

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

имени П. К. ШТЕРНБЕРГА

На правах рукописи

УДК 521.13

ЧАЗОВ Вадим Викторович

**РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ  
ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА  
ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЙ  
ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ**

Диссертация на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Специальность 01.03.01. — Астрометрия и небесная механика

Москва – 2012

# Содержание

<b>Предисловие</b>	<b>7</b>
<b>1 Постановка задачи</b>	<b>17</b>
1.1 Стандартные соглашения . . . . .	17
1.1.1 Системы отсчёта . . . . .	17
1.1.2 Пространство-время . . . . .	19
1.1.3 Окрестности Земли . . . . .	20
1.1.4 Солнечная система . . . . .	21
1.1.5 Прецессия и нутация . . . . .	22
1.1.6 Стандартное преобразование . . . . .	23
1.1.7 Координаты обсерваторий . . . . .	25
1.2 Исходные данные . . . . .	28
1.2.1 Эволюция элементов орбиты . . . . .	32
1.2.2 Уравнения движения . . . . .	33
1.2.3 Геопотенциал . . . . .	35
1.2.4 Численная модель . . . . .	36
1.2.5 Приливный потенциал . . . . .	39
1.3 “Стационарный” объект . . . . .	42
1.4 Промежуточный потенциал . . . . .	43
1.5 Канонические преобразования . . . . .	47
1.6 “Осреднённые” уравнения . . . . .	51
1.7 Постановка задачи . . . . .	51
<b>2 Основные алгоритмы</b>	<b>52</b>
2.1 Промежуточная орбита . . . . .	52
2.1.1 От вектора состояния к параметрам орбиты . . . . .	52
2.1.2 Постоянные интегрирования $\alpha_1, \alpha_2^2, \alpha_3$ . . . . .	53
2.1.3 Позиционные параметры $a, e, \delta, \delta^*$ . . . . .	54
2.1.4 Алгоритм операций с полиномами . . . . .	57
2.1.5 Угловые переменные $l_0, g_0, h_0$ . . . . .	62

2.1.6	От параметров орбиты к вектору состояния . . . . .	63
2.1.7	Проверка алгоритмов . . . . .	65
2.1.8	Новые результаты . . . . .	67
2.2	Частные производные . . . . .	68
2.2.1	Переменные действия . . . . .	68
2.2.2	Частные производные по элементам $L, G, H$ . . . . .	70
2.2.3	Частные производные по параметрам $a, e, \delta$ . . . . .	72
2.2.4	Производные от угловых переменных . . . . .	75
2.2.5	Новые результаты . . . . .	77
2.3	Алгоритм преобразования . . . . .	78
2.3.1	Аномальный геопотенциал . . . . .	78
2.3.2	Притяжение светил . . . . .	80
2.3.3	Эффект приливов . . . . .	81
2.3.4	Световое давление . . . . .	81
2.3.5	Положения светил . . . . .	83
2.3.6	Начальные функции . . . . .	83
2.3.7	Элементарное слагаемое . . . . .	87
2.3.8	Сумма слагаемых . . . . .	89
2.3.9	Формулы рекурсии . . . . .	93
2.3.10	Новые результаты . . . . .	94
2.4	Алгоритм интегрирования . . . . .	96
2.4.1	Дифференциальные соотношения . . . . .	97
2.4.2	Рекуррентный алгоритм . . . . .	99
2.4.3	Особые слагаемые . . . . .	100
2.4.4	Новые результаты . . . . .	101
2.5	Осреднённые уравнения . . . . .	102
2.5.1	“Несингулярные” переменные . . . . .	102
2.5.2	Частные производные . . . . .	103
2.5.3	Короткопериодические неравенства . . . . .	105
2.5.4	Порядок действий . . . . .	106
2.5.5	Функции координат . . . . .	107

---

2.5.6	Список упрощений . . . . .	108
2.5.7	Новые результаты . . . . .	108
2.6	Дополнительные алгоритмы . . . . .	109
2.6.1	Координатные условия . . . . .	109
2.6.2	Влияние приливов . . . . .	112
2.6.3	Тень Земли . . . . .	114
2.6.4	Согласование моделей . . . . .	115
2.6.5	Косвенное ускорение . . . . .	116
2.6.6	Новые результаты . . . . .	118
<b>3</b>	<b>Применение алгоритмов</b>	<b>119</b>
3.1	“Средние” элементы . . . . .	119
3.2	Вычислительные аспекты . . . . .	120
3.3	Реализация алгоритмов . . . . .	124
3.4	Сравнительные испытания . . . . .	125
3.5	Спутник Лагос . . . . .	134
3.5.1	Параметры вращения Земли . . . . .	135
3.5.2	Эмпирические коэффициенты . . . . .	137
3.5.3	Поле скоростей . . . . .	138
3.5.4	Сравнение результатов, пункт 7090 . . . . .	139
3.5.5	Сравнение результатов, пункт 7825 . . . . .	140
3.5.6	Сравнение результатов, пункт 7840 . . . . .	141
3.6	Ситуации сближения . . . . .	142
3.7	“Стационарный” объект . . . . .	145
3.8	Объект Молния . . . . .	148
3.9	Объекты Глонасс . . . . .	152
3.10	Спутник Метеор-3М . . . . .	155
3.11	Спутник Блиц . . . . .	156
3.12	Спутник Ларец . . . . .	157
3.13	Точность прогноза . . . . .	158
	<b>Послесловие</b>	<b>160</b>

<b>Приложение</b>	<b>161</b>
Промежуточный экватор . . . . .	161
Двустрочные элементы . . . . .	163
“Нормальные места” . . . . .	164
Правые части . . . . .	167
Атмосферная задержка . . . . .	169
Простое дифференцирование . . . . .	171
Полиномы и присоединённые функции Лежандра . . . . .	172
Приближённые формулы . . . . .	173
Переменные Дудсона . . . . .	174
Простые разложения . . . . .	175
Две суммы элементарных слагаемых . . . . .	176
Функции координат . . . . .	179
Фильтрация наблюдений . . . . .	180
Лагеос и Лагеос-2. Состав наблюдений . . . . .	184
Лагеос и Лагеос-2. Поле скоростей . . . . .	186
<b>Литература</b>	<b>189</b>

## Список иллюстраций

1	Стелла, средние элементы орбиты . . . . .	32
2	Стационарный объект . . . . .	44
3	Сравнение методов . . . . .	67
4	Сравнение элементов . . . . .	95
5	Вариация . . . . .	112
6	Лагеос и Лагеос-2, стандартное отклонение . . . . .	134
7	Лагеос и IERS, разности координат полюса . . . . .	135
8	Лагеос-2 и IERS, разности координат полюса . . . . .	135
9	Данные Международной службы вращения Земли . . . . .	136
10	Результаты обработки наблюдений Лагеос и Лагеос-2 . . . . .	136

11	Коэффициент эмпирического ускорения . . . . .	137
12	Эмпирический коэффициент отражения . . . . .	137
13	Лагеос, пункт 7090, “невязки” . . . . .	139
14	Лагеос, пункт 7090, “невязки”, линейная аппроксимация . . . . .	139
15	Лагеос, пункт 7825, “невязки” . . . . .	140
16	Лагеос, пункт 7825, “невязки”, линейная аппроксимация . . . . .	140
17	Лагеос, пункт 7840, “невязки” . . . . .	141
18	Лагеос, пункт 7840, “невязки”, линейная аппроксимация . . . . .	141
19	Расчёт ситуаций сближения . . . . .	143
20	“Электро-Л”, прогноз ситуаций сближения на 2007 год . . . . .	144
21	Объект 95334, первый вечер . . . . .	146
22	Объект 95334, “невязки” . . . . .	146
23	Объект 95334, прогноз . . . . .	147
24	Молния 3-39, активный режим полёта . . . . .	148
25	Молния 3-39, коррекция орбиты . . . . .	148
26	Молния 3-39, пассивный режим полёта . . . . .	149
27	Молния 3-39, фильтрация наблюдений . . . . .	150
28	Молния 3-39, прогноз . . . . .	151
29	Молния 3-39, данные “NORAD” . . . . .	151
30	Глонасс 118, фильтрация наблюдений . . . . .	153
31	Метеор-3М, фильтрация наблюдений . . . . .	155
32	Блиц, фильтрация наблюдений . . . . .	156
33	Ларец, фильтрация наблюдений . . . . .	157
34	Небесный промежуточный экватор . . . . .	162

## Список таблиц

1	Объекты и наблюдения . . . . .	31
2	Числовые значения коэффициентов зональных гармоник . . . . .	65
3	Коэффициенты многочленов от двух переменных . . . . .	85
4	Функция $r_0/\xi$ как сумма элементарных слагаемых . . . . .	89

---

5	Функция $\eta$ как сумма элементарных слагаемых . . . . .	90
6	Начальные функции: число слагаемых . . . . .	92
7	Функции координат: число слагаемых . . . . .	107
8	Оценка погрешности прогноза на основе “средних” элементов . .	119
9	Производящая функция для полиномов Лежандра . . . . .	121
10	Величины коэффициентов полиномов . . . . .	122
11	Объекты и функции . . . . .	124
12	Центры анализа . . . . .	125
13	Объекты анализа . . . . .	126
14	Лагеос, сравнительные испытания, пункты 7080 и 7105 . . . . .	127
15	Лагеос, сравнительные испытания, пункт 7090 . . . . .	128
16	Лагеос, сравнительные испытания, пункт 7941 . . . . .	129
17	Лагеос, сравнительные испытания, несколько пунктов . . . . .	130
18	Лагеос-2, сравнительные испытания . . . . .	131
19	Эталон-1, сравнительные испытания . . . . .	132
20	Обсерватория Яррагади, сравнительные испытания . . . . .	133
21	Поле скоростей для пяти пунктов . . . . .	138
22	Параметры орбиты объекта 95334 . . . . .	145
23	Глонасс 109, фильтрация наблюдений . . . . .	152
24	Разность нуль-пунктов шкал времени . . . . .	154
25	Оценка точности прогноза . . . . .	158
26	Функция $\sqrt{1 - \eta^2} \cos w$ как сумма элементарных слагаемых . .	177
27	Функция $\sqrt{1 - \eta^2} \sin w$ как сумма элементарных слагаемых . .	178
28	Функции координат: несколько слагаемых . . . . .	179
29	Состав наблюдений . . . . .	184
30	Поле скоростей . . . . .	186

## Предисловие

В диссертации представлена **новая численно-аналитическая теория** движения искусственных спутников Земли (ИСЗ). Теория была применена для определения параметров движения космических объектов и получения достоверных оценок геодинамических параметров на основе наблюдений.

Численно-аналитический подход позволяет использовать преимущества как аналитических методов, так и метода численного интегрирования уравнений движения.

Классическая форма аналитического способа вычисления положений небесных объектов заключается в следующей процедуре: на вековые изменения параметров орбиты накладываются долгопериодические неравенства и короткопериодические возмущения. Преимуществом аналитического метода является возможность увеличения скорости расчёта положений объекта при условии существенных ограничений на точность прогноза.

Суть метода численного интегрирования: на коротких интервалах времени параметры движения объекта аппроксимируют полиномами. Коэффициенты полиномов определяют путём вычисления значений правых частей дифференциальных уравнений и разностей этих значений в специальных точках внутри короткого интервала – одного шага интегрирования. Преимуществом численных методов является высокая точность вычислений. Малый шаг интегрирования, обеспечивая хорошую точность, требует значительных расходов вычислительного времени.

Численно-аналитический подход объединяет оба метода: часть неравенств, имеющих “короткий” период, определяется аналитически, а долгопериодические, резонансные и вековые слагаемые возмущающей функции составляют эволюционный гамильтониан – основу численного интегрирования “осреднённых” уравнений движения. Шаг интегрирования “осреднённых” уравнений значительно превышает значение шага интегрирования, задаваемого в численных методах. Конкретное число, разделяющее слагаемые “короткого” и “долгого” периодов, является свободным параметром.

Запуск Первого искусственного спутника Земли вызвал интерес учёных к задаче определения орбит объектов, возмущаемых аномалиями геопотенциала, притяжением Луны и Солнца, потенциалом, обусловленным приливами упругой Земли, сопротивлением атмосферы и световым давлением.

Профессором Е.П.Аксёновым была построена аналитическая теория движения ИСЗ на основе решения *обобщённой задачи двух неподвижных центров*. Результаты представлены в монографии [5].

Было открыто и получило признание обобщение одного из методов теории возмущений – метода *канонических преобразований* [156].

Тогда же был успешно применён *численно-аналитический* метод расчёта спутниковых орбит [36]. Важные результаты в этом направлении получены профессором М.Л.Лидовым и его учениками, некоторые итоги подведены в обзорном докладе [96], там же намечены перспективы исследований.

Тем не менее, в наши дни все центры обработки высокоточных наблюдений ИСЗ проводят расчёты с помощью программ, в которых прогноз положений объектов выполняется алгоритмом *численного интегрирования* дифференциальных уравнений движения [109, 204].

Во многих научных исследованиях оба метода, *аналитический и численный*, гармонично дополняют друг друга. Сравнение способов вычислений позволяет выделить круг задач, в рамках которых удобно применять тот или иной метод. В этой связи решаемая в предлагаемой диссертации проблема построения моделей поступательного движения космических объектов в численно-аналитической форме является **актуальной**.

В качестве **исходных материалов** предлагаемого исследования были использованы:

- рекомендации Международного астрономического союза [199],
- стандартные соглашения Международной службы вращения Земли [189],
- лазерные наблюдения искусственных спутников Земли [190],
- позиционные наблюдения космических объектов [178],
- база данных об элементах орбит более 14000 объектов [206],
- база данных о точных положениях навигационных спутников [197].

**Целью исследований** является решение следующих задач:

вывод формул для вычисления параметров промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров, с точностью, ограниченной только возможностями компьютера;

разработка метода преобразования возмущающей функции на основе параметров промежуточной орбиты;

дифференцирование и интегрирование слагаемых возмущающей функции;

составление и численное интегрирование “осреднённых” уравнений движения и учёт короткопериодических неравенств с использованием “несингулярных” элементов орбиты;

обработка высокоточных лазерных измерений топоцентрических дальностей до спутников Лагеос и Лагеос-2 на длительных интервалах времени и оценка значений геодинамических параметров;

разработка методики предсказания ситуаций сближения ИСЗ;

фильтрация позиционных наблюдений и оценка значения отношения средней площади поверхности к массе спутника.

Стандартные соглашения Международной службы вращения Земли содержат рекомендации по обработке наблюдений искусственных спутников Земли с помощью метода численного интегрирования. Разработка методики аналитического решения задачи с учётом всех рекомендаций астрономических организаций также является **целью** исследования.

В тексте диссертации термин *алгоритм* объединяет несколько понятий: это и связанные между собой формулы и соотношения, и последовательность действий, и реализация процедуры вычислений на компьютере. Совокупность *алгоритмов*, предназначенная для решения поставленной задачи, в тексте называется “*программным обеспечением*” или “*пакетом программ*”.

Для отладки программного обеспечения и оценки точностных характеристик алгоритмов была разработана методика *сравнительных испытаний*. Методика основана на использовании высокоточных измерений топоцентрических дальностей до ИСЗ. Испытания выполнены для объектов с различной высотой полёта над поверхностью Земли.

Исполнение задуманного стало возможным благодаря опоре на самые **основные методы** классиков небесной механики и астрометрии – последовательные приближения, промежуточные орбиты, канонические преобразования:

метод последовательных приближений применялся на всех этапах, от построения моделей движения объектов в численно-аналитической форме до дифференциального улучшения параметров модели на основе наблюдений;

в качестве промежуточной была принята орбита, построенная с помощью точного решения обобщённой задачи двух неподвижных центров;

метод канонических преобразований содержит алгоритм вычисления эволюционного гамильтониана и короткопериодических неравенств – основу численно-аналитического метода;

и, в то же время, потребовало привлечения **новых идей**:

*методическая точность вычисления* параметров промежуточной орбиты, построенной на основе решения обобщённой задачи двух неподвижных центров, и частных производных высших порядков от любых величин по позиционным параметрам и каноническим элементам промежуточной орбиты должна быть ограничена только разрядной сеткой компьютера;

алгоритм разложения возмущающей функции в тригонометрический ряд с *численными коэффициентами* является *неудовлетворительным* по причине существенных вариаций числовых значений эксцентриситета орбиты и угла наклона орбиты космических тел и должен быть заменён на алгоритм преобразования возмущающего гамильтониана в сумму “элементарных” слагаемых, каждое из которых является функцией как позиционных, так и угловых параметров орбиты объекта, а также величин, характеризующих изменения возмущающих факторов модели движения;

выражения для учёта возмущений от приливов упругой Земли и океанических приливов, записанные во *вращающейся системе отсчёта* (“геофизический” подход) и рекомендованные Международной службой вращения Земли, должны быть *преобразованы* к системе отсчёта, связанной с истинным экватором даты (“астрономический” подход).

**Достоверность полученных результатов** подтверждается примерами обработки наблюдений различных объектов, сравнением с данными, предоставляемыми Международной службой вращения Земли, и сопоставлением с параметрами движения ИСЗ, публикуемыми в Интернете.

**Научная новизна** работы заключается:

в совокупности формул и соотношений для вычислений в рамках обобщённой задачи двух неподвижных центров с максимально возможной методической точностью;

в методе преобразования возмущающей функции задачи, заключающейся в построении всё более сложных конструкций на основе простых начальных соотношений;

в способе вычислений, позволяющим учитывать возмущающее действие факторов различного происхождения одним набором формул;

в совокупности алгоритмов построения моделей движения космических объектов с помощью численно-аналитического метода;

в методике расчёта ситуаций опасных сближений объектов.

**Практическая ценность** диссертации определяется тем, что:

предлагаемые алгоритмы численно-аналитического метода построения моделей движения справедливы в широком классе элементов орбит ИСЗ и позволяют выполнять оценку параметров движения объектов и геодинимических параметров на основе наблюдений;

алгоритмы применяются для вычисления целеуказаний на Звенигородской научной базе ИНАСАН и филиале ИНАСАН на пике Терскол; тезисы доклада “Об эфемеридном обеспечении фотометрических наблюдений ИСЗ” опубликованы в сборнике материалов пятой научно-технической конференции ФВА РВСН, с.77-78, 2000 год (совместно с Н.С.Бахтигараевым);

алгоритмы использовались для планирования космических экспериментов и предварительной редукции результатов наблюдений спутника Метеор-3М сотрудниками Центральной аэрологической обсерватории ГМЦ;

было подготовлено учебное пособие “Модель движения ИСЗ”, являющееся реконструкцией и расширением монографии профессора Е.П.Аксёнова [5].

