

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

имени П. К. ШТЕРНБЕРГА

ЧАЗОВ Вадим Викторович

**РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ
ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА
ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЙ
ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ**

Специальность 01.03.01. — *Астрометрия и небесная механика*

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена в отделе астрометрии и службы времени Государственного астрономического института имени П.К. Штернберга Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Московского авиационного института
(Национального исследовательского университета)

МАРКОВ Юрий Георгиевич;

доктор технических наук, профессор,
заведующий отделом

Института проблем информатики РАН

СИНИЦЫН Игорь Николаевич;

доктор технических наук, профессор
Московского государственного университета
геодезии и картографии

ЯШКИН Станислав Николаевич.

Ведущая организация

Институт астрономии Российской академии наук.

Защита состоится **4 апреля 2013 года в 14 часов** на заседании Диссертационного совета Д501.001.86, созданного на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Адрес: 119991, Москва, Университетский проспект, дом 13, ГАИШ МГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, дом 27, Фундаментальная библиотека.

Автореферат разослан **4 марта 2013 года**.

Учёный секретарь

Диссертационного совета

доктор физико-математических наук

С.О. Алексеев.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В диссертации представлена **новая численно-аналитическая теория** движения искусственных спутников Земли (ИСЗ). Теория была применена для определения параметров движения космических объектов и получения достоверных оценок геодинамических параметров на основе наблюдений.

Численно-аналитический подход позволяет использовать преимущества как аналитических методов, так и метода численного интегрирования уравнений движения.

Классическая форма аналитического способа вычисления положений небесных объектов заключается в следующей процедуре: на вековые изменения параметров орбиты накладываются долгопериодические неравенства и короткопериодические возмущения. Преимуществом аналитического метода является возможность увеличения скорости расчёта положений объекта при условии существенных ограничений на точность прогноза.

Суть метода численного интегрирования: на коротких интервалах времени параметры движения объекта аппроксимируют полиномами. Коэффициенты полиномов определяют путём вычисления значений правых частей дифференциальных уравнений и разностей этих значений в специальных точках внутри короткого интервала – одного шага интегрирования. Преимуществом численных методов является высокая точность вычислений. Малый шаг интегрирования, обеспечивая хорошую точность, требует значительных расходов вычислительного времени.

Численно-аналитический подход объединяет оба метода: часть неравенств, имеющих “короткий” период, определяется аналитически, а долгопериодические, резонансные и вековые слагаемые возмущающей функции составляют эволюционный гамильтониан – основу численного интегрирования “осреднённых” уравнений движения. Шаг интегрирования “осреднённых” уравнений может быть выбран достаточно большим.

Запуск Первого искусственного спутника Земли вызвал интерес учёных к задаче определения орбит объектов, возмущаемых аномалиями геопотенциала, притяжением Луны и Солнца, потенциалом, обусловленным приливами упругой Земли, сопротивлением атмосферы и световым давлением.

Профессором Е.П.Аксёновым была построена аналитическая теория движения ИСЗ на основе решения *обобщённой задачи двух неподвижных центров*. Результаты представлены в монографии [1].

Было открыто и получило признание обобщение одного из методов теории возмущений – метода *канонических преобразований* [5].

Тогда же был успешно применён *численно-аналитический* метод расчёта спутниковых орбит. Важные результаты в этом направлении получены профессором М.Л.Лидовым и его учениками, некоторые итоги подведены в обзорном докладе [3], там же намечены перспективы исследований.

Тем не менее, в наши дни все центры обработки высокоточных наблюдений ИСЗ проводят расчёты с помощью программ, в которых прогноз положений объектов выполняется алгоритмом *численного интегрирования* дифференциальных уравнений движения [9].

Во многих научных исследованиях оба метода, *аналитический и численный*, гармонично дополняют друг друга. Сравнение способов вычислений позволяет выделить круг задач, в рамках которых удобно применять тот или иной метод. В этой связи решаемая в предлагаемой диссертации проблема построения моделей поступательного движения космических объектов в численно-аналитической форме является **актуальной**.

В качестве **исходных материалов** предлагаемого исследования были использованы:

- рекомендации Международного астрономического союза,
- стандартные соглашения Международной службы вращения Земли [6],
- лазерные и позиционные наблюдения космических объектов [7],
- база данных о точных положениях навигационных спутников [8],
- база данных об элементах орбит объектов [10].

Цель работы

Целью исследований является решение следующих задач:

вывод формул для вычисления параметров промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров, с точностью, ограниченной только возможностями компьютера;

разработка метода преобразования возмущающей функции на основе параметров промежуточной орбиты;

дифференцирование и интегрирование слагаемых возмущающей функции;

составление и численное интегрирование “осреднённых” уравнений движения и учёт короткопериодических неравенств с использованием “несингулярных” элементов орбиты;

обработка высокоточных лазерных измерений топоцентрических дальностей до спутников Лагеос и Лагеос-2 на длительных интервалах времени и оценка значений геодинамических параметров;

разработка методики предсказания ситуаций сближения ИСЗ;

фильтрация позиционных наблюдений и оценка значения отношения средней площади поверхности к массе спутника.

Стандартные соглашения Международной службы вращения Земли содержат рекомендации по обработке наблюдений искусственных спутников Земли с помощью метода численного интегрирования. Разработка методики аналитического решения задачи с учётом всех рекомендаций астрономических организаций также является **целью** исследования.

В тексте диссертации термин *алгоритм* объединяет несколько понятий: это и связанные между собой формулы и соотношения, и последовательность действий, и реализация процедуры вычислений на компьютере. Совокупность *алгоритмов*, предназначенная для решения поставленной задачи, в тексте называется “*программным обеспечением*” или “*пакетом программ*”.

Научная новизна

Научная новизна работы заключается:

в совокупности формул и соотношений для вычислений в рамках обобщённой задачи двух неподвижных центров с максимально возможной методической точностью;

в методе преобразования возмущающей функции задачи, заключающейся в построении всё более сложных конструкций на основе простых начальных соотношений;

в способе вычислений, позволяющим учитывать возмущающее действие факторов различного происхождения одним набором формул;

в совокупности алгоритмов построения моделей движения космических объектов с помощью численно-аналитического метода;

в методике расчёта ситуаций опасных сближений объектов.

Достоверность результатов

Достоверность полученных результатов подтверждается примерами обработки наблюдений различных объектов, сравнением с данными, предоставляемыми Международной службой вращения Земли, и сопоставлением с параметрами движения ИСЗ, публикуемыми в Интернете.

Практическое значение

Практическая ценность диссертации определяется тем, что:

предлагаемые алгоритмы численно-аналитического метода построения моделей движения справедливы в широком классе элементов орбит ИСЗ и позволяют выполнять оценку параметров движения объектов и геодинамических параметров на основе наблюдений;

алгоритмы применяются для вычисления целеуказаний на Звенигородской научной базе ИНАСАН и филиале ИНАСАН на пике Терскол;

алгоритмы использовались для планирования космических экспериментов и предварительной редукции результатов наблюдений спутника Метеор-3М сотрудниками Центральной аэрологической обсерватории ГМЦ;

было подготовлено учебное пособие “Модель движения ИСЗ”, являющееся реконструкцией и расширением монографии профессора Е.П.Аксёнова [1].

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения.

1. Впервые получена полная совокупность формул для вычислений параметров промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров, с максимально возможной точностью. Предлагаемые соотношения используют неявную зависимость между переменными. Предыдущие результаты других авторов были представлены в виде формул, в которых зависимости между позиционными элементами и постоянными интегрирования и зависимости между наборами угловых переменных являются явными. Точность таких соотношений была ограничена четвёртым порядком относительно сжатия Земли.
2. Впервые показано, что возмущающие функции различного происхождения зависят от пяти “начальных” соотношений между координатами спутника. “Начальные” соотношения с точностью, ограниченной только возможностями компьютера, были представлены в виде сумм слагаемых, зависящих от параметров промежуточной орбиты. Найден рекуррентный способ конструирования общей возмущающей функции на основе “начальных” соотношений. В предыдущих исследованиях других авторов разложения в тригонометрические ряды были получены отдельно для каждого из возмущений, обусловленных геопотенциалом, притяжением Луны и Солнца, приливными явлениями и давлением солнечного излучения.

3. Впервые разработан метод аналитического интегрирования слагаемых возмущающей функции, зависящих от позиционных и угловых переменных промежуточной орбиты. Представлен способ вычисления правых частей при численном интегрировании “осреднённых” уравнений движения в “несингулярных” элементах орбиты. Методы используют алгоритмы точного вычисления как параметров промежуточной орбиты, так и частных производных от любых параметров промежуточной орбиты по позиционным и угловым переменным, а также по каноническим переменным действие-угол.
4. С помощью тензорного преобразования получены приближённые формулы связи между координатами небесных тел Солнечной системы, полученными при использовании “изотропных” координатных условий с одной стороны, и “гармонических” координатных условий с другой стороны. Общий вывод состоит в следующей рекомендации: в прикладных задачах достаточно записать релятивистские уравнения движения искусственного спутника Земли на основе “гармонических” координатных условий, а при вычислении возмущающих сил использовать современные численные эфемериды Солнца, Луны и планет, полученные в метрике с “изотропными” координатными условиями.
5. Выражения для учёта возмущений от приливов упругой Земли и океанических приливов, записанные во вращающейся системе отсчёта и рекомендованные Международной службой вращения Земли, преобразованы к системе отсчёта, связанной с истинным экватором даты.
6. В результате анализа массива высокоточных лазерных измерений топцентрических дальностей до ИСЗ Лагеос и Лагеос-2 получены оценки параметров вращения Земли и скоростей смещения измерительных пунктов в Земной системе отсчёта. Для некоторых объектов на основе наблюдений определены оценки отношения средней площади поверхности к массе спутника.

