

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Государственный астрономический институт имени П.К. Штернберга

На правах рукописи  
УДК 524.882

Ранну Кристина Аллановна

# Наблюдательные аспекты моделей расширенной гравитации

Специальность: *01.03.02 – астрофизика и звездная астрономия*

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук Алексеев С.О.

ДИССЕРТАЦИЯ  
на соискание ученой степени  
*кандидата физико-математических наук*

Москва 2014

# Содержание

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Введение</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1. Актуальность темы . . . . .   | 4         |
| 1.2. Цель исследования и постановка задачи . . . . .                             | 5         |
| 1.3. Научная новизна и практическая значимость . . . . .                         | 5         |
| 1.4. Положения, выносимые на защиту . . . . .                                    | 6         |
| 1.5. Публикации по теме диссертации . . . . .                                    | 8         |
| 1.6. Апробация результатов . . . . .   | 9         |
| 1.7. Структура и объем диссертации . . . . .                                     | 10        |
| 1.8. Содержание работы . . . . .   | 10        |
| 1.9. Принятые обозначения и единицы . . . . .                                    | 15        |
| <b>2. Обзор моделей гравитации</b>   | <b>16</b> |
| 2.1. Низкоэнергетический предел теории струн . . . . .                           | 17        |
| 2.1.1. Топологический инвариант . . . . .  | 17        |
| 2.1.2. Статические решения струнной гравитации . . . . .                         | 18        |
| 2.2. Модель Бранса-Дикке . . . . .   | 28        |
| 2.2.1. Общее решение . . . . .   | 28        |
| 2.2.2. Кротовые норы Бранса-Дикке . . . . .                                      | 30        |
| 2.3. Модель Рандалл-Сандрума . . . . .   | 32        |
| 2.3.1. Мир на бране . . . . .  | 32        |
| 2.3.2. Решения типа «черная дыра» в моделях Рандалл-Сандрума . . . . .           | 35        |
| 2.4. Параметризованный постньютоновский формализм . . . . .                      | 40        |
| 2.4.1. Основные требования . . . . .   | 40        |
| 2.4.2. Ньютоновский предел . . . . .   | 42        |
| 2.4.3. Постньютоновский учет . . . . .   | 43        |
| 2.4.4. Постньютоновские потенциалы . . . . .                                     | 45        |
| 2.4.5. Постньютоновская калибровка . . . . .                                     | 49        |
| 2.5. Выводы к главе 2 . . . . .  | 50        |
| <b>3. Внутренняя структура решения типа «черная дыра» Максвелла-Гаусса-Бонне</b> | <b>52</b> |

|  |           |
|--|-----------|
| 3.1. Постановка задачи . . . . .   | 52        |
| 3.2. Решение . . . . .   | 53        |
| 3.3. Результаты численного интегрирования . . . . .                      | 56        |
| 3.4. Выводы к главе 3 . . . . .  | 62        |
| <b>4. Расширенные модели гравитации в постньютоновском пре-<br/>деле</b> | <b>63</b> |
| 4.1. Постановка задачи . . . . .   | 63        |
| 4.2. Общее решение . . . . .   | 64        |
| 4.3. Модель Гаусса-Бонне . . . . .                                       | 67        |
| 4.4. Модель Рандалл-Сандрума . . . . .                                   | 70        |
| 4.4.1. Решение Фигераса-Вайсмана . . . . .                               | 70        |
| 4.4.2. Решение Абдолрахими-Пейджа . . . . .                              | 75        |
| 4.5. Выводы к главе 4 . . . . .  | 79        |
| <b>5. Кротовые норы в теории Бранса-Дикке</b>                            | <b>81</b> |
| 5.1. Постановка задачи . . . . .   | 81        |
| 5.2. Аккреция на кротовые норы Бранса-Дикке . . . . .                    | 84        |
| 5.3. Геометрические свойства кротовых нор Бранса-Дикке . . . . .         | 87        |
| 5.4. Выводы к главе 5 . . . . .  | 90        |
| <b>6. Заключение</b>   | <b>91</b> |
| 6.1. Выводы . . . . .  | 91        |
| 6.2. Благодарности . . . . .   | 92        |

# 1. Введение

## 1.1. Актуальность темы

Любое теоретическое рассмотрение требует экспериментального подтверждения или опровержения для селекции уже существующих моделей и определения свойств новых, требующих создания и разработки. В 1916 году Эйнштейном было получено объяснение аномальной прецессии перигелия Меркурия, открытое Лавуазье в 1859 году, а в 1919 году наблюдения подтвердили предсказанное Эйнштейном отклонение света при прохождении вблизи Солнца. С тех пор общая теория относительности стала основным инструментом астрофизиков при создании теоретических моделей, а физики-теоретики получили возможность пользоваться полученными наблюдательными данными для проверки созданных моделей. Таким образом, четкая граница между астрономией и теоретической физикой стала размываться.

Современные наблюдательные данные свидетельствуют о необходимости создания более общей теории, для которой общая теория относительности было бы частным случаем. Поиски такой теории не прекращаются, и на данный момент создано и создается немало различных моделей гравитации. Выбор более предпочтительных из них и отсева остальных возможен только на основе результатов наблюдений и экспериментов, поэтому особую роль приобретают возможности наблюдения и измерения гравитационных эффектов: атомные часы, интерферометры со сверхдлинной базой, лазерная локация, сверхпроводящие гироскопы и т. д.

Параметризованный постньютоновский формализм Эддингтона-Робертсона-Шиффа (Eddington, 1922; Robertson, 1962; Schiff, 1967), модифицированный Торном, Уиллом и Нордтведтом (Thorn & Will, 1971; Will & Nordtvedt, 1972) является одним из наиболее приспособленных для рассмотрения экспериментов в пределах Солнечной системы методов. Значения постньютоновских параметров известны благодаря результатам измерений в Солнечной системе — в первую очередь, из экспериментов по лазерной локации Луны. На сегодняшний день точность полу-

ченных значений для разных параметров составляет от  $10^{-2}$  до  $10^{-20}$  и постоянно растет. Поэтому в настоящее время параметризованный постньютоновский формализм активно используется в качестве теста на реалистичность для различных моделей гравитации.

Метрика Шварцшильда описывает не только статическую незаряженную, невращающуюся черную дыру, но и любое сферически-симметричное гравитационное поле в пустоте. В пределе слабого поля она может описывать, в том числе, и нашу Солнечную систему. Разумеется, такой подход допустим только в том случае, если массой планет можно пренебречь по сравнению с массой Солнца. Тогда возникает вопрос, насколько сказывается на геометрии пространства замена метрики Шварцшильда на решение расширенной гравитации в масштабах Солнечной системы и отразится ли это отличие на экспериментальных данных.

## **1.2. Цель исследования и постановка задачи**

Целью данной диссертации является поиск следствий расширенных теорий гравитации и возможностей их экспериментальной проверки. В качестве основного метода экспериментальной проверки используется параметризованный постньютоновский формализм.

Для реализации предложенной цели необходимо исследовать как четырехмерные модели с поправками по кривизне, так и модели многомерной гравитации, в том числе с учетом возможной некомпактности дополнительных измерений. Полученные результаты следует сравнить с имеющимися данными по измерению постньютоновских параметров в Солнечной системе.

## **1.3. Научная новизна и практическая значимость**

Все полученные в рамках данной работы результаты являются новыми, оригинальными и достоверными, что подтверждается корректностью используемых аналитических и численных методов. На момент публикации соответствующие результаты были получены впервые в мире.

В диссертации впервые удалось получить полную версию поведения

инварианта кривизны (скаляра Кречмана) под горизонтом невращающейся черной дыры Максвелла-Гаусса-Бонне в зависимости от ее массы и заряда (Alexeyev & Barrau & Rannu 2009) и постньютоновской параметризации сферически-симметричного решения Гаусса-Бонне (Alexeyev & Rannu & Dyadina 2012–2013). На основе полученного результата сделаны выводы относительно моделей гравитации Лавлока с поправками второго и следующих порядков по кривизне и моделей класса  $f(R)$  с ньютоновским пределом.

В диссертации также исследована постньютоновская параметризация недавно полученных решений для черных дыр астрофизического масштаба в теории с некомпактным дополнительным измерением (Alexeyev & Rannu & Dyadina 2013). Показана хорошая согласованность рассмотренных моделей как с предсказаниями общей теории относительности, так и с современными астрометрическими данными.

В диссертации рассмотрены геометрические свойства проходимой кротовой норы в теории Бранса-Дикке (Alexeyev & Rannu & Gareeva 2011). Полученные результаты сопоставлены с соответствующими параметрами компактных объектов в общей теории относительности. На основании данного анализа показана фундаментальная роль исследуемого решения, которое следует считать асимптотически шварцшильдовским в силу малого отличия от статической невращающейся черной дыры в общей теории относительности.

#### **1.4. Положения, выносимые на защиту**

- 1) На основании исследования постньютоновского разложения низкоэнергетического эффективного предела струнной гравитации и решений модели Рандалл-Сандрума для больших черных дыр показано, что предсказания моделей с поправками по кривизне и дополнительным некомпактным измерением полностью согласуются с общей теорией относительности в пределах современных измерений в Солнечной системе. Для решения Фигераса-Вайсмана в модели Рандалл-Сандрума II с одной браной продемонстрирована возмож-

ность слабого эффекта отрицательной нелинейности суперпозиции для гравитации. Показано, с учетом смысла параметров решения, отклонение от общей теории относительности не играет заметной роли, следовательно, эффект нелинейности суперпозиции для гравитации не может быть зарегистрирован с помощью экспериментов в Солнечной системе. Для решения Гаусса-Бонне в рамках эффективного предела струнной гравитации и решения Абдолрахими-Пейджа в модели Рандалл-Сандрума II показано полное соответствие общей теории относительности до третьего постньютоновского порядка. Таким образом, в рамках экспериментов по измерению постньютоновских параметров в Солнечной системе отличие упомянутых решений от общей теории относительности не может быть обнаружено. Вывод для струнной гравитации обобщен на модели  $f(R)$  с ньютоновским пределом (публикации № 9-11).

- 2) На основании изучения геометрических свойств кротовой норы в теории Бранса-Дикке и сопоставления полученных результатов с исследованием аккреции показано, что кротовая нора Бранса-Дикке может рассматриваться как «квазишварцшильдовский» компактный объект. Радиус последней устойчивой орбиты и максимальный прицельный параметр кротовой норы Бранса-Дикке отличаются от соответствующих величин для черной дыры Шварцшильда той же массы на 16.7% и 0.3% соответственно, а изотропная координата горловины равна гравитационному радиусу. Также значения этих величин отличают кротовую нору в теории Бранса-Дикке, в общей теории относительности и в случае наличия магнитного заряда. Поскольку самостоятельной модели Шварцшильда, в которой описывались бы разные типы компактных объектов, не существует, т. е. не может быть такого понятия как «кротовая нора Шварцшильда», кротовая нора Бранса-Дикке может успешно рассматриваться в этой роли, что делает ее одним из базовых решений в расширенной гравитации (публикация № 2).
- 3) На основании исследования поведения инварианта кривизны под го-

ризонтом черной дыры Максвелла-Гаусса-Бонне установлено, при магнитном заряде, превышающем критическое значение, возникает центральная сингулярность, ограничивающая гладкое решение и являющаяся нулем метрических функций  $g_{00}$  и  $g_{22}$ . При этом нуль у функции  $g_{22}$  соответствует тому, что это именно центральная сингулярность (аналогичная Шварцшильдовской). Таким образом, при заряде, который больше или равен критическому, изменяется внутренняя структура решения Максвелла-Гаусса-Бонне, однако описываемый им компактный объект остается обычной черной дырой, т. е. никакой внутренней R-области (горловины, и как следствие проходимости) не наблюдается. Следовательно, рассмотренное решение может быть зарегистрировано только в качестве черной дыры Максвелла-Гаусса-Бонне как в жестком космическом излучении, так и при наблюдении астрофизических объектов с магнитными свойствами (публикации № 1, 3).

### 1.5. Публикации по теме диссертации

- 1) S.O. Alexeyev, A. Barrau, K.A. Rannu, «*Internal structure of a Maxwell-Gauss-Bonnet black hole*» // **Phys. Rev. D** 79 067503 (2009).
- 2) С.О. Алексеев, К.А. Ранну, Д.В. Гареева, «*Возможные наблюдаемые проявления кротовых нор в теории Бранса-Дикке*» // **ЖЭТФ** 140 722 (2011).
- 3) С.О. Алексеев, К.А. Ранну, «*Черные дыры Гаусса-Боннэ и возможности их экспериментального поиска*» // **ЖЭТФ** 3 463 (2012).
- 4) К.А. Rannu, S.O. Alexeyev, A. Barrau, «*Study on internal structure of Maxwell-Gauss-Bonnet black hole*» // **Journal of Physics: Conference Series** 229 012061 (2010).
- 5) К.А. Rannu, S.O. Alexeyev, A. Barrau, «*Internal structure of a Maxwell-Gauss-Bonnet black hole*» // Труды международного семинара «**QUARKS-2010**» 1 143 (2010).



- 6) К.А. Rannu, S.O. Alexeyev, A. Barrau, «*Internal structure of a Maxwell-Gauss-Bonnet black hole*» // **Proceedings of Science QFTHEP2010** 079 (2010).
- 7) К.А. Rannu, S.O. Alexeyev, D.V. Gareeva, «*Brans-Dicke wormholes: possibility for observations and distinction*» // **AIP Conf. Proc.** 1458 515 (2012).
- 8) К.А. Ранну, П.И. Дядина, «*Экспериментальные проверки расширенных теорий гравитации*» // **Ученые записки физического факультета** 4 134801 (2013).
- 9) К.А. Rannu, S.O. Alexeyev, P.I. Dyadina, «*PPN Formalism in Higher Order Curvature Gravity. Spherically Symmetric Case*» // Труды международного семинара «**QUARKS-2012**» 2 217 (2013).
- 10) P.I. Dyadina, К.А. Rannu, S.O. Alexeyev, «*Post-Newtonian limits for Lovelock gravity with scalar field*» // Труды международной конференции «**Black and Dark Topics in Modern Cosmology and Astrophysics**» 23 (2013).
- 11) К.А. Rannu, S.O. Alexeyev, P.I. Dyadina, «*Post-Newtonian limits for brane-world model*» // Труды международной конференции «**Black and Dark Topics in Modern Cosmology and Astrophysics**» 39 (2013).

## 1.6. Апробация результатов

Результаты данной работы неоднократно докладывались на семинарах по гравитации и космологии имени А.Л. Зельманова и семинарах отдела релятивистской астрофизики в ГАИШ МГУ, а также на студенческих и международных конференциях:

- 1) «Frontiers in Black Hole Physics», Дубна, май 2009;
- 2) «Spanish Relativity Meeting (ERE 2009)», Бильбао, сентябрь 2009;
- 3) «QUARKS-2010», Коломна, июнь 2010;

- 4) «QFTNER2010», Голицыно, сентябрь 2010;
- 5) «40-ая студенческая научная конференция Физика Космоса», Коровка, февраль 2011;
- 6) «Black Holes VIII. Theory & Mathematical aspects», Ниагара, май 2011;
- 7) «Spanish Relativity Meeting (ERE 2011)», Мадрид, август 2011;
- 8) «Ломоносовские чтения», Москва, ноябрь 2011;
- 9) «QUARKS-2012», Ярославль, июнь 2012;
- 10) «ЛОМОНОСОВ», Москва, апрель 2013;
- 11) «Black and Dark Topics in Modern Cosmology and Astrophysics», Дубна, сентябрь 2013
- 12) «QUARKS-2014», Суздаль, июнь 2014.

### 1.7. Структура и объем диссертации

Диссертация подразделяется на Введение, четыре Главы, Заключение, Благодарности и Библиографию. Общий объем диссертации 104 страницы, включая 11 рисунков и 130 ссылок.

### 1.8. Содержание работы

В **Главе 1** дается анализ целей и задач диссертации, приводится список опубликованных работ и апробации результатов.

В **Главе 2** дается общий обзор расширенных моделей гравитации с поправками по кривизне как в четырехмерном, так и в многомерном случае, приведены их эффективные четырехмерные решения для компактных объектов и описан параметризованный постньютоновский формализм Уилла как основной метод их экспериментальной проверки.

**Глава 3** посвящена изучению четырехмерного низкоэнергетического предела струнной гравитации, описывающей неминимальную связь скалярного поля (дилатона) с поправкой второго порядка по кривизне,

которая в четырехмерном случае представляет собой полный инвариант (член Гаусса-Бонне), и электромагнитного поля, описываемого тензором Максвелла. Это действие имеет вид

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [m_{pl}^2(-R + 2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) - e^{-2\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \lambda e^{-2\phi}S_{GB}],$$

где  $R$  — скаляр Риччи,  $\phi$  — потенциал скалярного поля,  $F_{\mu\nu}$  — тензор Максвелла,  $\lambda$  — струнная константа связи, описывающая вклад в действие члена Гаусса-Бонне

$$S_{GB} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R^2,$$

где  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  — ковариантный тензор Римана,  $R_{\alpha\beta}$  — ковариантный тензор Риччи,  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$  — инвариант кривизны (скаляр Кречмана). Рассматривается получение решения типа «черная дыра» и подробно обсуждаются полученные результаты, то есть внутренняя структура черной дыры в зависимости от величины ее заряда.

Как было показано ранее (Alexeyev & Pomazanov, 1997; Alexeyev & Sazhin и др., 1997–2002), в области под горизонтом решение для незаряженной черной дыры Гаусса-Бонне существует только до сингулярности в точке  $r = r_s$ . Другая ветвь решения начинается в  $r = r_s$  и существует только до внутреннего горизонта  $r = r_x$ , т. е. не является физической. Присутствие заряда не вносит качественных изменений в эту картину. Однако существует «критическое значение» заряда  $q_{cr}$ , по достижении которого максвелловский член начинает вносить больший вклад, чем член Гаусса-Бонне, а внутренняя сингулярность при  $r = r_s$  исчезает. В этом случае решение существует до нуля компоненты метрики  $g_{00}$ . Цель работы — установить, является ли эта точка сингулярной и, следовательно, определить природу рассматриваемого объекта. Если решение Максвелла-Гаусса-Бонне с зарядом, превышающим критическое значение, не содержит внутренней сингулярности, то при достижении зарядом своего критического значения изменяется не просто внутренняя структура, а сама природа объекта, который в этом случае может рассматриваться как проходимый.

В предыдущих работах (Alexeyev & Pomazanov, 1997; Alexeyev & Sazhin и др., 1997–2002) было отмечено, что черная дыра Гаусса-Бонне представляет интерес прежде всего на планковском масштабе, поскольку величина квадратичных поправок по кривизне быстро убывает с расстоянием. В связи с этим обсуждалась возможность получения таких объектов на ускорителях. Однако кроме ускорителей высокоэнергетичные частицы наблюдаются в астрономии (космические лучи, гамма-всплески). Если черные дыры Гаусса-Бонне присутствуют в космических лучах или излучении гамма-всплесков, они могут быть обнаружены в их спектрах. Изменение природы черных дыр Гаусса-Бонне при достижении зарядом своего критического значения также должно сказаться на результатах наблюдений космического излучения. Однако объект астрофизического масштаба, описываемый решением Максвелла-Гаусса-Бонне, также может быть наблюдаемым. В случае отсутствия внутренней сингулярности такой объект может иметь свойства, которые позволили бы отличить его от компактных объектов других видов, предсказанных общей теорией относительности и расширенными моделями гравитации.

Для решения поставленной задачи было изучено поведение инварианта кривизны под горизонтом событий черной дыры при заряде, превышающем критическое значение. Показано, что он конечен почти на всей области определения и расходится вблизи нуля компоненты метрики  $g_{00}$ . Был сделан вывод, что при достижении зарядом своего критического значения решение существует от бесконечности до центральной сингулярности черной дыры Максвелла-Гаусса-Бонне.

**Глава 4** посвящена постньютоновской параметризации решений расширенной гравитации.

Для получения параметризованного решения четырехмерного низкоэнергетического предела струнной гравитации, описывающей неминимальную связь скалярного поля с поправкой второго порядка относительно скаляра Риччи  $R$  в форме члена Гаусса-Бонне, рассматривается разложение уравнений поля в ковариантном виде, полученных ранее (Sotirou & Barausse, 2007). Дилатонная часть действия предсказуемо не дает вклада в постньютоновское разложение в силу теоремы Уилера об

отсутствии «волос» у черной дыры (Wheeler, 1986). Как было показано ранее (Alexeyev & Pomazanov, 1997; Alexeyev & Sazhin и др., 1997-2002), связь скалярного поля с поправкой второго порядка кривизне позволяет преодолеть условие данной теоремы. Однако дополнительный член в постньютоновском разложении метрики, обусловленный введенным таким образом динамическим дилатоном, приводит к возмущению плоской метрики в постньютоновской параметризации следующего вида:

$$h_{00}^{GB} = 8 \frac{DM}{r^4}.$$

Порядок малости по  $1/r$  при  $r \rightarrow \infty$  в этой поправке лежит за рамками постньютоновского предела, что означает полное совпадение с предсказаниями общей теории относительности для рассматриваемой модели. Таким образом, разница между метриками Шварцшильда и Гаусса-Бонне не может быть выявлена в экспериментах по измерению постньютоновских параметров в Солнечной системе, что согласуется с аналогичным рассмотрением космологического решения Гаусса-Бонне (Sotirou & Vargausse, 2007). Полученный вывод также относится к гравитации Лавлока, содержащей поправки высших порядков по кривизне начиная с третьего. Обусловленные такими поправками возмущения в постньютоновской параметризации решения лежат за рамками первого постньютоновского порядка, поскольку порядок по степеням  $1/r$  дополнительных членов в метрике растет с увеличением степени по кривизне для поправок в действии. Этот результат относится также к теориям класса  $f(R)$ , содержащим ряд по положительным степеням скаляра Риччи  $R$  и удовлетворяющим условиям параметризованного постньютоновского формализма.

Модель Рэндалл-Сандрума II описывает пятимерное пространство анти-де Ситтера — балк — с погруженной в него четырехмерной мембраной — браной (Randall & Sundrum, 1999). Гравитация способна распространяться вдоль любого измерения, так что она действует в том числе и в балке. Вся материя и три фундаментальных взаимодействия (слабое, сильное и электромагнитное) локализованы на бране. Фигерас и Вайсман

продемонстрировали, как получить низкоэнергетическое решение для модели Рандалл-Сандрума II, описывающее статическую черную дыру с радиусом до  $\sim 20l$  (Figueras & Wiseman, 2011). Для этой цели авторы использовали задачу о связи пятимерного пространства анти-де Ситтера ( $\text{AdS}_5$ ) и четырехмерной конформной теории поля ( $\text{CFT}_4$ ), где метрика на бране выражается с помощью разложения Феффермана-Грэхема. В постньютоновской параметризации решения Фигераса-Вайсмана появляется дополнительный член разложения, который имеет вид:

$$h_{00}^{FW} = \frac{121}{27} \frac{\epsilon^2}{l^2} \frac{M^4}{r^2}.$$

Отсюда выражение для постньютоновского параметра  $\beta$  оказывается равным:

$$\beta = 1 - \frac{121}{108} \frac{\epsilon^2}{l^2} M^2.$$

В общей теории относительности  $\beta = 1$ . Найденная поправка к значению этого постньютоновского параметра отрицательная, т. е.  $\beta < 1$ , что означает наличие эффекта отрицательного нарушения линейности закона суперпозиции для гравитации. Однако отклонением от общей теории относительности на самом деле можно пренебречь, поскольку ограничение на возможное значение параметра  $\epsilon$  оказывается меньше планковской длины. Поэтому найденный нами эффект не может быть зарегистрирован с помощью экспериментов в Солнечной системе.

Абдолрахими, Каттоен, Пейдж и Ягхупур-Тари независимо от Фигераса и Вайсмана получили решение для больших черных дыр в модели Рандалл-Сандрума II (Abdolrahimi & Cattoën & Page & Yaghoobpour-Tari, 2012–2013). Постньютоновская параметризация этого решения приводит к следующему вкладу в разложение метрики:

$$h_{00}^{AP} = \frac{l^2 M^2}{96r^4}.$$

Аналогично случаю Гаусса-Бонне, порядок малости по  $1/r$  при  $r \rightarrow \infty$  в

этой поправке лежит за рамками постньютоновского предела. Поэтому постньютоновская параметризация решения Абдолрахими и др. имеет такой же вид, как в случае общей теории относительности, т. е. разница между их предсказаниями неуловима в пределе слабого поля.

**Глава 5** посвящена рассмотрению решения для проходимой кротовой норы в модели Бранса-Дикке со скалярным полем. В работе были найдены размеры горловины кротовой норы Бранса-Дикке и максимальный прицельный параметр для прохождения фотона через кротовую нору. Значение максимального прицельного параметра для кротовой норы Бранса-Дикке  $h_{max}^{BD} \sim 5.18M$  совпадает со значением максимального прицельного параметра для захвата фотона черной дырой Шварцшильда  $h_{max}^{Sch} = 3\sqrt{3}M$  с точностью 0.3%. Изотропная координата горловины кротовой норы Бранса-Дикке равна гравитационному радиусу черной дыры Шварцшильда. Эти результаты сопоставлены с выводами относительно наблюдательных особенностей аккреции на кротовую нору Бранса-Дикке. Поскольку самостоятельной модели Шварцшильда, в которой описывались бы разные типы компактных объектов, не существует, т. е. не может быть такого понятия как «кротовая нора Шварцшильда» справедливо называть кротовые норы Бранса-Дикке асимптотически шварцшильдовскими и искать их по результатам наблюдений именно в этом качестве.

В **Заключении** сформулированы Положения диссертации, выносимые на защиту, а также Благодарности.

## 1.9. Принятые обозначения и единицы

Если это не оговорено особо, то и греческие индексы пробегают значения 0 до 4, строчные латинские индексы пробегают значения от 1 до 3, а заглавные латинские индексы — значения значения 0 до 4. Обычная радиальная координата обозначена  $r$ , изотропная радиальная координата  $\tilde{r}$ . Если это не оговорено особо, используется планковская система единиц  $\hbar = c = 1$ , другие величины, такие как масса и заряд, приводятся в расчете на единицы масс Планка.

## 2. Обзор моделей гравитации

Цель данной главы — дать краткий обзор существовавших ранее решений и описаний расширенной гравитации, используемых в этой диссертации. Первый раздел посвящен модели Гаусса-Бонне со скалярным полем как низкоэнергетическому пределу теории струн с топологическим инвариантом в качестве квадратичной поправки по кривизне (член Гаусса-Бонне). В рамках этой модели существует эффективное четырехмерное решение типа «черная дыра» с зарядом. Особенности внутренней структуры этого решения рассматриваются в главе 3. Возможность экспериментальной проверки модели Гаусса-Бонне в пределе слабого поля исследуется в главе 4.