**Основные результаты**, полученные в диссертации, докладывались автором и соавторами на семинарах и конференциях:

семинар по небесной механике и семинар по астрометрии ГАИШ МГУ ;

семинар ИНАСАН “Проблемы происхождения и эволюции кометно-астероидного вещества в Солнечной системе и астероидная опасность” ;

конференция “Астрометрия, геодинамика и небесная механика на пороге XXI века”, Санкт-Петербург, 2000 год ;

конференция “АСТРОЭКО-2002”, Терскол, 2002 год ;

конференция “Околоземная астрономия – 2003”, Терскол, 2003 год ;

конференция “Горизонты Вселенной”, Москва, 2004 год ;

конференция “Околоземная астрономия – 2005”, Казань, 2005 год .

По теме диссертации **опубликовано 13 статей**, в совместных статьях вклад каждого из авторов является равным.

1. Герасимов И.А., Чазов В.В. *Переменные действие-угол в обобщённой задаче двух неподвижных центров.* // **Труды ГАИШ.** 1988. Т.59. С.46-52.

2. Гаипова А.Н., Чазов В.В. *Комплекс программ Лента.* // **Измерительная техника.** 1991. Т.6, С.30-30.

3. Чазов В.В. *Основные алгоритмы численно-аналитической теории движения искусственных спутников Земли.* // **Труды ГАИШ.** 2000. Т.68. С.5-20.

4. Герасимов И.А., Чазов В.В., Рыхлова Л.В., Тагаева Д.А. *Построение теории движения тел Солнечной системы, основанной на универсальном методе вычисления возмущающей функции.* // **Астрономический вестник.** 2000. Т.34. Номер 6. С.559-566.

5. Герасимов И.А., Чазов В.В., Тагаева Д.А. *Применение универсального метода вычисления возмущающей функции в численно-аналитической теории движения малых планет.* // **Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия.** 2000. Номер 3. С.55-57.

6. Бахтигараев Н.С., Чазов В.В. *Компьютерное моделирование условий наблюдений небесных тел.* // **Кинематика и физика небесных тел.** 2003. Номер 4. С.105-107.
7. Чазов В.В. *Создание численно-аналитической теории движения небесных тел.* // **Труды конференции “Околоземная астрономия – 2003”**, Терскол. 2003. С.171-175.
8. Бахтигараев Н.С., Чазов В.В. *Информационное обеспечение космических экспериментов на основе численно-аналитической теории движения искусственных спутников Земли.* // **Космические исследования.** 2005. Т.43. Номер 5. С.386-389.
9. Бахтигараев Н.С., Чазов В.В. *Моделирование движения космических аппаратов с учётом рекомендаций Международного астрономического союза.* // **Труды конференции “Околоземная астрономия – 2005”**, Казань. 2005. С.281-285.
10. Чазов В.В., Герасимов И.А., Соловьёва О.Д. *Изотропные и гармонические координатные условия в пространстве-времени Солнечной системы.* // **Вестник Московского университета.** Серия 3. Физика. Астрономия. 2006. Номер 2. С.66-68.
11. Клишин А.Ф., Чазов В.В., Бахтигараев Н.С., Костюк Н.Д. *Об оценке уровня техногенной опасности в зоне размещения КА “Электро-Л”.* // **Вопросы радиоэлектроники.** Серия “Радиолокационная техника”. 2007. Выпуск 2. С.40-46.
12. Чазов В.В., Бахтигараев Н.С., Костюк Н.Д. *Наблюдения спутника “Молния 3-39” в Звенигородской обсерватории ИНАСАН и определение времени падения.* // **Вестник СибГАУ.** 2011. Выпуск 6(39). С.183-185.
13. Бахтигараев Н.С., Лёвкина П.А., Сергеев А.В., Чазов В.В. *Наблюдения неизвестного фрагмента космического мусора в Терскольской обсерватории.* // **Вестник СибГАУ.** 2011. Выпуск 6(39). С.186-189.

**На защиту выносятся** следующие положения.

1. Впервые получена полная совокупность формул для вычислений параметров промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров, с максимально возможной точностью. Предлагаемые соотношения используют неявную зависимость между переменными. Предыдущие результаты других авторов были представлены в виде формул, в которых зависимости между позиционными элементами и постоянными интегрирования и зависимости между наборами угловых переменных являются явными. Точность таких соотношений была ограничена четвёртым порядком относительно сжатия Земли.
2. Впервые показано, что возмущающие функции различного происхождения зависят от пяти “начальных” соотношений между координатами спутника. “Начальные” соотношения с точностью, ограниченной только возможностями компьютера, были представлены в виде сумм слагаемых, зависящих от параметров промежуточной орбиты. Найден рекуррентный способ конструирования общей возмущающей функции на основе “начальных” соотношений. В предыдущих исследованиях других авторов разложения в тригонометрические ряды были получены отдельно для каждого из возмущений, обусловленных геопотенциалом, притяжением Луны и Солнца, приливными явлениями и давлением солнечного излучения.
3. Впервые разработан метод аналитического интегрирования слагаемых возмущающей функции, зависящих от позиционных и угловых переменных промежуточной орбиты. Представлен способ вычисления правых частей при численном интегрировании “осреднённых” уравнений движения в “несингулярных” элементах орбиты. Методы используют алгоритмы точного вычисления как параметров промежуточной орбиты, так и частных производных от любых параметров промежуточной орбиты по позиционным и угловым переменным, а также по каноническим переменным действие-угол.

4. С помощью тензорного преобразования получены приближённые формулы связи между координатами небесных тел Солнечной системы, полученными при использовании “изотропных” координатных условий с одной стороны, и “гармонических” координатных условий с другой стороны. Общий вывод состоит в следующей рекомендации: в прикладных задачах достаточно записать релятивистские уравнения движения искусственного спутника Земли на основе “гармонических” координатных условий, а при вычислении возмущающих сил использовать современные численные эфемериды Солнца, Луны и планет, полученные в метрике с “изотропными” координатными условиями.
5. Выражения для учёта возмущений от приливов упругой Земли и океанических приливов, записанные во вращающейся системе отсчёта и рекомендованные Международной службой вращения Земли, преобразованы к системе отсчёта, связанной с истинным экватором даты.
6. В результате анализа массива высокоточных лазерных измерений топоцентрических дальностей до ИСЗ Лагос и Лагос-2 получены оценки параметров вращения Земли и скоростей смещения измерительных пунктов в Земной системе отсчёта. Для некоторых объектов на основе наблюдений определены оценки отношения средней площади поверхности к массе спутника.
7. Разработана методика предсказания ситуаций сближения объектов искусственного происхождения в околоземном пространстве. Методика была применена на этапе проектирования параметров орбиты метеорологического “стационарного” спутника.

В **первом разделе** диссертации выполнена постановка задачи.

Материал **второго раздела** составляют основные алгоритмы модели движения ИСЗ в численно-аналитической форме.

Представлены формулы, позволяющие вычислять промежуточную орбиту, основанную на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров, с точностью, ограниченной только возможностями компьютера.

Для описания движения искусственных спутников приняты во внимание возмущения, обусловленные гравитационным полем Земли, притяжением Луны и Солнца, приливными деформациями упругой Земли, океаническими приливами и давлением солнечной радиации.

Показано, что возмущающие функции, обусловленные различными эффектами, зависят от пяти “начальных” функций координат объекта. Выражения для “начальных” функций записаны при помощи соотношений промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров.

Вместо процедуры разложения возмущающей функции предложен алгоритм преобразования возмущающего гамильтониана в сумму “элементарных” слагаемых. Отличительной чертой алгоритма является способ конструирования возмущающей функции на основе “начальных” функций координат.

В **третьем разделе** приводятся различные примеры применения предлагаемых алгоритмов для обработки длительных рядов высокоточных наблюдений ИСЗ. Предложен и реализован алгоритм предсказания ситуаций сближений объектов. На основе позиционных наблюдений получены оценки отношений средней площади к массе объектов.

В **послесловии** выделен круг задач, при решении которых численно-аналитический способ обладает преимуществом в сравнении с методом численного интегрирования.

**Приложение** содержит обширный материал справочного характера, необходимый для программирования вычислительных процедур.

Выражаю признательность профессору Нестерову Вилену Валентиновичу за простую и чёткую постановку задачи в далёком 1972 году и за предоставление возможности её решения.

*Работа выполнена при финансовой и моральной поддержке гранта РФФИ № 00-02-17558, научно-образовательного проекта Института астрономии РАН и госконтракта №02.740.11.0249 “Оптический мониторинг ближнего и дальнего космического пространства роботизированной сетью телескопов МАСТЕР” ГАИШ МГУ.*

# 1 Постановка задачи

## 1.1 Стандартные соглашения

Первый сборник *стандарта вычислений* был подготовлен в 1983 году Морской обсерваторией США в виде специального циркуляра [198]. В 1988 году, после создания Международной службы вращения Земли, был напечатан сборник “IERS Standards”. Затем последовали выпуски 1992, 1996 [188] и 2000 годов [189]. Все выпуски построены по принципу преемственности и в основных направлениях повторяют самый первый циркуляр.

Представлены факторы, которые необходимо учитывать при прогнозировании движения космических объектов. Сюда входят гравитационное поле Земли, притяжение Луны, Солнца, приливы упругой Земли и океанические приливы, давление солнечного излучения. Рекомендуется использовать современную численную модель движения Луны, Солнца и планет [202].

Были предложены новые понятия: “промежуточный экватор”, “невращающаяся начальная точка” и “угол вращения Земли” (приложение, с.161).

Даны подробные модели для расчёта вариаций координат наземных пунктов. Такие вариации обусловлены приливами упругой Земли и нагрузочными деформациями, возникающими вследствие океанических приливов.

### 1.1.1 Системы отсчёта

Международная земная опорная система отсчёта (International Terrestrial Reference System, ITRS) в выбранный начальный момент времени  $t_0$  задана положениями  $\vec{R}(t_0)$  и скоростями  $\vec{V}$  станций, участвующих в геодинимических исследованиях. Положение наблюдательной станции в момент времени  $t$  вычисляется по формуле

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(t_0) + \vec{V} \cdot (t - t_0) + \sum_i \Delta \vec{R}_i(t), \quad (1)$$

где параметры смещения  $\Delta \vec{R}_i(t)$  определяются на основе знаний по физике приливов. Поддержка и расширение Международной земной опорной

системы координат (International Terrestrial Reference Frame, ITRF) — постоянная забота Международной службы вращения Земли (International Earth Rotation Service, IERS) и Международной службы лазерной локации (International Laser Range Service, ILRS).

Международная небесная опорная система отсчёта (International Celestial Reference System, ICRS) задана высокоточными экваториальными положениями 608 внегалактических радиоисточников. Точка начала координат помещена в барицентр Солнечной системы. В оптическом диапазоне эту систему представляют каталог Гиппаркос и его расширения, например, Опорный каталог Тихо [91].

В рекомендациях МАС подчёркивается, что пространство-время не может быть представлено математически в рамках единой координатной системы отсчёта. Для того, чтобы обрабатывать современные астрономические наблюдения, необходимо использовать несколько релятивистских систем отсчёта [181]. Теория преобразования координат и координатного времени, рекомендуемая МАС, представлена в работе С.М.Копейкина [86].

Небесная опорная система отсчёта с началом координат в центре масс Земли называется *геоцентрической* небесной системой отсчёта.

Современные *численные* модели движения искусственных спутников Земли построены в геоцентрической небесной системе отсчёта [100]. Модели предназначены для обработки высокоточных светолокационных наблюдений ИСЗ [103] и определения параметров вращения Земли.

Система отсчёта с началом координат в центре масс Солнечной системы получила название *барицентрической* небесной системы отсчёта.

В *численных* моделях движения Солнца, Луны и больших планет Солнечной системы, разработанных в Лаборатории реактивного движения США [202] и в Институте прикладной астрономии Российской академии наук [119], использована барицентрическая небесная опорная система отсчёта.

Промежуточное положение между двумя подходами занимает современная модель *прецессии-нутаии* МАС2000А [183], необходимая для установления связи земной и небесной опорных систем отсчёта.

### 1.1.2 Пространство-время

Пространство-время определяется значениями 10 компонент метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$ , каждый компонент является функцией координатного времени и трёх пространственных координат, индексы  $\alpha$  и  $\beta$  принимают значения 0, 1, 2, 3. Квадрат интервала имеет вид

$$d\tau^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2)$$

по повторяющимся индексам выполняется суммирование,

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,$$

$c$  – скорость света,  $t$  – координатное время.

Метрические коэффициенты  $g_{\alpha\beta}$  находят в результате решения уравнений поля [34]. Задача имеет малый параметр: отношение скорости пробной частицы к скорости света. Отношение потенциала взаимодействия пробных частиц к квадрату скорости света пропорционально второй степени малого параметра. Решение уравнений поля в постньютоновском приближении со всей необходимой точностью соответствует достаточно медленным движениям небесных тел Солнечной системы и относительно небольшим силам их взаимного притяжения.

Симметричный метрический тензор  $g_{\alpha\beta}$  имеет различный вид в геоцентрической и барицентрической системах отсчёта. Десять компонент тензора связаны между собой четырьмя произвольными соотношениями, так называемыми *координатными условиями*.

Квадрат интервала (2) перепишем в виде

$$d\tau^2 = -c^2 g_{00} dt^2 - 2c g_{0i} dt dx^i - g_{ij} dx^i dx^j. \quad (3)$$

Индексы  $i, j$  принимают значения 1, 2, 3. По повторяющимся индексам выполняется суммирование. Запись  $g_{ij} dx^i dx^j$ , например, равносильна выражению

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j.$$

Символ Кронекера  $\delta_{ij} = 1$  для  $i = j$ , и  $\delta_{ij} = 0$  для  $i \neq j$ .

### 1.1.3 Окрестности Земли

Компоненты метрического тензора в геоцентрической небесной системе отсчёта запишем в виде

$$g_{00} = -1 + \frac{2U_E}{c^2} + \frac{2R}{c^2} - \frac{2U_E^2}{c^4}, \quad (4)$$

$$g_{0i} = -\frac{1}{c^3} V_i, \quad (5)$$

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{2U_E}{c^2}\right) \delta_{ij}, \quad (6)$$

где через  $U_E$  обозначено выражение для геопотенциала, а символом  $R$  обозначена сумма возмущающих функций, обусловленных действием Луны, Солнца, планет и приливов.

Известный эффект Лензе-Тирринга обусловлен действием векторного потенциала  $V_i$ . Пусть  $f$  – гравитационная постоянная,  $C$  – наибольший момент инерции Земли,  $\omega_z$  – угловая скорость вращения Земли, тогда

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{2f}{r^3} C \omega_z y, \\ V_2 &= +\frac{2f}{r^3} C \omega_z x, \\ V_3 &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – координаты точки в окрестности Земли, вычисляемые в геоцентрической системе отсчёта,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Параметр  $t$  в формуле (3), получил название *геоцентрическое координатное время* (Geocentric Coordinate Time, TCG).

В резолюциях МАС вводится понятие *земное время* (Terrestrial Time, TT). По определению, шкала TT отличается от шкалы TCG постоянным дрейфом:

$$\frac{d(\text{TT})}{d(\text{TCG})} = 1 - L_G, \quad (8)$$

где  $L_G = 6.969290134 \cdot 10^{-10}$  является определяющей постоянной. Сама же шкала земного времени совпадает со шкалой атомного времени TAI. Различие

заключается в положении нуль-пункта:

$$TT = TAI + 32.184 \text{ секунды.}$$

Шкала атомного времени формируется на основе показаний совокупности эталонов частоты служб времени. Всемирное координированное время UTC только на целое число секунд отличается от атомного времени TAI.

#### 1.1.4 Солнечная система

Современная теория движения планет, Луны и Солнца [202], построенная в барицентрической системе отсчёта, получена численным интегрированием релятивистских уравнений движения, записанных в постньютоновском приближении с помощью изотропных координатных условий [200].

Международный астрономический союз, принимая во внимание факт, что многие работы по теории относительности выполнены при использовании “гармонических” координат, оказавшихся полезными для приложений, рекомендует выбор гармонических координатных условий [199].

В разделе **2.6.1** (с.109) представлен алгоритм учёта отличий использования изотропных и гармонических координатных условий.

Параметр  $t$  в формуле (3), получил название *барицентрическое координатное время* (Barycentric Coordinate Time, TCB).

Модель движения Солнца, Луны и планет, созданная в Лаборатории реактивного движения [202], скрывает в себе ещё одну особенность: аргументом для численного интегрирования уравнений движения является специально подобранная переменная  $T_{eph}$ , шкала которой очень близка шкале земного времени TT. Эти две шкалы никогда не расходятся между собой более, чем на 2 миллисекунды. Во многих приложениях таким отличием можно пренебречь. В противоположность этому, разность между TT и TCB возрастает на 0.5 секунды в год [138].

В точке пространства, находящейся в окрестности Земли и имеющей барицентрический вектор  $\vec{r}$ , разность двух шкал координатного времени TCB

и TCG равна [199]

$$\begin{aligned} \text{TСВ} - \text{TСG} = & \frac{1}{c^2} \left[ \frac{1}{1 - L_B} \int_{T_{eph0}}^{T_{eph}} \left( \frac{1}{2} v_E^2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq E}}^N \frac{f m_k}{|\vec{r}_E - \vec{r}_k|} \right) dt \right] \\ & + \frac{1}{c^2} (\vec{v}_E (\vec{r} - \vec{r}_E)), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\vec{r}_E$  и  $\vec{v}_E$  – вектор положения и вектор скорости Земли относительно барицентра Солнечной системы,  $T_{eph}$  – аргумент современных численных моделей движения планет, согласующая переменная  $L_B = 1.550505 \cdot 10^{-8}$ .

### 1.1.5 Прецессия и нутация

Матрицы поворота против часовой стрелки на угол  $\alpha$  вокруг осей OX, OY и OZ обозначим, соответственно, через  $R_1(\alpha)$ ,  $R_2(\alpha)$  и  $R_3(\alpha)$ .

Стандартная эпоха получила условное обозначение J2000, она совпадает с юлианской датой 2451545.0 (полдень, 1 января 2000 года).

Наклон эклиптики к экватору в стандартную эпоху J2000 обозначают символом  $\varepsilon_0$ . Численное значение параметра

$$\varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21'' 448$$

входит в список основных астрономических постоянных.

Матрица прецессии

$$\mathbf{P} = R_3(-z_A) \cdot R_2(\theta_A) \cdot R_3(-\zeta_A) \quad (10)$$

выполняет преобразование от фиксированного экватора, заданного небесной стандартной системой отсчёта, к системе подвижного экватора даты. Формулы для вычисления величин  $\zeta_A$ ,  $z_A$ ,  $\theta_A$ , получивших название прецессионных параметров Ньюкома-Андуайе, имеют вид полиномов по времени.

В математической модели периодической составляющей движения небесного полюса рассматривают мгновенную эклиптику и экватор даты. Для вычисления положения истинного экватора различают нутацию в долготе  $\Delta\psi$  и нутацию в наклоне  $\Delta\varepsilon$ .