7. Разработана методика предсказания ситуаций сближения объектов искусственного происхождения в околоземном пространстве. Методика была применена на этапе проектирования параметров орбиты метеорологического “стационарного” спутника.

Публикации в журналах и сборниках трудов

По теме диссертации **опубликовано 13 статей**, в совместных статьях вклад каждого из авторов является **равным**.

1. Герасимов И.А., Чазов В.В., Рыхлова Л.В., Тагаева Д.А. *Построение теории движения тел Солнечной системы, основанной на универсальном методе вычисления возмущающей функции.* // **Астрономический вестник**. 2000. Т.34. Номер 6. С.559-566.
2. Герасимов И.А., Чазов В.В., Тагаева Д.А. *Применение универсального метода вычисления возмущающей функции в численно-аналитической теории движения малых планет.* // **Вестник Московского университета**. Серия 3. Физика. Астрономия. 2000. Номер 3. С.55-57.
3. Бахтигараев Н.С., Чазов В.В. *Информационное обеспечение космических экспериментов на основе численно-аналитической теории движения искусственных спутников Земли.* // **Космические исследования**. 2005. Т.43. Номер 5. С.386-389.
4. Чазов В.В., Герасимов И.А., Соловьёва О.Д. *Изотропные и гармонические координатные условия в пространстве-времени Солнечной системы.* // **Вестник Московского университета**. Серия 3. Физика. Астрономия. 2006. Номер 2. С.66-68.
5. Клишин А.Ф., Чазов В.В., Бахтигараев Н.С., Костюк Н.Д. *Об оценке уровня техногенной опасности в зоне размещения КА “Электро-Л”.* // **Вопросы радиоэлектроники**. Серия “Радиолокационная техника”. 2007. Выпуск 2. С.40-46.

6. Чазов В.В., Бахтигараев Н.С., Костюк Н.Д. *Наблюдения спутника “Молния 3-39” в Звенигородской обсерватории ИНАСАН и определение времени падения.* // **Вестник СибГАУ**. 2011. Выпуск 6(39). С.183-185.
7. Бахтигараев Н.С., Лёвкина П.А., Сергеев А.В., Чазов В.В. *Наблюдения неизвестного фрагмента космического мусора в Терскольской обсерватории.* // **Вестник СибГАУ**. 2011. Выпуск 6(39). С.186-189.
8. Гаипова А.Н., Чазов В.В. *Комплекс программ Лента.* // **Измерительная техника**. 1991. Т.6. С.30-30.
9. Герасимов И.А., Чазов В.В. *Переменные действие-угол в обобщённой задаче двух неподвижных центров.* // **Труды ГАИШ**. 1988. Т.59. С.46-52.
10. Чазов В.В. *Основные алгоритмы численно-аналитической теории движения искусственных спутников Земли.* // **Труды ГАИШ**. 2000. Т.68. С.5-20.
11. Чазов В.В. *Создание численно-аналитической теории движения небесных тел.* // **Труды конференции “Околосемная астрономия – 2003”**, Терскол. 2003. С.171-175.
12. Бахтигараев Н.С., Чазов В.В. *Компьютерное моделирование условий наблюдений небесных тел.* // **Кинематика и физика небесных тел**. 2003. Номер 4. С.105-107.
13. Бахтигараев Н.С., Чазов В.В. *Моделирование движения космических аппаратов с учётом рекомендаций Международного астрономического союза.* // **Труды конференции “Околосемная астрономия – 2005”**, Казань. 2005. С.281-285.

Апробация результатов

Основные результаты, полученные в диссертации, **доклаживались** автором и соавторами на семинарах и конференциях:

- Координационный совет по небесной механике и Координационный совет по астрометрии ГАИШ МГУ ;
- семинар ИНАСАН “Проблемы происхождения и эволюции кометно-астероидного вещества в Солнечной системе и астероидная опасность” ;
- конференция “Астрометрия, геодинамика и небесная механика на пороге XXI века”, Санкт-Петербург, 2000 год ; тезисы доклада “О новой теории движения тел Солнечной системы, основанной на универсальном методе вычисления пертурбационной функции” опубликованы в сборнике на стр.249 (совместно с И.А.Герасимовым и Д.А.Тагаевой) ;
- конференция “АСТРОЭКО-2002: Состояние и перспективы международных исследований по наблюдательной астрономии, экологии и экстремальной физиологии в Приэльбрусье”, Терскол, 2002 год ;
- конференция “Околоземная астрономия – 2003”, Терскол, 2003 год ;
- Всероссийская астрономическая конференция “Горизонты Вселенной”, Москва, 2004 год ; тезисы доклада “104 года стандарта вычислений астрометрии” опубликованы в сборнике “Труды ГАИШ”, 2004, том 75, стр.216 (совместно с И.А.Герасимовым) ;
- конференция “Околоземная астрономия – 2005”, Казань, 2005 год .

Структура диссертации

В изложении на бумаге вся завершённая работа занимает три главы и 210 страниц с предисловием, послесловием и приложением. Текст содержит 30 таблиц, 34 рисунка и список литературы из 208 наименований.

Содержание работы

В первом разделе диссертации выполнена **постановка задачи**.

Уделено внимание рекомендациям Международного астрономического союза об использовании числовых значений астрономических постоянных и о системах отсчёта пространства-времени и рекомендациям Международной службы вращения Земли по составу ускорений, возмущающих движение спутника. Учёт упомянутых рекомендаций необходим для того, чтобы сделать результаты обработки различных экспериментов сопоставимыми.

Подчёркивается необходимость использования *неинерциальной системы* отсчёта, связанной с истинным экватором даты.

Величина угла наклона спутника, вычисляемая относительно неподвижного экватора геоцентрической небесной опорной системы отсчёта, имеет *вековую* составляющую. Этот эффект, являющийся следствием прецессии оси вращения Земли, не влияет на алгоритмы численного интегрирования, но создаёт дополнительные трудности для аналитических исследований.

В аналитических моделях движения искусственных спутников Земли используют *неинерциальную систему отсчёта*. В предлагаемой работе в качестве основной плоскости выбрана плоскость истинного экватора даты. Начальной точкой является истинная точка весеннего равноденствия.

Выбранная неинерциальная система вращается относительно небесной опорной системы отсчёта с угловой скоростью $\vec{\Omega}(t)$. С точностью до первых степеней малых величин компоненты вектора $\vec{\Omega}(t)$ равны

$$\begin{aligned}\Omega_x(t) &= -\frac{d}{dt}(\Delta\varepsilon), \\ \Omega_y(t) &= +\dot{\theta}_A + \sin\varepsilon_A \frac{d}{dt}(\Delta\psi), \\ \Omega_z(t) &= -\dot{z}_A - \dot{\zeta}_A - \cos\varepsilon_A \frac{d}{dt}(\Delta\psi).\end{aligned}\tag{1}$$

При этих ограничениях уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = +\frac{\partial K}{\partial \vec{p}}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \vec{r}},\tag{2}$$

где \vec{r} – вектор в подвижной системе отсчёта, $\vec{p} = \dot{\vec{r}} + [\vec{\Omega} \times \vec{r}]$ – обобщённый импульс, K – гамильтониан задачи,

$$K = \frac{1}{2} |\vec{p}|^2 - W - \vec{\Omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}] - R. \quad (3)$$

W – силовая функция обобщённой задачи двух неподвижных центров, R – возмущающая функция второго порядка малости относительно сжатия.

Канонические уравнения в переменных \vec{r} и \vec{p} были преобразованы в канонические уравнения с использованием канонических элементов L, G, H, l, g, h промежуточной орбиты, построенной на основе решения обобщённой задачи двух неподвижных центров:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial H}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $K = -\alpha_1 + K_2$ – гамильтониан системы, $K_2 = \vec{\Omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}] + R$ – возмущающий гамильтониан второго порядка малости относительно сжатия.

В случае отсутствия возмущений $K_2 = 0$, и система имеет решение

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t_0), & l(t) &= \dot{l}(t - t_0) + l_0(t_0), \\ G(t) &= G_0(t_0), & g(t) &= \dot{g}(t - t_0) + g_0(t_0), \\ H(t) &= H_0(t_0), & h(t) &= \dot{h}(t - t_0) + h_0(t_0), \end{aligned} \quad (5)$$

причём скорости изменения угловых переменных

$$\dot{l} = \frac{n_0}{1 - \lambda}, \quad \dot{g} = \frac{n_0 \nu}{1 - \lambda}, \quad \dot{h} = \frac{n_0 \mu}{1 - \lambda}, \quad (6)$$

являются постоянными величинами.

Отметим следующий факт: необходимо знать только *частные производные* от гамильтониана K по каноническим элементам, представлять же гамильтониан в виде явной функции переменных действия L, G, H нет никакой необходимости.

Приближённое решение уравнений может быть получено с помощью метода канонических преобразований.

Выполним переход от оскулирующих элементов L, G, H, l, g, h к новым переменным L', G', H', l', g', h' . Функцию преобразования и вековой гамильтониан обозначим, соответственно, S_2 и K_2^* . Эти функции, как и возмущающий гамильтониан K_2 , имеют *второй порядок* малости относительно сжатия.