Второй раздел данной главы посвящен теории Бранса-Дикке, в первую очередь, сферически-симметричным решениям в рамках этой теории, описывающим компактные объекты. Рассматриваются требования для кротовых нор в теории Бранса-Дикке и приводятся результаты предыдущих исследований в этой области, на которых основано рассмотрение, изложенное в главе 5.

Третий раздел данной главы посвящен модели мира на бране Рандалл-Сандрума. Изложены основные идеи данной модели и описаны найденные недавно решения для больших (астрофизических) черных дыр, рассмотренные нами в главе 4.

Четвертый раздел данной главы посвящен параметризованному постньютоновскому формализму, представляющему собой систему единообразного описания различных метрических теорий гравитации и сравнения их друг с другом и с экспериментальными данными по измерению значений так называемых постньютоновских параметров. Постньютоновский формализм используется нами для поиска возможных наблюдательных проявлений модели Гаусса-Бонне и модели Рандалл-Сандрума в главе 4.



## 2.1. Низкоэнергетический предел теории струн

### 2.1.1. Топологический инвариант

Впервые возможность использования струнных теорий для создания моделей, объединяющих все существующие виды фундаментальных взаимодействий, обсуждалась в работе Шерка и Шварца [1]. Рассмотрение поведения струн на фоне метрики классического пространства-времени позволяет при низких энергиях ограничиваться квазиклассическим решением и получить таким образом низкоэнергетический предел струнной гравитации [2–4]. В результате исследования низкоэнергетического предела было показано, что в четырехмерном случае в лагранжиане возникают такие члены как квадрат скаляра Риччи  $R^2$  и тензора Риччи  $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ; низкоэнергетический предел для гетеротических суперструн  $E_8 \times E_8$  [5] содержит квадрат тензора Римана  $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$  [6, 7]. Эти исследования позволили получить в качестве компактифицированного решения четырехмерное пространство Минковского [8]. Однако лагранжианы такого рода приводят к возникновению фиктивных сверхтяжелых частиц типа гостов Паули-Вилларса [9, 10], в то время как в самой теории струн таких частиц нет. Чтобы преодолеть эту трудность, Цвейбах предложил рассмотреть в качестве квадратичной поправки по кривизне эйлерову характеристику второго порядка [11], которая получила название члена Гаусса-Бонне:

$$S^2 = S_{GB} = R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} - 4 R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^2. \quad (2.1)$$

В четырехмерном случае произведение комбинации (2.1) на  $\sqrt{-g}$ , где  $g$  — детерминант метрики, является топологическим инвариантом и позволяет создать нетривиальную теорию взаимодействий, не содержащую гостов. В своей работе [11] Цвейбах приходит к выводу, что общий вид лагранжиана для низкоэнергетического предела теории струн можно записать следующим образом:

$$L = \sqrt{-g} (R + \alpha_2 S^2 + \alpha_3 S_3 + \dots), \quad (2.2)$$

где  $S_3$  — эйлерова характеристика третьего порядка. Таким образом, компактификация теории струн с целью получения четырехмерного низкоэнергетического предела приводит к гравитации Лавлока [12, 13].

### 2.1.2. Статические решения струнной гравитации

#### Решение Гиббонса-Маэды-Гарфинкла-Горовица-Стромингера.

Теория струн характеризуется не только масштабной инвариантностью, но и наличием скалярного поля (дилатона) [14], которое способно значительно изменять динамические свойства системы [15, 16]. В связи с этим Гиббонс и Маэда задались вопросом о влиянии скалярного поля на различные многомерные решения. С этой целью они рассмотрели скалярные инвариантные теории, описывающие взаимодействие гравитации с максвелловскими полями, а также с антисимметричными тензорными полями, включая скалярную составляющую (дилатон) [17].

Для произвольного количества измерений  $D$  действие имеет вид:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^D x \sqrt{-g} \left[ \frac{R(g)}{16\pi} - \frac{(\nabla\Phi)^2}{2\pi(D-2)} - \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{4g_2\phi}{D-2}\right) F_{\rho\sigma}^2 - \frac{1}{2(D-2)!} \exp\left(-\frac{4g_{d-2}\phi}{D-2}\right) F_{D-2}^2 - U(\phi) \right], \quad (2.3)$$

где  $F_{\rho\sigma}^2$  и  $F_{D-2}^2$  — 2-форма и  $(D-2)$ -форма максвелловского типа,  $g_2$  и  $g_{d-2}$  — их константы взаимодействия дилатона  $\phi$ , причем  $g_2$  считается неотрицательной (в противном случае можно переопределить знак  $\phi$  так, чтобы  $g_2$  стала положительной),  $U(\phi)$  — потенциал дилатона  $\phi$ , который может существовать в некоторых калибровочно-инвариантных теориях в качестве «космологической постоянной» [18–20]

$$U(\phi) = \lambda e^{g_0\phi}, \quad (2.4)$$

и также может появляться размерная регуляризация высших размерностей [10].

В результате подробного исследования действия (2.3) в работе [17] были найдены единые решения для черных дыр, пространственно-временных мембран, вихреков и космологических решений, физические свойства которых, как оказалось, сильно зависят от константы взаимодействия дилатонного поля.

Независимо от результатов Гиббонса и Маеды, Гарфинкл, Горовиц и Стромингер изучили семейство решений низкоэнергетической струнной теории в случае статической, сферически-симметричной заряженной черной дыры [21]. Они рассмотрели четырехмерное действие в низкоэнергетическом пределе теории струн:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (-R + 2(\nabla\Phi)^2 + e^{-2\phi} F^2), \quad (2.5)$$

где  $F_{\mu\nu}$  — тензор Максвелла, связанный со скалярным полем  $\Phi$ , а остальные калибровочные и антисимметричные тензорные поля положены равными нулю. Такую параметризацию метрики принято называть калибровкой GM-GHS [22].

Поскольку рассматриваемое решение должно быть сферически-симметричным, метрика была выбрана в наиболее общем виде

$$ds^2 = -\lambda^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\lambda^2} + R^2 d\Omega^2, \quad (2.6)$$

где метрические функции  $\lambda$  и  $R$  зависят только от радиальной координаты  $r$ ,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ , а для тензора Максвелла выбран анзац вида

$$F = Q \sin\theta d\theta \wedge d\varphi, \quad (2.7)$$

где  $Q$  — магнитный заряд.

Полученное аналитическое решение [21] имеет вид

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r \left(r - \frac{Q^2 e^{2\phi_0}}{M}\right) d\Omega, \quad (2.8)$$

$$\exp(-2\phi) = \exp(-2\phi_0) - \frac{Q^2}{Mr}, \quad (2.9)$$

где  $\phi_0$  — асимптотическое значение дилатона на бесконечности. Здесь площади сфер с постоянными значениями  $r$  и  $t$  теперь зависят от  $Q$  и их значения оказываются меньше, чем в случае метрики Шварцшильда, в которую переходит решение (2.8–2.9) при  $Q = 0$ . В частности, площадь такой изосферы равна нулю при  $r = Q^2 e^{2\phi_\infty}/M$ , в результате чего эта сфера становится сингулярной. Поскольку при фиксированных угловых переменных  $\theta$  и  $\varphi$  метрика совпадает с метрикой Шварцшильда,  $r = 2M$  определяет местоположение регулярного горизонта событий.

Вдобавок к массе  $M$  и магнитному заряду  $Q$ , статическое асимптотически плоское решение для действия (2.5) также характеризуется дилатонным зарядом

$$D = \frac{1}{4\pi} \int d^2\Sigma^\mu \nabla_\mu \phi, \quad (2.10)$$

где интеграл берется по двумерной сфере. Для заряженной черной дыры

$$D = - \frac{Q^2 e^{-2\phi_0}}{2M}. \quad (2.11)$$

Решение с электрическим зарядом вместо магнитного может быть получено посредством дуального поворота, причем

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} e^{-2\phi} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}. \quad (2.12)$$

Уравнения движения, соответствующие действию (2.5), инвариантны относительно преобразования  $F \rightarrow \tilde{F}$  и  $\phi \rightarrow -\phi$ , поэтому решение с электрическим зарядом можно получить путем изменения знака  $\phi$  при неизменной метрике. Это подразумевает, что дилатонный заряд положителен для черной дыры, обладающей электрическим зарядом.

**Решение Миньями.** Миньями и Стюарт рассмотрели заряженную дилатонную черную дыру, причем в эффективном действии были учтены

и члены Янга-Миллса, и поправки второго порядка по кривизне в виде произведения члена Гаусса-Бонне на дилатонный фактор [23]:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( -R + 2(\nabla\Phi)^2 - \alpha e^{-2\Phi} (S_{GB} - F^2) \right), \quad (2.13)$$

где  $\alpha = \alpha'/8$ ,  $\alpha'$  — обратное струнное натяжение в поле Янга-Миллса,  $S_{GB}$  — член Гаусса-Бонне. Целью рассмотрения был поиск сферически-симметричных решений, имеющих горизонт событий.

Решение было получено методом последовательных приближений по малому параметру  $\alpha \ll 1$ . В случае нейтрального решения ( $F_{\mu\nu} = 0$ ) в качестве асимптотики при  $\phi_0 = 0$  была выбрана метрика Шварцшильда. Тогда решение может быть записано в виде

$$ds^2 = - e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\mu(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.14)$$

где метрические функции представлены рядами

$$\nu(r) = \nu_0 + \alpha^2 \tau(r), \quad (2.15)$$

$$\mu(r) = \mu_0 + \alpha^2 \sigma(r), \quad (2.16)$$

а  $e^{2\nu_0} = e^{-2\mu_0} = 1 - 2m/r$ . Функции, входящие в соотношения (2.15) и (2.16), имеют вид:

$$\sigma(r) = \frac{1}{2m^4} \left[ \frac{49}{40} \frac{m}{r} + \frac{29}{20} \frac{m^2}{r^2} + \frac{19}{10} \frac{m^3}{r^3} - \frac{203}{15} \frac{m^4}{r^4} - \frac{463}{15} \frac{m^5}{r^5} - \frac{184}{3} \frac{m^6}{r^6} \right],$$

$$\tau(r) = \frac{1}{2m^4} \left[ \frac{49}{40} \frac{m}{r} + \frac{49}{20} \frac{m^2}{r^2} + \frac{137}{30} \frac{m^3}{r^3} + \frac{7}{15} \frac{m^4}{r^4} - \frac{52}{15} \frac{m^5}{r^5} - \frac{40m^6}{3r^6} \right],$$

причем постоянная интегрирования выбрана так, чтобы  $\sigma$  была непрерывна на горизонте  $r = 2m$ . Помимо связи с теорией струн, нейтральный случай интересен как пример нетривиальных скалярных волос в связи с теоремой Уиллера об их отсутствии [24, 25].

В случае наличия только магнитного заряда, базовым оказывается решение не Шварцшильда, а GM-GHS. Тогда метрика записывается в

виде

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r \left(r - \frac{\alpha q^2}{m}\right) d\Omega^2, \quad (2.17)$$

$$e^{-2\Phi} = 1 - \frac{\alpha q^2}{mr}, \quad (2.18)$$

$$Q = \sqrt{\frac{\alpha}{4\pi q}}, \quad (2.19)$$

где  $q$  — магнитный заряд. Решение Миньями применимо в том числе и для больших черных дыр.

**Решение Алексеева-Помазанова.** Алексеевым и Помазановым было получено полное решение [26], описывающее внутреннюю структуру черной дыры в случае низкоэнергетического струнного действия, содержащего члены с гравитоном, дилатоном и член Гаусса-Бонне:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [(-R + 2\partial_\mu\phi \partial^\mu\phi) + \lambda e^{-2\phi} S_{GB}], \quad (2.20)$$

где  $\phi$  — дилатонное поле,  $\lambda$  — параметр струнного взаимодействия. Статическая сферически-симметричная метрика была выбрана в виде

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \frac{\sigma^2}{\Delta} dr^2 - f^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.21)$$

где  $\Delta$ ,  $\sigma$  и  $f$  зависят только от радиальной координаты  $r$ . Решение было получено численно в калибровке кривизны  $f(r) = r$  (Рис. 1)

Оказалось, что поведение метрических функций вне горизонта имеет обычный характер, не отличаясь от найденного в работах [23, 27, 28], и выглядит как стандартное решение Шварцшильда.

Под горизонтом ( $r < r_h$ ) решение существует только до  $r = r_s$ . Была обнаружена другая ветвь решения, которая начинается от  $r_s$  и существует только до внутреннего горизонта  $r_x$ , не являясь физической.

Инвариант кривизны  $R_{ijkl}R^{ijkl}$  в рассматриваемых координатах ра-

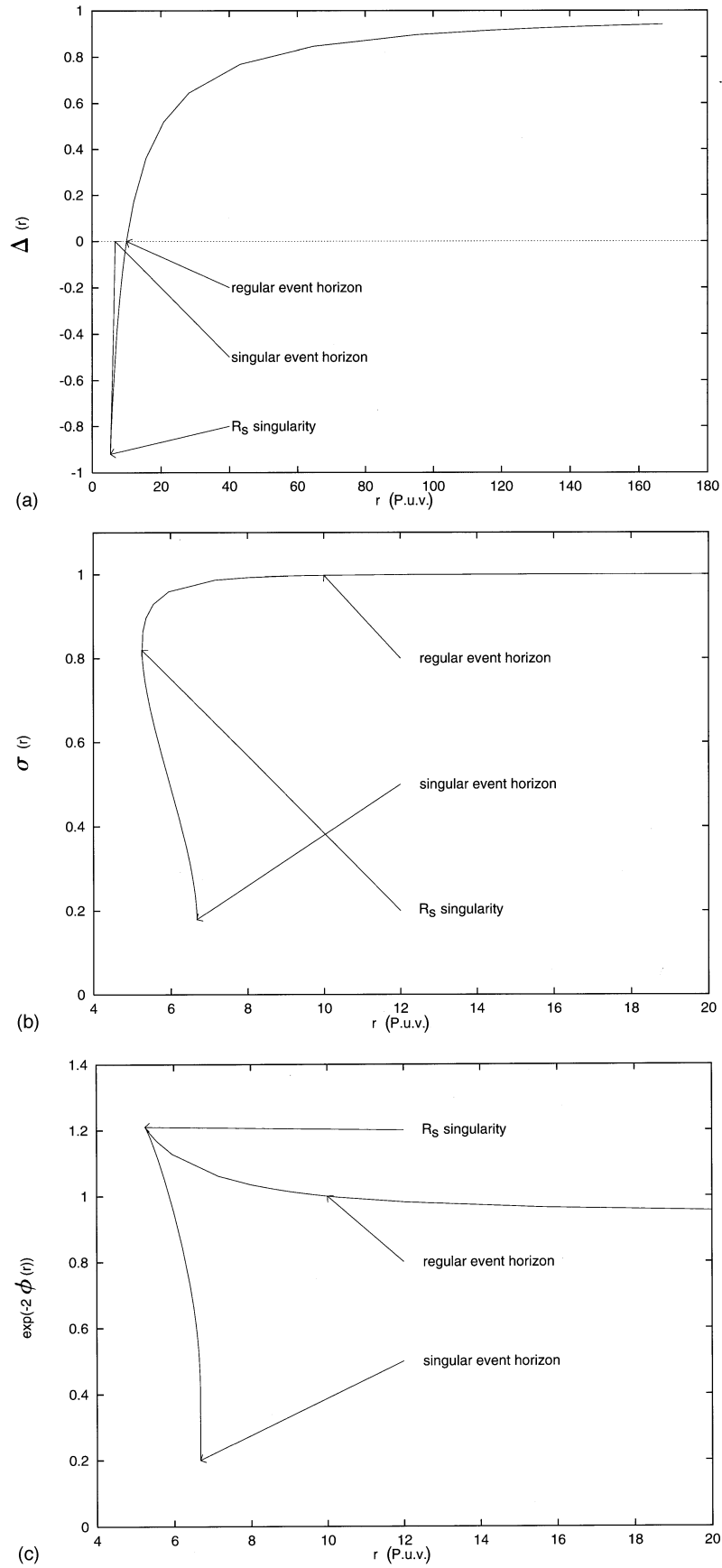


Рис. 1. Зависимость метрических функции  $\Delta$  (a),  $\sigma$  (b) и дилатонной экспоненты  $e^{-2\phi}$  (c) от радиальной координаты  $r$  для горизонта  $r_h = 10.0$  планковских единиц.

вен:

$$\begin{aligned}
R_{ijkl}R^{ijkl} &= 4 \frac{\Delta^2}{\sigma^4 r^4} + 8 \frac{\Delta^2 (\sigma')^2}{\sigma^6 r^2} - 8 \frac{\Delta}{\sigma^2 r^4} - 8 \frac{\Delta \Delta' \sigma'}{\sigma^5 r^2} + \frac{(\Delta'')^2}{\sigma^4} + \\
&+ 4 \frac{(\Delta')^2}{\sigma^4 r^2} - 2 \frac{\Delta'' \Delta' \sigma'}{\sigma^5} + \frac{(\Delta')^2 (\sigma')^2}{\sigma^6} + \frac{4}{r^4} = \\
&= \frac{1}{x^2} \left( \frac{4d_s}{r_2 r_s^2 \sigma_s^6} + \frac{d_2}{2r_2^2 \sigma_s^6} \right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

В соответствии с классификацией из [29], в точке  $r_s$  имеет место скалярная сингулярность или сингулярность кривизны. В окрестности  $r = r_s$  выполняются все (сильное, слабое и энергодоминантности) энергетические условия [30].

В точке внутреннего горизонта  $r_x$ , ограничивающей вторую ветвь решения, инвариант кривизны ведет себя как

$$R_{ijkl}R^{ijkl} \sim \frac{1}{x} + O(x^{\frac{1}{2}}) \rightarrow \infty, \tag{2.23}$$

тогда  $r_x$  — сингулярная точка. Расстояние между  $r_x$  и  $r_h$  достаточно велико для массивных черных дыр (не планковского масштаба), и уменьшается с уменьшением  $r_h$ . Предельным случаем является ситуация, когда все особые точки сливаются воедино, т. е.  $r_h = r_s = r_x$ . Решения для черной дыры с радиусом, меньше предельного, не существуют, следовательно радиус  $r_h = r_s = r_x$  определяет минимально возможный размер черной дыры Гаусса-Бонне.

Для изучения влияния максвелловского поля на решение типа «черная дыра» низкоэнергетической струнной гравитации с поправками второго порядка по кривизне была рассмотрена бозонная часть действия [31–33]

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - e^{-2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \right. \\
&\quad \left. + \lambda e^{-2\phi} S_{GB} \right],
\end{aligned} \tag{2.24}$$



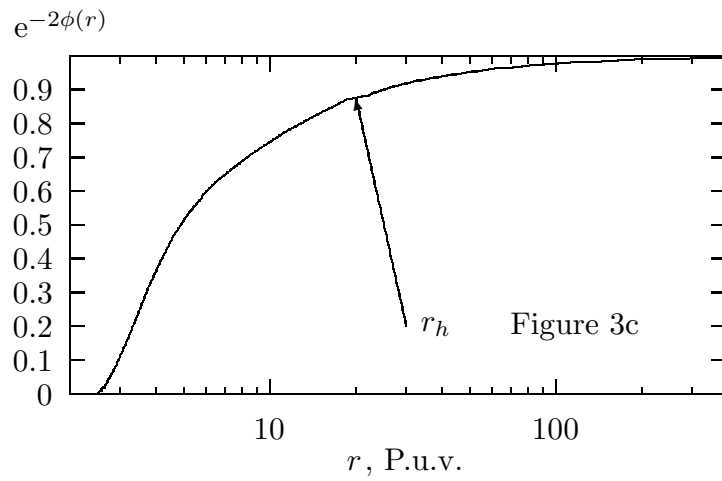
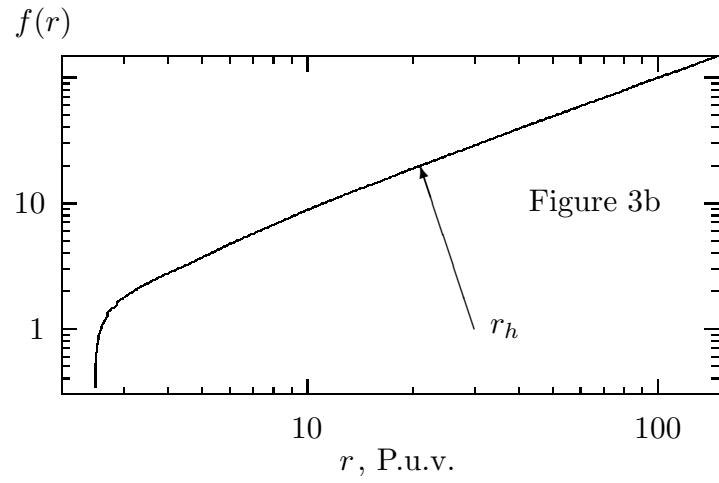
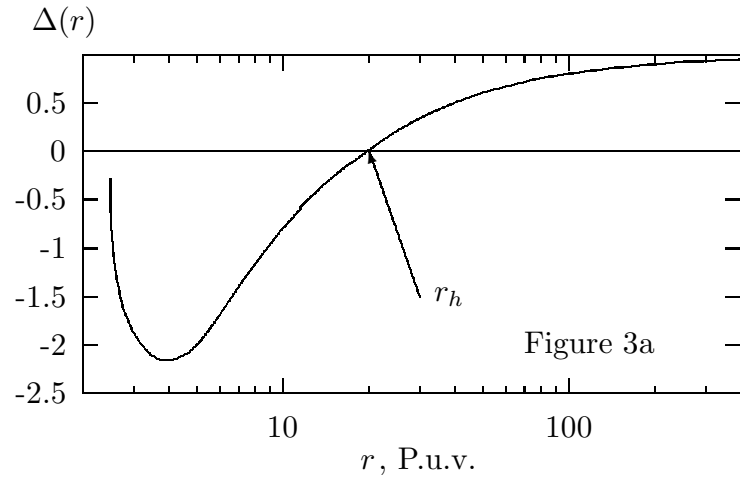


Рис. 2. Зависимость метрических функции  $\Delta$  (a),  $\sigma$  (b) и дилатонной экспоненты  $e^{-2\phi}$  (c) от радиальной координаты  $r$  для горизонта  $r_h = 20.0$  планковских единиц и магнитного заряда  $q > q_{cr}$ .

где  $F_{\mu\nu}$  — тензор Максвелла.

Метрика вновь была выбрана в виде (2.21), так как искомое решение должно быть статическим, сферически-симметричным, асимптотически плоским, имеющим регулярный горизонт. Поскольку рассматривалась черная дыра, обладающая только магнитным зарядом, для тензора Максвелла был использован анзац (2.7) [21].

В результате было установлено [31–33], что при добавлении магнитного поля в действие (2.20) решение типа «черная дыра» существует, когда заряд  $q$  лежит в диапазоне  $0 \leq q \leq m\sqrt{2}$ , как и в решении GM-GHS. Поведение вне горизонта также несильно отличается от GM-GHS, что совпадает с результатами Миньями [23] и Маеды [34]. Поведение решения внутри горизонта  $r_h$  зависит от величины магнитного заряда  $q$ . Когда  $q$  мало, поведение решения аналогично нейтральному, представленному в предыдущей части, потому что вклад поправок по кривизне «сильнее», чем вклад магнитного поля. Инвариант кривизны  $R_{ijkl}R^{ijkl}$  и компоненты  $T_0^0$  и  $T_2^2$  тензора энергии-импульса расходятся вблизи  $r_s$ . То есть, точка  $r_s$  снова представляет чисто скалярную сингулярность (по классификации из [29, 30]). При увеличении  $q$  вклад максвелловского поля растет и при достижении  $q = q_{cr}$  поведение решения меняется, сингулярность  $r_s$  исчезает. Если магнитный заряд превышает критическое значение ( $q > q_{cr}$ ), сингулярность  $r_s$  пропадает и решение существует вплоть до точки, где  $f$  достигает своего нуля. Функции  $f$  и  $e^{-2\phi}$  ведут себя аналогично случаю GM-GHS. Метрическая функция  $\Delta$  демонстрирует локальный минимум недалеко от нуля  $f$  — черта, отсутствующая в решении GM-GHS.

**Решение Сотуру-Бароссе.** В связи с недавним открытием ускоренного расширения Вселенной Сотуру и Бароссе рассмотрели постньютоновскую параметризацию космологического решения для действия Гаусса-Бонне, записанного в следующем виде [35]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{16\pi} - \frac{\lambda}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + f(\phi) S_{GB} \right), \quad (2.25)$$

где случай  $\lambda = +1$  соответствует каноническому скаляру, а  $\lambda = -1$  — фантомному полю. В работе рассматривается как возмущение метрики  $h_{\mu\nu}$  вокруг пространства Минковского  $\eta_{\mu\nu}$ , т. е.  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , так и возмущение скалярного поля  $\phi = \phi_0 + \delta\phi$ , где значение  $\phi_0$  определяется космологическим решением.

В работах [36–43] было показано, что действие (2.25) учитывает инфляцию и ускоренное расширение Вселенной, данная модель соответствует космологическим наблюдательным данным [44, 45] и позволяет избегать сингулярностей в прошлом и будущем.

Полученное параметризованное решение отличается от решения в общей теории относительности в постньютоновском порядке на величину:

$$\delta g_{00} = \frac{4\pi}{3} \left( V(\phi_0) - \frac{1}{2} \lambda \dot{\phi}_0^2 \right) |x|^2, \quad (2.26)$$

где  $\dot{\phi}_0 = \partial\phi_0/\partial t$ . Величина  $V(\phi_0) - \lambda\dot{\phi}_0^2/2$  имеет тот же порядок, что и плотность энергии космологической постоянной, а значит на масштабах Солнечной системы его вкладом можно пренебречь. Следовательно, данная гравитационная модель корректно работает в постньютоновском пределе и не отличается в этом смысле от общей теории относительности, поскольку член, обусловленный связью скалярного поля с членом Гаусса-Бонне, не влияет на постньютоновское разложение метрики.

Теория струн сыграла важную роль в развитии наших представлений о возможном устройстве Вселенной и позволила создать новые способы его описания. Однако, будучи многомерной, теория струн должна иметь эффективный четырехмерный предел, который описывал бы наблюдаемую Вселенную и не противоречил бы имеющимся астрономическим и космологическим данным. Поскольку на данный момент модель Гаусса-Бонне представляется оптимальным эффективным четырехмерным пределом струнной гравитации, экспериментальная проверка модели Гаусса-Бонне позволит судить о реализуемости теории струн. Поэтому исследование возможных астрономических проявлений модели Гаусса-Бонне является важной и актуальной задачей.