Матрица нутации образована тремя последовательными поворотами и выполняет преобразование от подвижного экватора даты к истинному

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{N}} &= R_1(-\varepsilon_A - \Delta\varepsilon) \cdot R_3(-\Delta\psi) \cdot R_1(\varepsilon_A), \\ \varepsilon_A &= \varepsilon_0 - 46''.8150t - 0''.00059t^2 + 0''.001813t^3,\end{aligned}\tag{11}$$

где

$\varepsilon_A$  – наклон мгновенной эклиптики к подвижному экватору.

$t$  – время в юлианских столетиях от эпохи J2000.0.

Параметры  $\Delta\psi$  и  $\Delta\varepsilon$  вычисляются с помощью тригонометрических рядов с численными коэффициентами, аргументами этих рядов являются линейные комбинации фундаментальных аргументов:

$$\begin{aligned}l_M &– \text{средняя аномалия Луны,} \\ l'_S &– \text{средняя аномалия Солнца,} \\ F_M &– \text{средний аргумент широты Луны,} \\ D &– \text{разность средних долгот Луны и Солнца,} \\ \Omega_M &– \text{средняя долгота восходящего узла Луны.}\end{aligned}\tag{12}$$

Формулы для вычисления фундаментальных аргументов представляют из себя полиномы по времени.

Количество слагаемых в каждом из рядов для нутации в долготе и нутации в наклоне в модели МАС 1980 года равно 106 [188]. В модели МАС2000А ряды нутации содержат 678 лунно-солнечных и 687 планетных членов [189].

### 1.1.6 Стандартное преобразование

Стандартное преобразование между земной (Т) и геоцентрической небесной (С) системами отсчёта выполняется по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(C)} = \mathbf{P}' \cdot \bar{\mathbf{N}}' \cdot R_3(-S_{\oplus}) \cdot R_1(y_p) \cdot R_2(x_p) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(T)},\tag{13}$$

где

$\mathbf{P}$  – матрица прецессии,

$\overline{\mathbf{N}}$  – матрица нутации,

$S_{\oplus}$  – гринвичское истинное звёздное время,

$x_p, y_p$  – координаты полюса.

Верхний штрих означает транспонирование соответствующей матрицы.

Величины

$$x_p, y_p, \Delta\text{UT} = \text{UT1} - \text{UTC}, \text{LOD} = \frac{\Delta\text{UT}(t_2) - \Delta\text{UT}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (14)$$

являются продуктом наблюдательной деятельности. Они входят в набор *параметров вращения Земли*.

Гринвичское среднее звёздное время определено как функция всемирного времени

$$S_{\oplus}^m \text{ в } 0^h \text{ UT1} = 6^h 41^m 50^s 54841 + 8640184^s 812866 T_U \\ + 0^s 093104 T_U^2 - 6^s 2 \cdot 10^{-6} T_U^3,$$

где  $T_U$  – время в шкале всемирного времени UT1, отсчитываемое в юлианских столетиях от стандартной эпохи J2000.

Разность  $\Delta\text{UT} = \text{UT1} - \text{UTC}$  всемирного времени и всемирного координированного времени входит в формулу для вычисления промежутка звёздного времени от  $0^h$  UT1 до момента наблюдений, отсчитываемого от начала суток в шкале UTC:

$$S_{\oplus}^m = S_{\oplus}^m \text{ в } 0^h \text{ UT1} + r (\text{UTC} + \Delta\text{UT}),$$

где

$$r = 1.002737909350795 + 5.9006 \cdot 10^{-11} T_U - 5.9 \cdot 10^{-15} T_U^2.$$

Истинное и среднее звёздное время связаны соотношением

$$S_{\oplus} = S_{\oplus}^m + \Delta\psi \cos \varepsilon_A.$$

Особенности стандартного варианта очевидны: угол, определяемый параметром истинное звёздное время, отсчитывается от истинной точки весеннего равноденствия, которая перемещается по истинному экватору вследствие прецессии и нутации, формула для  $S_{\oplus}$  записана с точностью до первого порядка относительно малых величин – параметров нутации.

### 1.1.7 Координаты обсерваторий

В публикации Международной службы вращения Земли [189] предложен следующий алгоритм определения смещений наземных пунктов.

Координаты станции наблюдений, Луны, Солнца и сумма векторов смещения  $\sum \Delta \vec{R}_i$  вычисляются в земной опорной системе отсчёта.

Пусть

$fm$  – геоцентрическая гравитационная постоянная,

$fm_2$  – гравитационный параметр Луны,

$fm_3$  – гравитационный параметр Солнца,

$r, \varphi, \lambda$  – сферические координаты наземного пункта,

$r_2, \varphi_2, \lambda_2$  – сферические координаты Луны,

$r_3, \varphi_3, \lambda_3$  – сферические координаты Солнца,

$\hat{r}$  – геоцентрический единичный вектор наземного пункта,

$\hat{r}_2$  – геоцентрический единичный вектор Луны,

$\hat{r}_3$  – геоцентрический единичный вектор Солнца,

$\hat{e}$  – единичный вектор, направленный к востоку,

$\hat{n} = [\hat{r} \times \hat{e}]$  – единичный вектор, направленный на север:

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{e} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{n} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

В рамках современной теории упругости Земли, разработанной геофизиками, определены значения чисел Лява  $k_2, k_3, h_2, h_3$  и Шида  $l_2, l_3$  для второй и третьей сферических гармоник разложения приливного потенциала. Особенность теории состоит в том, что параметры  $k, h, l$  имеют действительную и мнимую части, зависящие от частоты приливной волны. Числа  $h_2$  и  $l_2$  зависят от широты наземных пунктов:

$$h_2(\varphi) = 0.6078 - 0.0006 \cdot \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right),$$

$$l_2(\varphi) = 0.0847 + 0.0002 \cdot \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right).$$

Первое слагаемое суммы вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} \Delta \vec{R}_1 = \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} & \left\{ h_2(\varphi) \hat{r} \left( \frac{3}{2} (\hat{r}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. + 3 l_2(\varphi) (\hat{r}_j \cdot \hat{r}) \left[ \hat{r}_j - (\hat{r}_j \cdot \hat{r}) \hat{r} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Второе слагаемое суммы обусловлено третьей сферической гармоникой разложения приливного потенциала Луны:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{R}_2 = \frac{f m_2 r^5}{f m r_2^4} & \left\{ h_3 \hat{r} \left( \frac{5}{2} (\hat{r}_2 \cdot \hat{r})^3 - \frac{3}{2} (\hat{r}_2 \cdot \hat{r}) \right) \right. \\ & \left. + l_3 \left( \frac{15}{2} (\hat{r}_2 \cdot \hat{r})^2 - \frac{3}{2} \right) \left[ \hat{r}_2 - (\hat{r}_2 \cdot \hat{r}) \hat{r} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$h_3 = 0.292, \quad l_3 = 0.015.$$

Зависимость от долготы учтена с помощью двух параметров:

$$l_{21}^{(1)} = 0.0012, \quad l_{22}^{(1)} = 0.0024.$$

Вклады в смещение пункта, пропорциональные  $l_{21}^{(1)}$ ,  $l_{22}^{(1)}$ , равны

$$\begin{aligned} \Delta \vec{R}_3 &= -l_{21}^{(1)} \sin \varphi \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} P_2^{(1)}(\sin \varphi_j) \vec{q}_{j1}, \\ \Delta \vec{R}_4 &= -\frac{1}{2} l_{22}^{(1)} \sin \varphi \cos \varphi \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} P_2^{(2)}(\sin \varphi_j) \vec{q}_{j2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \vec{q}_{j1} &= \sin \varphi \cos(\lambda - \lambda_j) \hat{n} - \cos 2\varphi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{e}, \\ \vec{q}_{j2} &= \cos 2(\lambda - \lambda_j) \hat{n} + \sin \varphi \sin 2(\lambda - \lambda_j) \hat{e}, \end{aligned}$$

и присоединённые функции Лежандра

$$\begin{aligned} P_2^{(1)}(\sin \varphi_j) &= 3 \sin \varphi_j \cos \varphi_j, \\ P_2^{(2)}(\sin \varphi_j) &= 3 \cos \varphi_j^2. \end{aligned}$$

Для мнимых частей чисел  $h$  и  $l$  предложены значения:

$$\begin{aligned} h_{21}^{(I)} &= -0.0025, & l_{21}^{(I)} &= -0.0007, \\ h_{22}^{(I)} &= -0.0022, & l_{22}^{(I)} &= -0.0007. \end{aligned}$$

Вклады в смещение пункта, пропорциональные этим параметрам, равны

$$\begin{aligned}\Delta \vec{R}_5 &= -\frac{3}{4} h_{21}^{(I)} \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} \sin 2\varphi_j \sin 2\varphi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{r}, \\ \Delta \vec{R}_6 &= -\frac{3}{4} h_{22}^{(I)} \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} \cos^2 \varphi_j \cos^2 \varphi \sin 2(\lambda - \lambda_j) \hat{r}, \\ \Delta \vec{R}_7 &= -\frac{3}{2} l_{21}^{(I)} \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} \sin 2\varphi_j \vec{q}_{j3}, \\ \Delta \vec{R}_8 &= +\frac{3}{4} l_{22}^{(I)} \sum_{j=2}^3 \frac{f m_j r^4}{f m r_j^3} \cos^2 \varphi_j \vec{q}_{j4},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\vec{q}_{j3} &= \cos 2\varphi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{n} + \sin \varphi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{e}, \\ \vec{q}_{j4} &= \sin 2\varphi \sin 2(\lambda - \lambda_j) \hat{n} - 2 \cos \varphi \cos 2(\lambda - \lambda_j) \hat{e}.\end{aligned}$$

Зависимость действительных и мнимых частей чисел Лява и Шида от частоты приливной волны  $\omega$  вносит свой вклад в смещение наземных пунктов:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{R}_9 &= \sum_{\omega(2,0)} (a_{2,0}^{(\omega)} P_2(\sin \varphi) \hat{r} + b_{2,0}^{(\omega)} \sin 2\varphi \hat{n}), \\ \Delta \vec{R}_{10} &= \sum_{\omega(2,1)} (a_{2,1}^{(\omega)} \sin 2\varphi \hat{r} + b_{2,1}^{(\omega)} \cos 2\varphi \hat{n} + c_{2,1}^{(\omega)} \sin \varphi \hat{e}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{2,0}^{(\omega)} &= \delta R_{0,1}^{(\omega)} \cos \theta_{20}^{(\omega)} + \delta R_{0,2}^{(\omega)} \sin \theta_{20}^{(\omega)}, \\ b_{2,0}^{(\omega)} &= \delta T_{0,1}^{(\omega)} \cos \theta_{20}^{(\omega)} + \delta T_{0,2}^{(\omega)} \sin \theta_{20}^{(\omega)}, \\ a_{2,1}^{(\omega)} &= \delta R_{1,1}^{(\omega)} \sin(\theta_{21}^{(\omega)} + \lambda) + \delta R_{1,2}^{(\omega)} \cos(\theta_{21}^{(\omega)} + \lambda), \\ b_{2,1}^{(\omega)} &= \delta T_{1,1}^{(\omega)} \sin(\theta_{21}^{(\omega)} + \lambda) + \delta T_{1,2}^{(\omega)} \cos(\theta_{21}^{(\omega)} + \lambda), \\ c_{2,1}^{(\omega)} &= \delta T_{1,1}^{(\omega)} \cos(\theta_{21}^{(\omega)} + \lambda) - \delta T_{1,2}^{(\omega)} \sin(\theta_{21}^{(\omega)} + \lambda).\end{aligned}$$

Вариации потенциала центробежных сил вызывают следующие изменения координат обсерваторий в миллиметрах:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{R}_{11} &= -32 a_m \sin 2\varphi \hat{r} - 9 a_m \cos 2\varphi \hat{n} + 9 b_m \sin \varphi \hat{e}, \\ a_m &= m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda, \quad b_m = m_1 \sin \lambda - m_2 \cos \lambda, \\ m_1 &= x_p - 0.054 - 0.00083 \delta t, \quad m_2 = -y_p + 0.357 + 0.00395 \delta t,\end{aligned}$$

разность  $\delta t$  исчисляется в годах от эпохи J2000.

## 1.2 Исходные данные

Искусственные спутники Земли – настоящая лаборатория методов небесной механики и вычислительной математики. Отметим основные отличия от других небесных объектов. Это и разнообразие позиционных параметров орбит – больших полуосей, эксцентриситетов и углов наклонов, и возмущающие факторы самой различной природы, от геопотенциала, силы сопротивления атмосферы, силы светового давления до притяжения планет.

Способ получения канонических уравнений на основе элементов промежуточной орбиты впервые дан в работе Е.П.Аксёнова [5]. В той же статье с точностью до первого порядка малости выведены формулы связи между каноническими элементами и произвольными постоянными интегрирования. Модификацию канонических уравнений в статье [175] выполнил С.Н.Яшкин.

В монографии [5] профессор Е.П.Аксёнов отмечает: “По-видимому, канонические уравнения являются наиболее удобными для аналитических исследований. Эти уравнения были использованы С.Н.Вашковьяк для построения теории движения спутников Марса [42], Л.П.Насоновой для вычисления вековых возмущений третьего порядка в движении спутника [107] и Н.А.Сорокиным при определении долгопериодических неравенств второго порядка [129].”

Описание особых, резонансных движений небесных тел является важной задачей небесной механики. С запуском искусственных спутников Земли число таких задач пополнилось проблемой “критического” наклона. Решению их в случае близких спутников посвящены статьи С.Н.Яшкина [173] и [174].

Среди первых теорий движения “стационарных” спутников следует отметить работы М.А.Вашковьяка [36] и С.Г.Журавлёва [73, 74].

С.Г.Журавлёв опубликовал в монографии [76] универсальный метод исследования острорезонансных задач небесной механики.

Особого внимания заслуживают работы А.С.Сочиной [133, 134, 135] по эволюции орбитальных элементов геостационарных объектов и спутников на орбитах с критическими наклонами.

Оригинальный метод учёта лунно-солнечных возмущений, реализованный М.А.Вашковьяком [36], существенно улучшил А.А.Кантер [80, 81].

В цикле работ Е.Н.Поляховой подробно рассмотрены возмущения в движении спутника, обусловленные световым давлением. Прекрасный обзор результатов опубликован в специальном издании [121].

Алгоритм учёта возмущающего действия больших планет Солнечной системы на движение искусственных спутников Земли предложил Н.А.Сорокин в статье [131].

Оценка влияния несферичности Луны на движение ИСЗ выполнена в статьях С.Н.Вашковьяк [46] и Н.А.Сорокина [132].

Искусственные спутники Земли с высотой полёта менее 1500 километров испытывают дополнительные ускорения, обусловленные сопротивлением атмосферы и, как правило, продолжительным по времени прохождением объекта в тени Земли.

В книге Т.В.Бордовицкой и В.А.Авдюшева [24] изучены самые современные численные и аналитические методы, даны примеры решения конкретных задач и сравнительные оценки точности.

Численное интегрирование уравнений движения искусственных спутников Земли – отдельная, интересная и трудная задача. Здесь выделяются замечательные исследования М.С.Ярова-Ярового [170, 171, 172].

Заслуживает внимания оригинальный метод [130], разработанный Н.А.Сорокиным. Уравнения движения представлены в виде, позволившем объединить метод Энке и промежуточную орбиту, построенную на основе решения обобщённой задачи двух неподвижных центров.

Коллектив авторов в составе С.К.Татевян, Н.А.Сорокина и С.Ф.Залёткина в статье [141] теоретически и практически развивает неявный одношаговый метод численного интегрирования, берущий начало от работ Е.Эверхарта [186] и Ю.В.Плахова [120].

Метод численного интегрирования уравнений движения позволяет выполнить независимую проверку результатов отдельных этапов построения аналитической теории движения небесных объектов. Об этом аспекте исследова-

ний смотрите, например, работы Е.П.Аксёнова и Л.М.Доможиловой [10, 11], Н.В.Емельянова [69, 70], С.М.Кудрявцева [87, 88].

*Первую группу* исходных данных составляют рекомендации Международного астрономического союза об использовании числовых значений астрономических постоянных и о системах отсчёта пространства-времени [199] и рекомендации Международной службы вращения Земли по составу ускорений, возмущающих движение спутника [189]. Учёт упомянутых рекомендаций необходим для того, чтобы сделать результаты обработки различных экспериментов сопоставимыми.

Для описания движения искусственных спутников приняты во внимание возмущения, обусловленные гравитационным полем Земли, притяжением Луны и Солнца, приливными деформациями упругой Земли и океаническими приливами. Учтены также влияние светового давления и эффект захода объектов в тень Земли. При создании алгоритмов использованы числовые значения коэффициентов модели гравитационного поля Земли с условным названием JGM3 [205]. Алгоритмы включают два свободных параметра, зависящих от формы и ориентации космических аппаратов – эмпирический коэффициент отражения и коэффициент эмпирического ускорения.

Во *вторую группу* входят начальные параметры движения искусственных спутников и наборы данных с результатами траекторных измерений.

Начальные параметры движения большого числа объектов доступны пользователям в виде средних элементов кеплеровской орбиты [206]. Формат данных получил название “двустрочные элементы”. Детальное описание формата содержится в приложении на с.163.

Числовые значения топоцентрических дальностей до искусственных спутников Земли, измеренные с помощью метода лазерной локации, хранятся в виде наборов строк [190]. Каждая порция строк соответствует одному прохождению спутника в поле зрения пункта наблюдений и содержит два-три десятка “нормальных” точек, являющихся результатом процедуры осреднения большого числа “сырых” наблюдений. Точность одной “нормальной” точки находится в интервале от 2 до 10 сантиметров. Текстовый формат данных

получил название “Quick Look”. Детальное описание формата содержится в приложении на с.164.

Таблица 1: Объекты и наблюдения

Спутник	$h_{min}$	$e$	$i$	$n$	$\dot{\omega}$	$\dot{\Omega}$	$N_p$
9306102 <i>Стелла</i>	800	0.0007	98.476	14.27121	-2.9342	0.9695	3000
7501001 <i>Старлет</i>	900	0.0206	49.817	13.82205	3.3041	-3.9476	4000
8606101 <i>Эйджисаи</i>	1500	0.0011	50.010	12.44446	2.5461	-3.0752	8000
7603901 <i>Лагеос</i>	6000	0.0044	109.835	6.38665	-0.2137	0.3425	5000
9207002 <i>Лагеос-2</i>	6000	0.0137	52.650	6.47295	0.4370	-0.6316	5000
8900103 <i>Эталон-1</i>	19500	0.0012	65.312	2.13156	-0.0062	-0.0320	600
8903903 <i>Эталон-2</i>	19500	0.0011	64.778	2.13205	-0.0036	-0.0332	600

В табл.1 для нескольких спутников представлены средние значения минимальной высоты полёта  $h_{min}$  в километрах, эксцентриситета орбиты  $e$ , угла наклона орбиты  $i$  в градусах, среднего движения  $n$  в оборотах за сутки, скорости изменения аргумента перигея  $\dot{\omega}$  в градусах за сутки, скорости изменения долготы восходящего узла  $\dot{\Omega}$  в градусах за сутки и количество “нормальных мест”  $N_p$ , обычно получаемых на интервалах наблюдений протяжённостью один месяц.