В новом гамильтониане $K_2^*(t, L', G', H', l', g', h')$ оставим те слагаемые возмущающей функции K_2 , период изменения которых превышает несколько суток. Функцию преобразования S_2 найдём по формуле

$$S_2 = \int (K_2 - K_2^*) dt. \quad (7)$$

С точностью до второго порядка относительно малого параметра, сжатия Земли, выражения $S_2, K_2, K_0^* = -\alpha_1, K_2^*$ можно считать функциями как оскулирующих элементов L, G, H, l, g, h , так и новых переменных L', G', H', l', g', h' .

Новые переменные могут быть названы “средними” или “сглаженными” элементами орбиты. В изменениях “сглаженных” параметров отсутствуют вариации с малым периодом. Между двумя наборами переменных с точностью до *второго порядка малости* существует простая связь:

$$\begin{aligned} L &= L' + \frac{\partial S_2}{\partial l'}, & l &= l' - \frac{\partial S_2}{\partial L'}, \\ G &= G' + \frac{\partial S_2}{\partial g'}, & g &= g' - \frac{\partial S_2}{\partial G'}, \\ H &= H' + \frac{\partial S_2}{\partial h'}, & h &= h' - \frac{\partial S_2}{\partial H'}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения движения, записанные в новых переменных, назовём “осреднёнными” уравнениями. Они сохраняют каноническую форму и имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dL'}{dt} &= +\frac{\partial K_2^*}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= +\frac{\partial \alpha_1}{\partial L'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial L'}, \\ \frac{dG'}{dt} &= +\frac{\partial K_2^*}{\partial g'}, & \frac{dg'}{dt} &= +\frac{\partial \alpha_1}{\partial G'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial G'}, \\ \frac{dH'}{dt} &= +\frac{\partial K_2^*}{\partial h'}, & \frac{dh'}{dt} &= +\frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'}. \end{aligned} \quad (9)$$

Материал **второго раздела** составляют **основные алгоритмы** модели движения ИСЗ в численно-аналитической форме.

Представлены формулы, позволяющие вычислять промежуточную орбиту, основанную на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров, с точностью, ограниченной только возможностями компьютера.

Разработаны алгоритм вычисления частных производных по каноническим элементам промежуточной орбиты и алгоритм вычисления частных производных высших порядков от любых параметров движения по позиционным параметрам. Точность вычислений ограничена только возможностями компьютера. Присутствие частных производных высших порядков позволяет сохранить информацию о том, как тот или иной параметр был вычислен.

Для описания движения искусственных спутников приняты во внимание возмущения, обусловленные гравитационным полем Земли, притяжением Луны и Солнца, приливными деформациями упругой Земли, океаническими приливами и давлением солнечной радиации.

Показано, что возмущающие функции, обусловленные различными эффектами, зависят от пяти “начальных” функций координат объекта:

$$\frac{r}{r_0}, \frac{r_0}{r}, \frac{z}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}.$$

Далее выражения для “начальных” функций записаны при помощи соотношений промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров.

Вместо процедуры разложения возмущающей функции с точностью до второго или третьего порядка относительно малого параметра предложен алгоритм преобразования возмущающего гамильтониана в сумму “элементарных” слагаемых.

Пусть

a, e, \bar{e}, s, α – параметры промежуточной орбиты спутника,

$\tilde{\varphi}, \psi, E, \tilde{\Omega}$ – угловые переменные промежуточной орбиты,

S_{\oplus} – гринвичское истинное звёздное время,

$l_M, l'_S, F_M, D, \Omega_M$ – фундаментальные аргументы.

Пусть известны также приближённые *численные значения* позиционных параметров орбиты объекта a_0 , e_0 , δ_0 и знак параметра α_3 , зависящий от величины угла наклона орбиты.

С помощью значений a_0 , e_0 , δ_0 образуем одномерные массивы, содержащие численные значения как параметров промежуточной орбиты, так и частных производных высших порядков по параметрам a , e , δ .

Определим *элементарное слагаемое* как структуру вида

$$A(a_0, e_0, \delta_0) \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \bar{e}^{j_3} \left(\frac{1}{1-e\bar{e}}\right)^{j_4} s^{j_5} \alpha^{j_6} \cdot \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\vartheta = k_1\tilde{\varphi} + k_2\psi + k_3E + k_4\tilde{\Omega} + k_5S_{\oplus} + k_6l_M + k_7l'_S + k_8F_M + k_9D + k_{10}\Omega_M, \quad (11)$$

где $A(a_0, e_0, \delta_0)$ – одномерный массив действительных чисел, полученный на основе начальных значений a_0 , e_0 , δ_0 ;

показатель степени j_1 может принимать положительные и отрицательные целые значения и нуль и удовлетворяет условию $j_1^{(min)} \leq j_1 \leq j_1^{(max)}$;

показатели степени j_2, j_3, j_4, j_5, j_6 могут принимать только положительные целые значения и нуль и удовлетворяют условиям $0 \leq j_k \leq j_k^{(max)}$;

коэффициенты $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, k_{10}$ принимают любые положительные и отрицательные целые значения и нуль.

Отличительной чертой алгоритма является способ конструирования возмущающей функции на основе “начальных” функций координат. В предлагаемом алгоритме формулы промежуточного движения учитываются с максимально возможной точностью.

Разработаны рекуррентный алгоритм интегрирования элементарных слагаемых возмущающей функции и алгоритм выделения долгопериодических, резонансных и вековых слагаемых.

Выполнено преобразование осреднённых уравнений движения в систему “несингулярных” элементов орбиты:

$$a', \quad l' + g' + h', \quad e' \cos(g' + h'), \quad e' \sin(g' + h'), \quad \delta' \cos h', \quad \delta' \sin h'. \quad (12)$$

Штрихи означают, что все величины являются “средними”.

Преобразуем “осреднённые” уравнения к виду

$$\begin{aligned}
\frac{d a'}{d t} &= + \frac{\partial a'}{\partial L'} \frac{\partial K_2^*}{\partial l'} + \frac{\partial a'}{\partial G'} \frac{\partial K_2^*}{\partial g'} + \frac{\partial a'}{\partial H'} \frac{\partial K_2^*}{\partial h'}, \\
\frac{d (l' + g' + h')}{d t} &= + \frac{\partial \alpha_1}{\partial L'} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial G'} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} \\
&\quad - \frac{\partial K_2^*}{\partial L'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial G'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'}, \\
\frac{d [e' \cos(g' + h')]}{d t} &= + \frac{d e'}{d t} \cos(g' + h') \\
&\quad - e' \sin(g' + h') \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial G'} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial G'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'} \right), \quad (13) \\
\frac{d [e' \sin(g' + h')]}{d t} &= + \frac{d e'}{d t} \sin(g' + h') \\
&\quad + e' \cos(g' + h') \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial G'} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial G'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'} \right), \\
\frac{d [\delta' \cos h']}{d t} &= + \frac{d \delta'}{d t} \cos h' - \delta' \sin h' \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'} \right), \\
\frac{d [\delta' \sin h']}{d t} &= + \frac{d \delta'}{d t} \sin h' + \delta' \cos h' \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'} \right).
\end{aligned}$$

Производные от параметров e' и δ' по времени t равны

$$\begin{aligned}
\frac{d e'}{d t} &= + \frac{1}{2 e'} \left(\frac{\partial e'^2}{\partial L'} \frac{\partial K_2^*}{\partial l'} + \frac{\partial e'^2}{\partial G'} \frac{\partial K_2^*}{\partial g'} + \frac{\partial e'^2}{\partial H'} \frac{\partial K_2^*}{\partial h'} \right), \\
\frac{d \delta'}{d t} &= + \frac{1}{2 \delta'} \left(\frac{\partial \delta'^2}{\partial L'} \frac{\partial K_2^*}{\partial l'} + \frac{\partial \delta'^2}{\partial G'} \frac{\partial K_2^*}{\partial g'} + \frac{\partial \delta'^2}{\partial H'} \frac{\partial K_2^*}{\partial h'} \right). \quad (14)
\end{aligned}$$

В произвольный момент времени надо знать *только числовые значения правых частей* “осреднённых” уравнений в несингулярных переменных, поскольку эти уравнения будут проинтегрированы численным образом.

Вычисления заключаются в следующих действиях.

Для заданных приближённых *численных значений* позиционных параметров орбиты a_0 , e_0 , δ_0 и знака параметра α_3 найдём слагаемые возмущающей функции и получим ряды для функции преобразования S_2 и “осреднённого” гамильтониана K_2^* .

Пусть в начальный момент времени t_0 известны численные значения “средних” элементов орбиты $a'(t_0)$, $e'(t_0)$, $\delta'(t_0)$, $l'(t_0)$, $g'(t_0)$, $h'(t_0)$.

Вычислим числовые значения “несингулярных” переменных (12) в момент времени t_0 . С такими начальными условиями на заданном интервале времени выполним численное интегрирование “осреднённых” уравнений (13).

Для преобразований от системы сглаженных “несингулярных” элементов к “средним” параметрам орбиты $e'(t)$, $\delta'(t)$, $l'(t)$, $g'(t)$, $h'(t)$ в произвольный момент времени t будем использовать формулы

$$\begin{aligned} e'(t) &= \sqrt{[e' \cos(g' + h')]^2 + [e' \sin(g' + h')]^2}, \\ \delta'(t) &= \sqrt{(\delta' \cos h')^2 + (\delta' \sin h')^2}, \\ \cos(g'(t) + h'(t)) &= \frac{e' \cos(g' + h')}{e'(t)}, \quad \cos h'(t) = \frac{\delta' \cos h'}{\delta'(t)}, \\ \sin(g'(t) + h'(t)) &= \frac{e' \sin(g' + h')}{e'(t)}, \quad \sin h'(t) = \frac{\delta' \sin h'}{\delta'(t)}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$l'(t) = (l' + g' + h') - (g'(t) + h'(t)), \quad g'(t) = (g'(t) + h'(t)) - h'(t).$$

На основе “средних” параметров орбиты на любой момент времени определим числовые значения оскулирующих “несингулярных” элементов (8):

$$a, \quad l + g + h, \quad e \cos(g + h), \quad e \sin(g + h), \quad \delta \cos h, \quad \delta \sin h.$$

Оскулирующие элементы промежуточной орбиты e , δ , l , g , h вычислим из соотношений, аналогичных формулам (15).