## 2.2. Модель Бранса-Дикке

### 2.2.1. Общее решение

Теория Бранса-Дикке — скалярно-тензорная теория гравитации, в пределе совпадающая с общей теорией относительности [46,47]. Действие в ней имеет вид

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \phi R + \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + L_{matter} \right), \quad (2.27)$$

где  $R$  — скалярная кривизна,  $L_{matter}$  — плотность лагранжиана обычной материи,  $\phi$  — скалярное поле, а  $\omega$  — константа связи Бранса-Дикке. Это безразмерная константа, определяемая из наблюдательных данных. При возрастании константы связи теория Бранса-Дикке дает предсказания, все более близкие к общей теории относительности, а в пределе  $|\omega| \rightarrow \infty$  переходит в нее.

Соответствующие уравнения поля выражаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^{,\sigma} \phi_{,\sigma} \right) + \\ &+ \frac{1}{\phi} (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi - g_{\mu\nu} \square \phi), \\ \square \phi &= \frac{8\pi T}{2\omega + 3}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где  $T = T^{\mu}_{\mu}$ ,  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса,  $\square$  — оператор Д'Аламбера.

Поскольку теория Йордана-Бранса-Дикке является скалярно-тензорной метрической теорией, гравитационное воздействие на материю в ней реализуется через метрический тензор пространства-времени, а материя влияет на метрику не только непосредственно, но и через дополнительно генерируемое скалярное поле. Из-за этого гравитационная постоянная  $G$  не является константой, а зависит от скалярного поля, которое может изменяться в пространстве и времени. В самой теории материи нет, имеется только поле Бранса-Дикке. Тензор Эйнштейна в этом случае нарушает

нулевое энергетическое условие по определению, поэтому его нарушает и правая часть уравнения (2.28).

Для  $\omega > 3/2$  общее вакуумное решение имеет вид:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= - e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)], \\
e^{2\alpha} &= e^{2\alpha_0} \left[ \frac{1 - B/r}{1 + B/r} \right]^{2/\lambda}, \\
e^{2\beta} &= e^{2\beta_0} \left( 1 + \frac{B}{r} \right)^4 \left[ \frac{1 - B/r}{1 + B/r} \right]^{2[(\lambda-C-1)/\lambda]} \\
\phi &= \phi_0 \left[ \frac{1 - B/r}{1 + B/r} \right]^{-C/\lambda}, \quad \lambda = \left[ (C+1)^2 - C \left( 1 - \frac{\omega C}{2} \right) \right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — функции от радиальной координаты  $r$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\phi_0$ ,  $B$  и  $C$  — произвольные постоянные. В зависимости от их значений Бранс указал 4 статических сферически-симметричных вакуумных решения [47]:

$$\begin{aligned}
\text{I:} \quad e^\alpha &= e^{\alpha_0} \left[ \frac{1 - B/r}{1 + B/r} \right]^{1/\lambda}, \\
e^\beta &= e^{\beta_0} \left( 1 + \frac{B}{r} \right)^2 \left[ \frac{1 - B/r}{1 + B/r} \right]^{(\lambda-C-1)/\lambda}, \\
\phi &= \phi_0 \left[ \frac{1 - B/r}{1 + B/r} \right]^{C/\lambda}, \\
\lambda^2 &\equiv (C+1)^2 - C \left( 1 - \frac{\omega C}{2} \right) > 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
\text{II:} \quad \alpha &= \alpha_0 + \frac{2}{\Lambda} \tan^{-1}(r/B), \\
\beta &= \beta_0 - \frac{2(C+1)}{\Lambda} \tan^{-1}(r/B) - \ln \left[ \frac{r^2}{r^2 + B^2} \right], \\
\phi &= \phi_0 e^{(2C/\Lambda) \tan^{-1}(r/B)},
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\Lambda^2 \equiv C \left( 1 - \frac{\omega C}{2} \right) - (C + 1)^2 > 0.$$

$$\text{III : } \alpha = \alpha_0 - r/B,$$

$$\beta = \beta_0 - 2 \ln \frac{r}{B} + (C + 1) \frac{r}{B}, \quad (2.32)$$

$$\phi = \phi_0 e^{-Cr/B},$$

$$C = \frac{-1 \pm \sqrt{-2\omega - 3}}{\omega + 2}.$$

$$\text{IV : } \alpha = \alpha_0 - (1/rB),$$

$$\beta = \beta_0 + \frac{C + 1}{Br}, \quad (2.33)$$

$$\phi = \phi_0 e^{-Cr/B},$$

$$C = \frac{-1 \pm \sqrt{-2\omega - 3}}{\omega + 2}.$$

Позднее было показано, что только два решения из приведенных четырех являются независимыми, а именно 1-е (2.30) и 4-е (2.33) [48]. Кроме того, скалярное поле в теории Бранса-Дикке до порядка  $1/r$  должно удовлетворять уравнению [49]:

$$\phi = \phi_0 \left( 1 + \frac{1}{\omega + 2} \frac{M}{r} \right), \quad (2.34)$$

где  $M$  — асимптотическая масса центрального тела (на бесконечности). Однако для решения 4-го класса это соотношение не выполняется. Поэтому рассмотрению подлежит только решение 1-го класса, и в дальнейшем речь будет идти только о нем.

### 2.2.2. Кротовые норы Бранса-Дикке

Изучение кротовых нор в теории Бранса-Дикке было начато Агнесс и Ла Камерой [50]. Для построения кротовых нор требуется материя, которая нарушала бы нулевое энергетическое условие [30]. В теории Бранса-Дикке роль такой материи играет скалярное поле, что неизбежно на-

кладывает ограничения на параметр  $\omega$ . Уравнения поля, описывающие кротовую нору, имеют вид [50]:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} [T_{\mu\nu} + (T_\phi)_{\mu\nu}], \quad (2.35)$$

где  $G_{\mu\nu}$  — тензор Эйнштейна, а  $(T_\phi)_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса скалярного поля. Тогда компонента  $G_{00}$  выражается соотношением:

$$G_{00} = \frac{(1-\gamma)(1+2\gamma)}{1+\gamma} \frac{\eta^2}{r^4(R)} \left[ 1 - \frac{2\eta}{r(R)} \right]^{2(\sqrt{2/(1+\gamma)}-1)}, \quad (2.36)$$

$$R(r) = r \left( 1 - \frac{2\eta}{r} \right)^{(1-\gamma\sqrt{2/(1+\gamma)})/2}, \quad \eta = M \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}},$$

где  $\gamma = (\omega + 1)/(\omega + 2)$  — постньютоновский параметр. Если  $\gamma < 1$ , точка  $R = 0$  сингулярна, так как инвариант кривизны  $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$  в ней расходится. Этот случай соответствует голой сингулярности. В пределе  $\gamma \rightarrow 1$  уравнения поля Бранса-Дикке переходят в уравнения общей теории относительности, что приводит к решению типа «черная дыра» с горизонтом событий  $R = 2M$ . Агнесс и Ла Камера рассмотрели случай  $\gamma > 1$ , который позволяет получить решение для кротовых нор в рамках теории Бранса-Дикке. Тогда  $G_{00} < 0$ , а  $\omega < -2$ . При таком ограничении на значение параметра Бранса-Дикке кротовая нора не только существует, но и проходима.

На основании результатов эксперимента Кассини-Гюйгенс по измерению значений постньютоновских параметров были получены ограничения  $|\omega| > 50000$  [51] и  $|\omega| > 9000$  [52], которые полностью удовлетворяют требованию, выведенному Агнесс и Ла Камерой. Следовательно, наблюдаемые данные не исключают возможности существования кротовых нор Бранса-Дикке.

Существование таких компактных объектов, как черные дыры, на данный момент считается практически установленным. Кротовые норы представляют собой другой вид компактных объектов, обнаружение ко-

торых способно в корне изменить наши представления о Вселенной и, возможно, открыть дорогу к Мультивселенной, которая до сих пор остается не более чем гипотезой. Первая задача в поиске кротовых нор — выработать критерии, по которым их можно отличить от других видов наблюдаемых компактных объектов.

Как и в случае черных дыр, предсказания относительно наблюдаемых параметров кротовых нор могут различаться в зависимости от выбранной модели гравитации. Обнаружение компактного объекта с определенными значениями наблюдаемых параметров является не только свидетельством существования данного вида компактных объектов, но и в пользу соответствующей модели гравитации. Теория Бранса-Дикке была одной из первых моделей со скалярным полем. В пределе ее предсказания совпадают с предсказаниями общей теории относительности и, кроме того, допускают существование таких объектов как кротовые норы. Поэтому исследование наблюдаемых свойств кротовых нор в теории Бранса-Дикке и возможности их обнаружения представляет несомненный интерес.

## **2.3. Модель Рэндалл-Сандрума**

### **2.3.1. Мир на бране**

Впервые возможность существования некомпактных дополнительных измерений была рассмотрена в работе Рубакова и Шапошникова [53]. Они предположили, что наше трехмерное пространство может представлять собой доменную стенку, находящуюся в многомерном пространстве, которая была бы плоской относительно трех пространственных измерений и тонкой относительно дополнительных.

Позднее идея мембраны в многомерном пространстве была рассмотрена в работах [54–56] с целью решения проблемы шкалы фундаментальных взаимодействий. Предложенная теория подразумевает, что частицы и поля стандартной модели, кроме гравитационного взаимодействия, заключены в подпространстве  $(4 + n)$ -мерного пространства (балка), называемом трехмерной браной, вследствие чего присутствие дополнитель-



ных измерений не наблюдается.

Рандалл и Сандрум предложили свой вариант модели мира на бране с единственным дополнительным измерением. Метрика, описывающая такое многомерное пространство, имеет вид:

$$ds^2 = e^{-2kr_c z} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 dz^2, \quad (2.37)$$

где  $k$  — масштабный фактор планковского порядка,  $x^\mu$  — координаты в четырехмерном пространстве, а  $0 \leq z \leq \pi$  — координата в дополнительном измерении, размер которого конечен и определяется величиной  $r_c$ .

В работе [57] показано, что метрика (2.37) является решением уравнений Эйнштейна в простейшем случае с двумя трехмерными бранами и соответствующими космологическими членами. В таком пространстве величины четырехмерных масс связаны с пятимерными массами посредством параметра свертки  $e^{-2kr_c z}$ . Чтобы воспроизвести большую энергетическую шкалу, не требуется слишком большое значение величины  $r_c$ , поскольку используемая для этого функция является экспоненциальной от радиуса компактификации.

Классическое действие в модели Рандалл-Сандрума выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= S_{gravity} + S_{vis} + S_{hid}, \\ S_{gravity} &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} dz \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ -\Lambda + 2\tilde{M}_{Pl}^3 \tilde{R} \right\}, \\ S_{vis} &= \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} \left\{ \mathcal{L} - V_{vis} \right\}, \\ S_{hid} &= \int d^4x \sqrt{-g_{hid}} \left\{ \mathcal{L} - V_{his} \right\}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где  $\tilde{g}$ ,  $\tilde{M}_{Pl}$ ,  $\tilde{R}$  и  $\Lambda$  — детерминант метрики, масса Планка, скаляр Риччи и космологическая постоянная для многомерного пространства,  $g$  — детерминант метрики, описывающей видимую или скрытую брану, а  $V$  — постоянная «энергии вакуума», которая ведет себя как источник гравитации даже в отсутствие возмущения частиц, или натяжение браны.

Если  $V_{hid}$ ,  $V_{vis}$  и  $\Lambda$  связаны через коэффициент  $k$  планковского порядка величины, т. е.

$$V_{hid} = -V_{vis} = 24M^3k, \quad \Lambda = -24M^3k^2, \quad (2.39)$$

где  $k < M$ , то решение для балка получается следующим:

$$ds^2 = e^{-2kr_c|z|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 dz^2. \quad (2.40)$$

Радиус компактификации  $r_c$  фактически является произвольной константой интегрирования.

Рандалл и Сандрум также показали, что дополнительное измерение не обязательно должно быть компактным [58]. Это возможно, если предположить, что метрика для четырех известных измерений не зависит от координаты в дополнительном, т. е. в случае нефакторизуемой геометрии многомерного пространства. В работе [58] авторы ограничились рассмотрением единственной трехмерной браны с положительным натяжением, отодвинув вторую брану на бесконечность. В результате было показано, что дополнительное измерение действительно может быть бесконечным. При этом эффективный нерелятивистский гравитационный потенциал между двумя частицами с массами  $m_1$  и  $m_2$ , находящимися на бране с координатой  $z = 0$ , имеет вид:

$$V(r) = G_N \frac{m_1 m_2}{r} \left( 1 + \frac{1}{r^2 k^2} \right), \quad (2.41)$$

т. е. модель Рандалл-Сандрума с одной браной (так называемая модель Рандалл-Сандрума II) воспроизводит эффективную четырехмерную теорию гравитации.

Подробнее этот вопрос был изучен в работах Широмицу, Маэды и Сасаки [59, 60]. Используя пятимерные уравнения Эйнштейна

$${}^{(5)}R_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB} {}^{(5)}R = \kappa_5^2 T_{AB}, \quad (2.42)$$

где  $T_{AB}$  — пятимерный тензор энергии-импульса, авторы получили эф-

фективные уравнения поля на трехмерной бране, расположенной в пятимерном пространстве-времени балка:

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 g_{\mu\nu} + 8\pi G_4 T_{\mu\nu} + \kappa_5^4 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

где  $g_{\mu\nu}$  — метрика трехмерной браны,  $G_4$  — гравитационная постоянная в четырехмерном случае,  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса материи, локализованной на бране,  $E_{\mu\nu}$  — бесследовый тензор, часть пятимерного тензора Вейля  ${}^{(5)}C_{\beta\rho\sigma}^\alpha$ ,  $\lambda$  — вакуумная энергия на бране,

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2} \kappa_5^2 \left( \Lambda + \frac{1}{6} \kappa_5^2 \lambda^2 \right), \quad (2.44)$$

$$G_4 = \frac{\kappa_5^4 \lambda}{48\pi}, \quad (2.45)$$

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} T_{\mu\alpha} T_\nu^\alpha + \frac{1}{12} T T_{\mu\nu} + \frac{1}{8} g_{\mu\nu} T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - \frac{1}{24} g_{\mu\nu} T^2, \quad (2.46)$$

$$E_{\mu\nu} \equiv {}^{(5)}C_{\beta\rho\sigma}^\alpha n_\alpha n^\rho q_\mu^\beta q_\nu^\sigma. \quad (2.47)$$

Следует заметить, что тензор  $E_{\mu\nu}$  достигает предельных значений при  $z = \pm 0$ , но не на самой бране, и он не равен нулю, если пространство-время балка не является полностью анти-де Ситтеровским. Существование гравитационной постоянной  $G_4$  зависит от наличия вакуумной энергии  $\lambda$ , причем при  $\lambda < 0$  знак  $G_4$  оказывается неверным [61,62]. Член  $\pi_{\mu\nu}$ , квадратичный по тензору энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$ , может играть важную роль, особенно в ранней Вселенной [61–64].

### 2.3.2. Решения типа «черная дыра» в моделях Рандалл-Сандрума

Если материя, заключенная на бране, коллапсирует, образуется черная дыра, горизонт которой имеет протяженность вдоль измерений, пересекающих брану, т. е. в этом случае компактный объект будет многомерным.

Одними из первых черные дыры в рамках модели Рандалл-Сандрума получили Чамблин, Хокинг и Реалл [65]. Они получили решение Шварцшильда-анти-де Ситтера, описывающее черную дыру в пяти измерениях.

Почти сразу после Хокинга Далич, Маартенс, Пападопулос и Резания нашли точное решение для черной дыры, локализованной на бране [66], рассмотрев эффективные четырехмерные уравнения поля Широмицу, Маэды и Сасаки (2.43) [59]. Полученное решение было аналогично решению Райсснера-Нордстрема, но вместо заряда в качестве поправки к потенциалу Шварцшильда оно содержало так называемый «приливной заряд». Эта величина возникает в результате того, что эффекты свободного гравитационного поля балка проецируются на брану посредством пятимерного тензора Вейля.

Дальнейшие исследования показали, что на бране не могут существовать устойчивые черные дыры с радиусом, заметно превышающим AdS-радиус  $l$  — радиус кривизны пятимерного пространства анти-де Ситтера [67–69]. Используя численные методы [70, 71], удалось получить пятимерные черные дыры Рандалл-Сандрума II с радиусом  $\sim 0.2l$  и шестимерные с радиусом до  $\sim 2.0l$  [72–74]. Однако позднее с помощью тех же методов было выдвинуто возражение, что в модели Рандалл-Сандрума II не могут существовать черные дыры даже малых радиусов [75, 76]. Таким образом, вопрос о существовании больших черных дыр в модели Рандалл-Сандрума и, следовательно, о реализуемости данной теории оставался открытым.

**Решение Фигераса-Вайсмана.** Недавно Фигерасу и Вайсману удалось получить низкоэнергетическое решение для модели Рандалл-Сандрума II через задачу о связи пятимерного пространства анти-де Ситтера ( $\text{AdS}_5$ ) и/или четырехмерной конформной теории поля ( $\text{CFT}_4$ ) [77]. Это решение описывает статическую черную дыру с радиусом до  $\sim 20l$ . Рассмотрение основывалось на том факте, что низкоэнергетический предел на бране описывается гравитацией, связанной с конформной теорией поля. Поэтому соответствующее решение можно найти с помощью сопряженной задачи об  $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$ -соответствии, в которой граничная метрика получается из возмущения метрики браны.

В работе [77] авторы опирались на исследования Харо, Скендериса и Солодукина [78], однако их целью был не аналогичный вывод четы-

рехмерного описания гравитации на бране, а наглядная демонстрация взаимосвязи между решениями в рамках AdS<sub>5</sub>/CFT<sub>4</sub>-соответствия и в модели Рандалл-Сандрума II.

Пятимерную метрику  $g_{AB}$ , для которой  $R_{AB} = -4g_{AB}/l^2$ , можно записать вблизи конформной границы  $z = 0$  следующим образом [77]:

$$ds^2 = g_{AB} dx^A dx^B = \frac{l^2}{z^2} [dz^2 + \tilde{g}_{\mu\nu}(z, x) dx^\mu dx^\nu], \quad (2.48)$$

где  $l$  — AdS-радиус,  $z$  — координата браны в дополнительном измерении. Для описания метрики на бране используется разложение Фейффермана-Грэхема вокруг граничной метрики  $g_{\mu\nu}^{(0)}$  [79]. В данном случае эффективная четырехмерная метрика записывается следующим образом:

$$g_{\mu\nu}(z, x) = g_{\mu\nu}^{(0)}(x) + z^2 \left[ R_{\mu\nu}^{(0)}(x) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}^{(0)}(x) \right] + \quad (2.49)$$

$$+ z^4 \left[ g_{\mu\nu}^{(4)}(x) + t_{\mu\nu}(x) \right] + 2z^4 h_{\mu\nu}^{(4)} \log z + O(z^6).$$

Величины  $g_{\mu\nu}^{(0)}(x)$  и  $t_{\mu\nu}(x)$  являются константами интегрирования уравнений балка второго порядка по  $z$ .

В работе [77] предполагается, что для некоторой граничной метрики  $g_{\mu\nu}^{(0)} = g_{\mu\nu}$  существует такое решение, удовлетворяющее граничным условиям в инфракрасном пределе, что метрика стремится горизонту Пуанкаре, т. е. к случаю  $z = 0$  в координатах Пуанкаре для пространства анти-де Ситтера. Для регулярных возмущений граничной метрики  $g_{\mu\nu}^{(0)} = g_{\mu\nu} + \epsilon^2 h_{\mu\nu}$  в некоторой окрестности  $\epsilon = 0$  решения также существуют, причем  $t_{\mu\nu}[g + \epsilon^2 h] = t_{\mu\nu}[g] + O(\epsilon^2)$ . Тензор  $t_{\mu\nu}$  определяет вакуумное ожидаемое значение тензора энергии-импульса в четырехмерной конформной теории поля следующим образом:

$$\langle T_{\mu\nu}^{CFT}[g] \rangle = \frac{t_{\mu\nu}}{4\pi l G_5}. \quad (2.50)$$

Решение для модели Рандалл-Сандрума II строится в приближении малой кривизны на бране по сравнению с кривизной балка AdS<sub>5</sub>. При

этом фиксируется плоскость браны с индуцированной метрикой  $\gamma_{\mu\nu}$ , расположенная на поверхности  $z = \epsilon$ . Возмущение  $h_{\mu\nu}$  выбрано таким образом, что

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{l^2}{\epsilon} g_{\mu\nu}. \quad (2.51)$$

Параметр  $\epsilon$  описывает масштаб кривизны на бране по отношению к AdS-длине, предел  $\epsilon \rightarrow 0$  соответствует приближению малой кривизны, так что применимы обычные четырехмерные уравнения Эйнштейна. Поэтому предпочтительно использовать не  $\gamma_{\mu\nu}$ , а перенормированную метрику браны  $g_{\mu\nu}$ .

Поскольку существует устойчивое решение AdS<sub>5</sub>/CFT<sub>4</sub> с четырехмерной метрикой Шварцшильда в качестве граничной, которая стремится к горизонту Пуанкаре для пространства анти-де Ситтера в инфракрасном пределе, то возможно существование больших черных дыр в рамках модели Рандалл-Сандрума II [77]. Более того, такие черные дыры устойчивы, поскольку в качестве граничной метрики для решения AdS<sub>5</sub>/CFT<sub>4</sub> выступает метрика Шварцшильда, следовательно  $g^{(0)}$  устойчива для любых порядков по  $\epsilon$ . Тогда геометрия балка должна перенять изометрии граничной метрики [80].

Искомое решение имеет вид [77]:

$$ds_5^2 = \frac{l^2}{\Delta(r, x)^2} \left( r^2 T dt^2 + \frac{x^2 g(x) S}{f(r)^2} d\Omega_{(2)}^2 + \frac{4A}{f(r)^4} dr^2 + \right. \\ \left. + \frac{4B}{f(r)^2 g(x)} dx^2 + \frac{2rx F}{f(r)^3} dr dx \right), \quad (2.52)$$

$$\Delta(r, x) = \frac{(1 - r^2) + \tilde{\beta}(1 - x^2)}{\tilde{\beta}(1 - r^2)},$$

где координаты  $r$  и  $x$  безразмерны и принимают значения  $[0, 1]$ ,  $f(r) = 1 - r^2$ ,  $g(x) = 2 - x^2$ , а  $X = \{T, S, A, B, F\}$  — набор гладких функций, зависящих от только  $(r, x)$ .

Если положить  $T, S > 0$  и  $AB - r^2 x^2 g(x)^2 F^2 / 16 > 0$ , то метрика полу-

чится евклидовой с правильной топологией. В противоположность случаю, описанному в [81], функция  $\Delta(r, x)$  не исчезает при  $x = 1$ , так что в этой координате не возникает ультрафиолетовой расходимости. Если выбрать опорную метрику  $\bar{g}$  так, чтобы  $T = A = B = S = 1$ , а  $F = 0$ , то  $x = 1$  будет соответствовать положению браны. Безразмерный параметр  $\tilde{\beta}$  определяет обратную температуру  $\beta = 4\pi\tilde{\beta}l$  и эффективно описывает размер черной дыры относительно масштаба космологической постоянной.

Найденное в работе [77] решение для большой черной дыры на бране в модели Рандалл-Сандрума II устойчиво и по мере увеличения радиуса асимптотически стремится к черной дыре Шварцшильда.

**Решение Абдолрахими-Пейджа.** Абдолрахими, Каттоен, Пейдж и Ягхупур-Тари получили решение для больших черных дыр в модели Рандалл-Сандрума II [82, 83] независимо от Фигераса и Вайсмана [77]. Однако эти два решения хорошо согласуются между собой. Абдолрахими и др. использовали численный спектральный метод, чтобы выразить пятимерную метрику через полиномы Лежандра [82]. В результате эффективная четырехмерная метрика, индуцированная на брану, принимает вид:

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left[ r^2 + \frac{1}{(-\Lambda)} F \right] d\Omega^2 + \left[ 1 - \frac{1}{(-\Lambda r^2)} \frac{r - 2M}{r - 1.5M} \left( F - r \frac{dF}{dr} \right) \right] \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2, \quad (2.53)$$

где  $F$  — найденный численно полином, который стремится к единице при  $r \rightarrow \infty$ . Наилучшая аппроксимация для него имеет вид:

$$F_{11} = 1 - 1.1241 \left( \frac{2M}{r} \right) + 1.956 \left( \frac{2M}{r} \right)^2 - 9.961 \left( \frac{2M}{r} \right)^3 +$$

$$\begin{aligned}
& + 35.475 \left(\frac{2M}{r}\right)^4 - 75.962 \left(\frac{2M}{r}\right)^5 + 99.432 \left(\frac{2M}{r}\right)^6 - \\
& - 3.694 \left(\frac{2M}{r}\right)^7 + 18.726 \left(\frac{2M}{r}\right)^8 + 13.990 \left(\frac{2M}{r}\right)^9 - \\
& - 12.366 \left(\frac{2M}{r}\right)^{10} + 2.900 \left(\frac{2M}{r}\right)^{11}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Полученная метрика (2.53) является асимптотически шварцшильдской. Можно показать, что в первом порядке по  $1/(-\Lambda M^2)$  температура Хокинга и энтропия черной дыры Рандалл-Сандрума II имеют те же значения, что и для решения Шварцшильда с той же массой ADM.

Таким образом в своей работе [82,83] Абдолрахими, Пейдж и др. независимо подтвердили вывод Фигераса и Вайсмана относительно существования больших устойчивых черных дыр в модели Рандалл-Сандрума II, что является важным свидетельством в пользу данной теории. Решения Фигераса-Вайсмана и Абдолрахими-Пейджа открывают новые возможности для проверки модели Рандалл-Сандрума и потому нуждаются в дальнейшем исследовании.

## 2.4. Параметризованный постньютоновский формализм

### 2.4.1. Основные требования

Постулаты метрических теорий допускают существование далекодействующих полей тяготения кроме метрики, однако требуют, чтобы материя и негравитационные поля не зависели от них [84]. Таким образом, метрика оказывается единственным гравитационным полем, входящим в уравнения движения, а остальные поля могут создаваться материей и совместно с ней могут генерировать метрику, но не способны непосредственно с ней взаимодействовать. Одна метрическая теория отличается от другой только тем характерным способом, каким материя и, возможно, другие поля тяготения создают метрику.

Параметризованный постньютоновский формализм рассматривает



медленное движение в постньютоновском пределе в случае слабого поля для всех видов возможных метрических теорий и описывает его с помощью десяти постньютоновских параметров. Каждая метрическая теория характеризуется набором конкретных значений этих параметров. Такое приближение является достаточно точным для экспериментов в Солнечной системе, но оно не адекватно для обсуждения гравитационного излучения, для которого не выполняется предположение медленного движения, систем компактных объектов вроде двойных пульсаров, для которых не выполняется предположение слабости полей, а также в космологии, где делаются совершенно иные предположения [84].

Относительно свойств самогравитирующих тел необходимо два предположения [85]:

- 1) вещество, из которого состоит тело, является идеальной жидкостью;
- 2) (анизотропный) поток излучения и сквозь тело пренебрежимо мал по сравнению с плотностью его внутренней энергии.

