орбит планет. На основе общего решения уже можно сделать некоторые выводы.

Прежде всего покажем, что уравнения (112) имеют первый интеграл. Из соотношений (121) имеем

$$\begin{aligned} m_\mu n_\mu a_\mu^2 A_{\mu,\nu} &= -m_\mu n_\mu a_\mu^2 \frac{\sqrt{m_\nu n_\nu} a_\nu}{\sqrt{m_\mu n_\mu} a_\mu} \overline{A}_{\mu,\nu} = \\ = -\sqrt{m_\mu n_\mu} a_\mu \sqrt{m_\nu n_\nu} a_\nu \overline{A}_{\mu,\nu} &= -\sqrt{m_\mu n_\mu} a_\mu \sqrt{m_\nu n_\nu} a_\nu \overline{A}_{\nu,\mu} = \\ &= m_\nu n_\nu a_\nu^2 \frac{\sqrt{m_\mu n_\mu} a_\mu}{\sqrt{m_\nu n_\nu} a_\nu} \overline{A}_{\nu,\mu} = m_\nu n_\nu a_\nu^2 A_{\nu,\mu} \ . \end{aligned} \tag{132}$$

Умножим первые из уравнений (112) на $m_\mu n_\mu a_\mu^2 h_\mu$, вторые умножим на $m_\mu n_\mu a_\mu^2 k_\mu$ и просуммируем после этого все уравнения по μ от 1 до n. Используя равенства (132) получим

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu n_\mu a_\mu^2 \left(h_\mu \frac{dh_\mu}{dt} + k_\mu \frac{dk_\mu}{dt} \right) = \\ = -\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n}{}' m_\mu n_\mu a_\mu^2 A_{\mu,\nu} k_\nu h_\mu + \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n}{}' m_\mu n_\mu a_\mu^2 A_{\mu,\nu} h_\nu k_\mu = \\ = -\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n}{}' m_\mu n_\mu a_\mu^2 A_{\mu,\nu} k_\nu h_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu n_\mu a_\mu^2 A_{\mu,\nu} h_\nu k_\mu = \\ = -\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n}{}' m_\mu n_\mu a_\mu^2 A_{\mu,\nu} k_\nu h_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\nu n_\nu a_\nu^2 A_{\nu,\mu} h_\nu k_\mu = \\ = -\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n}{}' m_\mu n_\mu a_\mu^2 A_{\mu,\nu} k_\nu h_\mu + \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n}{}' m_\mu n_\mu a_\mu^2 A_{\mu,\nu} h_\mu k_\nu = 0 \ , \end{aligned} \tag{133}$$

откуда интегрированием по t найдем

$$\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu n_\mu a_\mu^2 (h_\mu^2 + k_\mu^2) = \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu n_\mu a_\mu^2 e_\mu^2 = C \ , \tag{134}$$

где C – произвольная постоянная.

Аналогично найдется первый интеграл для уравнений (113)

$$\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu n_\mu a_\mu^2 (p_\mu^2 + q_\mu^2) = \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu n_\mu a_\mu^2 \operatorname{tg}^2 i = C' \ , \qquad (135)$$

где C' – другая произвольная постоянная.

Если в интегралах (134),(135) взять в рассмотрение только те планеты, для которых величины $m_\mu n_\mu a_\mu^2$ имеют примерно один и тот же порядок, то малость эксцентриситетов в начальный момент времени влечет за собой их малость для любых других моментов. В настоящее время эксцентриситеты восьми больших планет малы. Когда за основную плоскость взята плоскость Лапласа, то наклоны орбит больших планет также малы. Следовательно эксцентриситеты и наклоны останутся малыми и в будущем по крайней мере на миллионы лет вперед. Этот вывод находится в согласии с уже рассмотренными теоремами об устойчивости Солнечной системы.

Общее решение уравнений для элементов орбит планет приведено выше. Напомним, что это точное решение приближенных уравнений движения планет под возмущающим действием их взаимного притяжения. Приближенность уравнений обусловлена тем, что в правых частях от разложений по степеням малых эксцентриситетов и наклонов орбит оставлены только главные члены, пропорциональные первым степеням малых параметров. Кроме того, приближенность уравнений обусловлена также тем, что большие полуоси орбит считаются постоянными.

Чтобы использовать полученное общее решение уравнений относительно элементов Лагранжа для рассмотрения эволюции орбит планет на больших интервалах времени, необходимо определить значения произвольных постоянных из данных наблюдений. Если это сделано, то коэффициенты $E_\lambda^{(\mu)}$ и $F_\lambda^{(\mu)}$ и фазы β_λ, γ_λ станут известными. Из соотношений (131) можно вывести следующие неравенства:

$$e_\mu < |E_1^{(\mu)}| + |E_2^{(\mu)}| + ... + |E_n^{(\mu)}| \ ,$$

$$\operatorname{tg} i_\mu < |F_1^{(\mu)}| + |F_2^{(\mu)}| + ... + |F_n^{(\mu)}| \ .$$

Эти неравенства позволяют найти верхние границы эксцентриситетов и наклонов орбит планет.

От элементов Лагранжа h, k, p, q можно перейти к кеплеровским элементам ω, Ω. Изменения этих кеплеровских элементов могут быть

Таблица 1: Пределы изменений эксцентриситетов и наклонов орбит планет по результатам работы Брауэра и Вуркома (1950).

Планеты	Пределы эксц-та	Период обращения перигелия, тыс. лет	Пределы наклона, град	Период обращения узла, тыс. лет
Меркурий	0.109 - 0.241	220	4.5 - 9.8	250
Венера	... - 0.074	...	... - 3.4	...
Земля	... - 0.067	...	... - 2.9	...
Марс	0.004 - 0.141	72	... - 6.2	...
Юпитер	0.027 - 0.062	300	0.2 - 0.5	50
Сатурн	0.012 - 0.086	47	0.8 - 1.0	50
Уран	... - 0.067	...	0.9 - 1.1	450
Нептун	0.005 - 0.013	2000	0.6 - 0.8	1900

весьма замысловатыми, однако ясно, что скорости изменения во времени будут иметь тот же порядок, что и величины g_λ, f_λ. Анализ уравнений показывает, что они имеют порядок величин масс планет, выраженнных в долях массы Солнца.

Определение произвольных постоянных в общем решении уравнений по известным значениям масс и больших полуосей планет было сделано в работах ряда авторов. Наиболее значимые результаты можно взять из публикации Брауэра и Вуркома (1950). В Табл. 1 приводятся некоторые результаты этой работы.

Возмущения элементов орбит планет, найденные в форме (131), называются вековыми возмущениями в тригонометрической форме, поскольку в возмущающей функции оставлен только вековой член, а изменения элементов орбит описываются тригонометрическими функциями. Полученные выражения для возмущений несколько расширяют наши сведения относительно устойчивости Солнечной системы. Совместно с теоремами об отсутствии вековых возмущений первого и второго порядков больших полуосей орбит планет эти выражения позволяют утверждать неизменность конфигурации Солнечной системы на очень больших интервалах времени, по крайней мере в течение нескольких миллионов лет.

Глава 6. **Канонические уравнения и канонические преобразования**

6.1. Канонические уравнения в небесной механике

В предыдущих разделах рассмотрены методы теории возмущений в применении к уравнениям движения, записанным относительно прямоугольных координат небесного тела и уравнениям относительно кеплеровских элементов орбиты. Эти переменные наглядно представляют параметры траекторий. В этом их достоинство. Для решения уравнений и анализа решений всегда приходится рассматривать правые части шести уравнений движения. Правые части часто выражаются сложными и громоздкими функциями, которые несут полную информацию о законах взаимодействия тел.

Наряду с таким подходом в теоретической и небесной механике применяется другой математический аппарат, основанный на канонических уравнениях, канонических преобразованиях и канонических переменных. Этот математический аппарат во многих случаях имеет значительные преимущества. Вся информация о законах взаимодействия тел содержится в одной единственной функции, называемой гамильтонианом, а сами уравнения движения имеют всегда один и от же вид. Поэтому построение решения иногда оказывается более простым. Многие методы небесной механики могут быть реализованы как на основе уравнений относительно прямоугольных координат и кеплеровских элементов, так и на основе канонических уравнений.

Канонические преобразования эффективно применялись классиками небесной механики в качественных методах, когда само решение в явном виде не выводится, но изучаются его свойства. На основе канонических преобразований разработаны современные новые методы анализа поведения динамических систем. Некоторые методы небесной механики приобретают более изящную форму, а решение в ряде случаев имеет более простой вид.

В практических задачах небесной механики, когда решение нужно доводить до вычислительных программ, а точность модели движения требуется весьма высокой, преимущества того или иного подхода не столь очевидны. Выбор метода может определяться привычками и опытом исследователя.

В литературе существуют несколько форм изложения метода канонических уравнений в небесной механике. Мы будем придерживаться здесь стиля лекций, которые читались на Астрономическом отделении физического факультета МГУ профессором Е.П. Аксеновым. Похожее изложение можно найти в книге Субботина (1968).