Далее с помощью формул, основанных на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров, и числовых значений оскулирующих элементов промежуточной орбиты получим мгновенные значения прямоугольных координат и скоростей объекта.

В ходе построения численно-аналитической модели движения сделано несколько упрощающих предположений:

- аномальная часть геопотенциала и разложение потенциала, обусловленного притяжением Луны и Солнца, были ограничены по порядку и степени сферических функций;

- были использованы приближённые тригонометрические ряды для представления функций от координат возмущающих тел;
- при построении возмущающей функции в “буквенном” виде ограничена величина максимальной степени позиционных параметров;
- при интегрировании предполагается, что звёздное время и фундаментальные аргументы являются линейными функциями времени;
- алгоритм аналитического интегрирования не учитывает короткопериодические вариации позиционных параметров.

Влияние части из этих упрощений на методическую точность предлагаемой модели уменьшено с помощью специальных алгоритмов, влияние же остальных можно будет оценить в процессе обработки наблюдений искусственных спутников Земли.

Далее выполнены дополнительные исследования.

Современная теория движения планет, Луны и Солнца, построенная в барицентрической системе отсчёта, получена численным интегрированием релятивистских уравнений движения, записанных в постньютоновском приближении с помощью изотропных координатных условий.

Международный астрономический союз, принимая во внимание факт, что многие работы по теории относительности выполнены при использовании “гармонических” координат, оказавшихся полезными для приложений, рекомендует выбор гармонических координатных условий.

С помощью тензорного преобразования

$$g_{\alpha\beta}(x^0, x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g'_{\mu\nu}(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \quad (16)$$

были выведены формулы связи между координатами x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 , удовлетворяющими “изотропным” координатным условиям, и “гармоническими” координатами x^0, x^1, x^2, x^3 .

Расчёты показали, что отличия в численных значениях координат очень малы. Для пространственно-временной траектории Земли, например, они не

превосходят 3 метра на интервале 100 лет.

Общий вывод состоит в следующей рекомендации. В прикладных задачах достаточно записать релятивистские уравнения движения пробной частицы на основе “гармонических” координатных условий, а при вычислении возмущающих сил использовать “изотропные” координаты Солнца, Луны и планет.

Выражения для учёта возмущений от приливов упругой Земли и океанических приливов, записанные во *вращающейся системе отсчёта* и рекомендованные Международной службой вращения Земли (геофизический подход), были *преобразованы* к системе отсчёта, связанной с истинным экватором даты (астрономический подход).

Для согласования численной и аналитической моделей возмущающих сил, обусловленных действием Луны и Солнца, использована методика разностно-полиномиальной коррекции.

При записи возмущающей функции, обусловленной притяжением внешнего тела, было учтено взаимодействие Земли и внешнего тела как материальных точек. В этом случае разложение не содержит косвенной части.

Учтём сжатие Земли и запишем дополнительную часть возмущающей функции, обусловленной действием Луны на Землю:

$$\tilde{U} = -\frac{fm'}{r'} J_2 \left(\frac{r_0}{r'}\right)^2 P_2\left(\frac{z'}{r'}\right), \quad (17)$$

где

f – гравитационная постоянная,

m' – масса Луны,

r_0 – экваториальный радиус Земли,

J_2 – коэффициент при второй зональной гармонике,

$P_2(x)$ – полином Лежандра второго порядка,

r' – расстояние между Землёй и Луной,

x', y', z' – координаты Земли относительно Луны.

Дифференцируя потенциал \tilde{U} по переменным x', y', z' , определим составляющие ускорения \vec{W} центра масс Земли, обусловленного взаимодействием Луны и сжатия Земли. Для того, чтобы в выражениях для ускорения

перейти к координатам Луны относительно Земли, следует знак каждой из переменных x' , y' , z' поменять на противоположный:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_x &= \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = fm' J_2 \frac{1}{r'^2} \left(\frac{r_0}{r'} \right)^2 \left(\frac{x'}{r'} \right) \left[\frac{3}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{z'}{r'} \right)^2 \right], \\ \tilde{W}_y &= \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = fm' J_2 \frac{1}{r'^2} \left(\frac{r_0}{r'} \right)^2 \left(\frac{y'}{r'} \right) \left[\frac{3}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{z'}{r'} \right)^2 \right], \\ \tilde{W}_z &= \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} = fm' J_2 \frac{1}{r'^2} \left(\frac{r_0}{r'} \right)^2 \left(\frac{z'}{r'} \right) \left[\frac{9}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{z'}{r'} \right)^2 \right].\end{aligned}\quad (18)$$

Неинерциальность системы отсчёта, выбранной для изучения движения спутника, обусловлена не только вращением относительно небесной опорной системы отсчёта с угловой скоростью $\vec{\Omega}(t)$ (формула (1) на с.10), но и ускорением \vec{W} , вызываемым взаимодействием Луны и сжатия Земли. Гамильтониан задачи К (с.11) надо дополнить ещё одним слагаемым – скалярным произведением ускорения \vec{W} на вектор положения объекта \vec{r} :

$$K = \frac{1}{2} |\vec{p}|^2 - W + \left(\vec{W} \cdot \vec{r} \right) - \vec{\Omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}] - R. \quad (19)$$

Возмущающая функция

$$R_{\vec{W}} = - \left(\vec{W} \cdot \vec{r} \right) = -z\tilde{W}_z - x\tilde{W}_x - y\tilde{W}_y$$

имеет вид

$$\begin{aligned}R_{\vec{W}} &= + \left(\frac{fm}{r_0} \right) \left(\frac{r}{r_0} \right) P_1 \left(\frac{z}{r} \right) \cdot A_{10}^{(\vec{W})} \\ &+ \left(\frac{fm}{r_0} \right) \left(\frac{r}{r_0} \right) P_1^{(1)} \left(\frac{z}{r} \right) \cdot \left[A_{11}^{(\vec{W})} \cos w + B_{11}^{(\vec{W})} \sin w \right],\end{aligned}\quad (20)$$

где

$$A_{10}^{(\vec{W})} = -\frac{r_0^2}{fm} \cdot \tilde{W}_z, \quad A_{11}^{(\vec{W})} = -\frac{r_0^2}{fm} \cdot \tilde{W}_x, \quad B_{11}^{(\vec{W})} = -\frac{r_0^2}{fm} \cdot \tilde{W}_y.$$

Действия с функцией (20) выполняются с помощью тех же алгоритмов, которые были использованы для преобразования возмущающих функций, обусловленных притяжением Луны и Солнца.

В третьем разделе приводятся различные примеры **применения алгоритмов** для обработки длительных рядов высокоточных наблюдений ИСЗ.

Выполнена проверка рекуррентных соотношений для вычисления полиномов Лежандра высших порядков

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} \cdot x \cdot P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} \cdot P_{n-2}(x) \quad (21)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq +1, \\ P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot x^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Возможны два варианта применения рекуррентной формулы.

1. Вычисление значения функции $P_n(x)$ для произвольного n при заданном числовом значении аргумента x (численное интегрирование).
2. Нахождение численных значений коэффициентов полинома $P_n(x)$ при различных степенях аргумента x (аналитический подход).

Преимущество рекуррентных соотношений заключается в скорости достижения результата, недостатком является возможная потеря вычислительной точности при вычитании больших чисел.

Первый вариант может быть проверен с помощью тождеств

$$P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_n(+1) = +1. \quad (23)$$

Расчёты показали, что в результате использования формулы (21) с начальными условиями (22) и аргументами $x = -1$ и $x = +1$ тождества (23) справедливы с точностью до 15 знаков после запятой при всех порядках полинома Лежандра от $n = 1$ до $n = 720$.

Второй способ проверки состоит в использовании формулы для производящей функции полиномов Лежандра:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x). \quad (24)$$

Расчёты показали (табл.1), что при различных численных значениях параметра α и аргумента x значение суммы в правой части выражения (24) соответствует значению функции в левой части с точностью до 12 значащих

Таблица 1: Производящая функция для полиномов Лежандра

α	x	функция	разность	N_{max}
0.96	+1.00	25.000000000000000	$-0.988 \cdot 10^{-12}$	755
0.96	+0.99	6.9337524528153640	$-0.196 \cdot 10^{-12}$	606
0.96	+0.95	3.2009219983223993	$-0.090 \cdot 10^{-12}$	546
0.96	+0.90	2.2727272727272727	$+0.685 \cdot 10^{-12}$	565
0.96	+0.80	1.6103915660020771	$-0.926 \cdot 10^{-12}$	547
0.96	+0.50	1.0197712705600052	$-0.897 \cdot 10^{-12}$	561
0.96	+0.20	0.8064516129032258	$-0.269 \cdot 10^{-12}$	502
0.96	+0.00	0.7213873210309515	$+0.978 \cdot 10^{-12}$	576
0.96	-0.20	0.6585792122172903	$-0.972 \cdot 10^{-12}$	471
0.96	-0.50	0.5890920370328413	$-0.907 \cdot 10^{-12}$	550
0.96	-0.80	0.5377898796468977	$+0.210 \cdot 10^{-12}$	525
0.96	-1.00	0.5102040816326531	$+0.975 \cdot 10^{-12}$	660

цифр. Целое число N_{max} в последней колонке означает наибольший порядок полинома $P_n(x)$ в сумме (24). Значение $\alpha = 0.96$ характерно для объектов с высотой полёта 300 километров над поверхностью Земли.