Идеальная невязкая жидкость в ньютоновском пределе подчиняется стандартным уравнениям гидродинамики. Из этих соображений определяется как ньютоновский потенциал, так и тензор энергии-импульса рассматриваемой жидкости.

Обобщенная постньютоновская метрика должна быть записана таким образом, чтобы удовлетворять следующим принципам:

- 1) все отклонения метрики от плоского пространства только ньютоновского и постньютоновского порядка; постпостньютоновские отклонения и отклонения более высокого порядка не учитываются;
- 2) на больших расстояниях между точкой поля и материей метрика становится плоской;
- 3) в метрику входят только масса покоя, энергия, давление и скорость вещества, но не входят градиенты этих величин;
- 4) координаты выбраны таким образом, чтобы метрические коэффициенты были безразмерными.

Используя все эти предположения, можно параметризовать не только метрику, но и тензор энергии-импульса, выразив его через ньютоновский потенциал, плотность, квадрат скорости вещества, давление и т. д. Все расчеты, приведенные в [86] применимы только к массивным телам которые, будучи источниками внешнего гравитационного поля, находятся в покое относительно системы координат в данный момент времени. Учет движения таких тел может привести к дальнейшему нарушению принципа эквивалентности.

В постньютоновском подходе используются два постулата, которые проистекают из рассмотрений результатов экспериментов с помощью подхода Дикке [85]:

- 1) существует метрика с сигнатурой  $-2$ , которая определяет единицы измерения длины и времени в обычном тензорном виде:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j; \quad (2.55)$$

- 2) вещество под давлением реагирует на воздействие гравитации таким образом, чтобы для дивергенции полного тензора энергии-импульса для любой материи и негравитационных полей по компонентам метрики было верно соотношение

$$\nabla \cdot T = 0, \quad (2.56)$$

где  $T$  — полный тензор энергии-импульса для всех материальных и негравитационных полей.

#### 2.4.2. Ньютоновский предел

Тяготение в Солнечной системе является достаточно слабым, и ньютоновская теория объединяет почти все, кроме наиболее тонких, эффекты. С точностью до  $10^{-5}$  свет распространяется по прямой с постоянной скоростью, а пробные частицы движутся в соответствии с уравнением

$$a = \nabla U, \quad (2.57)$$

где  $a$  — ускорение тела,  $U$  — ньютоновский потенциал тяготения, создаваемый материей с плотностью массы покоя  $\rho$  согласно выражениям

$$\nabla^2 U = -4\pi\rho, \quad (2.58)$$

$$U(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (2.59)$$

Стоит заметить, что традиционно в параметризованном постньютоновском формализме ньютоновский потенциал  $U$  имеет другой знак, чем обычно, и является положительной величиной, т. е.  $U \approx M/r$  [87].

Идеальная невязкая жидкость подчиняется обычным эйлеровским уравнениям гидродинамики:

$$d\rho/dt + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (2.60)$$

$$\rho d\mathbf{v}/dt = \rho\nabla U - \nabla p, \quad (2.61)$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\rho$  — скорость и плотность массы покоя элемента жидкости соответственно;  $p$  — полное давление (материи и излучения) на этот элемент;  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla$  — полная производная по времени.

Однако ньютоновский предел перестает быть адекватным при точности выше, чем  $10^{-5}$ . Например, он не может дать значение смещения перигелия Меркурия с точностью лучше  $5 \times 10^{-7}$  рад на оборот (примерно  $4 \times 10^{-4}''$ /столетие). Следовательно, необходимо более точное приближение метрики пространства-времени, получившее название постньютоновского.

### 2.4.3. Постньютоновский учет

В Солнечной системе ньютоновский потенциал тяготения нигде не превышает  $10^{-5}$  (в геометризованных единицах измерения  $U$  безразмерно). Скорости планет связаны с ним соотношениями вириала, из которых следует, что

$$v^2 \leq U. \quad (2.62)$$

Материя Солнца и планет находится под давлением  $p$ , которое, как правило, меньше плотности энергии тяготения  $\rho U$ , т. е.

$$p/\rho \leq U \quad (2.63)$$

( $p/\rho \sim 10^{-5}$  для Солнца и  $\sim 10^{-10}$  для Земли). Удельная плотность (отношение плотности энергии к плотности массы покоя) других видов энергии (энергия сжатия, энергия излучения, тепловая энергия и пр.) также мала:

$$\Pi \leq U \quad (2.64)$$

( $\Pi \sim 10^{-5}$  для Солнца и  $\sim 10^{-9}$  для Земли). Эти четыре малые величины имеют следующий порядок малости:

$$U \sim v^2 \sim p/\rho \sim \Pi \sim O(2). \quad (2.65)$$

При этом первая степень скорости  $v$  есть  $O(1)$ ,  $U^2 \sim O(4)$ ;  $Uv \sim O(3)$ ,  $U\Pi \sim O(4)$  и т. д. Кроме того, поскольку эволюция Солнечной системы во времени определяется движением ее составных частей,  $\partial/\partial t \sim v\nabla$  и, следовательно,

$$|\partial/\partial t|/|\partial/\partial x| \sim O(1). \quad (2.66)$$

Для лагранжиана одиночной частицы в метрическом поле тяготения ньютоновская физика дается приближением с точностью до членов порядка  $O(2)$ , следовательно, постньютоновская физика должна учитывать члены следующего порядка малости, т. е.  $O(4)$ . Что касается нечетных порядков малости —  $O(1)$  и  $O(3)$ , они должны содержать нечетное число скоростей  $v$  или производных  $\partial/\partial t$ . Поскольку такие члены меняют знак при обращении хода времени, они должны описывать диссипацию или поглощение энергии материей. Однако закон сохранения массы покоя исключает появление членов  $O(1)$ , а закон сохранения энергии в постньютоновском пределе — членов  $O(3)$ . В порядке выше четвертого разные теории могут давать различные результаты. Например, в общей

теории относительности закон сохранения постньютоновской энергии запрещает наличие членов  $O(5)$ , однако члены  $O(7)$  могут присутствовать — они описывают энергию, теряемую материей на гравитационное излучение. Итак, для получения постньютоновского предела любой метрической теории необходимо знать компоненты метрики  $g_{00}$  до членов  $O(4)$ ,  $g_{0j}$  — до  $O(3)$  и  $g_{jk}$  — до  $O(2)$  соответственно.

#### 2.4.4. Постньютоновские потенциалы

Материю, составляющую Солнечную систему, можно рассматривать как идеальную жидкость [86]. Постньютоновский предел для идеальной жидкости в любой метрической теории гравитации лучше всего вычисляется формальным решением уравнений поля и представлением метрики в виде последовательности постньютоновских функционалов материальных переменных с коэффициентами, которые могут зависеть от условий связи локальной материи и космологического окружения, а также от других постоянных теории. Эволюция материальных переменных и, следовательно, функционалы метрики определяются уравнениями движения  $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ , где тензор энергии-импульса и постньютоновская метрика имеют порядок, согласующийся с постньютоновским приближением. Эволюция космологических коэффициентов связи определяются решением соответствующей космологической модели. Таким образом, наиболее общую постньютоновскую метрику можно найти, просто записав члены метрики, состоящие из возможных постньютоновских функционалов материальных переменных, каждый из которых умножен на произвольный коэффициент (возможно, зависящий от характера связи с космологическим окружением и других констант), и добавив эти члены к метрике Минковского для получения физической метрики. К сожалению, количество таких функционалов бесконечно велико, так что для развития формализма необходимо наложить некоторые ограничения на подлежащие рассмотрению члены, руководствуясь частично субъективным представлением «разумности», частично свидетельствами известных теорий тяготения [84].

- 1) Члены метрики должны быть ньютоновского и постньютоновского порядка; члены постпостньютоновского и высших порядков не включаются.
- 2) Члены метрики должны стремиться к нулю, когда расстояние  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  между точкой поля  $\mathbf{x}$  и типичной точкой внутри материи  $\mathbf{x}'$  становится большим. Это гарантирует, что в квазидекартовой системе координат асимптотической метрикой будет метрика Минковского.
- 3) Координаты выбираются так, чтобы метрика была безразмерной.
- 4) В выбранной здесь квазидекартовой системе координат начало координат как в пространстве, так и во времени является совершенно произвольным, так что метрика не должна содержать его в явном виде. Это гарантируется использованием функционалов, в которые точка поля  $\mathbf{x}$  всегда входит в комбинации  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  (где  $\mathbf{x}'$  — точка, связанная с распределением материи), и представлением всех зависимостей от времени в неявном виде через вариации материальных переменных и возможных коэффициентов космологической связи.
- 5) Поправки к метрике  $h_{00}$ ,  $h_{0j}$  и  $h_{jk}$  при пространственных вращениях должны преобразовываться как скаляры: векторы и тензоры соответственно и, следовательно, должны быть сконструированы из соответствующих величин. Среди переменных, связанных с распределением материи, примерами являются: скаляры  $\rho$ ,  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ ,  $v'^2$ ,  $\mathbf{v}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  и другие, векторы  $v'_j$ ,  $(x - x')_j$  и тензоры  $(x - x')_j(x - x')_k$ ,  $v_j v_k$  и другие. Для переменных, зависящих от структуры уравнений поля теории и условий связи с космологическим окружением, имеются только два типа величин в системе покоя Вселенной: скалярные космологические коэффициенты связи, т. е. численные коэффициенты, и тензор  $\delta_{jk}$ . В системе покоя изотропной Вселенной никакие векторы или анизотропные тензоры не могут быть сконструированы. Если же Вселенная предполагается слегка анизотропной, такие члены возможны [88].
- 6) Функционалы метрики должны порождаться массой покоя, энерги-

ей, давлением и скоростью, но не их градиентами. Это ограничение является субъективным, и его можно легко снять, как только для этого появится причина. Пока таких причин не было.

- 7) Функционалы должны быть «простыми». Это ограничение является крайне субъективным.

Имея в виду эти ограничения, запишем члены, которые могут появиться в постньютоновской теории.

- 1)  $g_{jk}$  до  $O(2)$ : из условия 5) следует, что при вращениях  $g_{jk}$  должно вести себя как трехмерный тензор, так что единственные члены, которые могут появиться, это  $U\delta_{jk}$  и

$$U_{jk} = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)(x - x')_j(x - x')_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'. \quad (2.67)$$

Член  $U_{jk}$  более удобно выразить через так называемый суперпотенциал

$$\chi(\mathbf{x}, t) = - \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (2.68)$$

$$\chi_{,jk} = - \delta_{jk}U + U_{jk}, \quad \nabla^2\chi = - 2U. \quad (2.69)$$

Теперь необходимо рассматривать только члены  $U\delta_{jk}$ ,  $\chi_{jk}$ .

- 2)  $g_{0j}$  до  $O(3)$ : эти компоненты метрики при вращении должны преобразовываться как трехмерные векторы и, следовательно, содержат только члены

$$V_j = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t) v'_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (2.70)$$

$$W_j = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}') (x - x')_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'. \quad (2.71)$$

Эти функционалы также связаны с суперпотенциалом  $\chi$ :

$$\chi_{,0j} = V_j - W_j. \quad (2.72)$$

3)  $g_{00}$  до  $O(4)$ : эта компонента при вращении должна вести себя как скаляр. Единственные члены, которые следует в этом случае рассмотреть, это  $U^2$  и

$$\begin{aligned}
U &= \int \frac{\rho'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \\
U_{jk} &= \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)(x - x')_j(x - x')_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \\
\Phi_W &= \int \rho' \rho'' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}''}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|} \right) d^3x' d^3x'', \\
\Phi_1 &= \int \frac{\rho' v'^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \\
\Phi_2 &= \int \frac{\rho' U'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \\
\Phi_3 &= \int \frac{\rho' \Pi'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \\
\Phi_4 &= \int \frac{p'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \\
\mathcal{A} &= \int \frac{\rho' [v'(\mathbf{x} - \mathbf{x}')]^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x', \\
\mathcal{B} &= \int \frac{\rho'(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{d\mathbf{v}'}{dt} d^3x'.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Ограничение 7) было использовано, чтобы ликвидировать другие возможные громоздкие метрические функционалы, например

$$\begin{aligned}
V_j V_j U^{-1}, \quad \Phi_1 \Phi_3 U^{-2}, \quad U_{ij} U_{ij}, \\
\nabla \chi \nabla U, \quad \nabla \int \frac{\rho' \nabla' \chi'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \dots
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Если один из этих членов появится в постньютоновской метрике какой-либо теории гравитации, использованный формализм можно соответственно модифицировать.

Функционалы, включенные в метрику, удовлетворяют соотношениям:



$$\begin{aligned}
\nabla^2 V_j &= -4\pi\rho v_j, \\
V_{j,j} &= -U_{,0}, \\
\nabla^2 \Phi_1 &= -4\pi\rho v^2, \\
\nabla^2 \Phi_2 &= -4\pi\rho U, \\
\nabla^2 \Phi_3 &= -4\pi\rho \Pi, \\
\nabla^2 \Phi_4 &= -4\pi\rho, \\
\nabla^2 (\Phi_W + 2U^2 - 3\Phi_2) &= 2\chi_{,ij} U_{,ij}, \\
\chi_{,00} &= \mathcal{A} + \mathcal{B} - \Phi_1.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

#### 2.4.5. Постньютоновская калибровка

Стандартная постньютоновская калибровка для метрики имеет вид:

$$\begin{aligned}
g_{00} &= -1 + 2U - 2\beta U^2 - 2\xi\Phi_W + \\
&\quad + (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \varsigma_1 - 2\xi) \Phi_1 + \\
&\quad + 2(3\gamma - 2\beta + 1 + \varsigma_2 + \xi) \Phi_2 + 2(1 + \varsigma_3) \Phi_3 + \\
&\quad + 2(3\gamma + 3\varsigma_4 - 2\xi) \Phi_4 - (\varsigma_1 - 2\xi) \mathcal{A} - \\
&\quad - (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) w^2 U^2 - \alpha_2 w^i w^j U_{ij} - (2\alpha_3 - \alpha_1) w^i V_i, \\
g_{0i} &= -\frac{1}{2} (4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \varsigma_1 - 2\xi) V_i - \\
&\quad - \frac{1}{2} (1 + \alpha_2 - \varsigma_1 + 2\xi) W_i - \\
&\quad - \frac{1}{2} (\alpha_1 - 2\alpha_2) w^i U - \alpha_2 w^i U_{ij} = 0, \\
g_{ij} &= (1 + 2\gamma U) \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Стандартная постньютоновская калибровка для тензора энергии-импульса идеальной жидкости:

$$\begin{aligned}
T^{00} &= \rho (1 + \Pi + v^2 + 2U) \\
T^{0i} &= \rho (1 + \Pi + v^2 + 2U + p/\rho) v^i, \\
T^{ij} &= \rho (1 + \Pi + v^2 + 2U + p/\rho) v^i v^j + p\delta^{ij} (1 - 2\gamma U).
\end{aligned} \tag{2.77}$$

| ППН-параметр | Физический смысл в ОТО                                  | Значение в ОТО | Экспериментальное значение | Эффекты                               |
|--------------|---|----------------|----------------------------|---------------------------------------|
| $\gamma$     | кривизна пространства, создаваемая единицей массы покоя | 1              | $1 + 2.3 \times 10^{-5}$   | задержка, отклонение света            |
| $\beta$      | степень нелинейности закона суперпозиции для гравитации | 1              | $1 + 1.1 \times 10^{-4}$   | эффект Нордтведта, смещение перигелия |
| $\xi$        | наличие эффектов привилегированного положения           | 0              | $1 \times 10^{-3}$         | приливы Земли                         |
| $\alpha_1$   | наличие эффектов  | 0              | $1 \times 10^{-4}$         | круговая поляризация                  |
| $\alpha_2$   | привилегированной                                       | 0              | $4 \times 10^{-7}$         | прецессия оси                         |
| $\alpha_3$   | системы отсчета   | 0              | $4 \times 10^{-20}$        | самоускорение                         |
| $\zeta_1$    | нарушение закона  | 0              | $2 \times 10^{-2}$         | —                                     |
| $\zeta_2$    | сохранения  | 0              | $4 \times 10^{-5}$         | ускорение двойного пульсара           |
| $\zeta_3$    | полного импульса  | 0              | $1 \times 10^{-8}$         | 3й закон Ньютона                      |
| $\zeta_3$    |   | 0              | $6 \times 10^{-3}$         | —                                     |

Таблица 1. Экспериментальные значения постньютоновских параметров.

Постньютоновскими параметрами являются коэффициенты, использованные в калибровке метрики (2.76). Для разных моделей гравитации значения этих коэффициентов различаются. Их физический смысл и значения для общей теории относительности приведены в таблице 1.

Параметризованный постньютоновский формализм является одним из методов, наиболее приспособленных для рассмотрения экспериментов в Солнечной системе. Он позволяет не только описывать гравитацию в постньютоновском пределе, но и сравнивать предсказания различных теорий друг с другом и с результатами измерений. Таким образом, параметризованный постньютоновский формализм открывает широкие возможности для проверки расширенных теорий гравитации в пределе слабого поля.

## 2.5. Выводы к главе 2

В настоящий момент существует немало возможностей для проверки расширенных моделей гравитации путем сравнения теоретических пред-

сказаний с данными наблюдений. С другой стороны, существует огромное число расширенных моделей гравитации, включая модели со скалярным полями и дополнительными компактными и некомпактными измерениями. Эти модели нуждаются в проверке и подтверждении, в том числе, на основе астрономических данных. Точность наблюдений также постоянно возрастает, предоставляя возможности для более детальной проверки имеющихся теорий. Таким образом, поиск наблюдательных особенностей расширенных моделей гравитации является не просто важной задачей, а насущной необходимостью.

### 3. Внутренняя структура решения типа «черная дыра» Максвелла-Гаусса-Бонне

#### 3.1. Постановка задачи

Ранее в работах [26, 31–33] было получено статическое, асимптотически плоское, сферически-симметричное решение типа «черная дыра» низкоэнергетического эффективного действия струнной гравитации с поправками второго порядка по кривизне в форме члена Гаусса-Бонне. Рассматриваемые черные дыры представляют интерес прежде всего на планковском масштабе, поскольку величина квадратичных поправок по кривизне быстро убывает с расстоянием. В связи с этим обсуждалась возможность получения таких объектов на ускорителях. Однако кроме ускорителей высокоэнергетичные частицы наблюдаются в астрономии (космические лучи, гамма-всплески). Исследование спектров излучений такого рода позволяет обнаружить высокоэнергетичные частицы. Если черные дыры Гаусса-Бонне присутствуют в космических лучах или спектрах гамма-всплесков, они могут быть обнаружены. Изменения свойств этих объектов при заряде, превышающем критическое значение, также должно сказаться на результатах наблюдений космического излучения.

Как было показано, незаряженная черная дыра Гаусса-Бонне имеет внутреннюю сингулярность [26]. Однако при увеличении заряда до определенного критического значения внутренняя сингулярность исчезает [31–33] и решение продолжается до некоторой точки  $r_0$ , для которой  $g_{00}(r_0) = 0$ . Если точка  $r_0$  не является сингулярной, решение Максвелла-Гаусса-Бонне становится проходным. В этом случае должен образоваться компактный объект другого рода, нежели черная дыра, присутствие которого может сказаться на получаемых спектрах космического излучения. Этот аспект чрезвычайно важен в связи с неослабевающим интересом к проходным компактным объектам, которые могут служить «мостом» в другую Вселенную или другую область нашей Вселенной. Магнитные свойства и отсутствие внутренней сингулярности (т. е. проходимость) могут наблюдаться у объектов астрофизического масштаба

на больших расстояниях. Например, ранее была рассмотрена методика вычислений гравитационного линзирования для света, распространяющегося через кротовые норы. Были найдены принципиальные и характерные особенности электромагнитного излучения, проходящего через кротовые норы [89]. На основании этих особенностей были предложены методы наблюдения характерных отличий кротовых нор от других объектов, а также методы определения характерных параметров для разных моделей кротовых нор. Возможность отождествления типа компактного объекта при аккреции также была рассмотрена и подтверждена для кротовой норы в теории Бранса-Дикке [90]. В связи со всем выше сказанным, вопрос о наличии внутренней сингулярности в решении Максвелла-Гаусса-Бонне представляется чрезвычайно важным с точки зрения возможности поиска и наблюдения соответствующих компактных объектов.

Целью данной главы является исследование поведения инварианта кривизны (скаляра Кречмана)  $R_{ijkl}R^{ijkl}$  в случае черной дыры Максвелла-Гаусса-Бонне с зарядом, превышающим критическое значение, и уточнения, таким образом, природы объекта, возникающего в результате изменения топологии. Согласно классификации сингулярностей, изложенной в работах [29, 30], расходимость инварианта кривизны служит показателем наличия сингулярности. В результате было получено полное описание топологических свойств черной дыры Максвелла-Гаусса-Бонне [22, 91].

### 3.2. Решение

Как и в предыдущих работах, используем наиболее общий вид сферически-симметричной метрики (2.21) и действие (2.24). Для простоты будем считать, что рассматриваемая черная дыра обладает только магнитным зарядом, поскольку в случае необходимости полученный результат всегда можно распространить на более общий случай. Используя калибровку Гарфинкла-Горовица-Стромингера (GHS)  $\sigma(r) = 1$  и анзац  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F = q \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$  [21] для тензора Максвелла, а также нормируя выражения на массу Планка, получим уравнения поля:

$$(ff'' + f^2(\phi')^2) + 4e^{-2\phi}\lambda[\phi'' - 2(\phi')^2](\Delta(f')^2 - 1) + 8e^{-2\phi}\lambda\Delta f'f''\phi' = 0, \quad (3.1)$$

$$(1 + \Delta f^2(\phi')^2 - \Delta'ff' - \Delta(f')^2) + 4e^{-2\phi}\lambda\phi'\Delta'(1 - 3\Delta(f')^2) - e^{-2\phi}q^2f^{-2} = 0, \quad (3.2)$$

$$(\Delta''f + 2\Delta'f' + 2\Delta f'' + 2\Delta f(\phi')^2) + 8e^{-2\phi}\lambda[\phi'' - 2(\phi')^2]\Delta\Delta'f' + 8e^{-2\phi}\lambda\phi'((\Delta')^2f' + \Delta\Delta''f' + \Delta\Delta'f'') - 2e^{-2\phi}q^2f^{-3} = 0, \quad (3.3)$$

$$- 2(\Delta'f^2\phi' + 2\Delta f'f'\phi' + \Delta f^2\phi'') + 4e^{-2\phi}\lambda((\Delta')^2(f')^2 + \Delta\Delta''(f')^2 + 2\Delta\Delta'f'f'' - \Delta'') - 2e^{-2\phi}q^2f^{-2} = 0, \quad (3.4)$$

где  $\Delta$  и  $f$  — компоненты метрики (2.21), зависящие только от радиальной координаты,  $\phi$  — дилатонное поле, также являющееся функцией радиальной координаты,  $\lambda$  — параметр струнного взаимодействия, а  $q$  — магнитный заряд, за единицу которого выбран монополь Дирака [92,93]. Аналогично работе [21], решение с магнитным зарядом можно при необходимости использовать для получения решения с электрическим зарядом. Магнитный заряд выбран нами во многом для удобства рассмотрения, как и предыдущими исследователями [17, 21, 31–33].

Квадрат тензора Римана, поведение которого нас интересует, выражается через метрические функции следующим образом:

$$R_{ijkl}R^{ijkl} = (\Delta'')^2 + 4(\Delta')^2\frac{(f')^2}{f^2} + 8\Delta^2\frac{f''^2}{f^2} + 8\Delta\Delta'\frac{f'f''}{f^2} + \frac{4}{f^4} - 8\Delta\frac{f'^2}{f^4} + 4\Delta^2\frac{f'^4}{f^4}. \quad (3.5)$$

Очевидно, чтобы найти его зависимость от радиальной координаты в явном виде, необходимо решить систему уравнений (3.1–3.4). Данная система состоит из четырех уравнений, в то время как для определения двух метрических функций  $\Delta$  и  $f$  и дилатона  $\phi$  достаточно трех. Заметим, что уравнения (3.1), (3.3) и (3.4) содержат производные метрических функций и дилатона второго порядка, тогда как уравнение (3.2) —

только первого. Поэтому для получения метрических функций и дилатона будем решать систему, состоящую только из уравнений (3.1), (3.3) и (3.4), а уравнение (3.2) оставим как тождество для проверки полученного решения путем подстановки.

Как было показано ранее в работах [26, 31–33], данная система уравнений не имеет аналитического решения. Поэтому выберем в качестве асимптотики на бесконечности и, соответственно, начального условия для численного интегрирования решение Гиббонса-Маеды-Гарфинкла-Горовица-Стромингера (GM-GHS). Это решение представляет собой расширение метрики Шварцшильда на случай заряженной черной дыры в присутствии поправок второго порядка по кривизне и тензора Максвелла, связанных со скалярным полем:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r \left(r - \frac{q^2 e^{2\phi_0}}{M}\right) d\Omega, \quad (3.6)$$

$$e^{-2\phi} = e^{-2\phi_0} - \frac{q^2}{Mr},$$

где  $M$  — масса черной дыры.

Основная сложность в получении решения, описывающего внутреннюю структуру черной дыры, численными методами заключается в том, что у метрической функции  $\Delta$  наблюдается устранимая особенность на горизонте событий. Чтобы продолжить вычисления под горизонт, расчеты проводились в два этапа. Сначала в качестве начальных значений, т. е. асимптотики на бесконечности, было использовано решение Гиббонса-Маеды-Гарфинкла-Горовица-Стромингера (3.6). Таким образом были найдены решения для метрических функций и дилатона вне горизонта событий. Полученные в результате значения в окрестности горизонта были взяты в качестве новых начальных условий. При этом учтено, что поведение метрических функций и дилатона вблизи горизонта описывается следующими асимптотическими рядами [26, 32]:

$$\Delta = d_1 x + d_2 x^2 + O(x^2),$$

$$\begin{aligned}
f &= f_0 + f_1x + f_2x^2 + O(x^2), \\
e^{-2\phi} &= e^{-2\phi_0} + \phi_1x + \phi_2x^2 + O(x^2),
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

где  $x = r - r_h \ll 1$ , а коэффициенты разложения можно найти из уравнений поля (3.1–3.4). Более того, вблизи горизонта событий можно ограничиться линейным приближением функций  $\Delta$ ,  $f$  и  $e^{-2\phi}$ , а именно:

$$\begin{aligned}
\Delta &= d_1x, \\
f &= r_h + f_1x, \\
e^{-2\phi} &= \phi_h + \phi_1x,
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

где  $r_h$  — радиус горизонта событий, а коэффициенты  $d_1$ ,  $f_1$ ,  $\phi_h$  и  $\phi_1$  зависят от массы и заряда черной дыры и определяются из результатов численного интегрирования.