6.2. Вывод уравнений Гамильтона из уравнений Лагранжа 2-го рода

Рассмотрим теперь, как получаются уравнения движения в канонической форме, если они уже заданы в какой-либо другой форме.

В теоретической механике и в небесной механике наряду с прямоугольными координатами применяются также обобщенные координаты и соотвествующие обобщенные скорости. Обобщенные координаты связывают с прямоугольными координатами с помощью функций аналитических по крайней мере в некоторый областях значений координат.

Рассмотрим динамическую систему, состоящую из конечного числа материальных точек. Положения этих точек будем определять обобщенными координатами $q_j \ \ (j = 1, 2, ..., k)$, где k – число степеней свободы системы.

Будем предполагать, что действующие на систему силы имеют силовую функцию $U(q_1, q_1, ..., q_k)$, зависящую только от обобщенных координат. Соответствующие обобщенные скорости будем обозначать через $\dot{q}_j$.

Состояние системы в любой момент t определяется уравнениями Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, ..., k) \tag{136}$$

и начальными условиями $q_j(t_0) = q_j^{(0)}, \dot{q}_j(t_0) = \dot{q}_j^{(0)}$, где T – кинетическая энергия, а t_0 – начальный момент времени. Зависимость кинетической энергии от обобщенных скоростей имеет вид

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{137}$$

где

$$T_2 = \sum_i \sum_j A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad T_1 = \sum_j A_j \dot{q}_j, \tag{138}$$

а $T_0, \quad A_{ij}, \quad A_j$ не зависят от $\dot{q}_j$, но могут зависеть от обобщенных координат q_j и времени t.

В записи сумм мы будем для краткости опускать пределы суммирования. Суммы рассматриваются в пределах от 1 до k.

Уравнения (136) суть k уравнений 2-го порядка. Преобразуем их к $2k$ уравнениям 1-го порядка. Для этого сделаем замену переменных – искомых функций. Введем вместо $\dot{q}_j$ новые переменные p_j по формулам

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}. \tag{139}$$

Тогда с учетом (137) и (138) имеем

$$p_j = 2\sum_i A_{ij}\dot{q}_j + A_j.$$

Если $det\{A_{ij}\} \neq 0$, то рассматривая предыдущие равенства как линейные неоднородные уравнения относительно $\dot{q}_j$, можно найти

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(p_1, p_2, ..., p_k, q_1, q_2, ..., q_k). \tag{140}$$

Доказательство неравенства нулю этого определителя в задачах небесной механики имеется в книге Шарлье (1966).

Выведем уравнения для q_j и p_j . С помощью (136) и (139) имеем

$$\frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j, \quad \frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j}. \tag{141}$$

Теперь нужно выразить правые части этих уравнений через q_j и p_j. Введем новую функцию

$$K = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + ... + p_k\dot{q}_k - T.$$

В силу (140) K есть функция от q_j и p_j. Тогда

$$\frac{\partial K}{\partial p_j} = \dot{q}_j + p_1\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_j} + p_2\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_j} + ... + p_k\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} -$$

$$-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_j} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_j} - ... - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j},$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = p_1\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_j} + p_2\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_j} + ... + p_k\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} -$$

$$-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_j} - ... - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j}. - \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Эти равенства можно написать несколько короче

$$\frac{\partial K}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{k} \left(p_i - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j},$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{k} \left(p_i - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

В силу формулы (139) выражения в круглых скобках равны нулю. Тогда имеем

$$\frac{\partial K}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \quad \frac{\partial K}{\partial q_j} = -\frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Последение соотношения позволяют записать уравнения (141) в виде

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Правая часть первого из этих уравнений не изменится если из нее вычесть $\frac{\partial U}{\partial p_j}$, так как

$$\frac{\partial U}{\partial p_j} = 0.$$

Поэтому наши уравнения переписываются так:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_j} - \frac{\partial U}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Введем теперь функцию

$$F = K - U. \tag{142}$$

Тогда дифференциальные уравнения принимают простой вид

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, ..., k). \tag{143}$$

Возвращаясь к формуле (142), видим, что $U = U(q_1, q_2, ..., q_k)$, а K была введена, как функция от $q_1, q_2, ..., q_k$, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_k, p_1, p_2, ..., p_k$:

$$K = \sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i - T.$$

Учитывая определение обобщенных импульсов, данное формулой (139), выражение для функции K запишем в виде

$$K = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T.$$

С другой стороны, $T = T_2 + T_1 + T_0$. Следовательно

$$K = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T_2 - T_1 - T_0.$$

Теорема Эйлера об однородных функциях гласит, что если некоторая функция $\Phi(x, y, z)$ является однородной функцией x, y, z порядка n, то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z = n\Phi.$$

В силу этой теоремы имеют место соотношения

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2 \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = T_1,$$

следовательно $K = 2T_2 + T_1 - T_2 - T_1 - T_0$ или $K = T_2 - T_0$. В силу этого функция F будет определяться формулой

$$F = T_2 - T_0 - U. \tag{144}$$

С помощью соотношений (140) T_2 можно выразить как функцию от $q_1, q_2, ..., q_k, p_1, p_2, ..., p_k$. Тогда и функция F, заданная формулой (144), также окажется выраженной через $q_1, q_2, ..., q_k, p_1, p_2, ..., p_k$.

Уравнения (143) называются *каноническими уравнениями* или *уравнениями Гамильтона*, а функция F называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом.*

Очень часто в задачах механики $T_1 = 0, T_0 = 0$, тогда

$$F = T - U\ .$$

В общем случае гамильтониан является явной функцией от обобщенных координат q_i, обобщенных импульсов p_i и времени t.

Уравнения Гамильтона представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Количество уравнений в системе $2k$, общий порядок системы также $2k$. Независимой переменной является время t. Искомые фукнкции q_1, q_2, ..., q_k, p_1, p_2, ..., p_k. Канонические переменные q_1, q_2, ..., q_k и p_1, p_2, ..., p_k называют взаимно сопряженными.

Формально для решения уравнений уравнений Гамильтона правые части должны быть выражены явно через искомые функции и время. Нужно вычислить содержащиеся там частные производные. Однако, сохраняя для уравнений форму (143), можно выгодно использовать тот факт, что уравнения определяются одной единственной функцией – гамильтонианом F. Методы решения уравнений Гамильтона представляют собой действия над гамильтонианом.

В любом случае общее решение уравнений Гамильтона (143) имеет вид

$$q_j = q_j(t, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{2k}), \quad p_j = p_j(t, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{2k}), \tag{145}$$

где $\gamma_s = const \quad (s = 1, 2, ..., 2k)$ - произвольные постоянные интегрирования.

Рассмотрим один частный случай, когда F не зависит явно от времени t. В этом случае

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \ .$$

Помножим первое из уравнений (143) почленно на $\frac{dp_j}{dt}$, второе – на $-\frac{dq_j}{dt}$, сложим почленно полученные равенства и просуммируем их по j от 1 до k. Получим, очевидно

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{dp_j}{dt} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} \ .$$

Так как F не зависит явно от времени, то в правой части последнего равенства оказывается полная производная от F по t, так что

$$\frac{dF}{dt} = 0 \ .$$

Отсюда следует, что $F = h$, где h - произвольная постоянная интегрирования. Таким образом получен первый интеграл системы уравнений (143). Если же $T \equiv T_2$ – квадратичная форма обобщенных скоростей, то этот первый интеграл имеет вид

$$T - U = h$$

– интеграл энергии. Однако в общем случае соотношение $F = h$ не является интегралом энергии, так как в (144) содержится не вся кинетическая энергия, а только часть ее.

Подведем итог. Опишем схему действий, чтобы составить уравнения Гамильтона. Рассмотрим типичную ситуацию. Допустим, что мы имеем динамическую систему, движение которой описывается дифференциальными уравнениями с силовой функцией $U(q_1, q_2, ..., q_k)$, где аргументы $q_1, q_2, ..., q_k$ суть обобщенные координаты. Допустим также, что исходные уравнения не имеют канонической формы. Последовательность действий может состоять из следующих операций.

1) Находим выражение кинетической энергии T через обобщенные координаты $q_1, q_2, ..., q_k$ и обобщенные скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_k$.

2) Вводим обобщенные импульсы по формуле (4).

3) Выражаем обобщенные скорости как функции обобщенных импульсов.

4) Находим выражение для кинетической энергии через обобщенные импульсы, получая тем самым гамильтониан системы $F = T_2 - T_0 - U$.

5) Просто записываем уравнения Гамильтона

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_j}.$$

Выполним указанные действия на конкретном примере. Рассмотрим задачу двух тел P_0 и P. Пусть P_0xyz – невращающая система координат. Движение тела P относительно P_0 описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r_3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r_3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r_3}, \tag{146}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \mu = G(m_0 + m)$ – гравитационный параметр тел P_0 и P, G – гравитационная постоянная, а m_0 и m – массы тел.