Высокоточные лазерные наблюдения искусственных спутников Земли использованы в данной работе в двух аспектах. Они послужат критерием погрешности восстановления орбиты на основе начальных данных в форме средних кеплеровских элементов. С их помощью будет выполнена проверка функциональных возможностей предлагаемой модели движения ИСЗ.

Методы построения модели движения космического аппарата составляют *третью группу* исходных данных.

Во всех центрах анализа применяют *численное интегрирование* дифференциальных уравнений движения [100, 204]. *Численные* теории имеют дело с мгновенными параметрами движения. Проблема восстановления числовых значений таких переменных на основе средних элементов орбиты не может быть решена без дополнительной информации.

Авторы работ [69, 88] представили оригинальные *аналитические теории*,

но не сообщают о систематических испытаниях предлагаемых алгоритмов на основе наблюдений.

В данном исследовании разработаны алгоритмы и предложена модель движения ИСЗ в **численно-аналитической форме** [159].

### 1.2.1 Эволюция элементов орбиты

С помощью наборов данных [206], содержащих “двустрочные элементы”, можно проследить эволюцию параметров орбиты различных объектов.

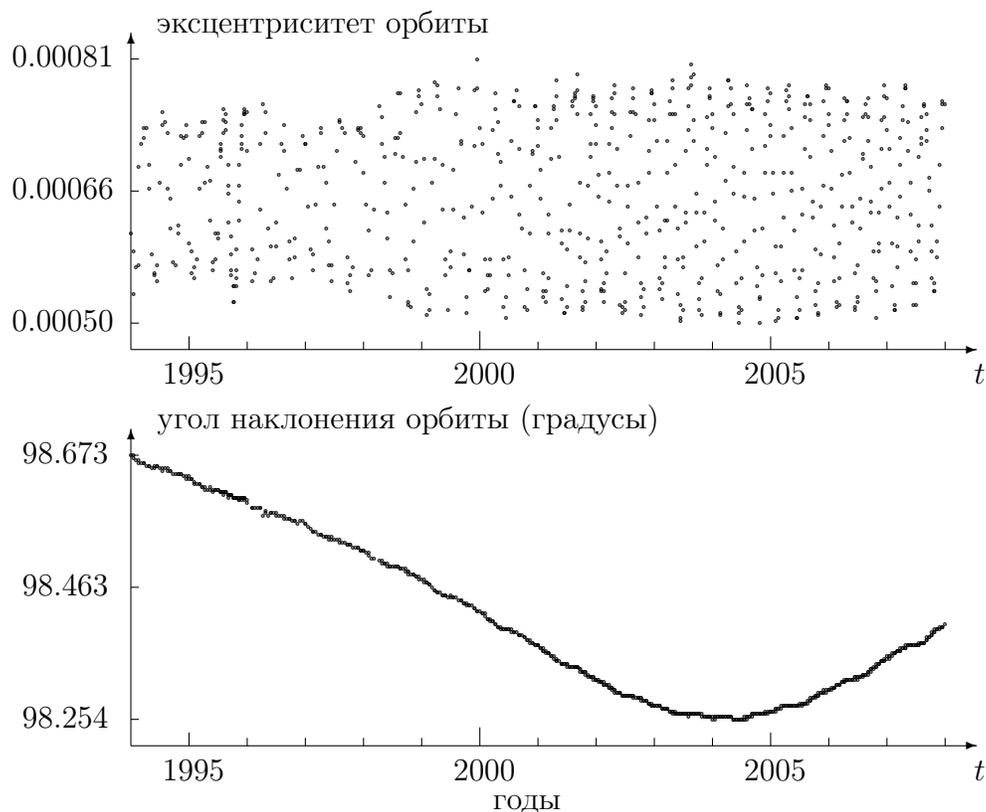


Рис. 1: Стелла, средние элементы орбиты

На рис.1 представлены изменения эксцентриситета и угла наклона орбиты спутника *Стелла* на интервале времени 14 лет.

Эволюция элементов орбит других “геодезических” спутников из табл.1 происходит похожим образом. Разность максимальных и минимальных значений эксцентриситета орбиты не превосходит 0.005. Для значений угла наклона разность всегда менее одного градуса.

### 1.2.2 Уравнения движения

Дифференциальное уравнение в частных производных, представляющее движение частицы с массой  $m_p$  в искривлённом пространстве-времени с метрическим тензором  $g_{\alpha\beta}$  (формулы (4)-(6) на с.20), имеет вид [93]

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = -m_p^2 c^2, \quad (17)$$

где функция  $S$  – действие для частицы,  $g^{\alpha\beta}$  – контравариантный метрический тензор.

В постньютоновском приближении [34]

$$\begin{aligned} g^{00} &= -1 - \frac{2U_E}{c^2} - \frac{2R}{c^2} + \frac{2U_E^2}{c^4}, \\ g^{0i} &= -\frac{1}{c^3} V_i, \\ g^{ij} &= \left(1 - \frac{2U_E}{c^2}\right) \delta^{ij}, \end{aligned}$$

где  $U_E$  – геопотенциал,  $R$  – сумма возмущающих функций, обусловленных действием Луны, Солнца, планет и приливов.

Подстановки  $S \rightarrow S - m_p c^2 t$  и  $S \rightarrow m_p S$  превращают выражение (17) в уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] - U_E - R - K_r = 0 \quad (18)$$

с потенциалом  $U_E + R$  и возмущающим гамильтонианом

$$K_r = +\frac{1}{8} v^2 \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{2} U_E \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{2} U_E \frac{U_E}{c^2} - \frac{1}{c^2} (\vec{V} \vec{v}), \quad (19)$$

обусловленным эффектами общей теории относительности.

Вектор  $\vec{V}$  определён на с.20. Вектор скорости спутника в геоцентрической небесной системе отсчёта обозначен символом  $\vec{v}$ .

Пусть в геоцентрической небесной системе отсчёта задан вектор  $\vec{r}$  с координатами  $x, y, z$ . Параметр  $t$  соответствует шкале всемирного координированного времени. Точка над буквой означает дифференцирование по параметру  $t$ . Тогда

$$v_1 = \dot{x}, \quad v_2 = \dot{y}, \quad v_3 = \dot{z}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.$$

Дифференциальному уравнению в частных производных (18) эквивалентна система трёх дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\partial(U_E + R)}{\partial\vec{r}} + \vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{F}^{(1)} &= \frac{U_E}{c^2 r^2} \left[ 4U_E \vec{r} - v^2 \vec{r} + 4(\vec{r}\vec{v})\vec{v} \right], \\ F_x^{(2)} &= \frac{2fC\omega_z}{c^2 r^3} \left[ \frac{3}{r^2} (yv_3 - zv_2)z + v_2 \right], \\ F_y^{(2)} &= \frac{2fC\omega_z}{c^2 r^3} \left[ \frac{3}{r^2} (zv_1 - xv_3)z - v_1 \right], \\ F_z^{(2)} &= \frac{2fC\omega_z}{c^2 r^3} \left[ \frac{3}{r^2} (xv_2 - yv_1)z \right], \end{aligned}$$

параметр  $C$  – наибольший момент инерции Земли,  $\omega_z = 0.7292115 \cdot 10^{-4}$  радиан в секунду – угловая скорость вращения Земли.

Величина угла наклона спутника, вычисляемая относительно неподвижного экватора геоцентрической небесной опорной системы отсчёта, имеет *вековую* составляющую. Этот эффект, являющийся следствием прецессии оси вращения Земли, не влияет на алгоритмы численного интегрирования, но создаёт дополнительные трудности для аналитических исследований.

В аналитических моделях движения искусственных спутников Земли используют *неинерциальную систему отсчёта*. В предлагаемой работе в качестве основной плоскости выбрана плоскость истинного экватора даты. Начальной точкой является истинная точка весеннего равноденствия (с.22).

Выбранная неинерциальная система вращается относительно небесной опорной системы отсчёта с угловой скоростью  $\vec{\Omega}(t)$ . С точностью до первых степеней малых величин компоненты вектора  $\vec{\Omega}(t)$  равны

$$\begin{aligned} \Omega_x(t) &= -\frac{d}{dt}(\Delta\varepsilon), \\ \Omega_y(t) &= +\dot{\theta}_A + \sin \varepsilon_A \frac{d}{dt}(\Delta\psi), \\ \Omega_z(t) &= -\dot{z}_A - \dot{\zeta}_A - \cos \varepsilon_A \frac{d}{dt}(\Delta\psi). \end{aligned} \quad (21)$$

При этих ограничениях уравнение Гамильтона-Якоби (18) эквивалентно системе канонических уравнений движения [93]

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = +\frac{\partial K}{\partial \vec{p}}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \vec{r}}, \quad (22)$$

где  $\vec{r}$  – вектор в подвижной системе отсчёта,  $\vec{p} = \dot{\vec{r}} + [\vec{\Omega} \times \vec{r}]$  – обобщённый импульс,  $K$  – гамильтониан задачи,

$$K = \frac{1}{2} |\vec{p}|^2 - \vec{\Omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}] - U_E - R - K_r. \quad (23)$$

### 1.2.3 Геопотенциал

Пусть

$fm$  – геоцентрическая гравитационная постоянная;

$r_0$  – экваториальный радиус Земли;

$J_n$  – числовые коэффициенты при зональных гармониках;

$C_{nk}$ ,  $S_{nk}$  – числовые коэффициенты при тессеральных и секториальных гармониках разложения гравитационного поля Земли в ряд по сферическим функциям.

В земной опорной системе отсчёта выражение для геопотенциала вне поверхности Земли имеет вид

$$\begin{aligned} U_E = & +\frac{fm}{r} \\ & - \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin \varphi) \\ & + \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda], \end{aligned} \quad (24)$$

где

$r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$  – геоцентрические расстояние, широта и долгота;

$P_n(\sin \varphi)$  – полиномы Лежандра;

$P_n^{(k)}(\sin \varphi)$  – присоединённые функции Лежандра.

В статье большого коллектива авторов [205] опубликованы числовые значения постоянных  $fm$ ,  $r_0$ ,  $N_{max}$ ,  $\bar{C}_{nk}$ ,  $\bar{S}_{nk}$ , соответствующих модели JGM3.

Нормированные коэффициенты  $\bar{C}_{nk}$ ,  $\bar{S}_{nk}$  и числовые коэффициенты формулы (24) связаны соотношениями:

$$J_n = -\sqrt{2n+1} \bar{C}_{n0},$$

и

$$C_{nk} = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!}} \bar{C}_{nk},$$

$$S_{nk} = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!}} \bar{S}_{nk}.$$

Коэффициент  $\bar{C}_{20}$  по порядку величины близок значению  $1.0 \cdot 10^{-3}$ . Такой же порядок величины имеют как коэффициент при второй зональной гармонике  $J_2$ , так и параметр  $\alpha$ , характеризующий сжатие (сплюснутость) земного эллипсоида. Численные значения нормированных коэффициентов  $\bar{C}_{nk}$  и  $\bar{S}_{nk}$  при  $n \neq 2$  находятся на уровне  $1.0 \cdot 10^{-6}$ . Принято говорить, что коэффициент  $J_2$  является величиной первого порядка малости относительно сжатия. В этой терминологии все остальные коэффициенты разложения гравитационного поля Земли имеют второй порядок малости относительно сжатия, а релятивистское слагаемое  $K_r$  является величиной четвёртого порядка малости.

#### 1.2.4 Численная модель

В алгоритмах численного интегрирования используют уравнения движения объекта, записанные в инерциальной системе отсчёта.

Через  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$  обозначим вектор положения и вектор скорости космического аппарата относительно центра Земли в системе экватора и эклиптики, фиксированных на стандартную эпоху J2000.0 (*геоцентрическая небесная опорная система отсчёта*, с. 17).

Пусть

$\vec{F}_E$  — ускорение, обусловленное геопотенциалом,

$\vec{F}_M$  — ускорение, вызываемое притяжением Луны,

$\vec{F}_S$  — ускорение, вызываемое притяжением Солнца,

$\vec{F}_t$  — ускорение, обусловленное приливами упругой Земли,  
 $\vec{F}_o$  — ускорение, обусловленное океаническими приливами,  
 $\vec{F}_p$  — ускорение, вызываемое притяжением больших планет,  
 $\vec{F}_r$  — ускорение, обусловленное давлением солнечного света,  
 $\vec{F}_a$  — ускорение, обусловленное торможением в атмосфере.

Уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v}, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{F}_E + \vec{F}_M + \vec{F}_S + \vec{F}_t + \vec{F}_o + \vec{F}_p + \vec{F}_r + \vec{F}_a. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Ускорение в движении искусственного спутника, вызываемое внешним телом (Луной, Солнцем или планетой) с массой  $m_p$ , имеет вид

$$\vec{F}_p = -\frac{fm_p}{|\vec{r} - \vec{r}_p|^3} (\vec{r} - \vec{r}_p) - \frac{fm_p}{r_p^3} \vec{r}_p, \quad (26)$$

где

$\vec{r}$  — геоцентрический вектор объекта,

$r = |\vec{r}|$  — модуль геоцентрического вектора объекта,

$\vec{r}_p$  — геоцентрический вектор планеты,

$r_p = |\vec{r}_p|$  — модуль геоцентрического вектора планеты.

Первое слагаемое — это *главная часть* ускорения, второе слагаемое, не зависящее от положения спутника, называют *косвенной частью* [165].

Формуле (26) соответствует потенциал

$$R_p = fm_p \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_p|} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_p)}{r_p^3} \right],$$

также составленный из двух частей, главной и косвенной. Учитывая неравенство  $r < r_p$  и разлагая в ряд величину, обратную расстоянию между спутником и планетой, получим формулу

$$R_p = \frac{fm_p}{r_p} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_p} \right)^n P_n \left( \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_p)}{r r_p} \right), \quad (27)$$

где  $P_n(z)$  — полином Лежандра порядка  $n$ . Суммирование начинается со значения  $n = 2$ . При  $n = 0$  слагаемое ряда не зависит от координат спут-

ника и не принимается во внимание. Слагаемое ряда при  $n = 1$  взаимно уничтожается с косвенной частью.

Выражение для ускорения (26) используется при вычислении правых частей в алгоритме численного интегрирования уравнений движения. Потенциал (27) необходим для проведения аналитических выкладок.

Алгоритм вычисления векторов  $\vec{F}_E$ ,  $\vec{F}_t$  и  $\vec{F}_o$  в небесной системе отсчёта включает в себя дифференцирование выражения для геопотенциала  $U_E$  (с.35), заданного в земной системе отсчёта. Последовательность формул, составляющих этот алгоритм, представлена в приложении на с.167.

Для определения ускорения, обусловленного давлением солнечного излучения, вычисляют вектор положения спутника  $\vec{r}(t) - \vec{r}_S(t')$  относительно Солнца с учётом времени распространения света. Ускорение имеет вид

$$\vec{F}_r = C_r \left( \frac{a_E}{|\vec{r}(t) - \vec{r}_S(t')|} \right)^2 \cdot \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}_S(t')}{|\vec{r}(t) - \vec{r}_S(t')|}, \quad t' = t - \frac{|\vec{r}(t) - \vec{r}_S(t)|}{c}, \quad (28)$$

где  $a_E$  – астрономическая единица,  $c$  – скорость света,  $C_r$  – коэффициент отражения (с.81).

Сопротивление верхней атмосферы Земли в движении спутников учитывается с помощью аэродинамического ускорения, направленного противоположно вектору относительной скорости объекта [64]:

$$\vec{F}_a = -S_b \rho(h) \left| \dot{\vec{r}} - [\vec{\omega}_e \times \vec{r}] \right| \left( \dot{\vec{r}} - [\vec{\omega}_e \times \vec{r}] \right), \quad (29)$$

где

$$S_b = \frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} - \text{баллистический коэффициент,}$$

$$C_D - \text{аэродинамический коэффициент сопротивления, } C_D \approx 2,$$

$A$ ,  $m$  – средняя площадь поверхности и масса космического аппарата,

$\rho(h)$  – плотность атмосферы на высоте  $h$ , единица измерения –  $\text{кг/м}^3$ ,

$\vec{\omega}_e$  – вектор угловой скорости вращения Земли,

$h = r - r_0 \left( 1 - \alpha \frac{z^2}{r^2} \right)$  – высота полёта спутника в километрах над по-

верхностью общеземного эллипсоида,

$r = |\vec{r}|$  – геоцентрическое расстояние объекта,

$z$  – координата объекта по оси аппликат,

$r_0 = 6378.1363$  км – экваториальный радиус Земли,  
 $\alpha = \frac{1}{298.257}$  – сжатие Земли, безразмерный параметр.

Пусть средняя площадь поверхности аппарата задана в квадратных метрах, а масса – в килограммах, тогда для согласования единиц измерений априорное значение величины  $S_b$  следует вычислять по формуле

$$S_b = 10^3 \frac{A}{m}.$$

Плотность атмосферы является сложной функцией параметров, характеризующих солнечную активность и геомагнитную обстановку в атмосфере Земли. Для вычисления значения плотности верхней атмосферы Земли рекомендована модель **ГОСТ Р 25645.166-2004** [17].

### 1.2.5 Приливный потенциал

Первый член суммы (27) является основным в теории приливов:

$$R_p^{(2)} = \frac{f m_p}{r_p} \left( \frac{r}{r_p} \right)^2 P_2 \left( \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_p)}{r r_p} \right).$$

Пусть  $r_p$ ,  $\varphi_p$ ,  $\lambda_p$  – сферические координаты Луны или Солнца, вычисляемые в земной опорной системе отсчёта, тогда

$$\frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_p)}{r r_p} = \sin \varphi \sin \varphi_p + \cos \varphi \cos \varphi_p \cos(\lambda - \lambda_p).$$

Теорема сложения для полиномов Лежандра позволяет записать

$$R_p^{(2)} = R_p^{(20)} + R_p^{(21)} + R_p^{(22)}, \quad (30)$$

где

$$R_p^{(2k)} = \bar{A}_k r^2 \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi) \cos k\lambda + \bar{B}_k r^2 \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi) \sin k\lambda. \quad (31)$$

Функции

$$\begin{aligned} \bar{A}_k &= \frac{1}{5} \frac{f m_p}{r_p^3} \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi_p) \cos k\lambda_p, \\ \bar{B}_k &= \frac{1}{5} \frac{f m_p}{r_p^3} \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi_p) \sin k\lambda_p, \end{aligned} \quad (32)$$

разлагают в ряды. Член ряда определён численным значением амплитуды и аргументом тригонометрической функции, синус или косинус. Аргумент зависит от линейной комбинации среднего звёздного времени  $S_{\oplus}^m$  и фундаментальных аргументов  $l_M$ ,  $l'_S$ ,  $F_M$ ,  $D$ ,  $\Omega_M$ . Аргумент имеет фазу и частоту.