### 3.3. Результаты численного интегрирования

Для получения как можно более полной картины при численном решении системы уравнений (3.1), (3.3) и (3.4) производился перебор по двум независимым параметрам, а именно по массе в диапазоне от 4 до 100 масс Планка и по заряду черной дыры в окрестности ожидаемого критического значения, которое описывается приближенным соотношением [32]

$$q_{cr} = \left(8\sqrt{3} \lambda M^4\right)^{1/6},
\tag{3.9}$$

где  $M$  выражена масса Планка, и, следовательно,  $q$  также выражается в планковских единицах. Полученные результаты полностью согласуются с изложенными ранее в работах [26, 31–33], что показано на графиках. Значения критического заряда в зависимости от массы черной дыры, полученные эмпирически в результате численного интегрирования, приведены в таблице 2.

Как и ожидалось, при заряде, превышающем критическое значение  $q_{cr}$ , внутренняя сингулярность  $r_s$  исчезает, функция  $\Delta$  демонстрирует локальный минимум, вновь возрастает до нуля и заканчивается в точке  $r_0$ ,



|                 |      |       |       |       |       |       |       |       |        |
|-----------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $M_{bh}/m_{pl}$ | 5.00 | 10.00 | 15.00 | 20.00 | 50.00 | 60.00 | 70.00 | 90.00 | 100.00 |
| $q_{cr}$        | 2.63 | 4.43  | 5.92  | 7.24  | 13.56 | 15.33 | 17.01 | 20.13 | 21.60  |

Таблица 2. Зависимость значения критического заряда  $q_{cr}$  от массы черной дыры  $M$ .

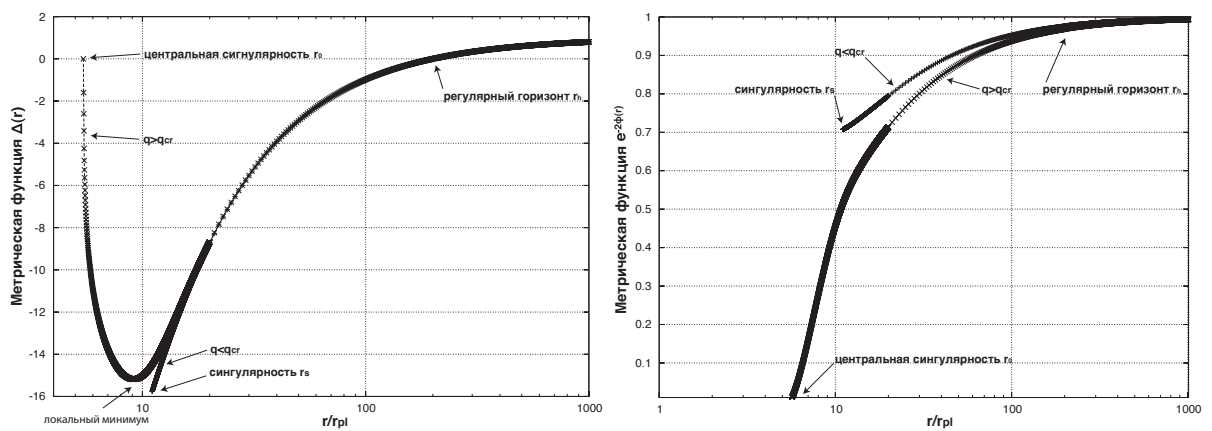


Рис. 3. Зависимость метрической функции  $\Delta$  (слева) и дилатонной экспоненты  $e^{-2\phi}$  (справа) от радиальной координаты  $r$  при  $q = 21.50 < q_{cr}$  и  $q = 24.81 > q_{cr}$  для  $r_h = 200$ , т. е. для черной дыры с массой  $M = 100$ .

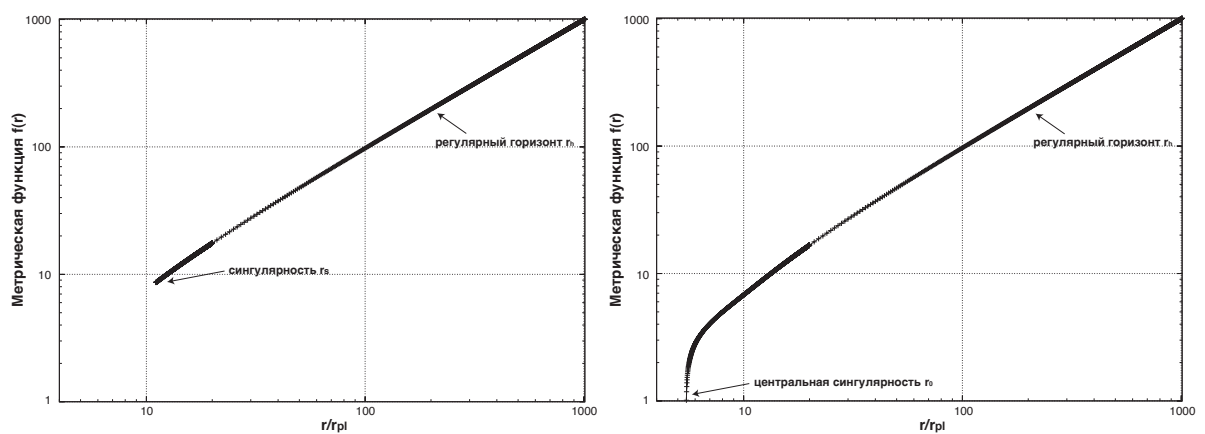


Рис. 4. Зависимость метрической функции  $f$  от радиальной координаты  $r$  при  $q = 21.50 < q_{cr}$  и  $q = 24.81 > q_{cr}$  для  $r_h = 200$ , т. е. для черной дыры с массой  $M = 100$ .

для которой  $g_{00}(r_0) = 0$ , что отличает данное решение от GM-GHS (Рис. 3). Функции  $f$  и  $e^{-2\phi}$  ведут себя аналогично случаю GM-GHS, монотонно убывая до сингулярности  $r_s$  при  $q < q_{cr}$  и  $r_0$  при  $q > q_{cr}$  (Рис. 3, Рис. 4). Особо стоит отметить, что метрическая функция  $f$  ведет себя как  $f = r$  почти на всей области определения, т. е. по факту выполняет функцию радиальной координаты под горизонтом черной дыры Максвелла-Гаусса-Бонне (Рис. 4). Вблизи самой сингулярности  $r_s$  наблюдается небольшое отклонение от основного поведения, однако его нельзя считать существенным. Если экстраполировать функцию  $f$  за сингулярность в точке  $r_s$ , она должна достигать своего нуля раньше, чем радиальная координата. Однако при  $q > q_{cr}$  метрическая функция  $f$  резко убывает вблизи  $r_0$  и достигает своего нуля заметно раньше, чем  $r$ , и раньше, чем предполагает упомянутая экстраполяция за точку  $r_s$  в случае малого заряда. Функция  $e^{-2\phi}$  также приближается к своему нулю вблизи нуля функции  $f$  при  $q > q_{cr}$ , чего не наблюдается при  $q < q_{cr}$  (Рис. 3).

На основе результатов численного интегрирования системы уравнений (3.1), (3.3) и (3.4), которые представлены на Рис. 3 и Рис. 4, было получено поведение инварианта кривизны  $R_{ijkl}R^{ijkl}$ . При  $q < q_{cr}$  он конечен почти везде, но резко возрастает вблизи сингулярности  $r_s$  (Рис. 5). Когда заряд черной дыры  $q$  достигает критического значения и сингулярность  $r_s$  сменяется локальным минимумом функции  $\Delta$ , в окрестности этого локального минимума роста инварианта кривизны  $R_{ijkl}R^{ijkl}$  не наблюдается, следовательно в данной точке скалярная сингулярность (сингулярность кривизны) отсутствует. В этом случае инвариант кривизны резко возрастает вблизи нуля функции  $f$ . Таким образом, точка  $r_0$ , являющаяся нулем функций  $\Delta$  и  $f$  и ограничивающая область, в которой существует решение при  $q > q_{cr}$ , играет роль центральной сингулярности для решения типа «черная дыра» Максвелла-Гаусса-Бонне. Заметим также, что вблизи центральной сингулярности  $r_0$  инвариант кривизны расходится быстрее, чем вблизи сингулярности  $r_s$ , а именно:

$$\begin{aligned} R_{ijkl}R^{ijkl} &\sim \text{const}_1 \times (r - r_s)^{-1} && \text{при } r \rightarrow r_s, \\ R_{ijkl}R^{ijkl} &\sim \text{const}_2 \times (r - r_x)^{-5} && \text{при } r \rightarrow r_x. \end{aligned} \tag{3.10}$$

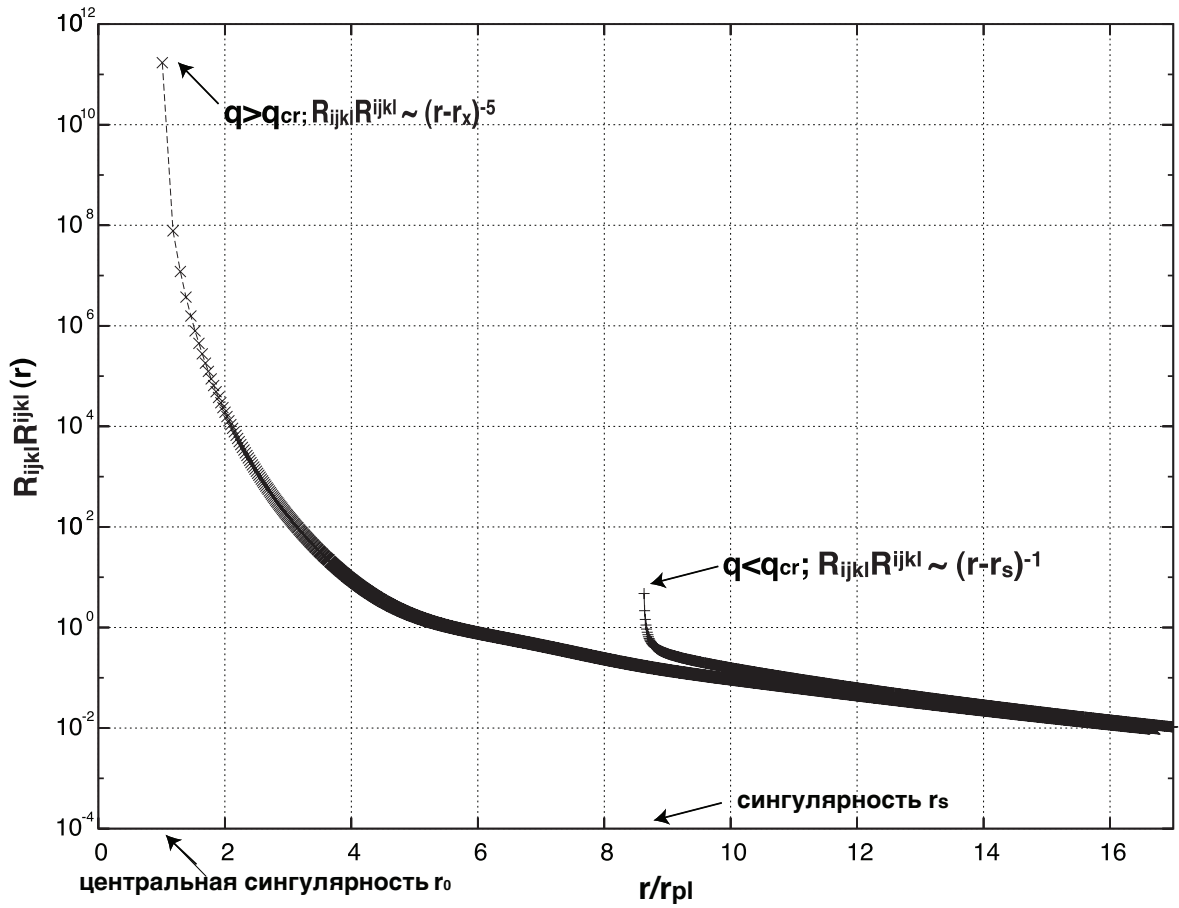


Рис. 5. Зависимость инварианта кривизны  $R_{ijkl}R^{ijkl}$  от радиальной координаты  $r$  при  $q = 21.50 < q_{cr}$  и  $q = 24.81 > q_{cr}$  для  $r_h = 200$ , т. е. для черной дыры с массой  $M = 100$ .

На Рис. 6 приведена трехмерная зависимость инварианта кривизны  $R_{ijkl}R^{ijkl}$  от радиальной координаты  $r$  при различных значениях заряда  $q$ . Данный график наглядно иллюстрирует изменение внутренней структуры черной дыры Максвелла-Гаусса-Бонне при  $q = q_{cr}$ .

Чтобы проверить, является ли найденная нами центральная сингулярность  $r_0$  реализацией внутреннего горизонта  $r_x$ , принадлежащего нефизической ветви решения в случае малого заряда [26, 31–33], рассмотрим уравнение горизонта [94, 95]

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f = 0. \quad (3.11)$$

Нас интересует, выполняется ли оно для центральной сингулярности  $r_0$ . Поскольку поведение метрических функций было получено нами численно, то и поведение условия для горизонта (3.11) также было исследовано

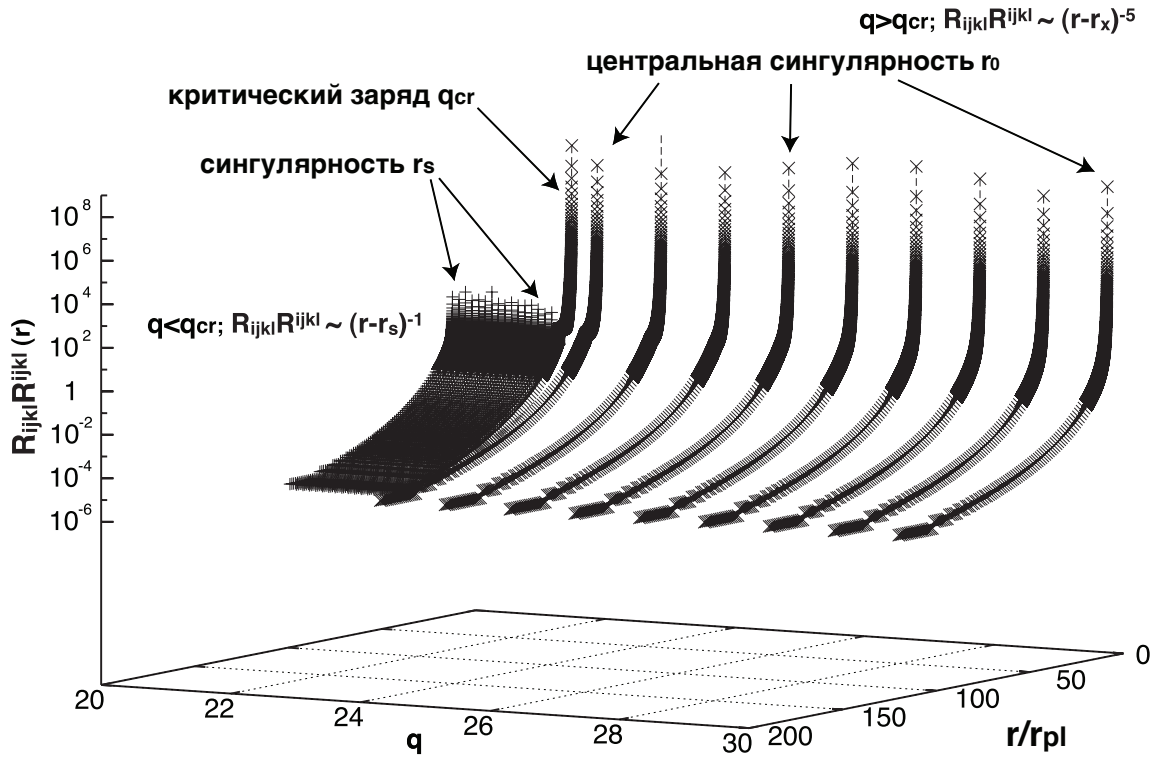


Рис. 6. Трехмерная зависимость инварианта кривизны  $R_{ijkl}R^{ijkl}$  от заряда  $q$  и радиальной координаты  $r$  при  $q = 21.50 < q_{cr}$  и  $q = 24.81 > q_{cr}$  для  $r_h = 200$ , т. е. для черной дыры с массой  $M = 100$ .

численно, а результат приведен на графике (Рис. 7). В силу того, что значение  $g^{\mu\nu}\partial_\mu f\partial_\nu f$  вблизи центральной сингулярности  $r_0$  расходится и, следовательно, условие (3.8) не выполняется, центральная сингулярность  $r_0$  не является горизонтом, а с точки зрения внутренней структуры черная дыра Максвелла-Гаусса-Бонне с зарядом, превышающим критическое значение, больше всего похожа на черную дыру Шварцшильда (Рис. 7).

Таким образом, приведенные результаты подтверждают высказанную ранее в работах [31–33] идею, что при достижении критического заряда существует асимптотически плоское решение с областью определения от бесконечности до нуля метрической функции  $f$ . Эта точка,  $r_0$  является центральной сингулярностью. Следовательно, при достижении зарядом черной дыры своего критического значения заметно изменяется внутренняя структура решения Максвелла-Гаусса-Бонне, однако оно по-прежнему описывает черную дыру. Если бы сингулярность в точке внутреннего горизонта была устранимой (т. е. инвариант кривизны при-

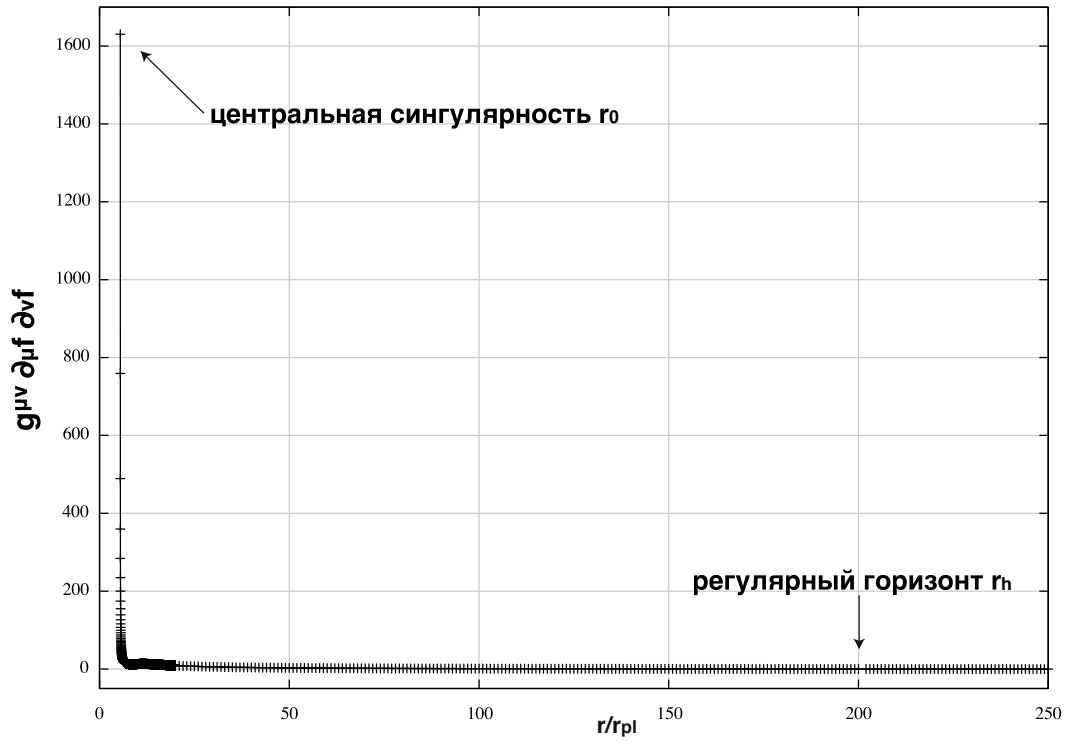


Рис. 7. Зависимость функции  $g^{\mu\nu} \partial_{,\mu} f \partial_{,\nu} f$  от радиальной координаты  $r$  при  $q = 24.81 > q_{cr}$  для  $r_h = 200$ , т. е. для черной дыры с массой  $M = 100$ .

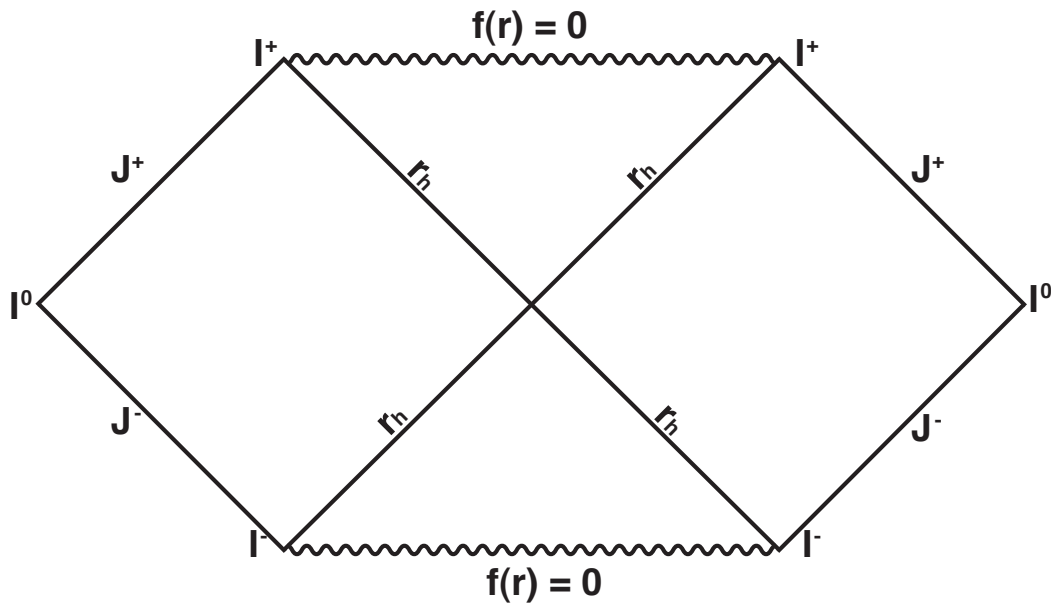


Рис. 8. Глобальная структура пространства-времени черной дыры Максвелла-Гаусса-Бонне при  $q > q_{cr}$ .

нимал бы конечное значение), решение Максвелла-Гаусса-Бонне можно было бы интерпретировать как компактный объект, обладающий односторонней проходимостью. Наличие центральной сингулярности исключает такую возможность.

### 3.4. Выводы к главе 3

На основании исследования поведения инварианта кривизны под горизонтом черной дыры Максвелла-Гаусса-Бонне установлено, при магнитном заряде, превышающем критическое значение, возникает центральная сингулярность, ограничивающая гладкое решение и являющаяся нулем метрических функций  $g_{00}$  и  $g_{22}$ . Причем нуль у функции  $g_{22}$  соответствует тому, что это именно центральная сингулярность (аналогичная Шварцшильдской). Таким образом, при заряде, который больше или равен критического, изменяется внутренняя структура решения Максвелла-Гаусса-Бонне, однако описываемый им компактный объект остается обычной черной дырой, т. е. никакой внутренней R-области (горловины, и как следствие проходимости) не наблюдается. Следовательно, рассмотренное решение может быть зарегистрировано только в качестве черной дыры Максвелла-Гаусса-Бонне как в жестком космическом излучении, так и при наблюдении астрофизических объектов с магнитными свойствами (публикации №1, 3).

## 4. Расширенные модели гравитации в постньютоновском пределе

### 4.1. Постановка задачи

Решение Шварцшильда описывает не только статическую незаряженную черную дыру. Оно также представляет собой метрику любой сферически-симметричной конфигурации гравитационного поля в пустоте, т. е. системы с массивным объектом в центре. В пределе слабого поля, малых скоростей и низкой плотности вещества, составляющего планеты и астероиды, по сравнению с Солнцем, метрика Шварцшильда и любая другая сферически-симметричная метрика применимы, в том числе, и к Солнечной системе.

Параметризованный постньютоновский формализм был разработан как единая система описания метрических теорий гравитации, которые отличаются друг от друга значениями десяти коэффициентов, так называемых постньютоновских параметров. Поскольку на сегодняшний день постньютоновские параметры измерены с достаточно хорошей точностью (Табл. 1), сопоставление коэффициентов постньютоновского разложения решения расширенной теории гравитации с экспериментальными значениями позволяет судить о реализуемости рассматриваемой теории и получить ограничения на ее параметры.

Целью данной главы является получение постньютоновской параметризации эффективных четырехмерных статических асимптотически-плоских сферически-симметричных решений струнной гравитации с компактными и некомпактными дополнительными измерениями. Это позволит определить совместимость предсказаний рассматриваемых теорий гравитации с наблюдениями в пределе слабого поля и, возможно, наложит ограничения на параметры моделей. Для этого рассматривается модель Гаусса-Бонне как низкоэнергетический предел струнного действия [26, 31, 32, 35, 91] и модель Рандалл-Сандрума II с одной браной, в рамках которой недавно были получены асимптотически шварцшильдовские решения для больших черных дыр [77, 82, 83].

Для работы в постньютоновском пределе необходимо выполнение следующих условий:

- 1) приближение слабого поля;
- 2) асимптотически-плоское пространство, малый вклад поправок теории;
- 3) малые скорости материи, чтобы ее движение подчинялось гидростатическим уравнениям для идеальной жидкости и в уравнениях поля описывалось соответствующим тензором энергии-импульса.

На масштабах Солнечной системы все выбранные для исследования модели удовлетворяют данным требованиям.

Ранее постньютоновская параметризация космологического решения Гаусса-Бонне в присутствии потенциала скалярного поля (2.25) уже была исследована [35]. В данной работе рассматривается сферически-симметричное решение для действия (2.20), а также решения для больших черных дыр в модели Рандалл-Сандрума II [96–99].

## 4.2. Общее решение

Для получения решения в постньютоновской параметризации необходимо рассмотреть возмущение плоской метрики [84]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

где  $\eta_{\mu\nu}$  — метрика Минковского, а  $h_{\mu\nu}$  — постньютоновские члены разложения. В терминах скорости материи  $v$  они имеют следующий порядок:

$$\begin{aligned} h_{00} &\sim O(2) + O(4), \\ h_{0j} &\sim O(3), \\ h_{ij} &\sim O(2), \end{aligned} \quad (4.2)$$

Однако в нашей задаче удобнее выразить возмущения плоской метрики через радиальную координату  $r$ . Тогда постньютоновские члены  $h_{\mu\nu}$  можно записать как



$$\begin{aligned}
h_{00} &= h_{00}^{(1)} + h_{00}^{(2)}, \\
h_{0j} &= h_{0j}^{(3)}, \\
h_{ij} &= h_{ij}^{(1)},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где верхний индекс в скобках соответствует степени по  $1/r$ , которую имеет данная поправка.