Введем сферические координаты r , φ (широта), λ (долгота) с помощью формул преобразования

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda, \quad y = r\cos\varphi\sin\lambda, \quad z = r\sin\varphi.$$

В качестве обобщенных координат примем сферические координаты

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \lambda.$$

Выполним операцию 1) – найдем выражение для кинетической энергии T в новых переменных используя ее выражение в прямоугольных координатах в виде

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

где масса тела P принята равной 1 .

Из формул перехода, дифференцируя, имеем

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi\cos\lambda - r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\lambda - r\dot{\lambda}\cos\varphi\sin\lambda,$$

$$\dot{y} = \dot{r}\cos\varphi\sin\lambda - r\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\lambda + r\dot{\lambda}\cos\varphi\cos\lambda,$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Подставив эти выражения в формулу для T, получим

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2).$$

Переходим к операции 2). Вводим обобщенные импульсы

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}, \quad p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}}.$$

После дифференцирования найдем

$$p_1 = \dot{r}, \quad p_2 = r^2\dot{\varphi}, \quad p_3 = r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda},$$

откуда, разрешая последние соотношения относительно производных от обобщенных координат, получим

$$\dot{r} = p_1, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_2}{r^2}, \quad \dot{\lambda} = \frac{p_3}{r^2\cos^2\varphi},$$

чем и завершим 3-е действие.

В 4-м действии кинетическая энергия преобразуется к виду

$$T = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_3^2\right),$$

а для выражения гамильтониана нам недостает выражения для силовой функции.

Если для исходных уравнений движения (146) в прямоугольных координатах ввести функцию $U = \frac{\mu}{r}$, то уравнения запишутся в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

то есть U – действительно силовая функция задачи двух тел. Следовательно, для задачи двух тел гамильтониан будет иметь вид

$$F = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_3^2\right) - \frac{\mu}{r}.$$

В заключение, в 5-м действии выписываем дифференциальные уравнения задачи двух тел в канонической форме:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial r},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \varphi},$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_3}, \quad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \lambda}.$$

Таким образом, если взять в задаче двух тел сферические координаты в качестве обобщенных, то дифференциальные уравнения движения будут иметь указанный выше вид.

Поскольку гамильтониан в этой задаче не зависит явно от времени, то уравнения имеют первый интеграл $F = h$, который имеет вид $T - U = h$ и является интегралом энергии.

6.3. Канонические преобразования. Теорема Якоби о каноничности преобразования

6.3.1. Канонические преобразования

Определение. Пусть дана система канонических уравнений

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, ..., k), \tag{147}$$

$$F = F(t, q_1, q_2, ..., q_k, p_1, p_2, ..., p_k).$$

Перейдем от сопряженных переменных q_j, p_j к новым Q_j, P_j с помощью каких-то формул преобразования. Тогда если в новых переменных уравнения (147) примут вид

$$\frac{dQ_j}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_j}, \quad \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} \quad (j = 1, 2, ..., k),$$

где $K = K(t, Q_1, Q_2, ..., Q_k, P_1, P_2, ..., P_k)$ – какая-то дифференцируемая функция, то такое преобразование (q_j, p_j) в (Q_j, P_j) *называется каноническим.*

Рассмотрим теперь критерий каноничности преобразования предложенный Пуанкаре и обоснованный теоремой Якоби.

Выведем критерий каноничности преобразования, заданного формулами

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(t, Q_1, Q_2, ..., Q_k; P_1, P_2, ..., P_k), \\ p_j &= p_j(t, Q_1, Q_2, ..., Q_k; P_1, P_2, ..., P_k). \end{aligned} \tag{148}$$

Будем предполагать, что (148) разрешимы относительно новых переменных, так что

$$\begin{aligned} Q_j &= Q_j(t, q_1, q_2, ..., q_k; p_1, p_2, ..., p_k), \\ P_j &= P_j(t, q_1, q_2, ..., q_k; p_1, p_2, ..., p_k). \end{aligned} \tag{149}$$

В частности из этих равенств можно получить выражения

$$P_j = P_j(t, q_1, q_2, ..., q_k; Q_1, Q_2, ..., Q_k). \tag{150}$$

Как и прежде, общее решение системы уравнений (147) будем писать в виде

$$q_j = q_j(t; \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{2k}), \quad p_j = p_j(t; \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{2k}), \tag{151}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{2k}$ – независимые произвольные постоянные. Если эти формулы подставить в (149), то можно и новые переменные рассматривать как функции t и γ:

$$Q_j = Q_j(t; \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{2k}), \quad P_j = P_j(t; \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{2k}). \tag{152}$$

Теперь предположим, что существует некоторая функция

$$S = S(t; q_1, q_2, ..., q_k; Q_1, Q_2, ..., Q_k)$$

такая, что

$$\sum_{j=1}^{k} p_j dq_j - \sum_{j=1}^{k} P_j dQ_j = d'S, \tag{153}$$

где штрих означает, что мы имеем дело с полным дифференциалом от S, взятым по всем переменным, кроме времени t, то есть

$$d'S = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial S}{\partial Q_j} dQ_j. \tag{154}$$

Такой дифференциал называют еще "штрих-дифференциалом".

Соотношение (153) называется критерием Пуанкаре каноничности преобразования. Обоснование этого критерия дается теоремой Якоби.

6.3.2. Теорема Якоби о каноничности преобразования.

Теорема Якоби. Пусть имеем систему уравнений

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, ..., k),$$

с гамильтонианом $F = F(t, q_1, q_2, ..., q_k, p_1, p_2, ..., p_k)$. Если по каким-то формулам совершается переход от переменных q_j, p_j к переменным Q_j, P_j и при этом

$$\sum_{j=1}^{k} p_j dq_j - \sum_{j=1}^{k} P_j dQ_j = d'S$$

есть полный дифференциал по всем переменным кроме времени t, то преобразование будет каноническим, и новые уравнения Гамильтона будут иметь вид

$$\frac{dQ_j}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_j}, \quad \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_j},$$

где

$$K = F + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{155}$$

– новый гамильтониан, причем $K = K(t, Q_1, Q_2, ..., Q_k; P_1, P_2, ..., P_k)$.

Таким образом теорема Якоби не только обосновывает критерий каноничности преобразования, но дает также выражение (155) для гамильтониана канонических уравнений в новых переменных. Очевидно, что в слагаемых F и $\frac{\partial S}{\partial t}$ нужно последовательно сделать замену входящих туда переменных $q_1, q_2, ..., q_k, p_1, p_2, ..., p_k$ по формулам (148).

Как каноничность преобразования проверяется на практике? С помощью формул преобразования составляется дифференциальная форма

$$\sum_{j=1}^{k} p_j dq_j - \sum_{j=1}^{k} P_j dQ_j$$

и проверяется, является ли эта форма "штрих-дифференциалом" от некоторой функции S.

6.3.3. Доказательство теоремы Якоби. Лемма Пуанкаре.

Доказательство теоремы Якоби проведем с помощью леммы Пуанкаре. *Система канонических уравнений (147) эквивалентна следующим равенствам:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i}\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial \gamma_i} \quad (i = 1, 2, ..., 2k), \tag{156}$$

где $\gamma_i = const \quad (i = 1, 2, ..., 2k)$ - произвольные постоянные интегрирования.

Утверждение леммы означает, что из (147) следуют (156), и наоборот, из (156) следуют уравнения (147). С помощью этой леммы дальше легко доказывается основная теорема теории канонических преобразований гамильтоновых систем – теорема Якоби.

Доказательство леммы. Рассмотрим равенство (156). Из его левой части получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i}\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial p_j}{\partial t}\frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial p_j}{\partial \gamma_i}\frac{\partial q_j}{\partial t}. \tag{157}$$

Члены $\frac{\partial^2 q_j}{\partial t \partial \gamma_i}$ и $-\frac{\partial^2 q_j}{\partial \gamma_i \partial t}$ взаимно уничтожились. Сюда входят $\frac{\partial p_j}{\partial t}$ и $\frac{\partial q_j}{\partial t}$ – частные производные по времени t сопряженных канонических переменных. Но в силу формул общего решения (151) фактически

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} = \frac{dq_j}{dt}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial t} = \frac{dp_j}{dt}.$$

Тогда из уравнений Гамильтона (147) имеем

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial q_j}.$$

Если подставить это в правую часть тождества (157), то получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i}\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial \gamma_i} = -\frac{\partial F}{\partial \gamma_i}. \tag{158}$$

Тем самым доказано, что равенства (156) вытекают из уравнений Гамильтона (147).