Для параметра $\alpha = 0.90$, присущего геодезическим спутникам с высотой полёта более 700 километров, значение $N_{max} < 300$.

Вывод: для заданных значений аргумента $-1 \leq x \leq +1$ численные значения полиномов $P_n(x)$ с помощью рекуррентного алгоритма определяются практически без потери вычислительной точности.

Второй вариант используется на предварительной стадии преобразования возмущающей функции.

Пусть $a_i^{(n)}$ – численные коэффициенты полинома $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} \cdot x^i$:

$$a_i^{(n)} = \frac{2n-1}{n} \cdot a_i^{(n-1)} - \frac{n-1}{n} \cdot a_i^{(n-2)}; \quad (25)$$

$$a_0^{(0)} = 1; \quad a_1^{(0)} = 0, \quad a_1^{(1)} = 1; \quad a_2^{(0)} = -\frac{1}{2}, \quad a_2^{(1)} = 0, \quad a_2^{(2)} = \frac{3}{2}.$$

Сумма коэффициентов полинома любого порядка всегда равна единице

$$\sum_{i=0}^n a_i^{(n)} = +1,$$

но величины коэффициентов достигают больших значений.

В табл.2 приводятся числовые значения некоторых коэффициентов:

Таблица 2: Величины коэффициентов полиномов

n	i	$a_i^{(n)}$
23	1	-0.1681880950927734
23	17	-18733148.9151477814000000
23	23	981501.4276027679440000
26	0	-0.1549810171127319
26	18	229350982.8986495730000000
26	26	7389761.9984761476500000
29	1	4.3339334428310394
29	21	2978545001.5916727500000000
29	29	56004648.0960045755000000
36	0	0.1320605995715596
36	26	-1150785784265.5309200000000000
36	36	6439404973.5978009900000000
45	1	5.3821880423697621
45	33	2523815359824958.2900000000000000
45	45	2950952798742.9865800000000000
50	0	-0.1122751726592170
50	36	-189971831414987581.0000000000000000
50	50	89609514959900.0547000000000000

Большое количество нулей после восемнадцатой значащей цифры каждого числа возникает как следствие ограниченности разрядной сетки компьютера.

Вывод: алгоритм (25) определения значений коэффициентов полинома $P_n(x)$ при различных степенях аргумента x приводит к потере вычислительной точности в случае полиномов высоких порядков. Для $n = 36$ погрешность может оказаться в пятом знаке после запятой. При значениях $n > 39$ нет смысла использовать полученные коэффициенты.

Важное место в процессе разработки и отладки программного обеспечения занимает методика сравнительных испытаний, направленная на определение точностных характеристик расчётов.

Одним из вариантов методики является сравнение результатов прогноза движения с результатами высокоточных измерений топоцентрических дальностей до искусственных спутников Земли, снабжённых уголковыми отражателями. Такие измерения проводятся на обсерваториях с помощью лазерных дальномеров.

Вариант заключается в применении алгоритма дифференциального улучшения орбит на интервалах времени продолжительностью несколько суток. Результатом вычислений являются оценки параметров модели и “невязки” – разности между измеренными и вычисленными значениями. Полученные “невязки” необходимо сравнить с результатами аналогичных вычислений, регулярно выполняемых в центрах обработки данных Международной службы лазерной дальнометрии. В табл.3 даны названия некоторых центров.

Таблица 3: Центры анализа

SAO	астрономическая обсерватория, Шанхай (Китай)
DGFI	Институт геодезических исследований (Германия)
HIT-U	университет Хитоцубаши, Токио (Япония)
JCET	отдел НАСА и университет Мэриленд (США)
MCC	Центр управления полётами (Россия)
CSR	Центр космических исследований, Техас (США)
DELFT	Технологический университет, Дельфт, Нидерланды

Ежедневно, по мере поступления новых массивов измерений топоцентрических дальностей, выполняется улучшение начальных параметров движения объектов и ряда эмпирических параметров. Для всех измерительных пунктов на каждом прохождении вычисляются “невязки”. В результате линейной аппроксимации таких “невязок” получают оценку “среднего смещения” (СС) дальностей, измеренных на отдельном прохождении спутника в поле видимости обсерватории, и оценку “среднего квадратического отклоне-

ния” (СКО) от аппроксимирующей прямой.

Таблица 4: Объекты и наблюдения

Спутник	h_{min}	e	i	n	$\dot{\omega}$	$\dot{\Omega}$	N_p
9306102 <i>Стелла</i>	800	0.0007	98.476	14.27121	-2.9342	0.9695	3000
7501001 <i>Старлет</i>	900	0.0206	49.817	13.82205	3.3041	-3.9476	4000
8606101 <i>Эйджисаи</i>	1500	0.0011	50.010	12.44446	2.5461	-3.0752	8000
7603901 <i>Лагеос</i>	6000	0.0044	109.835	6.38665	-0.2137	0.3425	5000
9207002 <i>Лагеос-2</i>	6000	0.0137	52.650	6.47295	0.4370	-0.6316	5000
8900103 <i>Эталон-1</i>	19500	0.0012	65.312	2.13156	-0.0062	-0.0320	600
8903903 <i>Эталон-2</i>	19500	0.0011	64.778	2.13205	-0.0036	-0.0332	600

В табл.4 для нескольких спутников представлены средние значения минимальной высоты полёта h_{min} в километрах, эксцентриситета орбиты e , угла наклона орбиты i в градусах, среднего движения n в оборотах за сутки, скорости изменения аргумента перигея $\dot{\omega}$ в градусах за сутки, скорости изменения долготы восходящего узла $\dot{\Omega}$ в градусах за сутки и количество “нормальных мест” N_p , обычно получаемых на интервалах наблюдений протяжённостью один месяц.

Наблюдения двух спутников Лагеос поставляют основной материал для вывода осреднённых на коротких интервалах времени параметров вращения Земли и координат измерительных пунктов.

Совокупности измеренных дальностей до двух спутников Эталон недостаточно для решения этих задач в полном объёме. Обработка наблюдений этих объектов, обращающихся на орбитах спутников системы Глонасс, необходима для калибровки измерительной аппаратуры и отладки пакетов вычислительных программ.

Геодезические спутники Эйджисаи, Старлет, Стелла обращаются вокруг Земли на низких орбитах. Обработка наблюдений этих объектов затруднена необходимостью учёта гармоник геопотенциала большого порядка и непредсказуемыми вариациями плотности верхней атмосферы Земли.

Результаты расчётов, относящиеся к спутникам Лагеос и Лагеос-2, соби-

рает и публикует Европейский центр определения орбит (**CODE**), расположенный в городе Берн (Швейцария).

Для проведения сравнительных испытаний была выполнена фильтрация лазерных наблюдений с помощью пакета программ **LENTA**, разработанного на основе предлагаемых в данном исследовании алгоритмов.

В табл.5 содержатся результаты определения “среднего смещения” и “среднего квадратического отклонения” для измерений топоцентрической дальности до спутника Лагеос, выполненных на пунктах 7080 (Форт Дэвис,

Таблица 5: Лагеос, сравнительные испытания, пункты 7080 и 7105

Оценка “среднего смещения” в миллиметрах, пункт 7080							
дата	N_p	LENTA	DGFI	MCC	HIT-U	JCET	SAO
05.10.2009	14	27 ± 3	9 ± 3	-7 ± 3	19 ± 3	35 ± 4	22 ± 3
09.10.2009	8	3 ± 10	-7 ± 14	-30 ± 11	-1 ± 7	-21 ± 12	4 ± 8
10.10.2009	8	30 ± 3	-19 ± 3	-19 ± 4	-14 ± 3	23 ± 6	5 ± 3
11.10.2009	15	-12 ± 9	-18 ± 11	-27 ± 5	-6 ± 3	-12 ± 8	-2 ± 4
Оценка “среднего смещения” в миллиметрах, пункт 7105							
дата	N_p	LENTA	DGFI	MCC	HIT-U	JCET	SAO
05.10.2009	7	9 ± 5	9 ± 6	5 ± 3	6 ± 4	11 ± 8	13 ± 6
06.10.2009	19	-11 ± 9	21 ± 4	-60 ± 3	2 ± 2	-16 ± 5	-10 ± 3
07.10.2009	16	-34 ± 4	-14 ± 3	-16 ± 3	-13 ± 4	-3 ± 5	-23 ± 1
07.10.2009	9	-12 ± 5	-4 ± 5	1 ± 3	-7 ± 4	-18 ± 6	-9 ± 2
07.10.2009	12	58 ± 3	-7 ± 4	3 ± 1	5 ± 2	-3 ± 8	-5 ± 3
08.10.2009	6	31 ± 6	-5 ± 3	15 ± 2	5 ± 2	31 ± 1	4 ± 2
09.10.2009	4	-23 ± 1	-13 ± 3	-3 ± 3	-11 ± 2	-26 ± 4	-22 ± 1
09.10.2009	13	-12 ± 5	-3 ± 5	-5 ± 4	-7 ± 2	-29 ± 7	-13 ± 3
09.10.2009	18	40 ± 4	-15 ± 4	6 ± 3	-3 ± 2	-2 ± 5	-4 ± 2

США) и 7105 (Вашингтон, США). В таблице оценки “СС” и “СКО” даны в миллиметрах. В колонке N_p дано число “нормальных точек”. Данные по пяти центрам обработки были взяты из отчёта CODE, данные в колонке LENTA получены в процессе вычислений.