Приливы вызывают дополнительный потенциал

$$R_{pt}^{(2)} = k_{20} \left( \frac{r_0}{r} \right)^5 R_p^{(20)} + k_{21} \left( \frac{r_0}{r} \right)^5 R_p^{(21)} + k_{22} \left( \frac{r_0}{r} \right)^5 R_p^{(22)}, \quad (33)$$

где  $k_{20}$ ,  $k_{21}$ ,  $k_{22}$  – числа Лява. В современной теории приливов эти параметры состоят из действительной и мнимой частей и зависят от частоты приливной волны, совпадающей с частотой, которую имеет аргумент соответствующего слагаемого рядов (32).

Подставляя (31), (32) в (33) и сравнивая с (24), получим

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C}_{2k} &= \frac{1}{5} k_{2k}^{(0)} \frac{f m_p}{f m} \left( \frac{r_0}{r_p} \right)^3 \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi_p) \cos k \lambda_p, \\ \Delta \bar{S}_{2k} &= \frac{1}{5} k_{2k}^{(0)} \frac{f m_p}{f m} \left( \frac{r_0}{r_p} \right)^3 \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi_p) \sin k \lambda_p, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $k_{20}^{(0)}$ ,  $k_{21}^{(0)}$ ,  $k_{22}^{(0)}$  – номинальные значения приливных чисел Лява, не зависящие от частоты приливной волны.

Аналогичную процедуру применяют и для второго члена суммы (27), сферической гармоники третьего порядка:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C}_{3k} &= \frac{1}{7} k_{3k} \frac{f m_p}{f m} \left( \frac{r_0}{r_p} \right)^4 \bar{P}_3^{(k)}(\sin \varphi_p) \cos k \lambda_p, \\ \Delta \bar{S}_{3k} &= \frac{1}{7} k_{3k} \frac{f m_p}{f m} \left( \frac{r_0}{r_p} \right)^4 \bar{P}_3^{(k)}(\sin \varphi_p) \sin k \lambda_p, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $k_{30}$ ,  $k_{31}$ ,  $k_{32}$ ,  $k_{33}$  – числа Лява.

Рекомендовано вычислять малые вариации числовых значений коэффициентов  $\bar{C}_{40}$ ,  $\bar{S}_{40}$ ,  $\bar{C}_{41}$ ,  $\bar{S}_{41}$ ,  $\bar{C}_{42}$ ,  $\bar{S}_{42}$  по формуле

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C}_{4k} &= \frac{1}{5} k_{2k}^{(+)} \frac{f m_p}{f m} \left( \frac{r_0}{r_p} \right)^3 \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi_p) \cos k \lambda_p, \\ \Delta \bar{S}_{4k} &= \frac{1}{5} k_{2k}^{(+)} \frac{f m_p}{f m} \left( \frac{r_0}{r_p} \right)^3 \bar{P}_2^{(k)}(\sin \varphi_p) \sin k \lambda_p. \end{aligned} \quad (36)$$

Зависимость действительных и мнимых частей параметров  $k_{20}$ ,  $k_{21}$ ,  $k_{22}$  от частоты приливной волны  $\omega$  рекомендуется учитывать с помощью формул [189]:

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{C}_{20} &= \sum_{\omega(2,0)} (+a_0^{(\omega)} \cos \theta_{20}^{(\omega)} - b_0^{(\omega)} \sin \theta_{20}^{(\omega)}), \\
\Delta \bar{C}_{21} &= \sum_{\omega(2,1)} (+b_1^{(\omega)} \cos \theta_{21}^{(\omega)} + a_1^{(\omega)} \sin \theta_{21}^{(\omega)}), \\
\Delta \bar{S}_{21} &= \sum_{\omega(2,1)} (+a_1^{(\omega)} \cos \theta_{21}^{(\omega)} - b_1^{(\omega)} \sin \theta_{21}^{(\omega)}), \\
\Delta \bar{C}_{22} &= \sum_{\omega(2,2)} (+a_2^{(\omega)} \cos \theta_{22}^{(\omega)}), \\
\Delta \bar{S}_{22} &= \sum_{\omega(2,2)} (-a_2^{(\omega)} \sin \theta_{22}^{(\omega)}),
\end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\theta_{2k}^{(\omega)} = k (S_{\oplus}^m + 180^\circ) - (j_{k1}^{(\omega)} l + j_{k2}^{(\omega)} l' + j_{k3}^{(\omega)} F + j_{k4}^{(\omega)} D + j_{k5}^{(\omega)} \Omega).$$

Численные значения амплитуд и коэффициентов

$$a_k^{(\omega)}, b_k^{(\omega)}, j_{k1}^{(\omega)}, j_{k2}^{(\omega)}, j_{k3}^{(\omega)}, j_{k4}^{(\omega)}, j_{k5}^{(\omega)}$$

содержатся в специальных таблицах [189].

Динамические эффекты, обусловленные океаническими приливами, предлагается учитывать таким же образом:

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{C}_{nk} &= F_{nk} \sum_{\omega(n,k)} [(C_{nk}^{\omega+} + C_{nk}^{\omega-}) \cos \theta_{nk}^{(\omega)} + (S_{nk}^{\omega+} + S_{nk}^{\omega-}) \sin \theta_{nk}^{(\omega)}], \\
\Delta \bar{S}_{nk} &= F_{nk} \sum_{\omega(n,k)} [(S_{nk}^{\omega+} - S_{nk}^{\omega-}) \cos \theta_{nk}^{(\omega)} - (C_{nk}^{\omega+} - C_{nk}^{\omega-}) \sin \theta_{nk}^{(\omega)}],
\end{aligned} \tag{38}$$

где

$C_{nk}^{\omega\pm}$ ,  $S_{nk}^{\omega\pm}$ ,  $\theta_{nk}^{(\omega)}$  – амплитуды и аргумент приливной волны порядка  $n$  и степени  $k$ , имеющей частоту  $\omega$  [185],

$F_{nk}$  – численные коэффициенты.

Пусть

$f = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$  – гравитационная постоянная,

$g_e = 9.7803278 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения на экваторе,

$\rho_w = 1025 \text{ кг/м}^3$  – плотность морской воды,

тогда

$$F_{nk} = \frac{4\pi f \rho_w}{g_e} \frac{1}{N_{nk}} \left( \frac{1 + k'_n}{2n + 1} \right),$$

где  $k'_n$  – коэффициенты нагрузочной деформации,

$$N_{n0} = \sqrt{2n+1}, \quad N_{nk} = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!}} \quad \text{при } k > 0.$$

Потенциал центробежных сил изменяется по причине движения полюсов. Деформации Земли, вызванные этим эффектом, приводят к появлению дополнительного потенциала. Влияние его предложено учитывать с помощью поправок [189]

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C}_{21} &= -1.333 \cdot 10^{-9} (m_1 - 0.0115m_2), \\ \Delta \bar{S}_{21} &= -1.333 \cdot 10^{-9} (m_2 + 0.0115m_1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= +x_p - 0.054 - 0.00083 \delta t, \\ m_2 &= -y_p + 0.357 + 0.00395 \delta t, \end{aligned}$$

текущие значения координат полюса  $x_p$ ,  $y_p$  измеряются в секундах дуги, разность  $\delta t$  исчисляется в годах от эпохи J2000.

### 1.3 “Стационарный” объект

“Стационарные” спутники совершают приблизительно один оборот за одни земные сутки. Многие из них являются управляемыми объектами. С помощью специальных двигателей несколько раз в год выполняется коррекция среднего движения и угла наклона орбиты спутника. В результате таких действий объект продолжительное время находится в экваториальной плоскости Земли и с точностью до нескольких угловых минут имеет заданную географическую долготу. Когда управление параметрами движения объекта прекращают, начинается эволюция элементов орбиты под действием гравитационных сил и сил, вызываемых давлением солнечного излучения.

Одним из таких объектов является COMSTAR 4 (номер 81018A по каталогу КОСПАР). Он был запущен на “стационарную” орбиту в 1981 году и 20 лет отработал в “точке стояния” над восточным побережьем Южной Америки. После окончания активной стадии работы объект был переведён в область орбиты с географической долготой около  $75^\circ$ .

На основе средних элементов орбиты в формате “NORAD” (с.163) вычислим начальный вектор состояния спутника. На интервале времени 55 лет выполним численное интегрирование дифференциальных уравнений движения с учётом ускорений, обусловленных геопотенциалом, притяжением Луны и Солнца и световым давлением.

На рис. 2 (с.44) представлены графики изменения оскулирующих элементов орбиты и географической долготы спутника, вычисленных в момент прохождения восходящего узла. Один из периодов изменения эксцентриситета орбиты близок к 11 годам, а минимальное и максимальное числовые значения эксцентриситета различаются более чем в 5 раз. В случае с углом наклона ситуация ещё более интересная: в продолжение 27 лет этот элемент орбиты убывал от 15 градусов до почти нулевого значения, а затем начал возрастать. Интересен также следующий эффект: сдвиг по фазе в вариациях большой полуоси и географической долготы.

Эволюция угла наклона орбиты показывает большие отличия как по амплитуде, так и по периодам колебаний в сравнении с соответствующими значениями для “геодезических” спутников (рис.1 на с.32).

Амплитуды колебаний большой полуоси и эксцентриситета орбиты “стационарных” объектов сравнимы с соответствующими значениями для “геодезических” спутников (рис.1 на с.32). Эволюция угла наклона орбиты показывает большие отличия как по амплитуде, так и по периодам колебаний. Для описания движения искусственных спутников Земли, находящихся на “стационарных” орбитах, необходима разработка **специальных** моделей.

## 1.4 Промежуточный потенциал

В аналитических теориях движения ИСЗ выражение (24) (с.35) представляют в виде суммы двух функций:

$$U_E = W + R_E,$$

*промежуточного потенциала*  $W$  и возмущающей функции  $R_E$ .

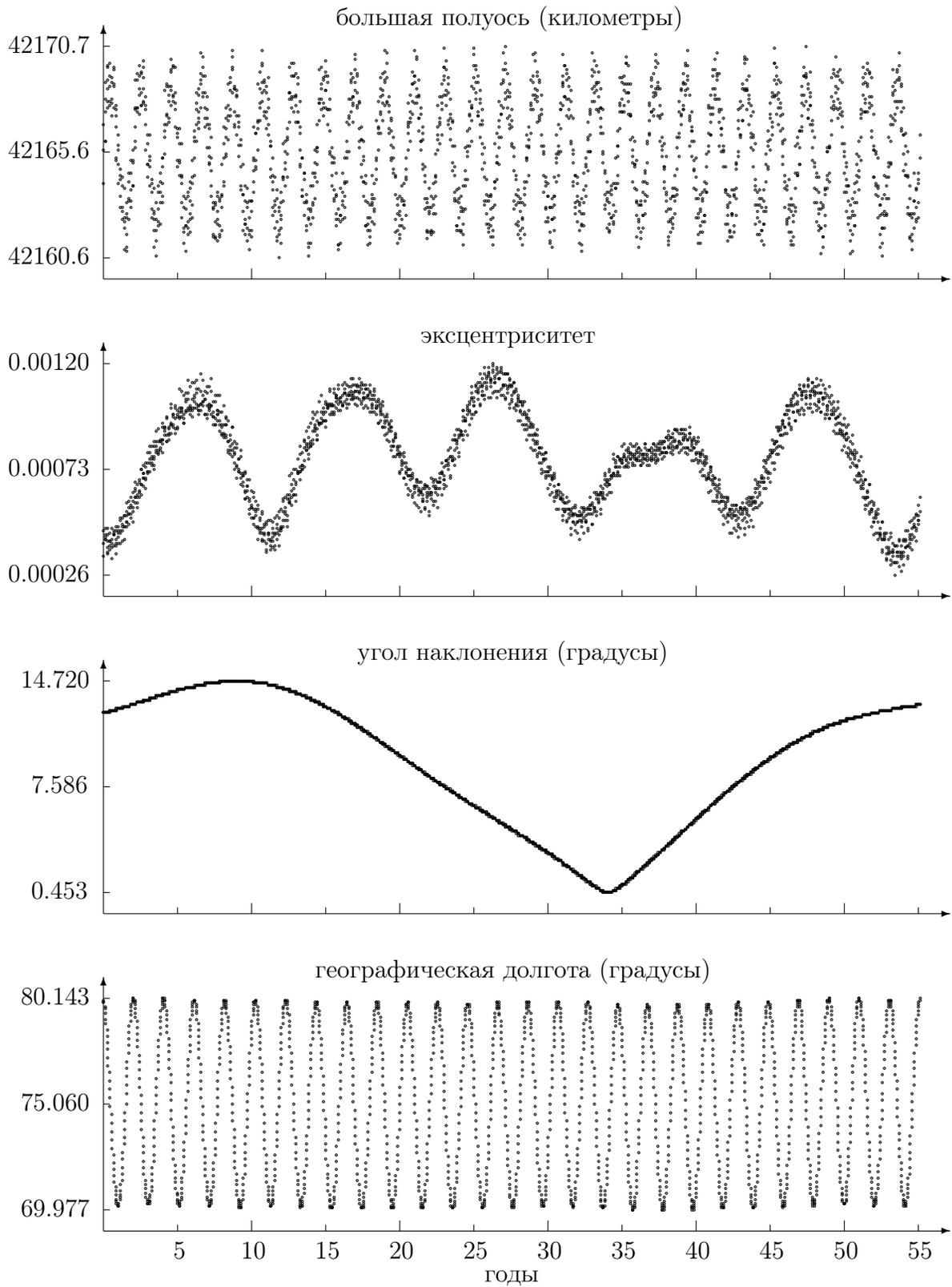


Рис. 2: Стационарный объект

Потенциал  $W$  выбирают так, чтобы, с одной стороны, он включал в себя самые существенные по величине слагаемые, и, с другой стороны, уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] - W = 0 \quad (39)$$

можно было проинтегрировать. Общий интеграл уравнения и шесть произвольных постоянных определяют *промежуточную орбиту*. Неравенства, обусловленные влиянием как возмущающей функции  $R_E$ , так и других факторов, вычисляются с помощью теории возмущений [2].

Если положить

$$W = \frac{fm}{r} \quad (40)$$

и использовать сферические координаты, то уравнение Гамильтона-Якоби (39) можно проинтегрировать. Решением является кеплеровская промежуточная орбита.

Кеплеровская промежуточная орбита послужила основой для фундаментальных исследований А.М.Фоминова [154, 155]. Численно-аналитический метод для вычисления возмущений кеплеровской орбиты впервые применил М.А.Вашковьяк [36, 37]. Этот же подход для решения своей задачи использовала И.В.Тупикова [147, 148].

Пусть

$$J'_n = -\frac{1}{2} \left( \frac{c}{r_0} \right)^n [(1 + \sqrt{-1}\sigma)(\sigma + \sqrt{-1})^n + (1 - \sqrt{-1}\sigma)(\sigma - \sqrt{-1})^n], \quad (41)$$

где  $c$  и  $\sigma$  – вещественные постоянные,

$$c = r_0 \left[ J_2 - \left( \frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (42)$$

$$\sigma = \frac{J_3}{2J_2} \left[ J_2 - \left( \frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}},$$

и

$$J'_2 = J_2, \quad J'_3 = J_3.$$

Если положить

$$W = \frac{fm}{r} - \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J'_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi), \quad (43)$$

то

$$\begin{aligned} R_E = & -\frac{fm}{r} \sum_{n=4}^{N_{max}} (J_n - J'_n) \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \\ & + \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{k=1}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda]. \end{aligned} \quad (44)$$

Промежуточный потенциал (41) – (43) впервые был предложен Е.П.Аксёновым, Е.А.Гребениковым и В.Г.Дёминым [7]. Потенциал  $W$  может рассматриваться как силовая функция задачи двух неподвижных центров с комплексно-сопряжёнными массами  $(m/2)(1 + \sqrt{-1}\sigma)$  и  $(m/2)(1 - \sqrt{-1}\sigma)$ , удалёнными друг от друга на мнимое расстояние, равное  $2\sqrt{-1}c$ .

Задачу с такой силовой функцией называют *обобщённой задачей двух неподвижных центров* или задачей Грёдеакса [98].

После перехода к сжатым сфероидальным координатам  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $w$ , которые связаны с прямоугольными координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  формулами

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cos w, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \sin w, \\ z &= c\sigma + \xi\eta, \end{aligned} \quad (45)$$

обобщённая задача двух неподвижных центров интегрируема в квадратурах. Обращение квадратур впервые выполнил Е.П.Аксёнов в работе [4].

В промежуточной орбите, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров, учтено влияние второй, третьей и, частично, четвёртой зональных гармоник разложения гравитационного поля Земли. Неравенства, обусловленные аномальной частью геопотенциала  $R_E$  (формула (44)), имеют второй порядок малости относительно сжатия Земли.

Теория движения ИСЗ, использующая промежуточную орбиту, основанную на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров, была построена Е.П.Аксёновым и изложена в монографии [5]. Результаты обработки наблюдений содержатся в статьях [8, 9].

Более детальная по количеству принимаемых во внимание возмущающих факторов аналитическая теория была разработана К.В.Холшевниковым и Е.В.Тимошковой [157, 142, 143].

Формулы для учёта влияния возмущающих факторов с точностью до третьего порядка относительно малого параметра – сжатия Земли – были получены Н.В.Емельяновым [68, 69] и В.А.Тамаровым [139].

## 1.5 Канонические преобразования

С помощью обобщённых координат  $\vec{r}$  и обобщённых импульсов  $\vec{p}$  запишем канонические уравнения в неинерциальной системе отсчёта (выражение (22) на с.35) в виде:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial (K_0 - K_2)}{\partial \vec{p}}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial (K_0 - K_2)}{\partial \vec{r}}. \quad (46)$$

В векторных уравнениях (46)  $K_0$  является гамильтонианом обобщённой задачи двух неподвижных центров, а возмущающая функция  $K_2$  состоит из слагаемых, имеющих второй порядок малости относительно сжатия (формула (23)):

$$K_0 = \frac{1}{2} |\vec{p}|^2 - W, \quad (47)$$

$$K_2 = R_E + R + \vec{\Omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}] + K_r. \quad (48)$$

Интегрирование уравнений с гамильтонианом  $K_0$  изложено в монографии профессора Е.П.Аксёнова [5]. Система имеет интеграл энергии. Произвольная постоянная интегрирования, связанная с интегралом энергии, была обозначена символом  $\alpha_1$ . Характеристическая функция  $K_0$  была приравнена произвольной постоянной  $\alpha_1$ . После перехода к сжатым сфероидальным координатам (45) было составлено уравнение Гамильтона – Якоби:

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2 + c^2}{\xi^2 + c^2\eta^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + c^2\eta^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \eta} \right)^2 \\ + \frac{1}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \left( \frac{\partial S}{\partial w} \right)^2 = \frac{2fm(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + 2\alpha_1. \end{aligned} \quad (49)$$

Полный интеграл уравнения был найден методом разделения переменных:

$$S = \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{\xi^2 + c^2} d\xi + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\sqrt{F(\eta)}}{1 - \eta^2} d\eta + \alpha_3 w, \quad (50)$$

где  $\alpha_3$  – произвольная постоянная,  $\xi_1$  и  $\eta_1$  – постоянные, а многочлены четвёртой степени  $\Phi(\xi)$  и  $F(\eta)$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\xi) &= (\xi^2 + c^2)(2\alpha_1\xi^2 + 2fm\xi - \alpha_2^2) + c^2\alpha_3^2, \\ F(\eta) &= (1 - \eta^2)(2\alpha_1c^2\eta^2 - 2fmc\sigma\eta + \alpha_2^2) - \alpha_3^2, \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

где  $\alpha_2^2$  – ещё одна, третья произвольная постоянная.