Теперь докажем обратное. Запишем (156) в таком виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i}\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial \gamma_i} =$$

$$-\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial \gamma_i}.$$

Но в то же время, как уже было показано выше, имеем тождество (157)

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i}\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial p_j}{\partial t}\frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial p_j}{\partial \gamma_i}\frac{\partial q_j}{\partial t}.$$

Из последних двух равенств следует новое соотношение

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial p_j}{\partial t}\frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial p_j}{\partial \gamma_i}\frac{\partial q_j}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial \gamma_i},$$

которое можно переписать так:

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial p_j}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} + \sum_{j=1}^{k} \left(-\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_j}\right)\frac{\partial p_j}{\partial \gamma_i} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., 2k).$$

Будем рассматривать эти соотношения как $2k$ уравнений относительно $2k$ величин $\left(\frac{\partial p_j}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_j}\right)$ и $\left(-\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_j}\right)$. Уравнения линейны и однородны. Определитель этой системы

$$det\left\| \ \frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial \gamma_i} \ \right\|_{i,j=1}^{2k} \neq 0$$

так как (151) – это общее решение уравнений (147), а однородная линейная система уравнений с ненулевым определителем имеет только тривиальное решение

$$\left(\frac{\partial p_j}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial q_j}\right)=0, \quad \left(-\frac{\partial q_j}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial p_j}\right)=0,$$

то

$$\frac{\partial q_j}{\partial t}=-\frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial q_j}.$$

Как уже было отмечено выше, учитывая общее решение (151), мы имеем $\frac{\partial q_j}{\partial t}=\frac{dq_j}{dt}$, $\frac{\partial p_j}{\partial t}=\frac{dp_j}{dt}$, то есть

$$\frac{dq_j}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt}=\frac{\partial F}{\partial q_j},$$

что и требовалось доказать.

Мы писали

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{k} p_j\frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i}-\frac{\partial}{\partial \gamma_i}\sum_{j=1}^{k} p_j\frac{\partial q_j}{\partial t}=-\frac{\partial F}{\partial \gamma_i} \quad (i=1,2,...,2k) \tag{159}$$

и вывели это из (147). Но если в (147) сделать замену $q_j \to p_j, p_j \to q_j$, $t \to -t$, то уравнения Гамильтона не изменятся. Поэтому равенствам (156) можно придать и такую форму

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{k} q_j\frac{\partial p_j}{\partial \gamma_i}-\frac{\partial}{\partial \gamma_i}\sum_{j=1}^{k} q_j\frac{\partial p_j}{\partial t}=+\frac{\partial F}{\partial \gamma_i} \quad (i=1,2,...,2k). \tag{160}$$

Теперь легко доказывается теорема Якоби. Согласно условию теоремы, существует некоторая функция

$$S=S(t;q_1,q_2,...,q_k;Q_1,Q_2,...,Q_k)$$

такая, что

$$\sum_{j=1}^{k} p_j dq_j-\sum_{j=1}^{k} P_j dQ_j=d'S, \tag{161}$$

где штрих означает, что мы имеем дело с полным дифференциалом от S, взятым по всем переменным, кроме времени t, то есть

$$d'S=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial S}{\partial q_j}dq_j+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial S}{\partial Q_j}dQ_j. \tag{162}$$

Посмотрим, что получается из этого условия. Из (161) и (162) после очевидных преобразований имеем

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial t} - \sum_{j=1}^{k} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial t} \right). \tag{163}$$

Аналогично из (161) и (162) следует, что

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \sum_{j=1}^{k} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial \gamma_i} = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} + \frac{\partial S}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial \gamma_i} \right). \tag{164}$$

Теперь возьмем частную производную от обеих частей равенства (163) по γ_i и частную производную от обеих частей равенства (164) по t и вычтем почленно полученные два соотношения. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{k} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum_{j=1}^{k} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} + \frac{\partial S}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial \gamma_i} \right). \tag{165}$$

Но согласно лемме Пуанкаре

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial \gamma_i} \quad (i = 1, 2, ..., 2k),$$

и, кроме того, так как $S = S(t, q_1, q_2, ..., q_k; Q_1, Q_2, ..., Q_k)$, то

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial t} \right),$$

а также

$$\frac{\partial S}{\partial \gamma_i} = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \gamma_i} + \frac{\partial S}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial \gamma_i} \right).$$

Поэтому длинное равенство (165) запишется более кратко, а именно

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{k} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum_{j=1}^{k} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial \gamma_i} + \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \left(\frac{dS}{dt} - \frac{\partial S}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S}{\partial \gamma_i} \right).$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S}{\partial\gamma_i}\right).$$

Здесь при одном и том же обозначении S, когда берутся производные, рассматриваются две разные функции от своих аргументов. Когда мы берем производную $\frac{\partial S}{\partial t}$, то это производная от функции

$$S(t, q_1, q_2, ..., q_k; Q_1, Q_2, ..., Q_k)\ .$$

Когда берутся производные $\frac{dS}{dt}$ и $\frac{\partial S}{\partial\gamma_i}$, то рассматривается функция

$$S(t, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{2k})\ ,$$

полученная подстановкой вместо $q_1, q_2, ..., q_k; Q_1, Q_2, ..., Q_k$ их выражений через $t, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{2k}$ из общего решения (151) и формул (149).

В силу предыдущих равенств мы можем написать

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{k} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial\gamma_i} - \frac{\partial}{\partial\gamma_i}\sum_{j=1}^{k} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial\gamma_i} - \frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right).$$

Введем теперь функцию

$$K = F + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{166}$$

В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{k} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial\gamma_i} - \frac{\partial}{\partial\gamma_i}\sum_{j=1}^{k} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial t} = -\frac{\partial K}{\partial\gamma_i}.$$

В силу леммы Пуанкаре последнее равенство эквивалентно уравнениям Гамильтона относительно новых канонических переменных

$$\frac{dQ_j}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_j}, \quad \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_j}, \tag{167}$$

где новый Гамильтониан K определяется формулой (166). Следовательно функции $Q_1, Q_2, ..., Q_k, P_1, P_2, ..., P_k$ должны удовлетворять уравнениям Гамильтона с гамильтонианом (166), что и утверждается теоремой Якоби. Теорема доказана.

6.3.4. Замечания.

Замечание 1.

Из соотношений (161) и (162) следует, что

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad P_j = -\frac{\partial S}{\partial Q_j}, \tag{168}$$

где $S = S(t, q_1, q_2, ..., q_k; Q_1, Q_2, ..., Q_k)$ – производящая функция канонического преобразования. То есть, если взять любую произвольную функцию $S(t, q_1, q_2, ..., q_k; Q_1, Q_2, ..., Q_k)$, то соотношения (168) можно рассматривать как $2k$ алгебраических уравнений относительно $2k$ неизвестных Q_j и P_j. Решая их, получим

$$\begin{aligned} Q_j &= Q_j(t, q_1, q_2, ..., q_k; p_1, p_2, ..., p_k)\ , \\ P_j &= P_j(t, q_1, q_2, ..., q_k; p_1, p_2, ..., p_k)\ . \end{aligned}$$

Таким образом мы имеем алгоритм построения бесконечного множества заведомо канонических преобразований.

Замечание 2.

Существуют другие формы критерия каноничности преобразования, в частности

$$\sum_{j=1}^{k} q_j dp_j - \sum_{j=1}^{k} Q_j dP_j = d'S,$$

где $S = S(t, p_1, p_2, ..., p_k; P_1, P_2, ..., P_k)$. В этом случае уравнения Гамильтона в новых переменных будут иметь вид

$$\frac{dQ_j}{dt} = \frac{\partial K'}{\partial P_j}, \quad \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial K'}{\partial Q_j},$$

где $K' = F - \frac{\partial S}{\partial t}$ – новый гамильтониан, причем $K' = K'(t|Q|P)$. Этот результат доказывается аналогично предыдущему, но здесь следует взять формулировку леммы Пуанкаре в форме (160). В этом случае формулы для канонических преобразований можно записать в следующем виде:

$$q_j = \frac{\partial S'}{\partial p_j}, \quad Q_j = -\frac{\partial S'}{\partial P_j},$$

Замечание 3.

Если преобразование явно не содержит время t, то есть $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$, тогда очевидно, что $K = F$, то есть новый гамильтониан это выраженный в новых переменных старый гамильтониан. Следовательно критерий Пуанкаре примет форму

$$\sum_{j=1}^{k} p_j dq_j - \sum_{j=1}^{k} P_j dQ_j = dS.$$

Глава 7. **Метод Гамильтона-Якоби**

7.1. Теорема Гамильтона-Якоби

Метод Гамильтона-Якоби это один из интересных результатов теории канонических уравнений и всей механики. Схема применения метода дается в следующем разделе. Здесь мы рассмотрим теорему, на которой основан метод, то есть теорему Гамильтона-Якоби

Возьмем систему канонических уравнений

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, ..., k). \tag{169}$$

Эти уравнения описывают движение динамической системы с k степенями свободы.