Анализ позволяет сделать вывод, что пакет вычислительных программ LENTA уступает по точности представления наблюдений спутников типа Ла-

геос пакетам DGFI, МСС и НИТ-U не более 20%. Точность пакетов LENTA, JCET и SAO при обработке высокоточных лазерных наблюдений Лагеос и Лагеос-2 находится примерно на одном уровне.

Результаты сравнения (табл.6) приводят к выводу, что пакет вычислительных программ LENTA уступает по точности представления наблюдений спутников типа Эталон и низкоорбитальных объектов пакетам DGFI, JCET и НИТ-U. В колонке Δt дана продолжительность интервала измерений в минутах времени, оценки “СС” и “СКО” даны в миллиметрах.

Таблица 6: Обсерватория Яррагади, сравнительные испытания

спутник	дата	UTC	Δt	N_p	LENTA	DGFI
Эталон-1	2010/02/21	11:59	221.4	11	379.5 ± 10.3	16 ± 31
Эталон-1	2010/02/26	17:47	150.4	15	-23.0 ± 5.6	-28 ± 21
спутник	дата	UTC	Δt	N_p	LENTA	НИТ-U
Эйджисаи	2010/01/21	10:47	13.6	21	272.6 ± 159.1	43 ± 5
Эйджисаи	2010/01/21	12:48	14.8	31	384.7 ± 429.5	1 ± 4
Эйджисаи	2010/01/21	17:00	9.1	20	-1274.3 ± 491.4	5 ± 5
Эйджисаи	2010/01/21	21:07	10.0	20	-3639.5 ± 896.3	25 ± 6
Старлет	2010/03/01	07:13	2.6	6	1047.6 ± 9.5	22 ± 6
Старлет	2010/03/01	09:00	6.6	15	-717.3 ± 59.6	24 ± 5
Старлет	2010/03/01	14:33	4.3	10	-1143.0 ± 20.4	11 ± 1
Старлет	2010/03/01	16:21	9.8	21	-929.5 ± 83.4	-0 ± 4
Старлет	2010/03/01	18:11	6.6	15	636.5 ± 60.3	-8 ± 4
Стелла	2010/01/21	06:08	7.8	17	-1762.9 ± 3823.5	-2 ± 3
Стелла	2010/01/21	17:22	7.2	16	5780.8 ± 987.1	-3 ± 6
спутник	дата	UTC	Δt	N_p	LENTA	JCET
Эйджисаи	2010/01/21	10:47	13.6	21	272.6 ± 159.1	-16 ± 16
Эйджисаи	2010/01/21	12:48	14.8	31	384.7 ± 429.5	74 ± 13
Эйджисаи	2010/01/21	14:58	4.0	9	-850.0 ± 5.3	195 ± 24
Эйджисаи	2010/01/21	17:00	9.1	20	-1274.3 ± 491.4	154 ± 21
Эйджисаи	2010/01/21	19:12	3.9	9	-618.6 ± 20.8	321 ± 39
Эйджисаи	2010/01/21	21:07	10.0	20	-3639.5 ± 896.3	59 ± 19
Старлет	2010/03/01	09:00	6.6	15	-717.3 ± 59.6	267 ± 131
Старлет	2010/03/01	14:33	4.3	10	-1143.0 ± 20.4	348 ± 232
Старлет	2010/03/01	16:21	9.8	21	-929.5 ± 83.4	126 ± 91

Вот уже более тридцати лет сеть наблюдательных станций, расположенных на всех континентах, проводит измерения наклонной дальности до искусственного спутника Земли Лагос с помощью лазерной техники. С 1992 года среди объектов наблюдений появился ещё один спутник – Лагос-2.

С помощью разработанного пакета программ была выполнена обработка высокоточных лазерных наблюдений этих объектов.

Ряды лазерных наблюдений объектов Лагос и Лагос-2 с 1994 по 2002 год были разделены на пятисуточные интервалы. Для обработки наблюдений с 2003 года по 2010 год был выбран интервал, составляющий трое суток.

На каждом интервале времени были определены *шесть* численных зна-

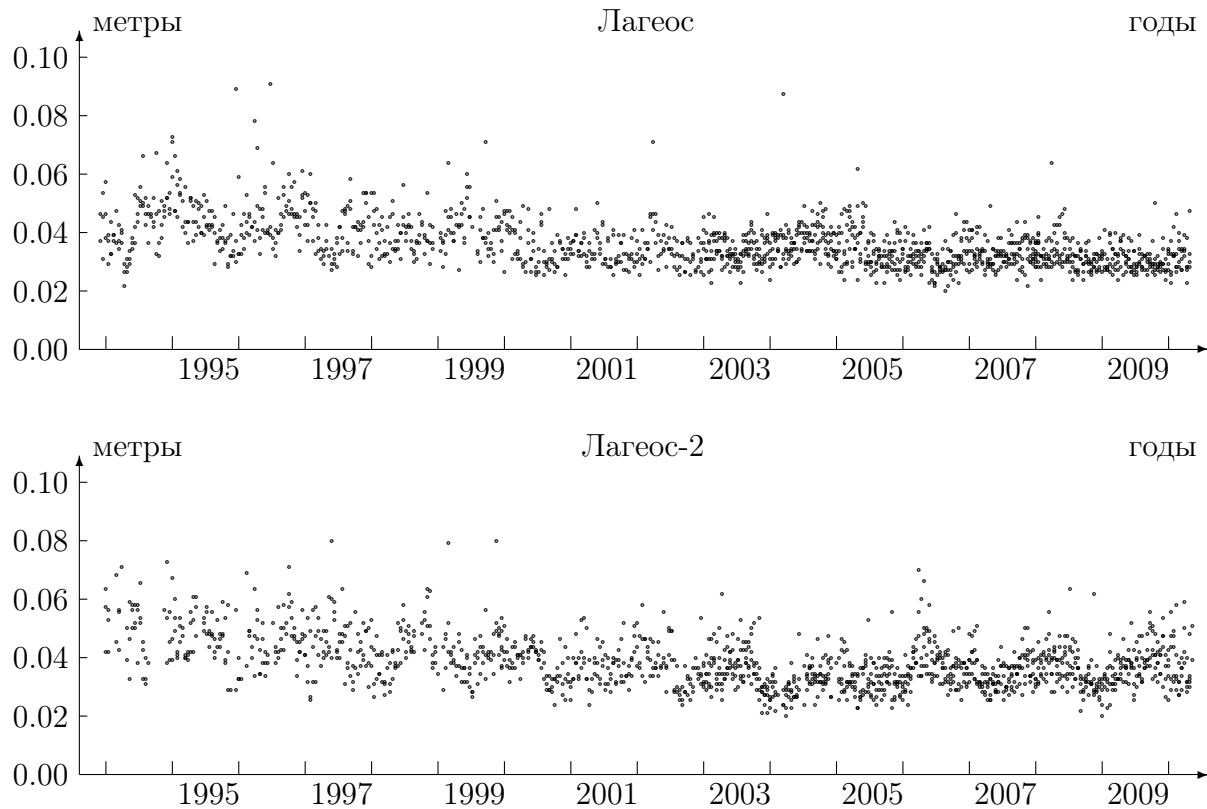


Рис. 1: Лагос и Лагос-2, стандартное отклонение

чений “сглаженных” элементов орбиты и *три* значения параметров вращения Земли: координаты полюса x_p , y_p и вариация продолжительности суток LOD. На рис.1 представлены оценки средних квадратических погрешностей одного измерения.

На рис.2 и 3 представлены разности двух рядов координат полюса x_p , y_p . Из значений, полученных на основе наблюдений, были вычтены значения, опубликованные в материалах Международной службы вращения Земли.