Общий интеграл будет даваться уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{c^2 \eta^2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} &= t + \beta_1, \\ - \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\alpha_2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\alpha_2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} &= \beta_2, \\ - \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{c^2 \alpha_3 d\xi}{(\xi^2 + c^2) \sqrt{\Phi(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\alpha_3 d\eta}{(1 - \eta^2) \sqrt{F(\eta)}} &= w - \beta_3, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_3$  – произвольные постоянные, и

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} &= \frac{dt}{\xi^2 + c^2\eta^2}, \\ \frac{d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} &= \frac{dt}{\xi^2 + c^2\eta^2}, \\ (1 - \eta^2)(\xi^2 + c^2) dw &= \alpha_3 dt. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

С помощью новой независимой переменной  $\tau$ , связанной с временем  $t$  дифференциальным соотношением

$$dt = (\xi^2 + c^2\eta^2) d\tau, \quad (54)$$

и общего интеграла задачи (52), (53) можно записать две эллиптические квадратуры

$$\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} = \tau + c_3, \quad \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} = \tau + c_4, \quad (55)$$

где  $c_3$  и  $c_4$  – постоянные интегрирования, и два эллиптических интеграла, первый для вычисления долготы

$$w = \alpha_3 \int_0^\tau \frac{\xi^2 + c^2 \eta^2}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} d\tau + c_5, \quad (56)$$

а второй для установления неявной зависимости переменных  $t$  и  $\tau$

$$t - t_0 = \int_0^\tau (\xi^2 + c^2 \eta^2) d\tau + c_6. \quad (57)$$

В уравнениях (56) и (57)  $c_5$  и  $c_6$  – произвольные постоянные, а  $t_0$  – начальный момент времени.

Далее в монографии [5] канонические уравнения (46) в переменных  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$  были преобразованы в канонические уравнения с использованием канонических элементов  $L$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $h$  промежуточной орбиты, построенной на основе решения обобщённой задачи двух неподвижных центров:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial H}, \end{aligned} \quad (58)$$

где  $K = -\alpha_1 + K_2$  – гамильтониан системы.

В случае отсутствия возмущений  $K_2 = 0$ , и система (58) имеет решение

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0(t_0), & l(t) &= \dot{l}(t - t_0) + l_0(t_0), \\ G(t) &= G_0(t_0), & g(t) &= \dot{g}(t - t_0) + g_0(t_0), \\ H(t) &= H_0(t_0), & h(t) &= \dot{h}(t - t_0) + h_0(t_0), \end{aligned} \quad (59)$$

причём скорости изменения угловых переменных

$$\dot{l} = \frac{n_0}{1 - \lambda}, \quad \dot{g} = \frac{n_0 \nu}{1 - \lambda}, \quad \dot{h} = \frac{n_0 \mu}{1 - \lambda}, \quad (60)$$

являются постоянными величинами.

Отметим следующий факт: необходимо знать только *частные производные* от гамильтониана  $K$  по каноническим элементам, представлять же гамильтониан в виде явной функции переменных действия  $L, G, H$  нет никакой необходимости.

Формулы для вычисления канонических элементов  $L, G, H$  получены в монографии [5] с точностью до первого порядка относительно сжатия. Модификацию канонических уравнений в статье [175] выполнил С.Н.Яшкин.

Приближённое решение уравнений (58) может быть получено с помощью метода канонических преобразований [156].

Выполним переход от оскулирующих элементов  $L, G, H, l, g, h$  к новым переменным  $L', G', H', l', g', h'$ . Функцию преобразования и вековой гамильтониан обозначим, соответственно,  $S_2$  и  $K_2^*$ . Эти функции, как и возмущающий гамильтониан  $K_2$ , имеют *второй порядок* малости относительно сжатия.

В новом гамильтониане  $K_2^*(t, L', G', H', l', g', h')$  оставим те слагаемые возмущающей функции  $K_2$ , период изменения которых превышает несколько суток. Функцию преобразования  $S_2$  найдём по формуле

$$S_2 = \int (K_2 - K_2^*) dt. \quad (61)$$

С точностью до второго порядка относительно малого параметра, сжатия Земли, выражения  $S_2, K_2, K_0^* = -\alpha_1, K_2^*$  можно считать функциями как оскулирующих элементов  $L, G, H, l, g, h$ , так и новых переменных  $L', G', H', l', g', h'$ .

Новые переменные могут быть названы “средними” или “сглаженными” элементами орбиты. В изменениях “сглаженных” параметров отсутствуют вариации с малым периодом. Между двумя наборами переменных с точностью до *второго порядка малости* существует простая связь:

$$\begin{aligned} L &= L' + \frac{\partial S_2}{\partial l'}, & l &= l' - \frac{\partial S_2}{\partial L'}, \\ G &= G' + \frac{\partial S_2}{\partial g'}, & g &= g' - \frac{\partial S_2}{\partial G'}, \\ H &= H' + \frac{\partial S_2}{\partial h'}, & h &= h' - \frac{\partial S_2}{\partial H'}. \end{aligned} \quad (62)$$

## 1.6 “Осреднённые” уравнения

Уравнения движения, записанные в новых переменных, назовём “осреднёнными” уравнениями. Они сохраняют каноническую форму и имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dL'}{dt} &= +\frac{\partial K_2^*}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= +\frac{\partial \alpha_1}{\partial L'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial L'}, \\ \frac{dG'}{dt} &= +\frac{\partial K_2^*}{\partial g'}, & \frac{dg'}{dt} &= +\frac{\partial \alpha_1}{\partial G'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial G'}, \\ \frac{dH'}{dt} &= +\frac{\partial K_2^*}{\partial h'}, & \frac{dh'}{dt} &= +\frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'}. \end{aligned} \quad (63)$$

## 1.7 Постановка задачи

Применение численно-аналитического метода построения модели движения искусственных спутников Земли заключается:

- в разработке алгоритма вычисления параметров промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров, с точностью, ограниченной только возможностями компьютера;
- в разработке алгоритма вычисления частных производных от любых параметров движения по позиционным, угловым и каноническим элементам обобщённой задачи двух неподвижных центров с точностью, ограниченной только возможностями компьютера;
- в разработке алгоритма преобразования возмущающей функции в сумму слагаемых, зависящих от параметров промежуточной орбиты, с точностью, ограниченной только возможностями компьютера;
- в разработке алгоритмов аналитического интегрирования слагаемых возмущающей функции и выделения слагаемых “осреднённого” гамильтониана;
- в разработке алгоритмов численного интегрирования “осреднённых” уравнений движения и учёта короткопериодических неравенств;
- в определении параметров модели на основе наблюдений.

## 2 Основные алгоритмы

### 2.1 Промежуточная орбита

В монографии Е.П.Аксёнова [5] получены формулы в буквенном виде. Зависимость между переменными в этих формулах – явная. Точность вычисления промежуточной орбиты ограничена вторым порядком малости относительно сжатия Земли. Исследования Е.П.Аксёнова, Н.В.Емельянова и В.А.Тамарова [12] показали, что формулы удовлетворяют многим практическим приложениям. С помощью специальной программы “универсальный пуассоновский процессор” [31], созданной коллективом под руководством В.А.Брумберга, Н.В.Емельянов [67] довел решение до четвёртого порядка относительно малого параметра – сжатия Земли.

В данной работе предлагается другой подход [159]. С помощью неявных соотношений между переменными будет построен алгоритм для проведения расчётов с точностью, ограниченной только возможностями компьютера. Совокупность формул, выражающая как явные, так и неявные зависимости между переменными, становится *алгоритмом* для решения поставленной задачи и может быть запрограммирована. Входными данными вычислительной процедуры будут числовые значения величин  $fm$ ,  $c$ ,  $\sigma$  и начальный вектор состояния. Результатом станут численные значения параметров промежуточной орбиты.

#### 2.1.1 От вектора состояния к параметрам орбиты

Пусть для начального момента времени  $t = t_0$  известны прямоугольные координаты  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $z = z_0$  и скорости  $\dot{x} = \dot{x}_0$ ,  $\dot{y} = \dot{y}_0$ ,  $\dot{z} = \dot{z}_0$ . Требуется определить элементы промежуточной орбиты  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$  и угловые переменные  $l_0$ ,  $g_0$ ,  $h_0$  на момент  $t_0$ .

Сначала по известным координатам и их производным находим постоянные интегрирования  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ . Затем определяем группу позиционных элементов  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$ . После чего найдём начальные значения  $l_0$ ,  $g_0$ ,  $h_0$ .

### 2.1.2 Постоянные интегрирования $\alpha_1$ , $\alpha_2^2$ , $\alpha_3$

Введём следующие обозначения [5]

$$\begin{aligned}\bar{r}_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - c\sigma)^2, \\ V_0^2 &= \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2, \\ r'_0 &= x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + (z_0 - c\sigma)\dot{z}_0.\end{aligned}\tag{64}$$

Для момента  $t = t_0$  имеем

$$\begin{aligned}\xi_0^2 &= \frac{\bar{r}_0^2 - c^2}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4c^2(z_0 - c\sigma)^2}{(\bar{r}_0^2 - c^2)^2}} \right], \\ \eta_0 &= \frac{z_0 - c\sigma}{\xi_0}, \\ \cos w_0 &= \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \\ \sin w_0 &= \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}},\end{aligned}\tag{65}$$

где через  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $w_0$  обозначены сфероидальные координаты для начального момента времени.

Начальные значения производных от сфероидальных координат по времени  $t$  равны

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_0 &= \frac{\xi_0 r'_0 - c^2 \eta_0 \dot{z}_0}{\xi_0^2 + c^2 \eta_0^2}, \\ \dot{\eta}_0 &= \frac{\dot{z}_0 - \dot{\xi}_0 \eta_0}{\xi_0}, \\ \dot{w}_0 &= \frac{x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0}{(\xi_0^2 + c^2)(1 - \eta_0^2)}.\end{aligned}\tag{66}$$

Численные значения произвольных постоянных интегрирования определены формулами [5]

$$\begin{aligned}2\alpha_1 &= V_0^2 - \frac{2fm(\xi_0 - c\sigma\eta_0)}{\xi_0^2 + c^2\eta_0^2}, \\ \alpha_2^2 &= \bar{r}_0^2 V_0^2 - r'_0{}^2 - c^2 \dot{z}_0^2 + \frac{2fm\xi_0\eta_0(c^2\eta_0 + c\sigma\xi_0)}{\xi_0^2 + c^2\eta_0^2}, \\ \alpha_3 &= \dot{x}_0 y_0 - y_0 \dot{x}_0.\end{aligned}\tag{67}$$

### 2.1.3 Позиционные параметры $a, e, \delta, \delta^*$

Методом итераций на основе уравнений

$$2\alpha_1 = -\frac{fm}{a} [1 - \varepsilon^2(1 - e^2)(1 - \delta^2)Q], \quad (68)$$

$$\alpha_2^2 = +fma(1 - e^2) [1 + (2\varepsilon^2(1 + e^2) + \varepsilon^4(1 - e^2)^2)(1 - \delta^2)Q], \quad (69)$$

$$\alpha_3^2 = +fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [1 + 2\varepsilon^2(1 + e^2) + \varepsilon^4(1 - e^2)^2] Q, \quad (70)$$

где

$$\varepsilon = \frac{c}{a(1 - e^2)}, \quad (71)$$

$$Q = \frac{1 - 2\varepsilon\sigma\delta - \varepsilon^2\delta^2(1 - e^2)}{1 + 2\varepsilon^2\delta^2(1 + e^2) + \varepsilon^4\delta^4(1 - e^2)^2}, \quad (72)$$

находим числовые значения величин

$$a, e, \delta.$$

Обозначим  $\delta^* = -\delta + \Delta\delta$ . Для вычисления поправки  $\Delta\delta$  используем неявное уравнение

$$\Delta\delta = \frac{2fmc\sigma(1 - \eta_2^2)}{(2\alpha_1c^2 - \alpha_2^2) + 2fmc\sigma\eta_1 - 2\alpha_1c^2(\eta_1^2 + \eta_2^2)}, \quad (73)$$

в котором

$$\eta_1 = \delta^*, \quad \eta_2 = \delta. \quad (74)$$

Параметр  $\varepsilon^2$  является величиной первого порядка малости относительно сжатия. При вычислениях по формулам (68) – (73) с точностью, ограниченной возможностями компьютера, достаточно выполнить 7 итераций.

Определим также числовые значения величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$

$$\xi_1 = a(1 - e), \quad \xi_2 = a(1 + e). \quad (75)$$

Далее последовательно найдём числовые значения параметров

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_2, \quad \bar{e}, \quad k_2^2, \quad \bar{k}_2^2, \\ \sigma_1, \quad s, \quad \hat{k}_1^2, \quad k_1^2, \quad d, \quad \gamma, \\ \nu, \quad \varkappa_{2j}, \quad \bar{\varkappa}_{2j}. \end{aligned} \quad (76)$$

Величины  $\bar{\sigma}_2$ ,  $\bar{e}$ ,  $k_2^2$ ,  $\bar{k}_2^2$  определены выражениями

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_2 &= \sqrt{-2\alpha_1 n' n'' (1 - k_2^2)}, \\ \bar{e} &= \frac{n' - n''}{n' + n''}, \\ k_2^2 &= \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2 - (n' - n'')^2}{4n' n''}, \\ \bar{k}_2^2 &= -\frac{k_2^2}{1 - k_2^2}.\end{aligned}\tag{77}$$

Вспомогательные величины  $n'$ ,  $n''$  равны

$$\begin{aligned}n' &= \sqrt{\xi_2^2 - 2p\xi_2 + p^2 + q^2}, \\ n'' &= \sqrt{\xi_1^2 - 2p\xi_1 + p^2 + q^2},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}p &= -\frac{fm}{2\alpha_1} - a, \\ p^2 + q^2 &= \frac{c^2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_1 a^2 (1 - e^2)}.\end{aligned}\tag{78}$$

Параметры  $\sigma_1$ ,  $s$ ,  $\hat{k}_1^2$ ,  $k_1^2$ ,  $d$ ,  $\gamma$  определены выражениями

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sqrt{-2\alpha_1 m' m'' (1 + \hat{k}_1^2)}, \\ s &= \frac{m'' \eta_2 - m' \eta_1}{m' + m''}, \\ \hat{k}_1^2 &= \frac{c^2(\eta_2 - \eta_1)^2 + (m' - m'')^2}{4m' m''}, \\ k_1^2 &= \frac{\hat{k}_1^2}{1 + \hat{k}_1^2}, \\ d &= \frac{m'' - m'}{m' + m''}, \\ \gamma &= \frac{m'' \eta_2 + m' \eta_1}{m' + m''}.\end{aligned}\tag{79}$$

Вспомогательные величины  $m'$ ,  $m''$  равны

$$\begin{aligned}m' &= \sqrt{q'^2 - p'^2 + 2p'\eta_2 - c^2\eta_2^2}, \\ m'' &= \sqrt{q'^2 - p'^2 + 2p'\eta_1 - c^2\eta_1^2},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p' &= \frac{fm}{2\alpha_1} c\sigma - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} c^2, \\ q'^2 - p'^2 &= -\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1} + c^2(1 - \eta_2^2 - \eta_1\eta_2 - \eta_1^2) + \frac{2fm c\sigma(\eta_1 + \eta_2)}{2\alpha_1}. \end{aligned}$$

Числовое значение параметра  $\nu$  равно

$$\nu = +\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_2} \frac{\mathbf{K}(\bar{k}_2)}{\mathbf{K}(k_1)} - 1, \quad (80)$$

а параметры  $\varkappa_{2j}$ ,  $\bar{\varkappa}_{2j}$  определены выражениями

$$\begin{aligned} \varkappa_{2j} &= +\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_2} \frac{1}{\mathbf{K}(k_1)} \frac{1}{j} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} C_{2n}^{m+j} (\bar{k}_2^2)^n, \\ \bar{\varkappa}_{2j} &= -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\mathbf{K}(k_1)} \frac{1}{j} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} C_{2n}^{m+j} (k_1^2)^n, \end{aligned} \quad (81)$$

где  $\mathbf{K}(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k$ ,  
 $C_n^k$  – “биномиальные коэффициенты”:

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Разложение для  $\mathbf{K}(k)$  имеет вид

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 (k^2)^n \right\}. \quad (82)$$

Ряд сходится при  $k < 1$ .

Параметр  $\nu$  является малой величиной первого порядка относительно сжатия. Параметры  $\varkappa_{2j}$ ,  $\bar{\varkappa}_{2j}$  пропорциональны сжатию в степени  $j$ , их числовые значения быстро убывают при увеличении индекса  $j$ . По этой причине верхний предел знака суммирования в формулах (81) и (82), равный бесконечности, можно с учётом вычислительной точности заменить на некоторое целое число  $M$ . Коэффициент при второй зональной гармонике разложения геопотенциала имеет порядок  $10^{-3}$ , и численное значение  $M = 7$  обеспечит точность вычислений с 20 значащими цифрами.

Определим далее числовые значения величин

$$n_0 = \frac{\sqrt{(-2\alpha_1)^3}}{fm}, \quad e^* = \frac{(-2\alpha_1)ae}{fm}, \quad (83)$$

и параметров

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}\sqrt{\bar{\gamma}} \operatorname{sign}(\alpha_3) (\sqrt{A-B+C} + \sqrt{A+B+C}), \\ \beta &= \frac{1}{2}\sqrt{\bar{\gamma}} \operatorname{sign}(\alpha_3) (\sqrt{A-B+C} - \sqrt{A+B+C}), \\ \bar{\gamma} &= \frac{4}{(\sqrt{A-B+C} + \sqrt{A+B+C})^2 - 4C}, \end{aligned} \quad (84)$$

где

$$A = 1 - \gamma^2, \quad B = 2(s\gamma - d), \quad C = d^2 - s^2.$$

Для вычисления параметров

$$\alpha'_0, \beta_0, \mu, \gamma_0, \gamma'_0, \lambda \quad (85)$$

и коэффициентов периодических членов

$$\alpha_j^p, \beta_j^f, \gamma_j^p, \gamma_j^f, \quad (j = 1, \dots, 2M), \quad (86)$$

имеющих первый и более высокие порядки малости относительно сжатия, разработан алгоритм, включающий процедуры умножения и деления многочленов и процедуру интегрирования функции косинус произвольного угла, возведённой в любую целую степень.