Воспользуемся уравнением Эйнштейна в виде

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} T \right), \\
T_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu}^{matter} + T_{\mu\nu}^{model}, \\
T &= T_{\mu\nu} g^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

где  $T_{\mu\nu}^{matter}$  — тензор энергии-импульса материи, поведение которой, как уже говорилось выше, описывается гидродинамическими уравнениями для идеальной жидкости, а  $T_{\mu\nu}^{model}$  — тензор энергии-импульса, обусловленный дополнительными членами в лагранжиане рассматриваемой модели.

С учетом разложения (4.1) возмущения  $R_{\mu\nu}$  в требуемом порядке имеют вид

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} - \frac{1}{2} \left( h_{jj,00} - 2h_{j0,j0} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} h_{00,j} \left( h_{jk,k} - \frac{1}{2} h_{kk,j} \right) - \frac{1}{4} |\nabla h_{00}|^2 + \frac{1}{2} h_{jk} h_{00,jk}, \\
R_{0j} &= -\frac{1}{2} \left( \nabla^2 h_{0j} - h_{k0,jk} + h_{kk,0j} - h_{kj,0k} \right), \\
R_{ij} &= -\frac{1}{2} \left( \nabla^2 h_{ij} - h_{00,ij} + h_{kk,ij} - h_{ki,kj} - h_{kj,ki} \right),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

где в качестве  $\nabla^2$  мы используем оператор Лапласа в сферических координатах. Соотношения (4.5) определяют левую часть уравнений поля (4.4).

Теперь рассмотрим подробнее правую часть. Чтобы упростить дальнейшие выкладки, сразу учтем, что цель данной задачи — поиск постньютоновской параметризации статических сферически-симметричных решений, поэтому недиагональные компоненты метрики и зависимость от каких-либо координат кроме радиальной отсутствуют. Тогда из выражений для гравитационного потенциала  $U$

$$\begin{aligned}\nabla^2 U &= -4\pi\rho, \\ U &= M/r\end{aligned}\tag{4.6}$$

следует:

$$\begin{aligned}\rho &= -\frac{M}{4\pi r^3} \sim 1/r^3, \\ p &= \frac{M^2}{16\pi r^4} \sim 1/r^4, \\ \Pi &\sim v^2 \sim 1/r.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Используем также постньютоновское разложение компонент тензора энергии-импульса материи (2.77) и дифференциальные соотношения для постньютоновских функционалов (2.75). Тогда система, образованная из уравнений поля (4.4), записанных для поправок в требуемом порядке [84], приобретает вид:

$$\nabla^2 h_{00}^{(1)} = -8\pi\rho - 16\pi \left( T_{00}^{(3)} - \frac{g_{00}^{(0)}}{2} T^{(3)} \right)^{model},\tag{4.8}$$

$$\nabla^2 h_{ij}^{(1)} = -8\pi\rho\delta_{ij} - 16\pi \left( T_{ij}^{(3)} - \frac{g_{ij}^{(0)}}{2} T^{(3)} \right)^{model},\tag{4.9}$$

$$\nabla^2 h_{0j}^{(4)} + U_{,0j} = 16\pi\rho v_j - 16\pi T_{0j}^{(4) model},\tag{4.10}$$

$$\nabla^2 \left( h_{00}^{(2)} + 2U^2 - 8\Phi_2 \right) = -8\pi\rho \left[ 1 + 2 \left( v^2 - U + \frac{\Pi}{2} + \frac{3}{2} \frac{p}{\rho} \right) \right] -\tag{4.11}$$

$$-16\pi \left( T_{00}^{(4)} - \frac{g_{00}^{(1)}}{2} T^{(4)} \right)^{model},$$

поскольку  $g_{0j}^{(0)} = 0$ .

Таким образом, чтобы получить постньютоновское разложение сферически-симметричной метрики, требуется решить систему (4.8–4.11).

### 4.3. Модель Гаусса-Бонне

Рассмотрим действие Гаусса-Бонне

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [-R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \lambda e^{-2\phi} S_{GB}]. \quad (4.12)$$

Для рассмотрения модели Гаусса-Бонне воспользуемся уравнениями поля в ковариантном виде [35]:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= 8\pi (T_{\mu\nu}^{matter} + T_{\mu\nu}^\phi + T_{\mu\nu}^{GB}), \\ T_{\mu\nu}^\phi &= \frac{1}{8\pi} \left( \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\rho \phi \partial_\rho \phi \right), \\ T_{\mu\nu}^{GB} &= \frac{1}{16\pi} \left[ 2 (\nabla_\mu \nabla_\nu e^{-2\phi}) R - 2 g_{\mu\nu} (\square e^{-2\phi}) R - \right. \\ &\quad - 4 (\nabla^\rho \nabla_\mu e^{-2\phi}) R_{\nu\rho} - 4 (\nabla^\rho \nabla_\nu e^{-2\phi}) R_{\mu\rho} + \\ &\quad + 4 (\square e^{-2\phi}) R_{\mu\nu} + 4 g_{\mu\nu} (\nabla^\rho \nabla^\sigma e^{-2\phi}) R_{\rho\sigma} - \\ &\quad \left. - 4 (\nabla^\rho \nabla^\sigma e^{-2\phi}) R_{\mu\rho\nu\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Приведем выражения (4.13) к виду (4.4). В силу теоремы Уилера об отсутствии нетривиальных скалярных волос у черной дыры [24, 25]

$$T_{\mu\nu}^\phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\phi \equiv 0, \quad (4.14)$$

т. е. тензор энергии-импульса дилатона не сказывается на постньютоновском разложении метрики.

Как было показано ранее [26–28, 31, 32], в случае связи скалярного поля с динамическим членом (в нашем случае, с членом Гаусса-Бонне)

теорема Уилера не выполняется, т. е. черная дыра обладает нетривиальными скалярными волосами. Применительно к нашей задаче это означает, что вклад  $T_{\mu\nu}^{GB}$  в уравнения поля и, соответственно, в разложение метрики, не должен быть тождественно равен нулю. Действительно,

$$T_{00}^{GB} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{GB} = \frac{2MD}{\pi r^6} + \frac{6M^2 D}{\pi r^7} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (4.15)$$

Поскольку компоненты тензора энергии-импульса, также как и тензора Риччи, имеют аналогичную структуру, можно сделать вывод, что

$$T_{ij}^{GB} - \frac{1}{2} g_{ij} T^{GB} \sim T_{00}^{GB} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{GB} \sim \frac{1}{r^6}. \quad (4.16)$$

Согласно выражениям (4.8–4.11), значимыми для постньютоновского разложения являются члены вида  $T_{\mu\nu}^{GB} - g_{\mu\nu} T^{GB}/2$  порядка  $1/r^3$  и  $1/r^4$ . Но из (4.15) и (4.16) видно, что такие члены в данной модели отсутствуют, то есть вклад, обусловленный присутствием члена Гаусса-Бонне, оказывается за пределами постньютоновского порядка. В этом можно убедиться, получив возмущение метрики  $h_{00}^{GB}$  в явном виде. Поскольку для него должно выполняться соотношение

$$\nabla^2 h_{00}^{GB} = -16\pi \left( T_{00}^{GB} - \frac{g_{00}^{(1)}}{2} T^{GB} \right) = \frac{2MD}{\pi r^6}, \quad (4.17)$$

то, аналогично (4.6), получаем

$$h_{00}^{GB} = 8 \frac{DM}{r^4}. \quad (4.18)$$

Как было отмечено выше (4.3), постньютоновские возмущения метрики должны включать в себя члены  $1/r$  и  $1/r^2$ . Поэтому влияние члена Гаусса-Бонне и связанного с ним скалярного поля пренебрежимо мало, то есть постньютоновская параметризация решения уравнений поля (4.13) имеет точно такой же вид, как в общей теории относительности.

Член Гаусса-Бонне представляет собой поправку второго порядка по кривизне. Модель Гаусса-Бонне является частным случаем гравитации

Лавлока, так как действие (4.12) включает в себя первый член в ряду поправок высших порядков по кривизне (2.2). Как мы показали, квадратичная поправка по кривизне сказывается на разложении метрики в третьем постньютоновском порядке, поэтому ее присутствие не может быть зарегистрировано в рамках экспериментов по измерению постньютоновских параметров в Солнечной системе. Для регистрации квадратичной поправки необходимо рассмотрение решения в сильном поле (двойные пульсары). Если включить в рассмотрение поправки более высокого порядка, начиная с третьего, их вклад в параметризацию метрики будет еще слабее, так как ведущий порядок по  $1/r$  должен быть еще выше, чем  $1/r^4$ . Эти соображения позволяют распространить результат, полученный для модели Гаусса-Бонне, на всю гравитацию Лавлока. Более того, поскольку сама гравитация Лавлока может рассматриваться, как частный случай  $f(R)$ -гравитации, выводы относительно Гаусса-Бонне справедливы и для других моделей класса  $f(R)$ , включающих ряд поправок по кривизне и удовлетворяющих требованиям постньютоновского формализма.

Таким образом, мы рассмотрели постньютоновскую параметризацию решения для гравитации с высшими поправками по кривизне типа гравитации Лавлока в присутствии скалярных полей на примере модели Гаусса-Бонне. Как было показано, модели данного класса полностью согласуются в своих предсказаниях с общей теорией относительности, неотличимы от нее с точностью до третьего постньютоновского порядка и не могут быть уточнены с помощью результатов измерений постньютоновских параметров в Солнечной системе. Дальнейшее исследование этого вопроса требует рассмотрений в сильном поле, прежде всего, влияния квадратичных поправок на свойства пульсаров, обусловленных параметрами разложения в третьем постньютоновском порядке.

## 4.4. Модель Рандалл-Сандрума

### 4.4.1. Решение Фигераса-Вайсмана

Теперь рассмотрим постньютоновскую параметризацию эффективно-го четырехмерного решения, полученного для модели Рандалл-Сандрума II в рамках соответствия AdS<sub>5</sub>/CFT<sub>4</sub> [77]. Поскольку это решение допускает существование больших черных дыр в рамках мира на бране, его исследование в пределе слабого поля позволит судить о реализуемости модели в целом. Соответствующие уравнения поля имеют вид:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_4 T_{\mu\nu}^{brane} + \epsilon^2 \left\{ 16\pi G_4 \langle T_{\mu\nu}^{CFT}[g] \rangle + a_{\mu\nu}[g] + \log \epsilon b_{\mu\nu}[g] \right\} + O(\epsilon^4 \log \epsilon), \quad (4.19)$$

$$\langle T_{\mu\nu}^{CFT}[g] \rangle = \frac{1}{4\pi l G_5} \left\{ -\frac{1}{4} (g^{(2)})_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{4} g_{\mu\nu}^{(2)} \text{Tr} g^{(2)} - \frac{1}{8} g_{\mu\nu}^{(0)} \left[ \left( \text{Tr} g^{(2)} \right)^2 - \text{Tr} \left( g^{(2)} \right)^2 \right] \right\}, \quad (4.20)$$

$$a_{\mu\nu}[g] \equiv -\frac{1}{4} \nabla^2 R_{\mu\nu} + \frac{1}{12} \nabla_\mu \nabla_\nu R + \frac{1}{24} \nabla^2 R g_{\mu\nu} + \frac{1}{6} R R_{\mu\nu} + \frac{1}{8} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \frac{1}{24} R_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\alpha\beta}, \quad (4.21)$$

$$b_{\mu\nu}[g] \equiv -\frac{1}{2} \nabla^2 R_{\mu\nu} + \frac{1}{6} \nabla_\mu \nabla_\nu R + \frac{1}{12} \nabla^2 R g_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R R_{\mu\nu} + \frac{1}{4} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \frac{1}{12} R_{\mu\nu}^2 - R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\alpha\beta}, \quad (4.22)$$

где  $T_{\mu\nu}^{brane}$  — тензор энергии-импульса материи на бране,  $G_4$  и  $G_5$  — четырехмерная и пятимерная гравитационная постоянная соответственно, а  $g_{\mu\nu}^{(n)}$  определяются разложением Фейффермана-Грэхема:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(z, x) = g_{\mu\nu}^{(0)} + z^2 g_{\mu\nu}^{(2)} + \dots + z^d g_{\mu\nu}^{(d)} + h^d \log z^2 + O(z^{d+1}), \quad (4.23)$$

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = g_{\mu\nu} + \frac{\epsilon^2}{2} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} R \right) + O(\epsilon^4 \log \epsilon), \quad (4.24)$$

$$g_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{d-2} \left( R_{\mu\nu} - \frac{2}{2(d-1)} R g_{\mu\nu}^{(0)} \right), \quad (4.25)$$

$$g_{\mu\nu}^{(4)} = \frac{1}{8} g_{\mu\nu}^{(0)} \left[ \left( \text{Tr } g^{(2)} \right)^2 - \text{Tr} \left( g^{(2)} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left( (g^{(2)})^2 \right)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}^{(2)} \text{Tr } g^{(2)} + t_{\mu\nu}, \quad (4.26)$$

$$t_{\mu\nu} = - \frac{1}{4} (g^{(2)})^2_{\mu\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu}^{(2)} \text{Tr } g^{(2)} - \frac{1}{8} g_{\mu\nu}^{(0)} \left[ \left( \text{Tr } g^{(2)} \right)^2 - \text{Tr} \left( g^{(2)} \right)^2 \right]. \quad (4.27)$$

Поскольку нас интересует сферически-симметричное решение, в качестве асимптотики на бесконечности для четырехмерной метрики на бране выберем метрику Шварцшильда. В разложении Тейлора ее изотропная форма имеет следующий вид:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 + \frac{2M}{r} \right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (4.28)$$

Подставив компоненты метрики (4.28) в (4.24) в качестве  $g_{\mu\nu}$  и соответствующее выражение для скаляра Риччи в качестве  $R$ , получим члены разложения Фейффермана-Грэхема. После этого приведем уравнения поля (4.19) к виду (4.4) и рассмотрим значения различных составляющих тензора энергии-импульса аналогично тому, как это было сделано для уравнений поля Гаусса-Бонне (4.13) в предыдущем пункте.

Поскольку  $T_{\mu\nu}^{brane}$  — тензор энергии-импульса материи на бране, его вид должен соответствовать тензору энергии-импульса идеальной жидкости (2.77). Для остальных слагаемых получим

$$T_{\mu\nu}^{CFT} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{CFT} \sim \frac{1}{r^4}, \quad (4.29)$$

$$a_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} a \sim \frac{1}{r^6}, \quad (4.30)$$

$$b_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} b \sim \frac{1}{r^6}. \quad (4.31)$$

Таким образом, только тензор энергии-импульса конформной теории поля  $T_{\mu\nu}^{CFT}$  имеет значение для постньютоновской параметризации решения, причем только для возмущения метрики  $h_{00}^{(2)}$ , в то время как вклад тензоров  $a_{\mu\nu}$  и  $b_{\mu\nu}$  оказывается за пределами требуемых порядков по  $1/r$ .

Чтобы найти возмущения метрики во втором порядке по  $1/r$ , требуется решить уравнение

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \nabla^2 \left( h_{00}^{(2)} + 2U^2 - 8\Phi_2 \right) = \\ & = 4\pi G_4 \rho \left[ 1 + 2 \left( v^2 - U + \frac{\Pi}{2} + \frac{3}{2} \frac{p}{\rho} \right) \right] - \\ & - \epsilon^2 \frac{4}{l} \frac{G_4}{G_5} \frac{121}{144} \frac{M^4}{r^4} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Учитывая, что [78]

$$G_4 = \frac{2G_5}{l} \rightarrow \frac{G_4}{G_5} = \frac{2}{l}, \quad (4.33)$$

получим

$$h_{00} = 2U - 2U^2 + 4\Phi_1 + 4\Phi_2 + 2\Phi_3 + 6\Phi_4 + \frac{121}{27} \frac{\epsilon^2}{l^2} M^2 U^2, \quad (4.34)$$

$$h_{00}^{CFT} = \frac{121}{27} \frac{\epsilon^2}{l^2} M^2 U^2. \quad (4.35)$$

Выражения для других компонент возмущения метрики  $h_{0j}$  и  $h_{ij}$  не отличаются от предсказаний общей теории относительности, поэтому параметр Эддингтона  $\gamma = 1$ , а параметры  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \zeta_1 = \xi = 0$ .

Для интерпретации результатов необходимо сопоставить разложение (4.33) со стандартной формой постньютоновского разложения метрики (2.76). Учитывая физический смысл постньютоновских параметров, наиболее логичным представляется считать, что присутствие члена  $T_{\mu\nu}^{CFT}$  оказывает влияние на значение эддингтоновского параметра  $\beta$ , харак-



теризующего степень нелинейности закона суперпозиции для гравитации [84]. В модели Рандалл-Сандрума гравитационное взаимодействие, в отличие от остальных трех фундаментальных взаимодействий, не локализовано на бране, а способно распространяться вдоль дополнительного измерения, в то время как наличие привилегированной системы отсчета, привилегированного положения или нарушение закона сохранения полного импульса не являются неотъемлемыми свойствами теории. С другой стороны, эддингтоновские параметры  $\beta$  и  $\gamma$  являются для постньютоновского разложения основными, так что их значения интересны в первую очередь.

Итак, предположим, что наличие поправки  $h_{00}^{FW}$  отражается на значении параметра  $\beta$ , и решим следующее уравнение:

$$-2\beta U^2 + 2(3 - 2\beta + 1)(\Phi_2)^2 = -2U^2 + 4\Phi_2 + \frac{121}{27} \frac{\epsilon^2}{l^2} M^2 U^2, \quad (4.36)$$

где левая часть составлена из членов постньютоновского разложения для  $g_{00}$  (2.76), содержащих параметр  $\beta$  в качестве коэффициента, а правая — из членов полученного нами разложения (4.34), коэффициенты которых также должны содержать зависимость от  $\beta$ . Чтобы решить уравнение (4.36), найдем явный вид постньютоновского потенциала  $\Phi_2$  аналогично тому, как мы рассматривали зависимость гравитационного потенциала  $U$  и плотности материи  $\rho$  (4.6). Для этого вновь используем дифференциальные соотношения для постньютоновских функционалов (2.75), согласно которым

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_2 &= -4\pi \rho U, \\ \Phi_2 &= \int \frac{\rho' U'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Для сферически-симметричной метрики получим

$$\Phi_2 = \frac{M^2}{2r^2} = \frac{U^2}{2}. \quad (4.38)$$

Тогда решение уравнения (4.36) имеет вид

$$\beta = 1 - \frac{121}{108} \frac{\epsilon^2}{l^2} M^2. \quad (4.39)$$

где  $l$  — AdS-радиус, а  $M$  — масса центрального тела (в нашем случае это Солнце), нормированная на массу Планка. Вспомним, что  $\epsilon$  — бесконечно малая величина, которая служит коэффициентом возмущения метрики в разложении Фейффермана-Грэхема  $g_{\mu\nu}^{(0)} = g_{\mu\nu} + \epsilon^2 h_{\mu\nu}$  в некоей конечной окрестности  $\epsilon = 0$  [77]. Кроме того, она характеризует смещение местоположения браны от  $z = 0$ , то есть ее координату в дополнительном измерении, так как решение Фигераса-Вайсмана было получено в предположении  $z = \epsilon$ . В силу всего вышесказанного, можно утверждать, что значения  $l$ ,  $\epsilon$  и  $M$  действительные, тогда комбинация  $\epsilon^2 M^2 / l^2 > 0$ , т. е.  $\beta < 1$ . В этом также можно убедиться, если выразить (4.39) через космологическую постоянную в балке  $\Lambda$ . Поскольку [79]

$$\Lambda = - \frac{d(d-1)}{2l^2} \rightarrow l^2 = - \frac{d(d-1)}{2\Lambda}, \quad (4.40)$$

где  $d$  — количество измерений на бране, т. е.  $d = 4$ , то

$$\beta = 1 + \frac{121}{648} \Lambda \epsilon^2 M^2. \quad (4.41)$$

В силу того, что  $\Lambda < 0$ , комбинация  $\Lambda \epsilon^2 M^2 < 0$  и  $\beta < 1$ .

Согласно экспериментальным данным по измерению постньютоновских параметров в Солнечной системе,  $\beta = 1 + 1.1 \cdot 10^{-4}$  (Табл. 1). Эта величина является верхним ограничением на возможное значение  $\beta$ , однако ее, тем не менее, можно использовать для получения возможных ограничений для решения Фигераса-Вайсмана. Область допустимых значений AdS-радиуса  $l$  лежит за пределом расстояний, для которых проверен закон тяготения Ньютона, т. е.  $l < 55$  мкм [100]. Поскольку  $\beta \neq 0$ , полученная к ней поправка не должна превышать единицу. Для самой грубой оценки будем считать, что

$$\frac{121}{108} \frac{\epsilon^2}{l^2} M^2 < 0.1. \quad (4.42)$$

Тогда, взяв в качестве  $M$  массу Солнца, выраженную в массах Планка, а в качестве  $l$  верхнюю границу допустимых значений AdS-радиуса (55 мкм), можно получить ограничение  $\epsilon < 1.8 \times 10^{-44}$  метра. Поскольку эта величина оказывается меньше планковской длины, подтверждается изначальный смысл  $\epsilon$  как координаты браны в дополнительном измерении, т.е. в действительности  $\epsilon = 0$ .

Таким образом, решение Фигераса-Вайсмана для черных дыр в модели Рандалл-Сандрума II хорошо согласуется с общей теорией относительности в постньютоновском пределе. В силу того, что гравитационное взаимодействие не локализовано на бране, подобно слабому, сильному и электромагнитному, а способно распространяться вдоль дополнительного измерения, возможен эффект отрицательного нарушения линейности закона суперпозиции для гравитации, что выражается в том, что значение параметра  $\beta$ , описывающего это свойство модели, может быть меньше единицы. Однако с учетом смысла входящих в поправку к  $\beta$  параметров решения, отклонение от общей теории относительности, для которой  $\beta = 1$ , не играет заметной роли, следовательно, эффект нелинейности суперпозиции для гравитации не может быть зарегистрирован с помощью экспериментов в Солнечной системе.

#### 4.4.2. Решение Абдолрахими-Пейджа

Рассмотрим теперь другое решение для больших черных в модели Рандалл-Сандрума II, которое было получено Абдолрахими, Каттоеном, Пейджем и Ягхупуром-Тари [82, 83]:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{\tilde{r}} \right) dt^2 + \left[ \tilde{r}^2 + \frac{F}{(-\Lambda)} \right] d\Omega^2 + \quad (4.43)$$

$$+ \left[ 1 - \frac{1}{(-\Lambda \tilde{r}^2)} \frac{\tilde{r} - 2M}{\tilde{r} - 1.5M} \left( F - \tilde{r} \frac{dF}{d\tilde{r}} \right) \right] \left( 1 - \frac{2M}{\tilde{r}} \right)^{-1} d\tilde{r}^2,$$

где  $\Lambda$  — космологическая постоянная в балке, а  $F$  — найденный численно полином, который стремится к единице при  $\tilde{r} \rightarrow \infty$  (2.54).

Прежде всего следует привести решение (4.43) к изотропному виду и разложить полученный результат в ряд Тейлора аналогично тому, как это было сделано для метрики Шварцшильда (4.28), когда мы обсуждали решение Фигераса-Вайсмана. Чтобы найти переходную функцию  $y(r) = \tilde{r}$ , которая связывает изотропную радиальную координату  $r$  с обычной радиальной координатой  $\tilde{r}$ , требуется решить уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dy(r)}{dr} &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{g_{22}(r)}{g_{11}(r)}}, \\ g_{11}(r) &= \left[ 1 - \frac{1}{(-\Lambda y(r)^2)} \frac{y(r) - 2M}{y(r) - 1.5M} \left( F - y(r) \frac{dF}{dy(r)} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left( 1 - \frac{2M}{y(r)} \right)^{-1}, \\ g_{22}(r) &= y(r)^2 + \frac{F}{(-\Lambda)}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

где в качестве  $F$  взяты только ведущие члены полинома  $F_{11}$  (2.54). Наилучшей аппроксимацией решения данного дифференциального уравнения, является соотношение

$$y(r) = r \left( 1 + \frac{M}{2M} + \frac{1}{\Lambda r^2} \right)^2. \quad (4.45)$$

Тогда компоненты метрики приобретают вид:

$$g_{00} = - 1 + \frac{2M}{r} - \frac{2M^2}{r^2} + \left( - \frac{4M}{\Lambda} + 1.5M^3 \right) \frac{1}{r^3} + \dots,$$

$$\begin{aligned}
g_{11} &= 1 + \frac{2M}{r} + \frac{2M^2 + \frac{1}{\Lambda}}{r^2} + \left( -\frac{9M}{\Lambda} + 1.5M^3 \right) \frac{1}{r^3} + \dots, \\
g_{22} &= \left( 1 + \frac{2M}{r} + \frac{1.5M^2 + \frac{3}{\Lambda}}{r^2} + \left( \frac{8M}{\Lambda} + \frac{M^3}{2} \right) \frac{1}{r^3} + \dots \right) r^2, \\
g_{33} &= \left( 1 + \frac{2M}{r} + \frac{1.5M^2 + \frac{3}{\Lambda}}{r^2} + \left( \frac{8M}{\Lambda} + \frac{M^3}{2} \right) \frac{1}{r^3} + \dots \right) r^2 \sin \theta.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Разложение (4.46) совпадает с разложением метрики Шварцшильда, записанной в изотропическом виде, в постньютоновских порядках по  $r$  (до  $1/r^2$  для  $g_{00}$  и до  $1/r$  для  $g_{ij}$  включительно). Отличия, обусловленные присутствием в решении (4.43) космологической постоянной в балке, полинома  $F$  и множителя  $(\tilde{r} - 2M)/(\tilde{r} - 1.5M)$  появляются только в члене порядка  $1/r^3$  для  $g_{00}$  и  $1/r^2$  для  $g_{ij}$ . Таким образом, решение Абдолрахими-Пейджа в постньютоновской параметризации должно полностью совпадать с предсказаниями общей теории относительности. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим эффективные четырехмерные уравнения поля на бране, поскольку они содержат дополнительные члены, обусловленные наличием дополнительного измерения и способные оказать влияние на конечный результат.

В работах Абдолрахими, Пейджа и др. [82, 83] не были приведены уравнения поля, соответствующие полученному авторами решению (4.43), поэтому воспользуемся самыми общими уравнениями Широмизу, Маэды и др. [101–103]:

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 g_{\mu\nu} + 8\pi G_N T_{\mu\nu}^{matter} + \kappa_5^4 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}, \tag{4.47}$$

где

$$\kappa_4^2 = \frac{8\pi}{({}^{(4)}M_{pl})^2}, \tag{4.48}$$

$$\kappa_5^2 = \frac{8\pi}{({}^{(5)}M_{pl})^3}, \tag{4.49}$$

$$\lambda = \frac{6}{\kappa_5^2 l^2}, \quad (4.50)$$

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} T_{\mu\alpha} T_\nu^\alpha + \frac{1}{12} T T_{\mu\nu} + \frac{1}{8} g_{\mu\nu} T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - \frac{1}{24} g_{\mu\nu} T^2, \quad (4.51)$$

<sup>(5)</sup>  $M_{pl}$  — пятимерная масса Планка,  $E_{\mu\nu}$  — часть пятимерного тензора Вейля,  $\lambda$  — вакуумная энергия на бране.