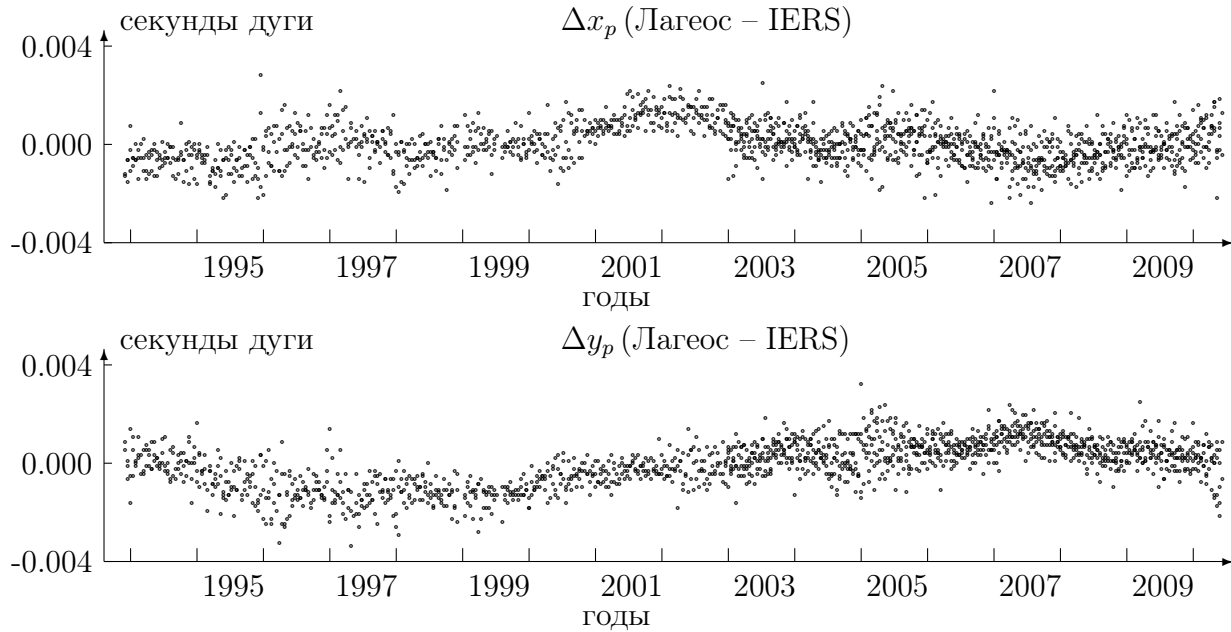


Рис. 2: Лагеос и IERS, разности координат полюса

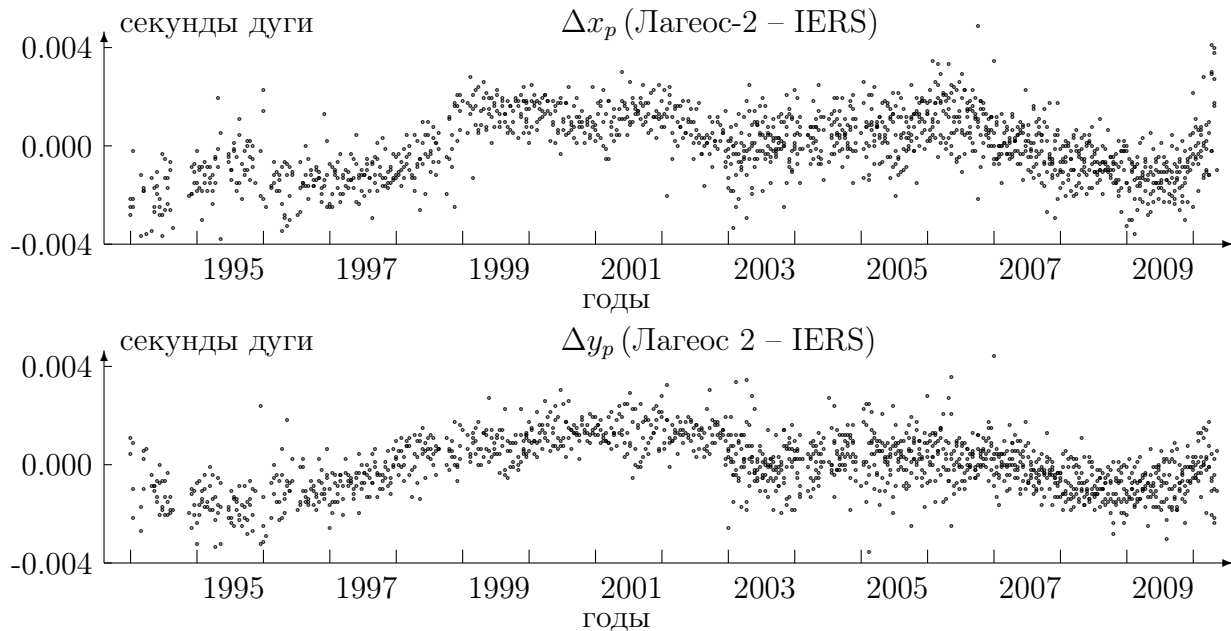


Рис. 3: Лагеос-2 и IERS, разности координат полюса

График на рис.4 даёт представление о вариациях продолжительности су-

ток, которым соответствуют вариации угловой скорости вращения Земли, на интервале времени 16 лет. Результаты опубликованы в материалах Международной службы вращения Земли.



Рис. 4: Данные Международной службы вращения Земли



Рис. 5: Результаты обработки наблюдений Лагеос и Лагеос-2

На рис.5 представлены результаты определения вариаций продолжительности суток. Результаты были получены на основе обработки измерений топоцентрических дальностей до спутников Лагеос и Лагеос-2.

Поправки координат наблюдательных станций позволяют получить оценки вековых изменений положений пунктов на поверхности Земли (табл.7). В

Таблица 7: Поле скоростей для пяти пунктов

\dot{X} (м/год)	\dot{Y} (м/год)	\dot{Z} (м/год)	$\sigma_{\dot{X}}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{Y}}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{Z}}$ (м/год)	
Европа, Рига, 1884 $\lambda = 24^{\circ}3'32''.74$, $\varphi = +56^{\circ}56'54''.79$, $H = 24.1$ м						
-0.0212	0.0118	-0.0001	0.0015	0.0021	0.0017	Лагеос
-0.0290	0.0309	0.0026	0.0019	0.0023	0.0026	Лагеос-2
-0.0184	0.0151	0.0046	0.0055	0.0038	0.0081	ITRF
Тихий океан, Мауи, 7210 $\lambda = 203^{\circ}44'38''.77$, $\varphi = 20^{\circ}42'26''.01$, $H = 3061.2$ м						
-0.0133	0.0678	0.0254	0.0019	0.0039	0.0018	Лагеос
-0.0011	0.0419	0.0353	0.0020	0.0034	0.0018	Лагеос-2
-0.0154	0.0589	0.0338	0.0007	0.0005	0.0004	ITRF
Африка, Хартебестёк, 7501 $\lambda = 27^{\circ}41'10''.30$, $\varphi = -25^{\circ}53'22''.95$, $H = 1402.8$ м						
-0.0038	0.0356	0.0223	0.0012	0.0017	0.0016	Лагеос
-0.0242	0.0708	0.0192	0.0026	0.0036	0.0015	Лагеос-2
-0.0090	0.0187	0.0160	0.0012	0.0008	0.0007	ITRF
Испания, Андалусия, Сан Фернандо, 7824 $\lambda = 353^{\circ}47'40''.95$, $\varphi = 36^{\circ}27'54''.92$, $H = 91.0$ м						
0.0080	0.0267	0.0263	0.0023	0.0014	0.0015	Лагеос
0.0085	0.0597	0.0247	0.0029	0.0033	0.0018	Лагеос-2
-0.0025	0.0179	0.0163	0.0025	0.0006	0.0019	ITRF
Австралия, Маунт Стромло, 7825 $\lambda = 149^{\circ}0'35''.63$, $\varphi = -35^{\circ}18'58''.11$, $H = 797.8$ м						
-0.0435	-0.0055	0.0524	0.0023	0.0018	0.0026	Лагеос
-0.0352	-0.0039	0.0356	0.0029	0.0026	0.0032	Лагеос-2
-0.0363	0.0003	0.0457	0.0012	0.0015	0.0010	ITRF

строке “ITRF” (Международная земная система отсчета) приводятся данные Международной службы вращения Земли.

В работе получены оценки вековых изменений положений 30 пунктов измерений дальности.

На основе предлагаемых алгоритмов разработана методика расчёта прохождений искусственных спутников Земли на некотором расстоянии друг от друга. Такой подход необходим для решения следующих задач:

1. предсказание опасных сближений объектов в заданном диапазоне высот над поверхностью Земли;
2. предсказание опасных сближений конкретного космического аппарата с другими спутниками;
3. вычисление взаимных расстояний между конкретным космическим аппаратом и спутниками, отобранными в список по какому-либо признаку.

В Терскольском филиале Института астрономии Российской академии наук проводятся регулярные наблюдения космического мусора.

16 октября 2009 года во время наблюдений был обнаружен неизвестный объект 18-й звёздной величины.

Объект получил временный номер 95334. Продолжительность наблюдений составила шесть вечеров. 21 октября объект вышел из зоны видимости. Было получено 695 отдельных положений объекта – топоцентрических значений прямых восхождений и склонений в системе стандартного экватора.

На основе наблюдений было выполнено улучшение элементов орбиты и получена оценка эмпирического коэффициента отражения C_r . Так как это значение определяется формулой

$$C_r = 4.5606 \cdot 10^{-9} k_r \frac{A}{m},$$

то, полагая $k_r \approx 1.0$, можно оценить отношение средней площади поверхности A к массе объекта m .

Оскулирующие кеплеровские элементы орбиты объекта в системе истинного экватора даты приведены в табл.8. В последней строке дана оценка отношения средней площади объекта к его массе.

Средняя квадратическая погрешность одного измерения по прямому восхождению составила $1.40''$, а по склонению – $0.44''$.

Таблица 8: Параметры орбиты объекта 95334

дата	16.10.2009
UT	00 ^h 00 ^m 00.000 ^s
a	41715.137 ± 0.020 км
e	0.029916301 ± 0.00001
i	14.005113° ± 0.0002°
Ω	347.868781° ± 0.0002°
ω	163.477533° ± 0.003°
M	307.308140° ± 0.003°
A/m	2.2206 ± 0.005 м ² /кг

Космический аппарат Молния 3-39 был выведен на орбиту 20 сентября 1990 года.

В феврале 2009 года эксцентриситет орбиты космического аппарата Молния 3-39 достиг критического значения. Под действием силы сопротивления атмосферы большая полуось и высота апогея орбиты стали уменьшаться. Объект завершил свой полёт во второй половине даты 8 июля 2009 года после входа в плотные слои атмосферы.

В мае 2009 года на базе Института астрономии Российской академии наук в Звенигороде старшим научным сотрудником Бахтигираевым Н.С. были выполнены позиционные наблюдения космического аппарата Молния 3-39. Получено 313 топоцентрических положений объекта: прямое восхождение и склонение в небесной системе отсчёта.