#### 2.1.4 Алгоритм операций с полиномами

Дифференциальные соотношения между независимой переменной  $\tau$  и угловыми переменными  $\tilde{\varphi}$ ,  $\psi$  имеют вид

$$d\tau = \frac{1}{\sigma_1} \frac{d\tilde{\varphi}}{\sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}} \quad \text{и} \quad d\tau = \frac{1}{\bar{\sigma}_2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \bar{k}_2^2 \cos^2 \psi}},$$

где параметры  $k_1^2$  и  $\bar{k}_2^2$  являются величинами первого порядка малости относительно сжатия.

Для дифференциальных соотношений справедливы разложения

$$d\tau = \frac{1}{\sigma_1} \left[ 1 + \sum_{n=1}^M \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k_1^{2n} (\cos \tilde{\varphi})^{2n} \right] d\tilde{\varphi}, \quad (87)$$

$$d\tau = \frac{1}{\bar{\sigma}_2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^M \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \bar{k}_2^{2n} (\cos \psi)^{2n} \right] d\psi, \quad (88)$$

где верхний предел суммирования, равный бесконечности, заменён на конечное число  $M = 7$ . Правые части равенств (87) и (88) можно рассматривать как многочлены от переменных  $\cos \tilde{\varphi}$  и  $\cos \psi$ , соответственно.

Неявная связь между угловыми переменными  $\tilde{\varphi}$  и  $\psi$  задаётся формулой

$$\tilde{\varphi} = \psi + g + \nu(\psi - l) + \sum_{j=1}^M (\varkappa_{2j} \sin 2j\psi + \bar{\varkappa}_{2j} \sin 2j\tilde{\varphi}). \quad (89)$$

Это выражение и формулы (80), (81) (с.56) для вычисления параметров  $\nu$ ,  $\varkappa_{2j}$ ,  $\bar{\varkappa}_{2j}$  были получены в результате приравнивания дифференциалов (87) и (88) и интегрирования с использованием формул

$$\left. \begin{aligned} \int (\cos \varphi)^{2n} d\varphi &= \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n \varphi + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j} C_{2n}^{n+j} \sin 2j\varphi, \\ \int (\cos \varphi)^{2n-1} d\varphi &= \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j-1} C_{2n-1}^{n+j-1} \sin (2j-1)\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

При определении числовых значений параметров (85) и (86) в дополнении к равенствам (90) используем ещё два полезных алгоритма.

Первый алгоритм опубликован в монографии Н.В.Емельянова [66].

Пусть заданы многочлены переменной  $z$

$$a_0 + \sum_{i=1}^I a_i z^i, \quad b_0 + \sum_{j=1}^J b_j z^j$$

с численными коэффициентами  $a_i$ ,  $b_j$ . Результатом умножения полиномов будет многочлен с численными коэффициентами  $c_k$

$$c_0 + \sum_{k=1}^{I+J} c_k z^k, \quad (91)$$

где  $c_0 = a_0 b_0$ ,  $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$  и  $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ ,  $i \leq I$ ,  $k-i \leq J$ .

Интересен и алгоритм деления многочленов или, другими словами, алгоритм выделения целой части. Пусть  $I > J$ , тогда

$$\frac{a_0 + \sum_{i=1}^I a_i z^i}{b_0 + \sum_{j=1}^J b_j z^j} = \frac{d_0 + \sum_{k=1}^{J-1} d_k z^k}{b_0 + \sum_{j=1}^J b_j z^j} + g_0 + \sum_{n=1}^{I-J} g_n z^n. \quad (92)$$

Вычисление коэффициентов  $d_k$  и  $g_n$  происходит за  $I - J + 1$  шагов. Начальные значения  $d_k = a_k$ ,  $0 \leq k \leq I$  и  $g_n = 0$ . Далее на каждом шаге изменяются численные значения  $J$  коэффициентов  $d_k$ , причём коэффициент  $d_k$  при текущей старшей степени  $z^k$  становится равным нулю, и степень многочлена в числителе уменьшается на единицу. Это достигается вычитанием из текущего многочлена в числителе многочлена в знаменателе, умноженного на выражение

$$g_{k-J} \cdot z^{k-J} = \frac{d_k}{b_J} \cdot z^{k-J}.$$

Параметры  $\alpha'_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\mu$ ,  $\alpha_j^p$ ,  $\beta_j^f$  появляются как результат рассмотрения эллиптических интегралов [5]:

$$\alpha_3 \int \frac{d\tau}{1 - \eta^2} \quad \text{и} \quad -\alpha_3 c^2 \int \frac{d\tau}{\xi^2 + c^2}. \quad (93)$$

Для вычисления первого интеграла учтём разложение (87) и соотношение

$$\frac{1}{1 - \eta^2} = \frac{1 - 2d \cos \tilde{\varphi} + d^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}{A + B \cos \tilde{\varphi} + C \cos^2 \tilde{\varphi}},$$

где

$$A = 1 - \gamma^2, \quad B = 2(s\gamma - d), \quad C = d^2 - s^2.$$

Применяя алгоритм умножения полиномов (91), вычислим многочлен относительно  $\cos \tilde{\varphi}$ , являющийся произведением правой части равенства (87) и выражения  $1 - 2d \cos \tilde{\varphi} + d^2 \cos^2 \tilde{\varphi}$ . Выделяя далее с помощью алгоритма (92) целую часть, получаем

$$\alpha_3 \int \frac{d\tau}{1 - \eta^2} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right) + \int \left( r_0 + \sum_{i=1}^{2M-2} r_i (\cos \tilde{\varphi})^i \right) d\tilde{\varphi}.$$

На основе соотношений (90) вычислим интеграл

$$\int \left( r_0 + \sum_{i=1}^{2M-2} r_i (\cos \tilde{\varphi})^i \right) d\tilde{\varphi} = \beta_0 \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{2M} \beta'_i \sin i\tilde{\varphi}, \quad (94)$$

где  $\beta_0, \beta'_i$  – численные коэффициенты.

Во втором интеграле (93) выполним разложение подынтегрального выражения в ряд по степеням  $\frac{c}{\xi}$

$$\frac{c^2}{\xi^2 + c^2} = \frac{c^2}{\xi^2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^n \left( \frac{c^2}{\xi^2} \right)^n \right]. \quad (95)$$

Отношение  $\frac{c^2}{\xi^2}$  с помощью равенства

$$\xi = \frac{a[1 - e\bar{e} + (\bar{e} - e) \cos \psi]}{1 + \bar{e} \cos \psi} \quad (96)$$

может быть представлено в виде многочлена по степеням  $\cos \psi$ . Действительно,

$$\frac{c}{\xi} = \frac{c}{a(1 - e\bar{e})} \frac{1 + \bar{e} \cos \psi}{1 - \bar{q} \cos \psi}, \quad \bar{q} = \frac{e - \bar{e}}{1 - e\bar{e}}.$$

где  $\bar{q}$  – величина первого порядка малости относительно сжатия. Применяя к правой части равенства

$$\frac{1 + \bar{e} \cos \psi}{1 - \bar{q} \cos \psi} = (1 + \bar{e} \cos \psi) \left( 1 + \sum_{n=1}^M \bar{q}^n \cos^n \psi \right)$$

алгоритм умножения многочленов, получаем

$$\frac{c}{\xi} = q_0 + \sum_{k=1}^{M+1} q_k \cos^k \psi. \quad (97)$$

После возведения (97) в квадрат получим искомый многочлен с численными коэффициентами

$$\frac{c^2}{\xi^2} = q'_0 + \sum_{k=1}^{M+2} q'_k \cos^k \psi. \quad (98)$$

Выполняя  $M - 1$  раз операцию умножения текущего многочлена на выражение (98) и складывая, получим многочлен для подынтегральной функции (95). Умножим его на дифференциал (88) и проинтегрируем, учитывая

формулы (90). В результате оказывается, что

$$-\alpha_3 c^2 \int \frac{d\tau}{\xi^2 + c^2} = \alpha'_0 \psi + \sum_{i=1}^{2M} \alpha'_i \sin i\psi. \quad (99)$$

Определяя параметры

$$\mu = \alpha'_0 + (1 + \nu)\beta_0, \quad \alpha_i^p = \alpha'_i + \beta_0 \varkappa_i, \quad \beta_i^f = \beta'_i + \beta_0 \bar{\varkappa}_i,$$

придадим формуле для вычисления переменной  $\tilde{\Omega}$  вид

$$\tilde{\Omega} = h + \mu(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2M} \left( \alpha_i^p \sin i\psi + \beta_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right). \quad (100)$$

Параметры  $\lambda$ ,  $\gamma_j^p$ ,  $\gamma_j^f$  появляются как результат рассмотрения эллиптических интегралов [5]:

$$n_0 \int \xi^2 d\tau \quad \text{и} \quad n_0 c^2 \int \eta^2 d\tau. \quad (101)$$

Первый интеграл запишем в виде

$$n_0 \int \xi^2 d\tau = E - e^* \sin E + \frac{n_0 a}{\sqrt{-2\alpha_1}} \left( - \int \frac{p^2 + q^2}{2a^2} \frac{a}{\xi} dE + I_E \right),$$

$$I_E = \int \sum_{n=2}^M \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left( \frac{a}{\xi} \right)^{n-2} \left( \frac{2p}{a} - \frac{p^2 + q^2}{a^2} \frac{a}{\xi} \right)^n \frac{a}{\xi} dE.$$

Параметры  $p$  и  $p^2 + q^2$  вычисляются по формулам (78) (с.55) и являются величинами первого порядка малости относительно сжатия.

Для вычисления интегралов учтём, что

$$dE = \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}{1 + \bar{e} \cos \psi} d\psi, \quad \frac{a}{\xi} = \frac{1 + \bar{e} \cos \psi}{(1 - e\bar{e})(1 - \bar{q} \cos \psi)},$$

и представим последовательно выражения

$$\frac{a}{\xi}, \quad \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}{1 - e\bar{e}} \frac{1}{1 - \bar{q} \cos \psi}, \quad \frac{2p}{a} - \frac{p^2 + q^2}{a^2} \frac{a}{\xi}$$

в виде полиномов по степеням  $\cos \psi$ .

Далее с помощью алгоритма умножения полиномов составим подынтегральное выражение и проинтегрируем его. Умножая результат на числовой множитель, получим

$$n_0 \int \xi^2 d\tau = E - e^* \sin E + \gamma_0 \psi + \sum_{i=1}^{2M} \gamma_i \sin i\psi.$$

Для вычисления второго интеграла заметим, что  $\eta^2$  можно представить как произведение полиномов

$$\gamma^2 - 2s\gamma \cos \tilde{\varphi} + s^2 \cos^2 \tilde{\varphi} \quad \text{и} \quad 1 + \sum_{n=1}^M n d^n \cos^n \tilde{\varphi},$$

а для дифференциала  $d\tau$  использовать формулу (87).

Дважды применяя алгоритм умножения многочленов, после интегрирования получим

$$n_0 c^2 \int \eta^2 d\tau = \gamma'_0 \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{2M} \gamma'_i \sin i\tilde{\varphi}.$$

Определяя параметры  $\lambda$ ,  $\gamma_i^p$ ,  $\gamma_i^f$  формулами

$$\lambda = -\gamma_0 - (1 + \nu)\gamma'_0, \quad \gamma_i^p = \gamma_i + \gamma'_0 \varkappa_i, \quad \gamma_i^f = \gamma'_i + \gamma'_0 \bar{\varkappa}_i,$$

придадим окончательный вид равенству, связывающему неявным образом угловые переменные  $l$ ,  $\tilde{\varphi}$ ,  $\psi$  и  $E$ :

$$l = E - e^* \sin E - \lambda(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2M} \left( \gamma_i^p \sin i\psi + \gamma_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right). \quad (102)$$

### 2.1.5 Угловые переменные $l_0$ , $g_0$ , $h_0$

Найдём значения угловых переменных  $E$ ,  $\psi$ ,  $\tilde{\varphi}$  в начальный момент  $t = t_0$ . Переменная  $E$  (аналог эксцентрической аномалии):

$$\cos E = \frac{a - \xi_0}{ae}, \quad \sin E = \text{sign}(\dot{\xi}_0) \sqrt{1 - \cos^2 E}.$$

Переменная  $\psi$  (аналог истинной аномалии):

$$\cos \psi = \frac{\cos E - \bar{e}}{1 - \bar{e} \cos E}, \quad \sin \psi = \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin E}{1 - \bar{e} \cos E}. \quad (103)$$

Переменная  $\tilde{\varphi}$  (аналог аргумента широты):

$$\cos \tilde{\varphi} = \frac{\eta_0 - \gamma}{-s + \eta_0 d}, \quad \sin \tilde{\varphi} = \text{sign}(\dot{\eta}_0) \sqrt{1 - \cos^2 \tilde{\varphi}}.$$

Численные значения угловых переменных  $l$ ,  $g$ ,  $h$  в начальный момент времени  $t_0$  определяются с помощью соотношений

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{1 - \lambda} \left[ E - e^* \sin E - \lambda \psi + \sum_{i=1}^{2M} \left( \gamma_i^p \sin i\psi + \gamma_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right) \right], \\ g_0 &= \tilde{\varphi} - \psi - \nu(\psi - l_0) - \sum_{j=1}^M (\varkappa_{2j} \sin 2j\psi + \bar{\varkappa}_{2j} \sin 2j\tilde{\varphi}), \\ h_0 &= w_0 - \text{arctg} \left( \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right) - \mu(\psi - l_0) - \sum_{i=1}^{2M} \left( \alpha_i^p \sin i\psi + \beta_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right). \end{aligned}$$

### 2.1.6 От параметров орбиты к вектору состояния

Пусть в произвольный момент времени  $t$  известны численные значения позиционных элементов  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$  и угловых переменных  $l$ ,  $g$ ,  $h$ . Требуется вычислить координаты  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  и скорости  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ ,  $\dot{z}(t)$ .

По формулам (68) – (72) найдём численные значения произвольных постоянных интегрирования  $2\alpha_1$ ,  $\alpha_2^2$ ,  $\alpha_3^2$ . Учтём, что для углов наклонов орбиты, превышающих  $90^\circ$ , постоянная  $\alpha_3 < 0$ , то есть  $\text{sign}(\alpha_3) = -1$ . Далее с помощью выражений (73) – (84) и алгоритмов, представленных в разделе 2.1.4 (с.57 – с.62), определяем числовые значения параметров и коэффициентов. Методом последовательных приближений найдём значения угловых переменных  $E$ ,  $\psi$ ,  $\tilde{\varphi}$ :

$$l = E - e^* \sin E - \lambda(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2M} \left( \gamma_i^p \sin i\psi + \gamma_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right), \quad (104)$$

$$\tilde{\varphi} = \psi + g + \nu(\psi - l) + \sum_{j=1}^M (\varkappa_{2j} \sin 2j\psi + \bar{\varkappa}_{2j} \sin 2j\tilde{\varphi}), \quad (105)$$

используя при этом соотношения (103).

Переменную  $\tilde{\Omega}$  вычисляем по формуле

$$\tilde{\Omega} = h + \mu(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2M} \left( \alpha_i^p \sin i\psi + \beta_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right). \quad (106)$$

Сфероидальные координаты равны

$$\begin{aligned}\xi &= a(1 - e \cos E), \\ \eta &= \frac{-s \cos \tilde{\varphi} + \gamma}{1 - d \cos \tilde{\varphi}}, \\ w &= \tilde{w} + \tilde{\Omega},\end{aligned}\tag{107}$$

где выражение для переменной  $\tilde{w}$

$$\tilde{w} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right)\tag{108}$$

следует из равенств

$$\sqrt{1 - \eta^2} \cos \tilde{w} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta}{1 - d \cos \tilde{\varphi}},\tag{109}$$

$$\sqrt{1 - \eta^2} \sin \tilde{w} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\sin \tilde{\varphi}}{1 - d \cos \tilde{\varphi}}.\tag{110}$$

Производные по времени от сфероидальных координат равны

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{ae \bar{\sigma}_2 (1 - \bar{e}^2) \sin \psi \sqrt{1 - \bar{k}_2^2 \cos^2 \psi}}{(\xi^2 + c^2 \eta^2) (1 + \bar{e} \cos \psi)^2}, \\ \dot{\eta} &= \frac{(s - \gamma d) \sigma_1 \sin \tilde{\varphi} \sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}}{(\xi^2 + c^2 \eta^2) (1 - d \cos \tilde{\varphi})^2}, \\ \dot{w} &= \frac{\alpha_3}{(\xi^2 + c^2) (1 - \eta^2)}.\end{aligned}\tag{111}$$

Искомые прямоугольные координаты определены формулами:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cos w, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \sin w, \\ z &= c\sigma + \xi\eta.\end{aligned}\tag{112}$$

Искомые производные по времени от прямоугольных координат определены формулами:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{x\xi\dot{\xi}}{\xi^2 + c^2} - \frac{x\eta\dot{\eta}}{1 - \eta^2} - y\dot{w}, \\ \dot{y} &= \frac{y\xi\dot{\xi}}{\xi^2 + c^2} - \frac{y\eta\dot{\eta}}{1 - \eta^2} + x\dot{w}, \\ \dot{z} &= \dot{\xi}\eta + \xi\dot{\eta}.\end{aligned}\tag{113}$$

### 2.1.7 Проверка алгоритмов

В модели гравитационного поля Земли JGM3 геоцентрическая гравитационная постоянная  $fm$ , экваториальный радиус Земли  $r_0$ , коэффициенты при второй  $J_2$  и третьей  $J_3$  зональных гармониках имеют следующие числовые значения [205]:

$$\begin{aligned}
 fm &= 3.986004415 \cdot 10^5, \\
 r_0 &= 6378.1363 \text{ км}, \\
 J_2 &= +1.08263602298299435 \cdot 10^{-3}, \\
 J_3 &= -2.53243534578614388 \cdot 10^{-6}.
 \end{aligned}
 \tag{114}$$

Подставляя в (42) (с.45) вместо  $r_0$ ,  $J_2$  и  $J_3$  их числовые значения (114), получим

$$c = +209.729971234944476 \text{ км}, \quad \sigma = -0.035567979567509646. \tag{115}$$

В табл.2 содержатся численные значения нескольких коэффициентов, соответствующих модели гравитационного поля Земли JGM3 [205] и промежуточному потенциалу (формула (41) на с.45):

Таблица 2: Числовые значения коэффициентов зональных гармоник

модель JGM3	промежуточный потенциал
$J_4 = -1.6193312052 \cdot 10^{-6}$	$J'_4 = -1.166177041845644980 \cdot 10^{-6}$
$J_5 = -0.2277161017 \cdot 10^{-6}$	$J'_5 = +0.005469555070724556 \cdot 10^{-6}$
$J_6 = +0.5396484905 \cdot 10^{-6}$	$J'_6 = +0.001249751229132727 \cdot 10^{-6}$
$J_7 = -0.3513684419 \cdot 10^{-6}$	$J'_7 = -0.000008844878268002 \cdot 10^{-6}$
$J_8 = -0.2025187153 \cdot 10^{-6}$	$J'_8 = -0.000001332336307242 \cdot 10^{-6}$
$J_9 = -0.1193687135 \cdot 10^{-6}$	$J'_9 = +0.000000012692302667 \cdot 10^{-6}$
$J_{10} = -0.2480568648 \cdot 10^{-6}$	$J'_{10} = +0.000000001412746230 \cdot 10^{-6}$
$J_{11} = +0.2405652138 \cdot 10^{-6}$	$J'_{11} = -0.000000000017045753 \cdot 10^{-6}$
$J_{12} = -0.1819117030 \cdot 10^{-6}$	$J'_{12} = -0.000000000001489618 \cdot 10^{-6}$
$J_{13} = -0.2075677323 \cdot 10^{-6}$	$J'_{13} = +0.000000000000021939 \cdot 10^{-6}$
$J_{14} = +0.1174173876 \cdot 10^{-6}$	$J'_{14} = +0.0000000000000001561 \cdot 10^{-6}$
$J_{15} = -0.0176272697 \cdot 10^{-6}$	$J'_{15} = -0.000000000000000027 \cdot 10^{-6}$
$J_{16} = +0.0311943085 \cdot 10^{-6}$	$J'_{16} = -0.000000000000000002 \cdot 10^{-6}$

Для иллюстрации утверждения о том, что точность алгоритмов вычисления промежуточной орбиты ограничена только накоплением ошибок округления, был проделан численный эксперимент.