Здесь гамильтониан $F = F(t, q_1, q_2, ..., q_k, p_1, p_2, ..., p_k)$ - известная функция от времени t, обобщенных координат $q_1, q_2, ..., q_k$ и обобщенных импульсов $p_1, p_2, ..., p_k$. Заменим все p_j на частные производные от некоторой функции S

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$$

и составим такое уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + F\left(t, q_1, q_2, ..., q_k, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, ... \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) = 0. \tag{170}$$

Это уравнение называется уравнением Гамильтона-Якоби. Оно является нелинейным уравнением в частных производных первого порядка с независимыми аргументами $t, q_1, q_2, ..., q_k$ (их всего $k+1$). Из теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка известно, что такое уравнение имеет решение, зависящее от всех $k+1$ аргументов и $k+1$ произвольных постоянных. Это решение называется полным интегралом. Полный интеграл уравнения (170) есть некоторая дифференцируемая функция от $t, q_1, q_2, ..., q_k$ и $k{+}1$ независимых произвольных постоянных. Искомая функция S входит в (170) только через посредство частных производных $\frac{\partial S}{\partial t}$, $\frac{\partial S}{\partial q_j}$ $(j = 1, 2, ..., k)$, вследствие чего одна из произвольных постоянных будет аддитивной, так что полный интеграл можно записать в виде

$$S(t, q_1, q_2, ..., q_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) + \alpha_{k+1}.$$

Следовательно достаточно найти функцию, зависящую от k независимых постоянных интегрирования. Критерием независимости служит неравенство нулю гессиана от S по q_j и α_l $(j, l = 1, 2, ..., k)$, то есть

$$E = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial \alpha_1} & ... & \dfrac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial \alpha_k} \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_1} & ... & \dfrac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_k} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{171}$$

Теорема Гамильтона-Якоби. Если

$$S(t, q_1, q_2, ..., q_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) + \alpha_{k+1} \tag{172}$$

есть полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби (170), то общий интеграл системы канонических уравнений (169) определится уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j, \quad \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j \quad (j = 1, 2, ..., k), \tag{173}$$

где β_j - произвольные постоянные интегрирования.

Равенства (173) после взятия производных можно разрешить относительно p_j и q_j :

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k), \\ p_j &= p_j(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k). \end{aligned} \tag{174}$$

Формулы (174) представляют общее решение уравнений Гамильтона (169).

Доказательство.

Проверим то, что если q_j и p_j определяются из (173), то они удовлетворяют уравнениям (169). Подставив (174) в уравнение (170), получим тождество. Продифференцировав это тождество по α_j, будем иметь

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_i} = 0, \tag{175}$$

где $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$.

Продифференцируем по t первые уравнения (173), получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \frac{\partial q_i}{\partial t} = 0. \tag{176}$$

Но в силу неренрывности функции S относительно ее аргументов

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_j}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j}.$$

Поэтому, вычитая (176) из (175), находим соотношение

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., k).$$

Здесь мы получили k линейных уравнений относительно величин в круглых скобках. Их определитель $E \neq 0$, так как S есть полный интеграл. Следовательно, получаем

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0.$$

Возьмем снова уравнение (170), подставим сюда S из формулы (172) и получим тождество, которое продифференцируем по q_j :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} = 0. \tag{177}$$

Продифференцировав по t вторые уравнения (173), получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_j} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} - \frac{\partial p_j}{\partial t} = 0. \tag{178}$$

Но в силу непрерывности функции S справедливы равенства

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_j}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}.$$

Кроме того, ранее было получено

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial p_i}.$$

Если теперь вычесть почленно тождества (177) и (178), то получится

$$\frac{\partial p_j}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_j} = 0.$$

Так как в формулах (174) $q = q(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$, а $\alpha_j = const$, $\beta_j = const$, то $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt}$. Следовательно полученные соотношения можно записать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, ..., k) \; .$$

Но это и есть соотношения (169).

Тем самым доказано, что p_j и q_j , удовлетворяющие уравнениям (173), удовлетворяют при любых α_j и β_j также каноническим уравнениям Гамильтона (169). Это значит, что равенства (173) образуют общий интеграл уравнений (169), а (174) – их общее решение. Итак, напрямую доказано, что если (172) – полный интеграл, то из них следуют уравнения Гамильтона. Теорема доказана.

7.2. Метод Гамильтона-Якоби

Метод решения канонических уравнений (169), основанный на теореме Гамильтона-Якоби, называется методом Гамильтона-Якоби. Отметим схематически этапы этого метода.

Пусть имеется система уравнений Гамильтона (169), где

$$F = F(t, q_1, q_2, ..., q_k, p_1, p_2, ..., p_k)$$

- известная функция – гамильтониан. Для их интегрирования нужно сделать следующее.

1) Заменяем обобщенные импульсы на частные производные по q_j от функции S и составляем уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + F\left(t, q_1, q_2, ..., q_k, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, ... \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) = 0.$$

2) Находим его полный интеграл

$$S(t, q_1, q_2, ..., q_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) + \alpha_{k+1}$$

каким-либо способом.

3) Выписываем общий интеграл уравнений (169) :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j, \quad \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j, \quad (j = 1, 2, ..., k).$$

4) Разрешая эти соотношения относительно p_j и q_j , находим общее решение канонических уравнений (169)

$$q_j = q_j(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k),$$
$$p_j = p_j(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k).$$

Теорема Якоби сводит решение канонических уравнений к нахождению полного интеграла дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Одна задача сведена к другой. Математически они одинаково сложны, ибо общего приема для нахождения полного интеграла нет. Но в некоторых немногих случаях форму полного интеграла удается угадать. Кроме того, решение, полученное методом Гамильтона-Якоби, обладает рядом преимуществ. В теории канонических уравнений теорема Гамильтона-Якоби играет выдающуюся роль.

Англо-саксы называют дифференциальное уравнение (170) уравнением Гамильтона. Французы называют его уравнением Гамильтона-Якоби, а теорему – именем Якоби. Впервые уравнение (170) получено Гамильтоном, и теорему Гамильтона-Якоби он впервые доказал, использовав не α_j и β_j , а начальные условия $p_j^{(0)}$ и $q_j^{(0)}$ для какого-то фиксированного момента t_0 .

Заметим, что постоянные α_j и β_j можно выразить через $p_j^{(0)}$ и $q_j^{(0)}$.

Рассмотрим частные случаи уравнения Гамильтона-Якоби.

Случай 1. Пусть гамильтониан F не зависит явно от времени t , то есть $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$. В этом случае уравнения (169) имеют интеграл

$$F = \alpha_1.$$

Тогда из уравнения Гамильтона-Якоби следует, что $\frac{\partial S}{\partial t} + \alpha_1 = 0$ или $\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1$, где $\alpha_1 = const$. В этом случае решение урвнения Гамильтона-Якоби можно искать в виде $S = -\alpha_1 t + S'(q|\alpha)$, где S' не зависит явно от времени t , то есть $\frac{\partial S'}{\partial t} = 0$. Для S' получается такое стационарное уравнение Гамильтона-Якоби

$$F\left(t, q_1, q_2, ..., q_k, \frac{\partial S'}{\partial q_1}, \frac{\partial S'}{\partial q_2}, ... \frac{\partial S'}{\partial q_k}\right) = \alpha_1.$$

Общий интеграл канонических уравнений (169) по теореме Гамильтона-Якоби будет иметь вид

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j, \quad \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j, \quad (j = 2, 3, ..., k).$$

Случай 2. Допустим, что Гамильтониан F не содержит явно какую-либо одну из обобщенных координат. Не нарушая общности результатов, можно считать, что это q_2. Такие координаты называются в механике *циклическими*. В этом случае

$$\frac{\partial F}{\partial q_2} = 0.$$

Тогда из (169) следует, что $\frac{dp_2}{dt} = 0$, то есть $p_2 = \alpha_2$, где $\alpha_2 = const$. Но $p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \alpha_2$. Поэтому функцию S можно искать в виде

$$S = \alpha_2 q_2 + S'',$$

где S'' не зависит от q_2.

Случай 3. Пусть одновременно $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial q_2} = 0$. Комбинируя случаи 1 и 2, получаем форму полного интеграла

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_2 q_2 + S''',$$

где S''' не зависит явно ни от t, ни от q_2.

7.3. Интегрирование уравнений задачи двух тел методом Гамильтона-Якоби

Рассмотрим задачу об относительном движении двух тел P_0 и P_1. В разделе 6.2 на примере этой задачи выведены уравнения Гамильтона. Воспользуемся выполненными ранее выкладками.

Силовая функция задачи двух тел имеет вид

$$U = \mu/r, \tag{179}$$

где μ - гравитационный параметр, а r - центральное расстояние.

В качестве обобщенных координат были приняты сферические координаты $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \lambda$. Введены обобщенные импульсы

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}, \quad p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}},$$

и получено выражение кинетической энергии T через обощенные координаты и обощенные импульсы:

$$T = \frac{1}{2}(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} p_3^2). \tag{180}$$

Составим теперь уравнение в частных производных Гамильтона-Якоби и попытаемся его проинтегрировать.