Прежде всего, для балка, пространство которого является анти-де ситтеровским,  $E_{\mu\nu} = 0$  [102]. За  $T_{\mu\nu}^{matter}$ , как и ранее, обозначен тензор энергии-импульса материи, поэтому его рассмотрение приводит к стандартному постньютоновскому разложению (2.77). Поскольку  $\pi_{\mu\nu}$  является квадратичной поправкой к тензору энергии-импульса и в случае идеальной жидкости имеет вид [102]

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{12} \rho^2 u_\mu u_\nu + \frac{1}{12} \rho(\rho + 2p)[g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu] \sim \frac{1}{r^6}, \quad (4.52)$$

поправка, обусловленная этим членом, заведомо окажется за рамками постньютоновского предела аналогично случаю Гаусса-Бонне. Оставшееся слагаемое в правой части уравнений поля (4.46) содержит метрику, которая является асимптотически шварцшильдовской. Тогда в результате решения уравнений (4.8–4.11) в соотношениях для постньютоновских поправок появятся члены порядка  $r$  и  $r^2$ . При больших  $r$  такие выражения очевидно расходятся, что не удовлетворяет требованиям параметризованного постньютоновского формализма. Поэтому мы вынуждены исключить член  $\Lambda_4 g_{\mu\nu}$  из рассмотрения уравнений поля. Из всего вышесказанного следует, что единственный нетривиальный вклад в разложение решения Абдорахими-Пейджа обеспечивает квадратичная поправка тензора энергии-импульса  $\pi_{\mu\nu}$ , которой соответствует возмущение метрики

$$h_{00}^{AP} = \frac{M^2 l^2}{12 m_{pl}^4 r^4}. \quad (4.53)$$

Таким образом, решение Абдорахими-Пейджа полностью согласует-

ся с общей теорией относительности с точностью до третьего постньютоновского порядка.

#### 4.5. Выводы к главе 4

На основании исследования постньютоновского разложения низкоэнергетического эффективного предела струнной гравитации и решений модели Рандалл-Сандрума для больших черных дыр показано, что предсказания моделей с поправками по кривизне и дополнительным некомпактным измерением полностью согласуются с общей теорией относительности в пределах современных измерений в Солнечной системе. Для решения Фигераса-Вайсмана в модели Рандалл-Сандрума II с одной браной продемонстрирована возможность слабого эффекта отрицательной нелинейности суперпозиции для гравитации. Для решения Гаусса-Бонне в рамках эффективного предела струнной гравитации и решения Абдолрахими-Пейджа в модели Рандалл-Сандрума II показано полное соответствие общей теории относительности с точностью до третьего постньютоновского порядка. Вывод для струнной гравитации распространен на модели  $f(R)$  с ньютоновским пределом.

Помимо первого порядка для разработанного Уиллом постньютоновского разложения, о котором до сих пор шла речь, рассматриваются также второй [104–107] и третий постньютоновские порядки. Однако данные методы описания гравитации в корне отличаются от подхода Уилла. Прежде всего, их задачей является учет эффектов гравитационного излучения, т. е. они предназначены для работы в приближении сильного поля. Кроме того, они рассматривают следующие порядки малости (2ПН, 3ПН и т. д.) для общей теории относительности, т. е. описывают эйнштейновское гравитационное излучение и не предназначены для сравнения различных расширений теории относительности между собой. Поскольку полученные нами в данной главе поправки к постньютоновскому разложению сферически-симметричных решений Гаусса-Бонне и Рандалл-Сандрума, как правило, имеют порядок малости по  $1/r$  при  $r \rightarrow \infty$ , лежащий за рамками первого постньютоновского предела,

очевидно, что экспериментально регистрируемые отличия от общей теории относительности разумно искать в следующих пределах. Приближение сильного поля и рассмотрение эффектов гравитационного излучения подходят для этого как нельзя лучше, поскольку учитывают члены требуемых порядков по  $1/r$  при  $r \rightarrow \infty$ . Однако формализм для общего описания различных теорий и сравнения их друг с другом в этом пределе находится в стадии разработки. Поэтому экспериментальная проверка и ограничение параметров гравитационных моделей их данных наблюдений в пределе сильного поля является предметом отдельного рассмотрения и на данный момент требует индивидуального подхода в исследовании каждой модели.



## 5. Кротовые норы в теории Бранса-Дикке

### 5.1. Постановка задачи

Впервые возможность существования пространственной геометрии в виде туннеля, соединяющего два мира, обсуждал еще в 1916 году австрийский физик Фламм [108]. В 1935 году Эйнштейн и математик Розен [109] обратили внимание на то, что простейшие решения уравнений общей теории относительности, описывающие изолированные нейтральные или электрически заряженные источники гравитационного поля, имеют пространственную структуру «моста», почти гладким образом соединяющего две Вселенные — два одинаковых асимптотически плоских пространства-времени — или разные области одной и той же Вселенной, в общем случае, в разные времена [110]. Позднее пространственные структуры подобного рода получили название «кротовые норы». Эйнштейн и Розен даже рассматривали возможность применения таких «мостов» для описания элементарных частиц [111]. Однако, при всей своей привлекательности, данная модель не прижилась в физике элементарных частиц. Например, «мостам» Эйнштейна-Розена трудно приписать квантовые свойства, без которых рассмотрение на соответствующем масштабе невозможно. Кроме того, при некоторых значениях масс и зарядов частиц мост Эйнштейна-Розена вообще не образуется, вместо этого «электрическое» решение предсказывает так называемую «голую» сингулярность. То, что Эйнштейн и Розен рассматривали как горловину (то есть самое узкое место «моста»), на самом деле оказалось горизонтом событий черной дыры. При приближении путешественника к нему приливные гравитационные силы становятся слишком большими. Кроме того, горизонт событий — это «односторонняя мембрана»: свет может попасть в черную дыру, но не может выйти из нее. Таким образом, черную дыру Шварцшильда можно рассматривать как непроходимую кротовую нору. Черная дыра Райсснера-Нордстрема устроена сложнее, но тоже непроходима. В 1957 году вышла работа Мизнера и Уилера, где был введен термин «кротовая нора» [112, 113]. Но уилеровские кротовые норы — микроскопические, т. е. не позволяют путешествовать макроскопическим

объектам.

В дальнейшем обсуждалось множество решений типа «кротовая нора», особенно в расширенных теориях гравитации: кротовые норы с безмассовым фантомным скалярным полем [114, 115]; первые многомерные кротовые норы [116–118]; решения типа «кротовая нора» в теориях с большим числом размерностей [119, 120]; кротовые норы в моделях мира на бране [50, 121–123]; кротовые норы в полуклассической гравитации [124]; решения, тензоры энергии-импульса которых, — уравнения состояния вещества, полученные в различных космологических моделях для темной энергии [125].

Особенно интересно искать решения типа «кротовая нора» в расширенных теориях гравитации, так как в них описание всех «экзотических» свойств может быть включено либо в более высокие по кривизне члены, либо в дополнительные поля. Неизбежно возникает вопрос, можно ли с помощью наблюдений отличить кротовые норы в разных теориях гравитации.

Согласно последним наблюдениям, вокруг большинства галактических ядер имеется аккреционный газовый диск [126]. В работах Харко, Ковакса и Лобо были вычислены потоки при аккреции на кротовую нору в общей теории относительности со сферически-симметричной и аксиально-симметричной метриками [127, 128]. При этом было показано, что данная величина может отличаться на порядки для разных типов кротовых нор. Важные исследования в области астрофизики кротовых нор были проведены Новиковым, Кардашевым и Шацким [89, 129, 130]. На основании исследования модели сферически-симметричной магнитной кротовой норы был сделан вывод о возможности обнаружения среди известных галактических и внегалактических объектов, обычно отождествляемых с черными дырами звездных масс и массами порядка ядер галактик, нового типа первичных космологических объектов — входов в кротовые норы или специфических черных дыр, образовавшихся из кротовых нор [129]. Авторами также было получено аналитическое решение, описывающее сферически-симметричную статическую и динамическую кротовую нору, в общем случае являющуюся проходимой [130]. Показа-

но, что это решение оказывается сферической моделью Мультивселенной с бесконечным числом сферических Вселенных, соединенных кротовыми норами, которая может не находиться в равновесии (т. е. быть динамической). В работе [89] рассмотрено гравитационное линзирование для света, распространяющегося через кротовые норы, и найдены принципиальные и характерные особенности электромагнитного излучения, проходящего через кротовые норы.

Целью данной главы является исследование геометрических свойств кротовой норы Бранса-Дикке. Рассматриваются такие параметры как размер горловины кротовой норы и максимальный прицельный параметр. В совокупности с результатами рассмотрения особенностей аккреции на кротовую нору Бранса-Дикке в сравнении с кротовой норой в общей теории относительности и черной дырой Шварцшильда сделан вывод о фундаментальной роли данного компактного объекта в расширенной гравитации [90].

Решение, описывающее кротовую нору в теории Бранса-Дикке, имеет вид:

$$ds^2 = - \left( \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} \right)^{2l} dt^2 + \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^4 \left( \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} \right)^n \times$$

$$\times (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \tag{5.1}$$

$$\phi = \phi_0 \left( \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} \right)^p,$$

$$x = r/B, \quad l = 1/\lambda, \quad n = (\lambda - C - 1)/\lambda, \quad p = C/\lambda,$$

где  $r$  — радиальная изотропная координата,  $\omega$  — постоянная Бранса-Дикке, а  $\lambda$ ,  $B$  и  $C$  подчиняются следующим соотношениям [46]:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}}, \tag{5.2}$$

$$B = \frac{M}{2\phi_0} \sqrt{\frac{2\omega + 4}{2\omega + 3}}, \tag{5.3}$$

$$C = -\frac{1}{\omega + 2}. \quad (5.4)$$

Заметим, что метрика Бранса-Дикке асимптотически переходит в метрику Шварцшильда

$$ds^2 = \left( \frac{1 - \frac{r_g}{4\rho}}{1 + \frac{r_g}{4\rho}} \right)^2 dt^2 - \left( 1 - \frac{r_g}{4\rho} \right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)$$

при  $\omega \rightarrow \pm \infty$ , при этом случай  $+\infty$  соответствует решению типа «черная дыра», а в случае  $-\infty$  возможно существование кротовых нор. Тогда, соответственно,  $\lambda \rightarrow 1$ ,  $C \rightarrow 0$ , а  $B \rightarrow M/2$ .

В нашей задаче необходимо, чтобы значение параметра Бранса-Дикке допускало существование проходимых кротовых нор [50] и не противоречило экспериментальным данным (Кассини-Гюйгенс) [51, 52]. Поэтому мы рассматриваем область значений  $\omega < -9000$ .

## 5.2. Аккреция на кротовые норы Бранса-Дикке

Основной величиной, характеризующей аккрецию, является поток энергии, которая излучается аккреционным диском, поскольку его значение может быть получено из данных астрономических наблюдений. В нашей работе мы будем придерживаться стационарной модели дисковой аккреции, в которой предполагается, что:

- диск находится в гидродинамическом равновесии;
- градиент температуры и вертикальный градиент энтропии пренебрежимо малы;
- диск излучает как черное тело;
- скорость аккреции  $\dot{M}_0$  постоянна и не меняется со временем;
- все физические величины, описывающие вращающуюся плазму, усредняются по характерному времени, азимутальному углу  $\varphi = 2\pi$  и по

высоте  $H$ ;

- на высоких орбитах частицы движутся по законам Кеплера.

Также будем считать, аккреционный диск тонкий, т. е. большинство частиц движется в экваториальной плоскости  $\theta = \pi/2$ , и что на последней устойчивой орбите частицы падают сразу на массивный объект, не взаимодействуя с соседними слоями диска, т. е. на внутренней границе диска тензор напряжений равен нулю. Тогда поток энергии от аккреционного диска может быть вычислен следующим образом:

$$F(r) = - \frac{\dot{M}_0}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{\Omega_{,r}}{(\tilde{E} - \Omega\tilde{L})^2} \int_{r_{ms}}^r (\tilde{E} - \Omega\tilde{L}) \tilde{L}_{,r} dr. \quad (5.5)$$

Здесь  $r_{ms}$  — радиус последней устойчивой орбиты, а  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{L}$  и  $\Omega$  — энергия, угловой момент и угловая скорость частиц соответственно. Для кротовых нор Бранса-Дикке эти величины имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \left( \frac{x - \lambda}{x + \lambda} \right)^l \sqrt{\frac{x^2 + \lambda^2 - 2x(C + 1)}{x^2 + \lambda^2 - 2x(C + 2)}}, \\ \tilde{L} &= \sqrt{\frac{2}{x}} B \frac{x^2 - \lambda^2}{\sqrt{x^2 + \lambda^2 - 2x(C + 2)}} \left( \frac{x + \lambda}{x - \lambda} \right)^{l+p}, \\ \Omega &= \frac{x}{B} \frac{1}{x^2 - \lambda^2} \sqrt{\frac{2x}{x^2 + \lambda^2 - 2x(C + 1)}} \left( \frac{x - \lambda}{x + \lambda} \right)^{p+2l}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Радиус последней устойчивой орбиты может быть найден путем численного решения уравнения

$$\tilde{E}^2 g_{\varphi\varphi,rr} + 2\tilde{E}\tilde{L}g_{t\varphi,rr} + \tilde{L}^2 g_{tt,r} - (g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi})_{,rr} = 0. \quad (5.7)$$

Тогда внутренняя граница аккреционного диска в теории Бранса-Дикке равна  $r_{ms}^{BD} \approx 5M$ . Подставляя этот результат и выражения (5.6) в (5.5), можно получить численное значение потока энергии, излучаемой с поверхности диска при аккреции на кротовую нору Бранса-Дикке.

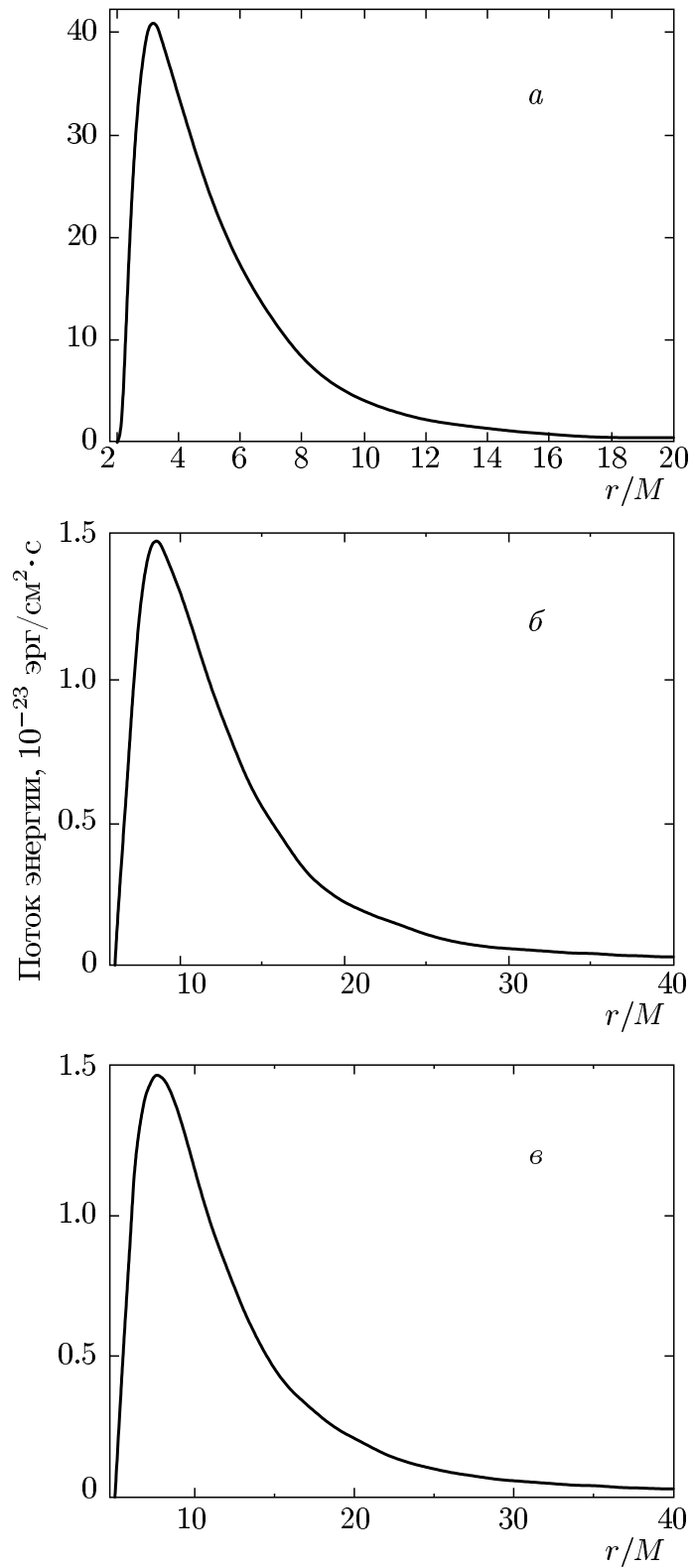


Рис. 9. Поток энергии аккреционного диска при аккреции на кротовую нору в сферически-симметричной модели общей теории относительности (а), черную дыру Шварцшильда (б) и кротовую нору в теории Бранса-Дикке (в)

Значения потока энергии  $F(r)$  для кротовой норы в теории Бранса-Дикке в сравнении с кротовой норой в общей теории относительности и черной дырой Шварцшильда приведены на графике (Рис. 9). Поскольку по оси  $x$  отложено координатное расстояние, для корректного сравнения нужно выполнить переход к физическим расстояниям. Однако в силу того, что наблюдатель на бесконечности регистрирует интегральный поток, пропорциональный максимуму потока энергии, сравнение этих максимумов позволит получить достаточно корректную картину.

На графике (Рис. 9) видно, что максимум потока при аккреции на сферически-симметричную кротовую нору в общей теории относительности на порядок больше, чем в случае как сферически-симметричной кротовой норы в теории Бранса-Дикке, так и черной дыры Шварцшильда. Максимумы излучения черной дыры и кротовой норы Бранса-Дикке очень близки.

Заметим также, что радиус последней устойчивой орбиты аккреционного диска вокруг кротовой норы Бранса-Дикке  $r_{ms}^{BD} \approx 5M$  весьма незначительно отличается от радиуса последней устойчивой орбиты в случае черной дыры Шварцшильда ( $r_{ms}^{Sch} = 6M$ ), в то время как для кротовой норы в общей теории относительности эта величина заметно меньше (Рис. 9).

### 5.3. Геометрические свойства кротовых нор Бранса-Дикке

Поверхностью горловины кротовой норы называют поверхность с минимально возможной площадью, окружающую вход в другую Вселенную или в другую область нашей Вселенной. Радиус горловины определяется уравнением

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} (g_{\theta\theta}) \right|_{r=r_0} = 0. \quad (5.8)$$

Тогда изотропная радиальная координата  $r$  в точке горловины выражается следующим образом:

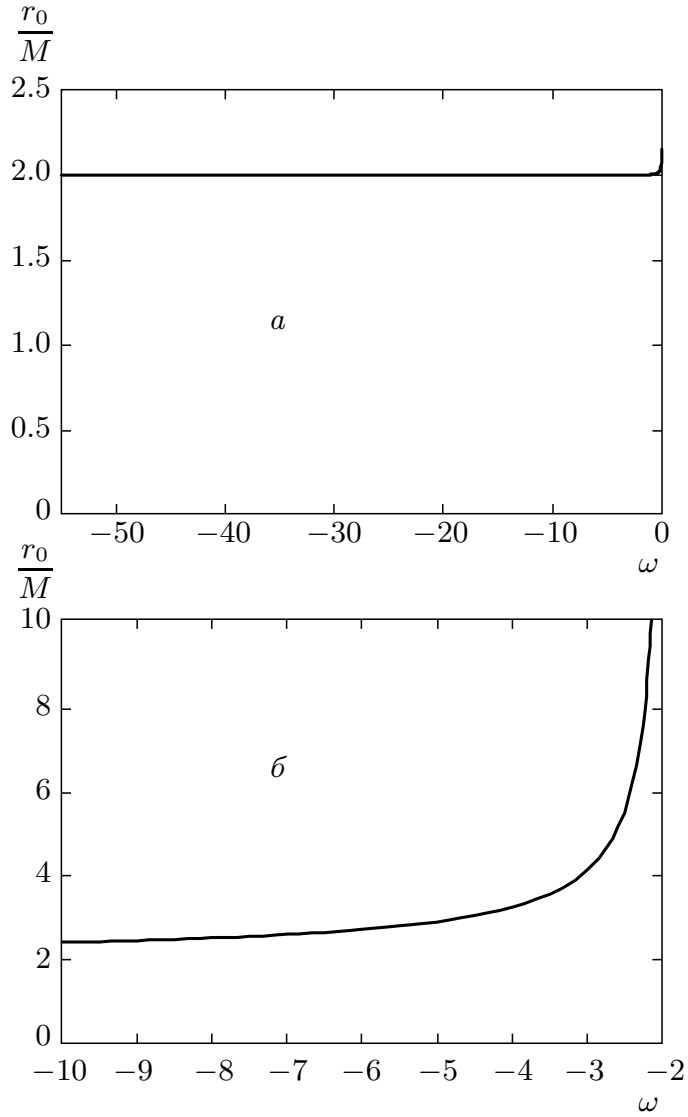


Рис. 10. Зависимость горловины кротовой норы в расчете на единицу массы от параметра  $\omega$  в теории Бранса-Дикке (а и б — разные области значений  $\omega$ ).

$$r_0 = \frac{\sqrt{2}B}{2} \left( \frac{2 |\omega + 1| \pm \sqrt{-8 - 6\omega}}{\sqrt{(2\omega + 3)(\omega + 2)}} \right). \quad (5.9)$$

В рассматриваемой области значений  $\omega$  эта величина с достаточно большой точностью оказывается равной  $r_0 = 2M$  (Рис. 10), то есть, она совпадает с размерами горизонта событий черной дыры Шварцшильда соответствующей массы. Вблизи  $\omega = -2$ , как и следует ожидать, значение радиуса горловины расходится.

Другой важный аспект, связанный с кротовыми норами, — прохожде-



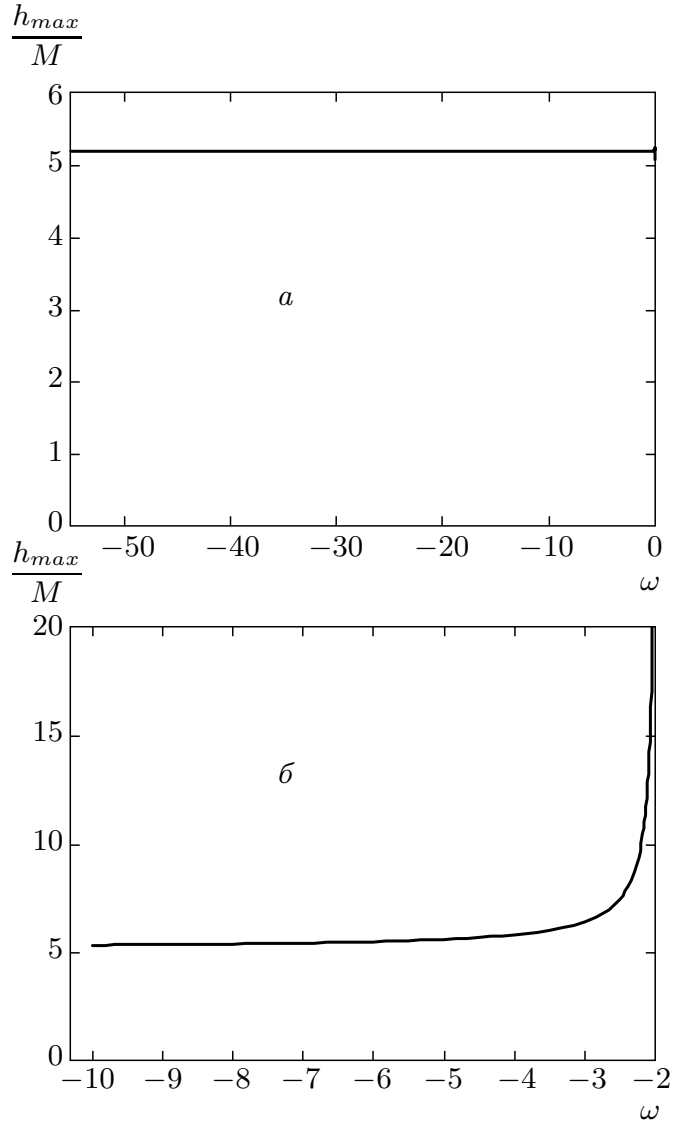


Рис. 11. Зависимость максимального прицельного параметра кротовой норы в расчете на единицу массы от параметра  $\omega$  в теории Бранса-Дикке (а и б — разные области значений  $\omega$ ).

ние света через горловину кротовой норы [129]. Найдем максимальный прицельный параметр  $h_{max}$ , при котором можно увидеть звезды другой Вселенной в теории Бранса-Дикке. При большом числе звезд яркость проходящего через горловину света будет однородной, а при малом числе можно увидеть отдельные источники. Максимальный прицельный параметр определяется через глобальный минимум, который можно найти на всей области определения кротовой норы следующим образом:

$$h_{max}^2 = \min(-g_{\theta\theta}/g_{tt}). \quad (5.10)$$

Результаты численного решения уравнения (5.10) для кротовой норы Бранса-Дикке приведены на графике (Рис. 11). Почти на всей области определения  $h_{max}^{BD} \approx 5.18M$ . Это значение с большой точностью совпадает со значением аналогичной величины для черной дыры Шварцшильда  $h_{max}^{BD} = 3\sqrt{3} \approx 5.20$ . С другой стороны, полученный результат отличает кротовую нору Бранса-Дикке от, например, магнитной кротовой норы, для которой  $h_{max} = 4M$ . При  $\omega = -2$  имеет место особенность, обусловленная близостью границы области определения, но на нашем решении эта особенность не сказывается, поскольку, как говорилось выше, нас интересуют отрицательные значения параметра Бранса-Дикке  $|\omega| > 50000$ .