Обработка результатов позиционных наблюдений позволила уточнить начальный вектор состояния объекта на момент 18 мая 2009 года (полночь). Средняя квадратическая погрешность одного измерения составила 1.4 секунд дуги. Был выполнен численный прогноз движения космического аппарата с целью оценки момента завершения полёта.

С учётом погрешности оценки отношения площади к массе был получен интервал вероятных дат завершения полёта: от первой половины 7 июля до первой половины 9 июля.

Космические аппараты *глобальной навигационной спутниковой системы* (ГЛОНАСС) снабжены уголковыми отражателями для измерения топоцентрических дальностей. Длинные ряды лазерных наблюдений различных объектов ГЛОНАСС содержатся в базе данных.

В табл.9 представлены результаты обработки наблюдений космического аппарата Глонасс 109 на интервалах, равных одному месяцу:

Таблица 9: Глонасс 109, фильтрация наблюдений

дата	N_p	$\Delta\rho_{min}$ (м)	$\Delta\rho_{max}$ (м)	σ (м)	A/m (м ² /кг)
2011/09/01	747	-20.368	13.022	5.124	$0.0321 \pm 8.4 \cdot 10^{-6}$
2011/10/01	684	-38.719	20.351	10.788	$0.0327 \pm 2.0 \cdot 10^{-5}$
2011/11/01	724	-36.902	30.871	11.435	$0.0322 \pm 2.4 \cdot 10^{-5}$
2011/12/01	539	-38.109	28.598	9.780	$0.0325 \pm 3.2 \cdot 10^{-5}$
2012/01/01	491	-10.911	15.106	5.190	$0.0325 \pm 1.8 \cdot 10^{-5}$
2012/02/01	509	-14.730	11.456	4.673	$0.0323 \pm 9.9 \cdot 10^{-6}$
2012/03/01	795	-22.915	21.870	6.942	$0.0328 \pm 1.2 \cdot 10^{-5}$
2012/04/01	514	-27.426	33.752	12.450	$0.0330 \pm 2.3 \cdot 10^{-5}$

На рис.6 представлены разности между положениями объекта Глонасс 118, вычисленными с помощью улучшенных параметров движения, полученных на основе фильтрации лазерных измерений, и данными за сентябрь 2010 года из базы NGS [8], которые послужили эталонной орбитой:

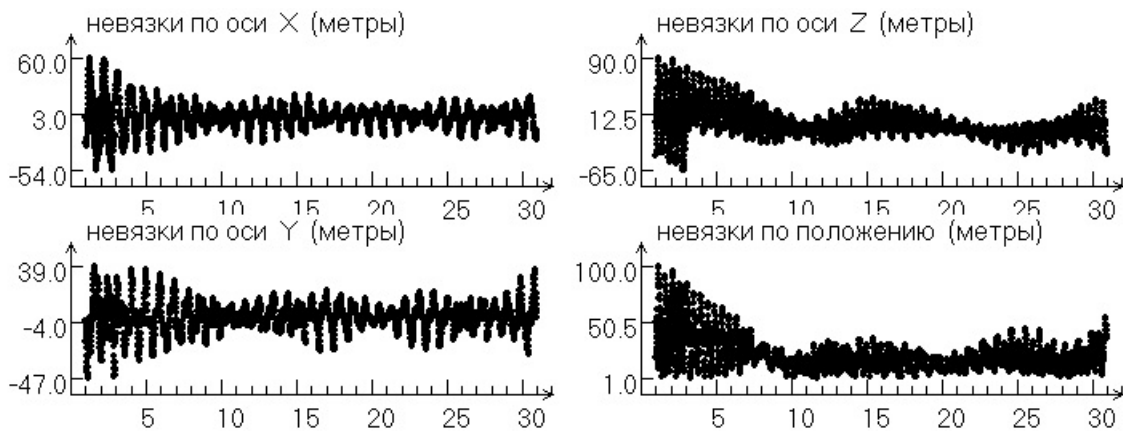


Рис. 6: Глонасс 118, сравнение с эталонной орбитой

В табл.10 даны оценки максимальной ошибки прогноза для искусственных спутников Земли, находящихся на орбитах с различной высотой полёта. Высота полёта h_{min} дана в километрах.

Для каждого объекта оценки были получены с помощью лазерных наблюдений. На основе N_p значений топоцентрических дальностей на интервале времени ΔT_a в сутках выполняется улучшение параметров движения: шесть средних элементов орбиты, эмпирический коэффициент отражения и эмпирический коэффициент ускорения. Оценка средней квадратической погрешности одного измерения в метрах дана в столбце σ .

На интервале времени ΔT_p суток, следующим сразу за интервалом ΔT_a , на основе улучшенных параметров движения проводится прогноз движения объекта и сравнение с измеренными значениями топоцентрических расстояний. Абсолютная величина самой большой разности измеренных и вычисленных величин в метрах обозначена $|\Delta \rho_{max}|$.

Таблица 10: Оценка точности прогноза

спутник	h_{min}	ΔT_a	N_p	σ	ΔT_p	$ \Delta \rho_{max} $
<i>Эталон-1</i>	19500	30	1530	7.0	30	41.2
<i>Глонасс 109</i>	19500	30	720	11.4	30	268.1
<i>Глонасс 115</i>	19500	30	960	6.2	30	194.2
<i>Lageos</i>	6000	30	7000	1.7	30	9.2
<i>Ajisai (EGP)</i>	1400	30	11000	5.8	30	149.0
<i>Метеор-3М</i>	1000	30	380	47.8	30	5349.0
<i>Метеор-3М</i>	1000	5	60	1.2	5	71.3
<i>Starlette</i>	900	30	6500	18.2	30	320.0
<i>WestPac</i>	830	30	1070	18.4	30	2446.3
<i>Блунц</i>	820	30	1680	13.9	30	146.4
<i>Stella</i>	800	30	3500	8.8	30	281.1
<i>Ларец</i>	680	30	3250	15.0	30	239.6
<i>Tandem X</i>	510	2	210	16.4	2	886.7
<i>Grace A</i>	470	2	220	4.9	2	214.1
<i>Champ</i>	420	2	380	6.0	2	2682.7

В **послесловии** сказано, что предлагаемая в данном исследовании схема вычислений, основанная на численно-аналитическом подходе, предназначена для учета важнейших неравенств в движении космических объектов и решения практических задач. Сравнительные испытания алгоритмов и их применение показали, что

- точность обработки высокоточных лазерных наблюдений спутников Лагеос и Лагеос-2 с помощью вычислительных программ, основанных на предлагаемых в данной работе алгоритмах *численно-аналитического метода* расчёта положений космических объектов, находится примерно **на одном уровне** с оценками точности, публикуемыми основными центрами анализа данных;
- пакет вычислительных программ LENTA на интервалах времени порядка нескольких суток **уступает** по точности представления наблюдений спутников типа Эталон и низкоорбитальных объектов Эйджисаи, Старлет и Стелла пакетам программ DGFI, JCET и HIT-U, использующим *метод численного интегрирования* уравнений движения;
- основное **преимущество численно-аналитических алгоритмов** в сравнении с методом численного интегрирования заключается в сокращении времени обработки очередной порции измерительной информации.

Приложение содержит обширный материал справочного характера, необходимый для программирования вычислительных процедур.

Выражаю признательность профессору Нестерову Вилену Валентиновичу за простую и чёткую постановку задачи в далёком 1972 году и за предоставление возможности её решения.

Работа выполнена при финансовой и моральной поддержке гранта **РФФИ** № 00-02-17558, научно-образовательного проекта **Института астрономии РАН** и госконтракта №02.740.11.0249 “Оптический мониторинг ближнего и дальнего космического пространства роботизированной сетью телескопов МАСТЕР” **ГАИШ МГУ**.

Список литературы

- [1] Аксёнов Е.П. *Теория движения искусственных спутников Земли*. М. Наука. 1977.
- [2] Вашковьяк М.А. *Численно-аналитический метод исследования эволюции орбит далёких спутников планет*. //Письма в астрономический журнал. 2005. Т.31. №1. С.66-75.
- [3] Лидов М.Л. *Полуаналитические методы расчёта движения спутников*. //Труды Института теоретической астрономии АН СССР. 1978. Т.17. С.54-61.
- [4] Нестеров В.В. Стандарт основных вычислений астрономии. Основные алгоритмы спутниковой геодинамики. *Лекции для студентов старших курсов*. РФФИ. Москва. Изд-во Янус-К. 2001.
- [5] Холшевников К.В. *Асимптотические методы небесной механики*. Ленинград. Изд-во Ленинградского государственного университета. 1985.
- [6] IERS Conventions (2000). Dennis D. McCarthy (ed.) /IERS Technical note 29. Paris. 2000.
URL: <http://tai.bipm.org/iers/conv2003/conv2003.html>
- [7] Pearlman M.R., Degnan J.J., Bosworth J.M.
The International Laser Ranging Service. //Advances in Space Research. V.30. No.2. P.135-143. **URL:** <http://ilrs.gsfc.nasa.gov/>
- [8] Precise GPS orbits computed at the National Geodetic Service.
URL: <http://www.ngs.noaa.gov/orbits/>
- [9] Tapley B.D., Schutz B.E., Eans R.J. *Satellite laser ranging and its applications*. //Celestial Mechanics. 1985. V.37. No.3. P.247-261.
- [10] Two line elements.
URL: <http://celestrak.com/NORAD/elements/>