Гамильтониан задачи $F = T - U$ с помощью формул (180) и (179) принимает вид

$$F = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2\cos^2\varphi}\right) - \frac{\mu}{r}, \tag{181}$$

а уравнения движения имеют каноническую форму

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial r}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p_3}, & \frac{dp_3}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \lambda}. \end{aligned} \tag{182}$$

Составим уравнение Гамильтона-Якоби для системы (182). Сначала запишем его в общем виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + F = 0$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2\cos^2\varphi}\right) - \frac{\mu}{r} = 0\ .$$

Затем подставим туда

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad p_3 = \frac{\partial S}{\partial \lambda}.$$

Тогда уравнение в частных производных первого порядка относительно неизвестной функции $S(t, r, \varphi, \lambda)$ примет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)^2\right] - \frac{\mu}{r} = 0. \tag{183}$$

Это и есть уравнение Гамильтона-Якоби для задачи двух тел. Нужно найти его полный интеграл. В гамильтониан уравнений (182), как и в уравнения (183), время явно не входит, а только посредством частных производных от неизвестной функции $S(t, r, \varphi, \lambda)$. То же самое можно сказать о долготе λ – циклической координате. Значит решение можно искать в виде

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3 \lambda + S'(r, \varphi),$$

где $S'(r, \varphi)$ не зависит ни от t, ни от λ. Подставляя это в уравнение (183), находим

$$-\alpha_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{2r^2 \cos^2 \varphi} - \frac{\mu}{r} = 0.$$

Умножив на $-2r^2$, получим

$$2\alpha_1 r^2 - r^2\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial S'}{\partial \varphi}\right)^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \varphi + 2\mu r = 0.$$

Перепишем последнее равенство в форме

$$2\alpha_1 r^2 - r^2\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right)^2 + 2\mu r = \left(\frac{\partial S'}{\partial \varphi}\right)^2 + \alpha_3^2 \sec^2 \varphi. \tag{184}$$

Оно имеет вид

$$f_1\left(r, \frac{\partial S'}{\partial r}\right) = f_2\left(\varphi, \frac{\partial S'}{\partial \varphi}\right),$$

где

$$f_1\left(r, \frac{\partial S'}{\partial r}\right) = 2\alpha_1 r^2 - r^2\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right)^2 + 2\mu r,$$

$$f_2\left(\varphi, \frac{\partial S'}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial S'}{\partial \varphi}\right)^2 + \alpha_3^2 \sec^2 \varphi.$$

Это наводит на мысль искать S' в виде суммы

$$S'(r, \varphi) = S_1(r) + S_2(\varphi). \tag{185}$$

Подставив (185) в (184), получим

$$2\alpha_1 r^2 - r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + 2\mu r = \left(\frac{dS_2}{d\varphi}\right)^2 + \alpha_3^2 \sec^2 \varphi.$$

Здесь частные производные заменены на полные, та как $S_1(r)$ не зависит от φ, а $S_2(\varphi)$ не зависит от r. Но r и φ – независимые переменные.

Поэтому последнее равенство возможно лишь в том случае, когда левая и правая части равны одной и той же произвольной постоянной. Обозначив неотрицательную правую часть через α_2^2, найдем

$$\left(\frac{dS_2}{d\varphi}\right)^2 + \alpha_3^2 \sec^2\varphi = \alpha_2^2, \quad r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 - 2\alpha_1 r^2 - 2\mu r = -\alpha_2^2.$$

Тогда

$$\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 = 2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}, \quad \left(\frac{dS_2}{d\varphi}\right)^2 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2\varphi.$$

Отсюда сразу же имеем

$$\frac{dS_1}{dr} = \sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2}\,\frac{1}{r}, \quad \frac{dS_2}{d\varphi} = \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2\varphi}$$

или

$$S_1(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2}\,\frac{dr}{r}, \quad S_2(\varphi) = \int\limits_{0}^{\varphi} \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2\varphi}\,d\varphi.$$

Величину $r_0 = const$ мы определим позже.

Вспомним, что

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3\lambda + S_1(r) + S_2(\varphi).$$

Таким образом, полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби задачи двух тел имеет вид

$$\begin{gathered} S = -\alpha_1 t + \alpha_3\lambda + \int\limits_{r_0}^{r} \sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2}\,\tfrac{dr}{r} + \\ + \int\limits_{0}^{\varphi} \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2\varphi}\,d\varphi + \alpha_4. \end{gathered} \tag{186}$$

Здесь α_4 – аддитивная постоянная, т. к. S в уравнение Гамильтона-Якоби явно не входит, а только через свои частные производные. Мы нашли $S = S(t, r, \varphi, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – полный интеграл, зависящий, кроме обобщенных координат, еще от трех произвольных неаддитивных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Согласно теореме Гамильтона-Якоби, общий интеграл канонических уравнений задачи двух тел в сферических координатах представляется следующими соотношениями

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \beta_3, \tag{187}$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = p_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = p_2, \quad \frac{\partial S}{\partial \lambda} = p_3, \tag{188}$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – еще три произвольные постоянные.

Распишем явно соотношения (187), воспользовавшись выражением для полного интеграла (186). Получим

$$-t + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2}} = \beta_1, \tag{189}$$

$$-\alpha_2 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2}} + \alpha_2 \int\limits_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2\varphi}} = \beta_2, \tag{190}$$

$$\lambda - \alpha_3 \int\limits_{0}^{\varphi} \frac{\sec^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2\varphi}} = \beta_3. \tag{191}$$

Разрешив соотношения (189), (190), (191), найдем r, φ, λ, а затем и $\dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{\lambda}$ как функции $t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Тем самым будет построено общее решение задачи двух тел.

Независимые произвольные постоянные интегрирования α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 называются элементами Якоби.

7.4. Связь кеплеровских элементов орбиты с элементами Якоби

Общее решение задачи двух тел хорошо известно. Координаты и составляющие скорости выражаются как функции времени t и независимых произвольных постоянных $a, e, i, \Omega, \omega, \tau$ – кеплеровых элементов орбиты.

Найдем теперь связь произвольных постоянных – элементов Якоби $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ с кеплеровыми элементами.

Что такое α_1 ? Это постоянная, связанная с полной энергией, поскольку
$$F = T - U = \alpha_1.$$

Из формул кеплеровского движения имеем интеграл энергии в форме
$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = h,$$

где $h = const$ – удвоенная механическая энергия на единицу массы, или, что тоже самое,
$$2T - 2U = h.$$

Таким образом оказывается, что
$$h = 2\alpha_1.$$

Мы знаем, что если $h < 0$ и, следовательно, $\alpha_1 < 0$, то тип движения будет эллиптическим. Именно его и будем рассматривать дальше.

Обратимся к равенству (189) и запишем его так:
$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2}} = t + \beta_1, \tag{192}$$

Пусть $Q(r) = 2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2$ – квадратный многочлен с корнями r_0 и r_1, считая $r_0 < r_1$. Из (192) видно, что движение возможно только, если $Q(r) \geq 0$, когда $r_0 \leq r \leq r_1$. Но из формул кеплеровского движения известно
$$a(1 - e) \leq r \leq a(1 + e).$$

Таким образом $r_0 = a(1 - e)$, $r_1 = a(1 + e)$. По теореме Виета для уравнения $Q(r) = 0$:
$$r_0 + r_1 = -\frac{2\mu}{2\alpha_1}, \quad r_0 r_1 = -\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1}$$

или
$$2a = -\frac{\mu}{\alpha_1}, \quad a^2(1 - e^2) = -\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1},$$

откуда
$$\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu a(1 - e^2)},$$

причем
$$\mu = f(m_0 + m_1).$$

Из (192) видно, что при $r = r_0$ оказывается $t = -\beta_1$. С другой стороны, равенство $r = r_0$ имеет место в момент прохождения через перицентр τ. Следовательно
$$\beta_1 = -\tau.$$

Теперь воспользуемся соотношением (191). Перепишем его в виде
$$\alpha_3 \int\limits_0^{\varphi} \frac{\sec^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2\varphi}} = \lambda - \beta_3. \tag{193}$$

Реальное движение возможно при условии, что подкоренное выражение в (193) неотрицательно:
$$\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2\varphi \geq 0,$$
то есть
$$\cos^2\varphi \geq \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}.$$

Так как φ – широта объекта, то ее максимальное значение равно наклону орбиты i, а минимальное значение $\cos^2\varphi$ равно $\cos^2 i$. Следовательно
$$\cos^2 i = \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}.$$

Подставим сюда найденное ранее выражение для α_2, получим
$$\alpha_3 = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}\, \cos i.$$

Из формулы (193) видно, что при $\varphi = 0$ имеем $\lambda = \beta_3$. Но при $\varphi = 0$ тело находится на линии узлов, то есть $\lambda = \Omega$, так что
$$\beta_3 = \Omega.$$

Распишем теперь равенство (190) в виде
$$-\alpha_2 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2}} + J = \beta_2, \tag{194}$$

где

$$J = \alpha_2 \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \varphi}}.$$

Подставив $\alpha_2 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$, $\alpha_3 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\, \cos i$, получим

$$J = \alpha_2 \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \varphi}} = \alpha_2 \int\limits_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 i}}.$$

Введем вместо φ новую переменную u по формуле

$$\sin\varphi = \sin i \sin u.$$

Тогда

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2 i \sin^2 u,$$

откуда

$$\cos\varphi \, d\varphi = \sin i \cos u \, du, \quad \cos^2\varphi - \cos^2 i = \sin^2 i \cos^2 u.$$

Поэтому

$$J = \int\limits_0^{u} du = u.$$

Вследствие этого (194) принимает вид

$$\alpha_2 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2}} = u - \beta_2. \tag{195}$$

В то же время из определения величины u ясно, что это аргумент широты, то есть

$$u = \omega + v,$$

где v – истиная аномалия.