#### 5.4. Выводы к главе 5

На основании изучения геометрических свойств кротовой норы в теории Бранса-Дикке и сопоставления полученных результатов с исследованием аккреции показано, что кротовая нора Бранса-Дикке может рассматриваться как «квазишварцшильдовский» компактный объект. Радиус последней устойчивой орбиты и максимальный прицельный параметр кротовой норы Бранса-Дикке, также как и максимум потока энергии, излучаемой аккреционным диском, с высокой точностью совпадают с соответствующими величинами для черной дыры Шварцшильда той же массы, а изотропная координата горловины равна гравитационному радиусу. Также значения этих величины отличают кротовую нору в теории Бранса-Дикке, в общей теории относительности и в случае наличия магнитного заряда. Поскольку самостоятельной модели Шварцшильда, в которой описывались бы разные типы компактных объектов, не существует, т. е. не может быть такого понятия как «кротовая нора Шварцшильда», кротовая нора Бранса-Дикке может успешно рассматриваться в этой роли, что делает ее одним из базовых решений в расширенной гравитации. Таким образом, сопоставление результатов наблюдений отклонения света при прохождении через кротовую нору с предсказаниями теорий позволит определить характеристики ее модели и, следовательно, послужит свидетельством в пользу той или иной теории гравитации.

## 6. Заключение

### 6.1. Выводы

В качестве выводов приводим положения, выносимые на защиту:

- 1) На основании исследования постньютоновского разложения низкоэнергетического эффективного предела струнной гравитации и решений модели Рандалл-Сандрума для больших черных дыр показано, что предсказания моделей с поправками по кривизне и дополнительным некомпактным измерением полностью согласуются с общей теорией относительности в пределах современных измерений в Солнечной системе. Для решения Фигераса-Вайсмана в модели Рандалл-Сандрума II с однойбраной продемонстрирована возможность слабого эффекта отрицательной нелинейности суперпозиции для гравитации. Показано, с учетом смысла параметров решения, отклонение от общей теории относительности не играет заметной роли, следовательно, эффект нелинейности суперпозиции для гравитации не может быть зарегистрирован с помощью экспериментов в Солнечной системе. Для решения Гаусса-Бонне в рамках эффективного предела струнной гравитации и решения Абдолрахими-Пейджа в модели Рандалл-Сандрума II показано полное соответствие общей теории относительности до третьего постньютоновского порядка. Таким образом, в рамках экспериментов по измерению постньютоновских параметров в Солнечной системе отличие упомянутых решений от общей теории относительности не может быть обнаружено. Вывод для струнной гравитации обобщен на модели  $f(R)$  с ньютоновским пределом [96–99].
- 2) На основании изучения геометрических свойств кротовой норы в теории Бранса-Дикке и сопоставления полученных результатов с исследованием аккреции показано, что кротовая нора Бранса-Дикке может рассматриваться как «квазишварцшильдовский» компактный объект. Радиус последней устойчивой орбиты и максимальный прицельный параметр кротовой норы Бранса-Дикке отличаются от

соответствующих величин для черной дыры Шварцшильда той же массы на 16.7% и 0.3% соответственно, а изотропная координата горловины равна гравитационному радиусу. Также значения этих величин отличают кротовую нору в теории Бранса-Дикке, в общей теории относительности и в случае наличия магнитного заряда. Поскольку самостоятельной модели Шварцшильда, в которой описывались бы разные типы компактных объектов, не существует, т. е. не может быть такого понятия как «кротовая нора Шварцшильда», кротовая нора Бранса-Дикке может успешно рассматриваться в этой роли, что делает ее одним из базовых решений в расширенной гравитации [90].

- 3) На основании исследования поведения инварианта кривизны под горизонтом черной дыры Максвелла-Гаусса-Бонне установлено, при магнитном заряде, превышающем критическое значение, возникает центральная сингулярность, ограничивающая гладкое решение и являющаяся нулем метрических функций  $g_{00}$  и  $g_{22}$ . При этом нуль у функции  $g_{22}$  соответствует тому, что это именно центральная сингулярность, аналогичная шварцшильдовской. Таким образом, при заряде, который больше или равен критическому, изменяется внутренняя структура решения Максвелла-Гаусса-Бонне, однако описываемый им компактный объект остается обычной черной дырой, т. е. никакой внутренней R-области (горловины, и как следствие проходимости) не наблюдается. Следовательно, рассмотренное решение может быть зарегистрировано только в качестве черной дыры Максвелла-Гаусса-Бонне как в жестком космическом излучении, так и при наблюдении астрофизических объектов с магнитными свойствами [22, 91].

## 6.2. Благодарности

Автор выражает глубокую признательность М.В. Сажину и О.С. Сажиной, А. Баррау, В.Г. Турышеву, С. Капоцциелло, а также П.И. Дядиной, Д.В. Гареевой.

## Список литературы

- [1] J. Scherk, J.H. Schwarz, «Dual models for nonhadrons», **Nucl. Phys. B**, том 81, стр. 118 (1974).
- [2] C.G. Callan, D. Friedan, E.J. Martinec, M.J. Perry, «Strings in background fields», **Nucl. Phys. B.**, том 262, стр. 593 (1985).
- [3] S.P. de Alwis, «Strings in background fields:  $\beta$  functions and vertex operators», **Phys. Rev. D.**, том 34, стр. 3760 (1986).
- [4] D. Orlando, P.M. Petropoulis, «Corfu 05 lectures – part I: Strings on curved backgrounds», **J. of Phys. Conf. Ser.**, том 53, стр. 551 (2006).
- [5] D.J. Gross, J. Harvey, E. Martinec, R. Rohm, «The heterotic string», **Phys. Rev. Lett.**, том 54, стр. 502 (1985).
- [6] P. Candelas, G.T. Horowitz, A. Strominger, E. Witten, «Vacuum configurations for superstrings», **Nucl. Phys. B**, том 258, стр. 46 (1985).
- [7] D. Gross, E. Witten, «Superstring modifications of Einstein's equations», **Nucl. Phys. B**, том 277, стр. 1 (1986).
- [8] D.Z. Freedman, G.W. Gibbons, P.C. West, «Ten into four won't go», **Phys. Lett. B**, том 124, стр. 491 (1983).
- [9] Ширков Д.В., «Перенормировки в квантовой теории поля», **Сообщения ОИЯИ**, P2-85-6 (1985).
- [10] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., «Введение в теорию квантованных полей» (М., Физматлит, 2005).
- [11] B. Zwiebach, «Curvature squared terms and string theories», **Phys. Lett. B**, том 156, стр. 315 (1985).
- [12] D. Lovelock, «The Einstein tensor and its generalizations», **J. of Math. Phys.**, том 12, стр. 498 (1971).

- [13] D. Lovelock, «The Four-Dimensionality of Space and the Einstein Tensor», **J. of Math. Phys.**, том 13, стр. 874 (1972).
- [14] E. Witten, «Dimensional reduction of superstring models», **Phys. Lett. B**, том 155, стр. 151 (1985).
- [15] D. Boulware, S. Deser, «String generated gravity models», **Phys. Rev. Lett.**, том 55, стр. 2656 (1985).
- [16] D. Boulware, S. Deser, «Effective gravity theories with dilatons», **Phys. Lett. B**, том 175, стр. 409 (1986).
- [17] G.W. Gibbons, K. Maeda, «Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilaton fields», **Nucl. Phys. B.**, том 298, стр. 741 (1988).
- [18] H. Nishiro, E. Sezgin, «The solution of  $N = 2$  supergravity constraints in terms of  $N = 1$  superfields», **Phys. Lett. B.**, том 144, стр. 187 (1984).
- [19] A. Salam, E. Sezgin, «Chiral compactification on Minkowski  $\times S^2$  of  $N = 2$  Einstein-Maxwell supergravity in six dimensions», **Phys. Lett. B.**, том 147, стр. 47 (1984).
- [20] M. Dine, R. Rohm, N. Seiberg, E. Witten, «Glauino condensation in superstring models», **Phys. Lett. B.**, том 156, стр. 55 (1985).
- [21] D. Garfinkle, G.T. Horowitz, A. Strominger, «Charged black holes in string theory», **Phys. Rev. D.**, том 43, стр. 3140 (1991).
- [22] Алексеев С.О., Ранну К.А., «Черные дыры Гаусса-Бонне и возможности их экспериментального поиска», **ЖЭТФ**, том 141, стр. 463 (2012).
- [23] S. Mignemi, N.R. Stewart, «Charged black holes in effective string theory», **Phys. Rev. D.**, том 47, стр. 5259 (1993).
- [24] J. Wheeler, «Symmetric solutions to the Gauss-Bonnet extended Einstein equations», **Nucl. Phys. B**, том 268, стр. 737 (1986).

- [25] J. Wheeler, «Symmetric solutions to the maximally Gauss-Bonnet extended Einstein equations», **Nucl. Phys. B**, том 273, стр. 732 (1986).
- [26] S.O. Alexeyev, M.V. Pomazanov, «Black hole solutions with dilatonic hair in higher curvature gravity», **Phys. Rev. D.**, том 55, стр. 2110 (1997).
- [27] P. Kanti, N.E. Mavromatos, J. Rizos, K. Tamvakis, E. Winstanley, «Dilatonic black holes in higher curvature string gravity», **Phys. Rev. D.**, том 54, стр. 5049 (1996).
- [28] P. Kanti, N.E. Mavromatos, J. Rizos, K. Tamvakis, E. Winstanley, «Dilatonic black holes in higher curvature string gravity. II. Linear stability», **Phys. Rev. D.**, том 57, стр. 6255 (1998).
- [29] E. Ellis, B.G. Schmidt, «Singular space-times», **Gen. Rel. Grav.**, том 8, стр. 915 (1977).
- [30] S.W. Hawking, E. Ellis, «Large-scale structure of the space-time», (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973).
- [31] S.O. Alexeyev, «Internal structure of a Gauss-Bonnet black hole», **Grav. Cosmol.**, том 3, стр. 161 (1997).
- [32] S.O. Alexeyev, M.V. Pomazanov, «Singular regions in black hole solutions in higher order curvature gravity», gr-qc/9706066v2 (1997).
- [33] S.O. Alexeyev, M.V. Sazhin, «Four-dimensional dilatonic black holes in Gauss-Bonnet extended string gravity», **Gen. Relativ. Grav.**, том 30, стр. 1187 (1998).
- [34] T. Torii, H. Yajima, K. Maeda, «Dilatonic black holes with a Gauss-Bonnet term», **Phys. Rev. D.**, том 55, стр. 739 (1997).
- [35] T. Sotirou, E. Barausse, «Post-Newtonian expansion for Gauss-Bonnet gravity», **Phys. Rev. D**, том 75, том 084007 (2007).
- [36] S. Nojiri, S.D. Odintsov, M. Sasaki, «Gauss-Bonnet dark energy», **Phys. Rev. D**, том 71, стр. 123509 (2005).

- [37] S. Nojiri, S.D. Odintsov, M. Sami, «Dark energy cosmology from higher-order, string-inspired gravity and its reconstruction», **Phys. Rev. D**, том 74, стр. 046004 (2006).
- [38] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S.D. Odintsov, «String-inspired Gauss-Bonnet gravity reconstructed from the universe expansion history and yielding the transition from matter dominance to dark energy», **Phys. Rev. D**, том 75, стр. 0611198 (2007).
- [39] B.M.N. Carter, I.P. Neupane, «Towards inflation and dark energy cosmologies from modified Gauss–Bonnet theory», **J. Cosm. Astropart. Phys.**, том 06, стр. 004 (2006).
- [40] B.M.N. Carter, I.P. Neupane, «Dynamical relaxation of dark energy: a solution to early inflation, late-time acceleration and the cosmological constant problem», **Phys. Lett. B**, том 638, стр. 94 (2006).
- [41] I.P. Neupane, «On compatibility of string effective action with an accelerating universe», **Class. Quant. Grav.**, том 23, стр. 7493 (2006).
- [42] I.P. Neupane, «Towards inflation and accelerating cosmologies in string-generated gravity models», hep-th/0605265 (2006).
- [43] S. Tsujikawa, «Cosmologies from higher-order string corrections», **Annalen Phys.**, том 15, стр. 302 (2006).
- [44] T. Koivisto, D.F. Mota, «Gauss-Bonnet quintessence: background evolution, large scale structure and cosmological constraints», **Phys. Rev. D**, том 75, стр. 023518 (2007).
- [45] T. Koivisto, D.F. Mota, «Cosmology and astrophysical constraints of Gauss-Bonnet dark energy», **Phys. Lett. B**, том 644, стр. 104 (2007).
- [46] C. Brans, R.H. Dicke, «Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation», **Phys. Rev.**, том 124, стр. 925 (1961).
- [47] C.H. Brans, «Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. II», **Phys. Rev.**, том 125, стр. 2194 (1961).



- [48] A. Bhadra, K. Sarkar, «On static spherically symmetric solutions of the vacuum Brans-Dicke theory», **Gen. Rel. Grav.**, том 37, стр. 2189 (2005).
- [49] A. Bhadra, K. Sarkar, «Wormholes in vacuum Brans-Dicke theory», **Mod. Phys. Lett. A**, том 20, стр. 1831 (2005).
- [50] A.G. Agnese, M. La Camera, «Wormholes in the Brans-Dicke theory of gravitation», **Phys. Rev. D**, том 51, стр. 2011 (1995).
- [51] B. Bertotti, L. Iess, P. Tortora, «A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft», **Nature**, том 425, стр. 374 (2003).
- [52] J.D. Anderson, E.L. Lau, G. Giampieri, «Measurement of the PPN parameter  $\gamma$  with radio signals from the cassini spacecraft at X- and Ka-Bands», **22nd Texas Symposium on Relativistic Astrophysics**, стр. 105 (2004).
- [53] V.A. Rubakov, M.E. Shaposhnikov, «Do we live inside a domain wall?», **Phys. Lett. B**, том 125, стр. 136 (1983).
- [54] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, «The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter», **Phys. Lett. B**, том 429, стр. 263 (1998).
- [55] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, «New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV», **Phys. Lett. B**, том 436, стр. 257 (1998).
- [56] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, «Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity», **Phys. Rev. D**, том 59, стр. 086004 (1999).
- [57] L. Randall, R. Sundrum, «Large mass hierarchy from a small extra dimension», **Phys. Rev. Lett.**, том 83, стр. 3370 (1999).
- [58] L. Randall, R. Sundrum, «An alternative to compactification», **Phys. Rev. Lett.**, том 83, стр. 4690 (1999).

- [59] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, «The Einstein equations on the 3-brane world», **Phys. Rev. D**, том 62, стр. 024012 (2000).
- [60] M. Sasaki, T. Shiromizu, K. Maeda, «Gravity, stability and energy conservation on the Randall-Sundrum brane world», **Phys. Rev. D**, том 62, стр. 024008 (2000).
- [61] C. Csaki, M. Graesser, C. Kold, J. Terning, «Cosmology of one extra dimension with localized gravity», **Phys. Lett. B**, том 462, стр. 34 (1999).
- [62] C. Csaki, J. Erlich, T.J. Hollowood, Y. Shirman, «Universal aspects of gravity localized on thick branes», **Nucl. Phys. B**, том 581, стр. 309 (2000).
- [63] P. Binetruy, C. Deffayet, D. Langlois, «Non-conventional cosmology from a brane-universe», **Nucl. Phys. B**, том 565, стр. 269 (2000).
- [64] J.M. Cline, C. Grojean, G. Servant, «Cosmological expansion in the presence of an extra dimension», **Phys. Rev. Lett.**, том 83, стр. 4245 (1999).
- [65] A. Chamblin, S.W. Hawking, H.S. Reall, «Brane-world black holes», **Phys. Rev. D**, том 61, стр. 065007 (2000).
- [66] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos, V. Rezanian, «Black holes on the brane», **Phys. Lett. B**, том 487, стр. 1 (2000).
- [67] T. Tanaka, «Classical black hole evaporation in Randall-Sundrum infinite braneworld», **Prog. Theor. Phys. Suppl.**, том 148, стр. 307 (2002).
- [68] R. Emparan, A. Fabbri, N. Kaloper, «Quantum black holes as holograms in AdS braneworlds», **J. High Energy Phys.**, том 08, стр. 043 (2003).
- [69] R. Emparan, J. Garcia-Bellido, N. Kaloper, «Black hole astrophysics in AdS braneworlds», **J. High Energy Phys.**, том 01, стр. 079 (2003)

- [70] T. Wiseman, «Relativistic stars in Randall-Sundrum gravity», **Phys. Rev. D**, том 65, стр. 124007 (2002).
- [71] T. Wiseman, «Static axisymmetric vacuum solutions and non-uniform black strings», **Class. Quant. Grav.**, том 20, стр. 1137 (2003).
- [72] H. Kudoh, T. Tanaka, T. Nakamura, «Small localized black holes in a braneworld: formulation and numerical method», **Phys. Rev. D**, том 68, стр. 024035 (2003).
- [73] H. Kudoh, «Thermodynamic properties of small localized black holes», **Prog. Theor. Phys.**, том 110, стр. 1059 (2003).
- [74] H. Kudoh, «Six-dimensional localized black holes: numerical solutions», **Phys. Rev. D**, том 69, стр. 104019 (2004).
- [75] H. Yoshino, «On the existence of a static black hole on a brane», **J. High Energy Phys.**, том 01, стр. 068 (2009).
- [76] B. Kleihaus, J. Kunz, E. Radu, D. Senkbeil, «Electric charge on the brane?», **Phys. Rev. D**, том 83, стр. 104050 (2011).
- [77] P. Figueras, T. Wiseman, «Gravity and large black holes in Randall-Sundrum II braneworlds», **Phys. Rev. Lett.**, том 107, стр. 081101 (2011).
- [78] S. de Haro, K. Skenderis, S. N. Solodukhin, «Gravity in warped compactifications and the holographic stress tensor», **Class. Quant. Grav.**, том 18, стр. 3171 (2001).
- [79] S. de Haro, K. Skenderis, S.N. Solodukhin, «Holographic reconstruction of spacetime and renormalization in the AdS/CFT correspondence», **Commun. Math. Phys.**, том 217, стр. 595 (2001).
- [80] M.T. Anderson, P.T. Chrusciel, E. Delay, «Non-trivial, static, geodesically complete, vacuum space-times with a negative cosmological constant», **J. High Energy Phys.**, том 10, стр. 063 (2002).

- [81] P. Figueras, J. Lucietti, T. Wiseman, «Ricci solitons, Ricci flow, and strongly coupled CFT in the Schwarzschild Unruh or Boulware vacua», **Class. Quant. Grav.**, том 28, стр. 215018 (2011).
- [82] S. Abdolrahimi, C. Cattoën, D.N. Page, S. Yaghoobpour-Tari, «Large Randall-Sundrum II black holes», hep-th/1206.0708v3 (2012).
- [83] S. Abdolrahimi, C. Cattoën, D.N. Page, S. Yaghoobpour-Tari, «Spectral methods in general relativity and large Randall-Sundrum II black holes», **JCAP**, том 06, стр. 039 (2013).
- [84] Уилл К., «Теория и эксперимент в гравитационной физике» (М., Энергоатомиздат, 1985).
- [85] K.S. Thorn, C.M. Will, «Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. I. Foundations», **Astrophys. J.**, том 163, стр. 595 (1971).
- [86] C.M. Will, «Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. II. Parametrized Post-Newtonian hydrodynamics, and the Nordtvedt effect», **Astrophys. J.**, том 163, стр. 611 (1971).
- [87] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., «Гравитация», том 3 (М., Мир, 1997).
- [88] K.Jr. Nordtvedt, «Equivalence principle for massive bodies. 1. Phenomenology», **Phys. Rev.**, том 169, стр. 1014 (1968).
- [89] Шацкий А.А., «Образ неба другой вселенной, наблюдаемый через горловину кротовой норы», **УФН**, том 179, стр. 861 (2009).
- [90] Алексеев С.О, Ранну К.А. Гареева Д.В., «Возможные наблюдательные проявления кротовых нор в теории Бранса-Дикке», **ЖЭТФ**, том 140, стр. 722 (2011).
- [91] S.O. Alexeyev, A. Barrau, K.A. Rannu, «Internal structure of a Maxwell-Gauss-Bonnet black hole», **Phys. Rev. D.**, том 79, стр. 067503 (2009).
- [92] R.A. Brandt, F. Neri, «Stability analysis for singular non-Abelian magnetic monopoles», **Nucl. Phys. B**, том 161, стр. 253 (1979).

- [93] P.A.M. Dirac, «Quantised singularities in the electromagnetic field», **Proc. Roy. Soc. A**, том 133, стр. 60 (1931).
- [94] Чандрасекар С., «Математическая теория черных дыр», том 2 (М., Мир, 1986).
- [95] Н. Кояма, S.A Hayward, «Construction and enlargement of traversable wormholes from Schwarzschild black holes», **Phys. Rev. D**, том 70, стр. 084001 (2004).
- [96] Алексеев С.О, Ранну К.А., Дядина П.И, «Экспериментальные проверки расширенных теорий гравитации», Труды международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2013», **УЗФФ**, том 4, стр. 134801 (2013).
- [97] К.А. Rannu, S.O. Alexeyev, P.I. Dyadina, «PPN Formalism in Higher Order Curvature Gravity. Spherically Symmetric Case», **Proceedings of The 17th International Seminar «QUARKS-2012»**, том 2, стр. 217 (2013).
- [98] P.I. Dyadina, K.A. Rannu, S.O. Alexeyev, «Post-newtonian limits for lovelock gravity with scalar», **Proceedings of The International Workshop and School «Black and Dark Topics in Modern Cosmology and Astrophysics»**, стр. 23 (2013).
- [99] K.A. Rannu, S.O. Alexeyev, P.I. Dyadina, «Post-newtonian limits for brane-world model», **Proceedings of The International Workshop and School «Black and Dark Topics in Modern Cosmology and Astrophysics»**, стр. 39 (2013).
- [100] D.J. Kapner, T.S. Cook, E.G. Adelberger, J.H. Gundlach, B.R. Heckel, C.D. Hoyle, H.E. Swanson «Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale» **Phys. Rev. Lett.**, том 98, стр. 021101 (2007).
- [101] K. Maeda, «Stability and attractor in a higher-dimensional cosmology. I» **Class. Quantum Grav.** **3**, том 233, стр. 651 (1986).

- [102] R. Maartens, «Cosmological dynamics on the brane», **Phys. Rev. D**, том 62, стр. 084023 (2000).
- [103] A. Chamblin, H.S. Reall, H. Shinkai, T. Shiromizu, «Charged brane-world black holes», **Phys. Rev. D**, том 63, 064015 (2001).
- [104] T. Damour, N. Deruelle, «General relativistic celestial mechanics of binary systems. I. The post-Newtonian motion», **Ann. Inst. H. Poincaré (Phys. Théor)**, том 43, 107 (1985).
- [105] K.G. Arun, L. Blanchet, B.R. Iyer, M.S.S. Qusailah, «Tail effects in the third post-Newtonian gravitational wave energy flux of compact binaries in quasi-elliptical orbits», **Phys. Rev. D**, том 77, стр. 064034 (2008).
- [106] G. Faye, S. Marsat, L. Blanchet, B.R. Iyer, «Post-Newtonian prediction for the (2,2) mode of the gravitational wave emitted by compact binaries», gr-qc/1210.2339v1 (2012).
- [107] S. Marsat, A. Bohe, L. Blanchet, A. Buonanno, «Next-to-leading tail-induced spin-orbit effects in the gravitational radiation flux of compact binaries», gr-qc/1307.6793v2 (2013).
- [108] L. Flamm, «Beiträge zur Einsteinschen gravitationstheorie», **Phys. Z.**, том 17, стр. 448 (1916).
- [109] A. Einstein, N. Rosen, «The particle problem in the general theory of relativity», **Phys. Rev.**, том 48, 73 (1935).
- [110] Бронников К.А., «Мост между мирами», **Вокруг света**, том 5, стр. 2764 (2004).
- [111] J. Wheeler, «Geons», **Phys. Rev.**, том 97, стр. 511 (1955).
- [112] C.W. Misner, J.A. Wheeler, «Classical physics as geometry: Gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space», **Ann. Phys.**, том 2, стр. 525 (1957).
- [113] J.A. Wheeler, «On the nature of quantum geometrodynamics», **Ann. Phys.**, том 2, стр. 604 (1957).

- [114] H.G. Ellis, «Ether flow through a drainhole – a particle model in general relativity», **J. Math. Phys.**, том 14, стр. 104 (1973).
- [115] K.A. Bronnikov, «Scalar-tensor theory and scalar charge», **Acta Phys. Polon. B**, том 4, стр. 251 (1973).
- [116] G. Clement, «A class of wormhole solutions to higher-dimensional general relativity», **Gen. Rel. Grav.**, том 16, стр. 131 (1984).
- [117] G. Clement, «Axisymmetric regular multiwormhole solutions in five-dimensional general relativity», **Gen. Rel. Grav.**, том 16, стр. 477 (1984).
- [118] G. Clement, «Massive from massless regular solutions in five-dimensional general relativity», **Gen. Rel. Grav.**, том 16, стр. 491 (1984).
- [119] B. Bhawal, S. Kar, «Lorentzian wormholes in Einstein-Gauss-Bonnet theory», **Phys. Rev. D**, том 46, стр. 2464 (1992).
- [120] G. Dotti, J. Oliva, R. Troncoso, «Static wormhole solution for higher-dimensional gravity in vacuum», **Phys. Rev. D**, том 75, стр. 024002 (2007).
- [121] L.A. Anchordoqui, S.E.P. Bergliaffa, «Wormhole-surgery and cosmology on the brane: the world is not enough», **Phys. Rev. D**, том 62, 067502 (2000).
- [122] K.A. Bronnikov, S.-W. Kim, «Possible wormholes in a brane world», **Phys. Rev. D**, том 67, стр. 064027 (2003).
- [123] F.S.N. Lobo, «General class of braneworld wormholes», **Phys. Rev. D**, том 75, стр. 064027 (2007).
- [124] R. Garattini, F.S.N. Lobo, «Self-sustained phantom wormholes in semi-classical gravity», **Class. Quant. Grav.**, том 24, стр. 2401 (2007).
- [125] S. Sushkov, «Wormholes supported by a phantom energy», **Phys. Rev. D**, том 71, стр. 043520 (2005).

- [126] C.M. Urry, P. Padovani, «Unified schemes for radio-loud active galactic nuclei», **Publ. Astron. Soc. of the Pacific**, том 107, стр. 803 (1995).
- [127] T. Harko, Z. Kovacs, F.S.N. Lobo, «Electromagnetic signatures of thin accretion disks in wormhole geometries», **Phys. Rev. D**, том 78, стр. 084005 (2008).
- [128] T. Harko, Z. Kovacs, F.S.N. Lobo, «Thin accretion disks in stationary axisymmetric wormhole spacetimes», **Phys. Rev. D**, том 79, стр. 064001 (2009).
- [129] Новиков И.Д., Кардашев Н.С., Шацкий А.А., «Многокомпонентная Вселенная и астрофизика кротовых нор», **УФН**, том 177, стр. 1017 (2007).
- [130] Шацкий А.А., Новиков И.Д., Кардашев Н.С., «Динамическая модель кротовой норы и модель Мультивселенной», **УФН**, том 178, стр. 483 (2008).