Рассмотрим момент, когда тело находится в перицентре орбиты. В этот момент $r = r_0$. Из (195) для этого момента имеем $u = \beta_2$. С другой стороны, в перицентре орбиты $v = 0$ и $u = \omega$. Следовательно

$$\beta_2 = \omega.$$

Такова связь элементов Якоби с кеплеровыми элементами

$$\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\, \cos i,$$

$$\beta_1 = -\tau, \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega.$$

Глава 8. **Канонические уравнения в теории возмущений**

8.1. Метод теории возмущений в случае канонических систем уравнений

Пусть изучаемое движение динамической системы описывается системой канонических дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, ..., k) \tag{196}$$

относительно обобщенных координат $q_1, q_2, ..., q_k$ и обобщенных импульсов $p_1, p_2, ..., p_k$ с гамильтонианом $H = H(t, q_1,\ q_2,\ ...,\ q_k,\ p_1,\ p_2,\ ...,\ p_k)$.

Допустим, что гамильтониан можно разложить на два слагаемых $H = F - R$ при выполнении одного нижеследующего условия. Здесь F и R в общем случае зависят от переменных t, $q_1, q_2, ..., q_k$, $p_1, p_2, ..., p_k$.

Наряду с уравнениями (196) рассмотрим другую систему канонических уравнений

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, ..., k), \tag{197}$$

которая получается из (196) при $R = 0$. Систему уравнений (197) будем называть упрощенной или уравнениями невозмущенного движения, а систему (196) – уравнениями возмущенного движения.

Пусть выполнено условие, что упрощенная система (197) уже решена методом Гамильтона-Якоби, то есть составлено дифференциальное уравнение в частных производных 1-го порядка

$$\frac{\partial S}{\partial t} + F\left(t, q_1, q_2, ..., q_k, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, ... \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) = 0, \tag{198}$$

и найден полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби

$$S = S(t, q_1, q_2, ..., q_k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) + \alpha_{k+1}.$$

Тогда общий интеграл уравнений (197) представлен соотношениями

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j, \quad \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j. \tag{199}$$

Разрешая соотношения (199) относительно p_j и q_j, получим общее решение упрощенной системы (197)

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k), \\ p_j &= p_j(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k), \end{aligned} \tag{200}$$

где $\alpha_j = const$, $\beta_j = const$ суть произвольные постоянные интегрирования.

Наша задача – решить систему уравнений (196), то есть систему уравнений возмущенного движения. Для этого в уравнениях (196) перейдем к новым переменным α_j, β_j с помощью формул (200). Теперь $\alpha_j = \alpha_j(t)$, $\beta_j = \beta_j(t)$ – новые искомые функции. Выведем дифференциальные уравнения для новых переменных. Покажем, что новые уравнения будут каноническими, то есть что преобразование $(q,p) \to (\alpha, \beta)$ – каноническое. Воспользуемся для этого теоремой Якоби о канонических преобразованиях. Проверим дифференциальную форму

$$\sum_{j=1}^{k} p_j dq_j - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j d\beta_j,$$

которая должна быть полным дифференциалом.

Очевидно,

$$\alpha_j d\beta_j = d(\alpha_j \beta_j) - \beta_j d\alpha_j.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{k} p_j dq_j - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j d\beta_j = \sum_{j=1}^{k} p_j dq_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_j d\alpha_j - \sum_{j=1}^{k} d(\alpha_j \beta_j).$$

Теперь воспользуемся равенствами (199) и получим

$$\sum_{j=1}^{k} p_j dq_j - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j d\beta_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} d\alpha_j - d\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \beta_j\right).$$

Используя обозначение $d'S$ для полного дифференциала от S по всем аргументам, кроме времени t, запишем

$$\sum_{j=1}^{k} p_j dq_j - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j d\beta_j = d'S - d'\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \beta_j\right) = d'\left(S - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \beta_j\right).$$

Таким образом, исследуемое выражение действительно оказалось полным дифференциалом от некоторой функции по всем аргументам, кроме времени t. Тогда по теореме Якоби рассматриваемое преобразование будет каноническим, и новые переменные будут удовлетворять каноническим уравнениям

$$\frac{d\beta_j}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \alpha_j}, \quad \frac{d\alpha_j}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \beta_j} \quad (j = 1, 2, ..., k), \tag{201}$$

с новым гамильтонианом

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = F - R + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{202}$$

Но S – решение уравнения Гамильтона-Якоби (198), так что

$$\frac{\partial S}{\partial t} + F \equiv 0,$$

следовательно

$$K = -R.$$

Окончательно уравнения (201) приобретут вид

$$\frac{d\alpha_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_j} \quad \frac{d\beta_j}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_j}, \quad (j = 1, 2, ..., k). \tag{203}$$

Итак, α_j и β_j оказываются канонически сопряженными переменными.

В небесной механике функцию R называют возмущающей функцией.

Поскольку новые уравнения (203) получены путем попытки удовлетворить исходные уравнения (196) функциями (200), в которых α_j, β_j не постоянные, а некоторые функции времени, то такой метод называется также методом вариации произвольных постоянных. Имено так он называется в классических работах и многих учебниках.

Метод вариации произвольных постоянных дает нам канонические оскулирующие элементы орбиты α_j, β_j.

Если мы проинтегрируем уравнения (203), то есть получим

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \alpha_j(t, \alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_k, \beta'_1, \beta'_2, ..., \beta'_k), \\ \beta_j &= \beta_j(t, \alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_k, \beta'_1, \beta'_2, ..., \beta'_k), \end{aligned} \tag{204}$$

где α_j' и β_j' – произвольные постоянные интегрирования, то после подстановки (204) в формулы (200) найдем решение исходных уравнений (196).

8.2. Уравнения возмущенного движения в элементах Якоби

Выше рассмотрен метод теории возмущений в случае канонических систем уравнений. При этом принималось произвольное число степеней свободы k, а в уравнениях невозмущенного движения (197) гамильтониан мог быть произвольным, лишь бы было известно решение этих уравнений. Во многих задачах небесной механики изучается более частный случай, когда в качестве невозмущенного движения берется кеплеровское эллиптическое движение. Тогда уравнения невозмущенного движения в прямоугольных координатах записываются в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z} \;, \tag{205}$$

где

$$U = \frac{\mu}{r}, \quad \mu = f(m_0 + m), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Уравнения (205) описывают относительное движение тела P с массой m вокруг тела P_0 с массой m_0.

В предыдущей главе решение задачи двух тел найдено методом Гамильтона-Якоби. В качестве обобщенных координат взяты сферические координаты $q_1 = r, \;\; q_2 = \varphi, \;\; q_3 = \lambda$, а обобщенные импульсы обозначены через p_1, p_2, p_3. Методом Гамильтона-Якоби получены выражения для q_j, p_j через время t и $\alpha_j = const, \;\; \beta_j = const \;\; (j = 1, 2, 3)$ – 6 произвольных постоянных интегрирования

$$q_j = q_j(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad p_j = p_j(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3). \tag{206}$$

Величины $\alpha_j, \;\beta_j \;\; (j = 1, 2, 3)$ называются орбитальными элементами Якоби. Они связаны с кеплеровыми следующими формулами:

$$\begin{gathered} \alpha_1 = -\tfrac{\mu}{2a}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}\; \cos i, \\ \beta_1 = -\tau, \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega. \end{gathered} \tag{207}$$

В невозмущенном движении, описываемом уравнениями (205), α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 – произвольные постоянные интегрирования.

Рассмотри другую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{208}$$

где $R = R(t, x, y, z)$ – некоторая функция, называемая возмущающей функцией. Если положить $R = 0$, то уравнения (208) превратятся в уравнения (205). Поэтому уравнения (208) будем называть уравнениями возмущенного движения.

В системе уравнений (208) перейдем к сферическим координатам $q_1 = r,\ \ q_2 = \varphi,\ \ q_3 = \lambda$ в качестве обобщенных координат и соответствующим обобщенным импульсам p_1, p_2, p_3. Для них можно записать канонические уравнения с гамильтонианом

$$H = T - (U + R) \quad \text{или} \quad H = T - U - R = F - R\,. \tag{209}$$

По методу теории возмущений в случае канонических систем уравнений, изложенному выше, можно сразу записать канонические уравнения для элементов Якоби.

Согласно методу вариации произвольных постоянных нужно удовлетворить каноническим уравнениям возмущенного движения (208) теми же формулами (206), что и уравнениям невозмущенного движения (205), но считая $\alpha_j = \alpha_j(t),\ \beta_j = \beta_j(t)$.

Для оскулирующих элементов Якоби будем иметь

$$\begin{gathered} \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_2}, \quad \frac{d\alpha_3}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_3}, \\ \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{d\beta_3}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_3}. \end{gathered} \tag{210}$$

Обратимся к равенствам (207). Сопоставим их с уравнениями (210). С помощью (207) можно перейти от уравнений (210) в элементах Якоби к уравнениям Лагранжа в кеплеровых оскулирующих элементах. Такой путь вывода уравнений Лагранжа оказывается проще, чем использование для этой цели первых интегралов уравнений движения.

Применяя те или иные канонические преобразования, можно переходить в уравнениях движения к другим искомым переменным. Выбор переменных определяется особенностями конкретной задачи небесной механики. Поскольку вся информация о законах взаимодействия содержится в одной единственной функции – гамильтониане, выбор переменных и метода решения определяется свойствами гамильтониана. Любые канонические уравнения можно пытаться решать методом Гамильтона-Якоби. В этом случае придется подбирать тот или иной метод решения уравнения Гамильтона-Якоби.

Согласно вышеизложенному методу теории возмущений мы разложили гамильтониан исходной задачи H на два слагаемых F и $-R$, затем построили канонические уравнения, в которых гамильтонианом оказалась функция R. Мы не накладывали до сих пор никаких условий на величины слагаемых F и $-R$. Однако если окажется, что в области рассматриваемого движения функция $|R|$ всегда остается меньше $|F|$, то канонические уравнения можно решать методом малого параметра. Для этого нужно разложить возмущающую функцию R по степеням какого-либо малого параметра

$$R = R^{(1)} + R^{(2)} + ... \tag{211}$$

В случае малых R можно перейти к решению соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби. Оказывается, что это уравнение в таком случае можно также решать методом малого параметра. Решение уравнения Гамильтона-Якоби ищут в виде ряда

$$S = S^{(1)} + S^{(2)} + ..., \tag{212}$$

где верхний индекс в круглых скобках означает порядок малости. После подстановки (212) в уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + R\left(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}, ... \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\right) = 0, \tag{213}$$

следует разложить левую часть уравнения по степеням малого параметра, учитывая разложения (211) и (212). Затем нужно последовательно выделить члены одинакового порядка малости и приравнять их нулю. Для каждого порядка малости будут получаться уравнения, решение которых сведется к квадратурам. Такой общий подход принимает различные конкретные формы в различных задачах.

8.3. Элементы Делоне и элементы Пуанкаре

Уравнения Якоби (210) не используются в практической небесной механике. Причиной тому оказывается появление смешанных членов первого порядка при решении четвертого из уравнений (210)

$$\frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} \ .$$

Элемент α_1 входит в возмущающую функцию непосредственно и через среднюю долготу (или среднюю аномалию). После дифференцирования в правой части появляются смешанные члены вида $t\ \sin t$. В итоге это просто неудачная форма представления решения.

Делоне предложил ввести вместо элементов α_1, β_1 такие:

$$L = \mu(2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}\ , l = \frac{1}{\mu}(2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}(t - \beta_1)\ . \tag{214}$$

Проверим будет ли такое преобразование каноническим. Согласно теореме Якоби построим функцию

$$\beta_1 d\alpha_1 - l dL\ . \tag{215}$$

Учитывая зависимость L от α_1 в (214), имеем

$$dL = -\mu(2\alpha_1)^{-\frac{3}{2}} d\alpha_1\ . \tag{216}$$

Подставляя теперь l из (214) и dL из (216) в (215), получим

$$\beta_1 d\alpha_1 - l dL = t d\alpha_1 = d'(t\alpha_1)\ . \tag{217}$$

Последнее выражение есть полный "штрих-дифференциал" от некоторой функции. Значит, условия теоремы Якоби выполняются, и преобразование является каноническим.

Переобозначая для удобства

$$H = \alpha_2,\ G = \alpha_3,\ h = \beta_2,\ g = \beta_3\ ,$$

для новых элементов Делоне можно записать канонические уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{dL}{dt} = \frac{\partial R'}{\partial l}, \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial R'}{\partial l}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial R'}{\partial h}, \\ &\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial R'}{\partial L}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial R'}{\partial G}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial R'}{\partial H}\ , \end{aligned} \tag{218}$$

где

$$R' = R + \frac{\mu^2}{2L^2}\ .$$

Теперь при дифференцировании в правых частях уравнений движения (218) не возникают смешанные члены, поскольку L и l являются независимыми искомыми функциями.

Пуанкаре ввел в употребление еще две системы канонических элементов, в которых за один из элементов принимается средняя долгота. Выражение возмущающей фкнкции через эксцентрические и облические элементы Пуанкаре проще разлагается в ряды по степеням малых наклонов и малых эксцентриситетов орбиты.

Первая система элементов Пуанкаре определяется через кеплеровские элементы равенствами

$$
\begin{gathered}
L = \sqrt{\mu}\sqrt{a}\ ,\ \rho_1 = \sqrt{\mu}\sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2}), \\
\rho_2 = \sqrt{\mu}\sqrt{a(1 - e^2)}(1 - \cos i), \\
\lambda = l + \pi = M + \omega + \Omega\ , \\
\omega_1 = -\pi\ , \quad \omega_2 = -\Omega\ .
\end{gathered} \tag{219}
$$

Легко проверить соотношения

$$
\begin{gathered}
ldL + gdG + hdH - \lambda dL - \omega_1 d\rho_1 - \omega_2 d\rho_2 = \\
= ldL + gdG + hdH - \\
-(l + g + h)dL + (g + h)(dL - dG) + h(dG - dH) = 0\ .
\end{gathered} \tag{220}
$$

Следовательно, по теореме Якоби для этих элементов сохраняется каноническая форма уравнений.

Вторая система элементов Пуанкаре дается формулами

$$
\begin{gathered}
L = \sqrt{\mu}\sqrt{a}\ , \quad \lambda = l + \pi = M + \omega + \Omega\ , \\
\xi_1 = \sqrt{2\rho_1}\cos\omega_1\ , \quad \eta_1 = \sqrt{2\rho_1}\sin\omega_1\ , \\
\xi_2 = \sqrt{2\rho_2}\cos\omega_2\ , \quad \eta_2 = \sqrt{2\rho_2}\sin\omega_2\ .
\end{gathered} \tag{221}
$$

Каноничность уравнений для этих элементов также легко проверяется по теореме Якоби.

Заключительные замечания

В предлагаемом курсе лекций представлен один из ряда существующих в литературе подходов к изучению методов теории возмущений. При неизменности главного принципа формы изложения могут быть различными. Различаются они в основном из-за ориентации на различные задачи моделирования движения небесных тел.

С другой стороны, предлагаемый курс лекций не исчерпывает все основные методы теории возмущений в небесной механике. В частности, не затронут метод Цейпеля, применявшийся для решения ряда практический задач небесной механики. В курсе не упомянуты новые подходы в теории возмущений, основанные на преобразованиях Ли. Рассмотренный здесь метод малого параметра Ляпунова-Пуанкаре является лишь частным случаем более широкого класса асимптотических методов небесной механики, хорошо представленных в учебном пособии Холшевникова (1985). Не рассмотрены применяемые для ряда задач методы осреднения силовой функции по отдельным преременным. В рамках такого курса весьма затруднительно дать полный обзор всех методов.

Все эти замечания определяют путь дальнейшего более углубленного изучения методов небесной механики. Любое изучение всегда нужно с чего-нибудь начинать. Именно для этого и предназначен предлагаемый курс лекций.

Список литературы

Аксенов Е.П. Один вид дифференциальных уравнений движения спутника. Труды ГАИШ. 1966. Т. 35. С. 44-58.

Брауэр и Вурком (Brouwer D. and A. J. J. van Woerkom). The Secular Variations of the Orbital Elements of the Principal Planets. Astr. Papers. 1950. V. 13, Part 2.

Брумберг В. А. Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. Бюллетень ИТА. 1967. Т. 11. N. 2. С. 73-83.

Герасимов И. А., Винников Е. Л., Мушаилов Б. Р. Канонические уравнения в небесной механике. – Москва. ГАИШ МГУ, 1996. 208 с.

Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Учебник для студентов университетов, обучающихся по специальности "Астрономия". Издание 3-е, дополненное. – М: Наука, 1975. 800 с.

Каула У. Спутниковая геодезия / Пер. с англ. – М: Мир, 1970. 172 с.

Лукьянов Л. Г., Ширмин Г. И. Лекции по небесной механике. Учебное пособие для высших учебных заведений. Алматы: Эверо, 2009. 277 с.

Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы / Пер. с англ. – М: Физматлит, 2009. 588 с.

Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. – М: Наука, 1968. 800 с.

Холшевников К. В. Асимптотические методы небесной механики. Учебное пособие. – Л.: Издательство Ленинградского университета, 1985. 208 с.

Холшевников К. В., Титов В. Б. Задача двух тел. Учебное пособие. – СПб.: Издательство СПбГУ, 2007. 180 с.

Шарлье К. Небесная механика. – М: Наука, 1966. 627 с.