Для модельного объекта, совершающего 13.98 оборотов за сутки и имеющего следующие параметры орбиты

$$\begin{aligned} a &= 7180 & - & \text{большая полуось (км)}, \\ e &= 0.02 & - & \text{эксцентриситет орбиты}, \\ i &= 49.8 & - & \text{угол наклона (градусы)} \end{aligned}$$

методом численного интегрирования дифференциальных уравнений движения на интервале времени 100 суток были вычислены эталонные значения прямоугольных координат  $x_e(t)$ ,  $y_e(t)$ ,  $z_e(t)$ . В правых частях уравнений движения были учтены гравитационные силы, обусловленные только промежуточным потенциалом (табл.2).

Начальному вектору состояния объекта на момент  $t = 0.0$

$$\begin{aligned} x &= +4917.49973747459503 \text{ км}, & \dot{x} &= -1.2636786137103486 \text{ км/с}, \\ y &= +3693.31783253124247 \text{ км}, & \dot{y} &= +6.0704892431019494 \text{ км/с}, \\ z &= +3866.34490247898799 \text{ км}, & \dot{z} &= -3.9703600780539020 \text{ км/с} \end{aligned}$$

соответствуют параметры промежуточной орбиты (с.52)

$$\begin{aligned} a &= 7174.70800522859964 \text{ км}, \\ e &= 0.019842192804078601, \\ \delta &= 0.764158390220335372, \\ l_0 &= +2.25345918307152099 \text{ радиан}, \\ g_0 &= +1.65632280833578550 \text{ радиан}, \\ h_0 &= -3.50768527309522552 \text{ радиан}, \\ \delta^* &= -0.763291993538810829, \\ s &= +0.763724848200733689, \\ \alpha &= +0.645541908683827163, \\ n_0 &= +0.001038318958350272 \text{ радиан/с}, \\ \dot{l} &= +0.001038319266143206 \text{ радиан/с}, \\ \dot{g} &= +0.000000721180162207 \text{ радиан/с}, \\ \dot{h} &= -0.000000860532117026 \text{ радиан/с}. \end{aligned} \tag{116}$$

На моменты  $t$  эталонных значений координат с помощью набора параметров (116) и алгоритма (с.63) были определены положения модельного объекта  $x_m(t)$ ,  $y_m(t)$ ,  $z_m(t)$ . Величина

$$\Delta r(t) = \sqrt{(x_m(t) - x_e(t))^2 + (y_m(t) - y_e(t))^2 + (z_m(t) - z_e(t))^2}$$

была принята за меру отклонения вычисленных координат от эталонной ор-

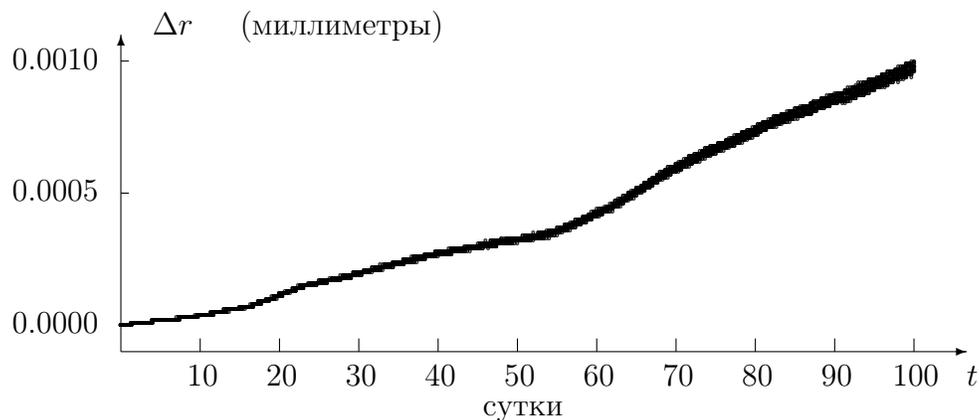


Рис. 3: Сравнение методов

биты. График изменения  $\Delta r(t)$  представлен на рис.3. Отношение величины отклонения  $\Delta r$  к расстоянию  $r = \sqrt{x_e^2 + y_e^2 + z_e^2}$  на конце интервала сравнения, равного  $8.64 \cdot 10^6$  секунд времени, не превышает  $10^{-12}$ .

### 2.1.8 Новые результаты

В разделе 2.1 представлены следующие новые результаты, полученные автором впервые [159].

- Выведена система уравнений (68)-(73), предложен и реализован итерационный алгоритм её решения.
- Предложен и реализован алгоритм вычисления эллиптических интегралов на основе операций над многочленами (87)-(102).
- Предлагаемые алгоритмы обеспечивают точность вычислений параметров промежуточной орбиты, ограниченную только возможностями компьютера (рис.3).

## 2.2 Частные производные

### 2.2.1 Переменные действия

Переменные действия  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  определены формулами [5]

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sqrt{\Phi(\xi)} d\xi}{\xi^2 + c^2}, \quad A_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sqrt{F(\eta)} d\eta}{1 - \eta^2}, \quad A_3 = \alpha_3, \quad (117)$$

где  $\Phi(\xi)$  и  $F(\eta)$  даются равенствами (51),  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – корни многочлена  $\Phi(\xi)$ , между которыми изменяется координата  $\xi$ , а  $\eta_1$  и  $\eta_2$  – корни многочлена  $F(\eta)$ , лежащие в промежутке  $[-1, +1]$ .

Вторая группа элементов – переменные угол  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ , сопряжённые переменным действия  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , определены формулами [5]

$$B_1 = \frac{\partial S}{\partial A_1}, \quad B_2 = \frac{\partial S}{\partial A_2}, \quad B_3 = \frac{\partial S}{\partial A_3},$$

где  $S$  – выражение (50), в котором  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  считаются функциями  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ .

Три уравнения общего интеграла (52) (с.48) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} t + \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая выражения (50), (52) и (117), сразу получаем формулы для частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} &= +\frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{c^2 \eta^2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}}, \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} &= -\frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\alpha_2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\alpha_2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}}, \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} &= -\frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{c^2 \alpha_3 d\xi}{(\xi^2 + c^2) \sqrt{\Phi(\xi)}}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_3} &= \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\alpha_3 d\eta}{(1 - \eta^2) \sqrt{F(\eta)}}. \end{aligned}$$

Учитывая пределы интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} &= \frac{1 + \gamma_0}{n_0}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{\gamma'_0}{n_0}, & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_1} &= 0, \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} &= -\frac{\alpha_2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2), & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1), & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_2} &= 0, \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} &= -\alpha'_0, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_3} &= -(1 + \beta_0), & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_3} &= 1. \end{aligned}$$

Обращение матрицы приводит к частным производным от параметров  $\alpha_k$  по элементам  $A_k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial A_1} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1), \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial A_2} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\alpha_2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2), \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial A_3} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\alpha_2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2) (1 + \beta_0) + \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) \alpha'_0 \right], \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial A_1} &= -\frac{1}{\Delta} \frac{\gamma'_0}{n_0}, \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial A_2} &= \frac{1}{\Delta} \frac{1 + \gamma_0}{n_0}, \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial A_3} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{1 + \gamma_0}{n_0} (1 + \beta_0) - \frac{\gamma'_0}{n_0} \alpha'_0 \right], \\ \Delta &= \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) \frac{1 - \lambda}{n_0}. \end{aligned}$$

Выражения (117) перепишем в виде

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\Phi(\xi) d\xi}{(\xi^2 + c^2) \sqrt{\Phi(\xi)}}, \quad A_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{F(\eta) d\eta}{(1 - \eta^2) \sqrt{F(\eta)}}.$$

Подставляя сюда явный вид функций  $\Phi(\xi)$ ,  $F(\eta)$  (51) и сравнивая результат подстановки с соотношениями (52), замечаем, что почти все интегралы, кроме двух новых, нам уже известны:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2\alpha_1}{n_0} (1 + \gamma_0) - \frac{\alpha_2^2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2) - \alpha'_0 \alpha_3 + \frac{1}{\pi} 2fm \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi d\tau, \\ A_2 &= \frac{\alpha_2^2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) + \frac{2\alpha_1}{n_0} \gamma'_0 - (1 + \beta_0) \alpha_3 - \frac{1}{\pi} 2fmc\sigma \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta d\tau. \end{aligned}$$

### 2.2.2 Частные производные по элементам $L$ , $G$ , $H$

Канонические элементы действия  $L$ ,  $G$ ,  $H$  определены формулами [5]

$$L = A_1 + A_2 + A_3, \quad G = A_2 + A_3, \quad H = A_3, \quad (118)$$

то есть

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}} (1 + \lambda) + \nu G + \mu H + I_\xi - (1 + \nu)I_\eta, \\ G &= \frac{\alpha_2^2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) - \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}} \gamma'_0 - \beta_0 H - I_\eta, \\ H &= \alpha_3, \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

где  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $\gamma'_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\lambda$ ,  $I_\xi$ ,  $I_\eta$  – величины первого порядка малости относительно сжатия, причём

$$I_\xi = \frac{2fm}{\sqrt{-2\alpha_1}} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^J \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^\pi \left(\frac{a}{\xi}\right)^{n-1} \left(\frac{2p}{a} - \frac{p^2+q^2}{a^2} \frac{a}{\xi}\right)^n \frac{a}{\xi} dE,$$

$$I_\eta = \frac{2fmc\sigma}{\sigma_1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-s \cos \tilde{\varphi} + \gamma}{1 - d \cos \tilde{\varphi}} \frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}} d\tilde{\varphi}.$$

Численные значения  $I_\xi$  и  $I_\eta$  находятся с помощью алгоритмов умножения и интегрирования многочленов относительно  $\cos \psi$  и  $\cos \tilde{\varphi}$  соответственно (с.57), после подстановки пределов интегрирования число  $\pi$  в знаменателе сокращается.

Частные производные от постоянных интегрирования  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  по переменным действия  $L$ ,  $G$ ,  $H$  принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L} &= \frac{n_0}{1 - \lambda}, & \frac{\partial \alpha_2}{\partial L} &= -\frac{1}{\Delta} \frac{\gamma'_0}{n_0}, & \frac{\partial \alpha_3}{\partial L} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial G} &= \frac{n_0 \nu}{1 - \lambda}, & \frac{\partial \alpha_2}{\partial G} &= +\frac{1}{\Delta} \frac{1 + \gamma_0 + \gamma'_0}{n_0}, & \frac{\partial \alpha_3}{\partial G} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial H} &= \frac{n_0 \mu}{1 - \lambda}, & \frac{\partial \alpha_2}{\partial H} &= +\frac{1}{\Delta} \frac{(1 + \gamma_0)\beta_0 - \gamma'_0 \alpha'_0}{n_0}, & \frac{\partial \alpha_3}{\partial H} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Первое полезное свойство совокупности частных производных (120) проявляется в алгоритме вычисления наборов величин  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$  и  $2\alpha_1$ ,  $\alpha_2^2$ ,  $\alpha_3$

на основе известных численных значений элементов  $L, G, H$ . Для удобства обозначим  $L_1 = L, L_2 = G, L_3 = H$ . В нулевом приближении полагаем

$$(\alpha_1)_0 = -\frac{1}{2} \left( \frac{fm}{L_1} \right)^2, \quad (\alpha_2)_0 = L_2, \quad (\alpha_3)_0 = L_3.$$

Далее на основе уравнений (68)-(73) методом последовательных приближений находим числовые значения величин  $(a)_0, (e)_0, (\delta)_0$ , а затем, также в нулевом приближении, последовательно вычисляем другие параметры задачи: элементы  $(L)_0, (G)_0$  и частные производные от величин  $\alpha_1, \alpha_2$  по этим элементам. Уточнённые значения параметров находим по формуле линейных разностей

$$\alpha_j = (\alpha_j)_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \alpha_j}{\partial L_i} [L_i - (L_i)_0], \quad j = 1, 2. \quad (121)$$

Процесс сходится очень быстро, за две – три итерации.

Второе полезное свойство соотношений (120) тоже достаточно очевидно. С их помощью выполняется дифференцирование позиционных параметров  $a, e, \delta$  по каноническим элементам действия  $L, G, H$ . Алгоритм состоит из трёх шагов. Продифференцируем каждую из формул (68), (69), (70) по явно входящим величинам  $a, e^2, \delta^2$  (приложение, с.171) и вычислим матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial a} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial e^2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta^2} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial a} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial e^2} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta^2} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial a} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial e^2} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial \delta^2} \end{pmatrix}.$$

Численное обращение этой матрицы даст значения частных производных от параметров  $a, e^2, \delta^2$  по  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , и, наконец, численные значения производных по каноническим элементам получаем в результате суммирования

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial L_j} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial a}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial L_j}, \\ \frac{\partial e^2}{\partial L_j} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial e^2}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial L_j}, \\ \frac{\partial \delta^2}{\partial L_j} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \delta^2}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial L_j}. \end{aligned} \quad (122)$$

### 2.2.3 Частные производные по параметрам $a$ , $e$ , $\delta$

Частные производные первого порядка по каноническим элементам действия  $L$ ,  $G$ ,  $H$  будут необходимы при вычислении правых частей осреднённых уравнений движения (раздел 2.5, с.102). Промежуточная орбита на основе обобщённой задачи двух неподвижных центров включает в себя несколько десятков параметров (списки под номерами (76), (85), (86), например), зависящих от позиционных элементов  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$  явным образом. Если известны производные от любого параметра  $p$  по  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$ , то производные от этого параметра по  $L$ ,  $G$ ,  $H$  вычисляются с помощью соотношений (122):

$$\frac{\partial p}{\partial L_j} = \frac{\partial p}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial L_j} + \frac{1}{2e} \frac{\partial p}{\partial e} \frac{\partial e^2}{\partial L_j} + \frac{1}{2\delta} \frac{\partial p}{\partial \delta} \frac{\partial \delta^2}{\partial L_j}. \quad (123)$$

Частные производные первого и более высоких порядков от различных параметров промежуточной орбиты по позиционным элементам будут необходимы также при преобразованиях возмущающей функции (раздел 2.3, с.78).

Предлагаемый алгоритм обобщает алгоритм вычисления параметров промежуточной орбиты (раздел 2.1, с.52): вместе с численным значением каждого параметра вычисляются частные производные первого и более высоких порядков от этого параметра по позиционным элементам  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$ .

Основу алгоритма составляет множество  $\mathbf{M}$  одномерных массивов чисел. На этом множестве определён единичный массив, первый элемент которого равен единице, значения всех остальных элементов равны нулю.

Для каждого параметра  $p$  промежуточной орбиты определён свой массив чисел  $\mathbf{P}(p)$ . Первый элемент массива содержит численное значение параметра, следующие элементы содержат численные значения трёх первых и шести вторых независимых частных производных по позиционным элементам:

$$\begin{aligned} & p, \\ & \frac{\partial p}{\partial a}, \quad \frac{\partial p}{\partial e}, \quad \frac{\partial p}{\partial \delta}, \\ & \frac{\partial^2 p}{\partial a^2}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial a \partial e}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial a \partial \delta}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial e^2}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial e \partial \delta}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial \delta^2}. \end{aligned} \quad (124)$$

Численные значения десяти независимых частных производных третьего порядка по параметрам  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$  составляют содержание остальных элементов массива:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 p}{\partial a^3}, \quad \frac{\partial^3 p}{\partial a^2 \partial e}, \quad \frac{\partial^3 p}{\partial a^2 \partial \delta}, \quad \frac{\partial^3 p}{\partial a \partial e^2}, \quad \frac{\partial^3 p}{\partial a \partial e \partial \delta}, \quad \frac{\partial^3 p}{\partial a \partial \delta^2}, \\ & \frac{\partial^3 p}{\partial e^3}, \quad \frac{\partial^3 p}{\partial e^2 \partial \delta}, \quad \frac{\partial^3 p}{\partial e \partial \delta^2}, \\ & \frac{\partial^3 p}{\partial \delta^3}. \end{aligned} \quad (125)$$

Для двух массивов чисел  $P(p)$ ,  $Q(q)$  определены операции сложения и умножения. Пусть  $a_1 = a$ ,  $a_2 = e$ ,  $a_3 = \delta$  и индексы  $i$ ,  $j$ ,  $k$  принимают значения 1, 2, 3. Результатом сложения  $P(p) + Q(q)$  является массив чисел  $R(r)$ , образованный попарным сложением элементов:

$$\begin{aligned} r &= p + q, \\ \frac{\partial r}{\partial a_i} &= \frac{\partial p}{\partial a_i} + \frac{\partial q}{\partial a_i}, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial a_i \partial a_j} &= \frac{\partial^2 p}{\partial a_i \partial a_j} + \frac{\partial^2 q}{\partial a_i \partial a_j}, \\ \frac{\partial^3 r}{\partial a_i \partial a_j \partial a_k} &= \frac{\partial^3 p}{\partial a_i \partial a_j \partial a_k} + \frac{\partial^3 q}{\partial a_i \partial a_j \partial a_k}. \end{aligned} \quad (126)$$

Результатом умножения  $P(p) \times Q(q)$  является массив чисел  $R(r)$ :

$$\begin{aligned} r &= p \cdot q, \\ \frac{\partial r}{\partial a_i} &= \frac{\partial p}{\partial a_i} \cdot q + p \cdot \frac{\partial q}{\partial a_i}, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial a_i \partial a_j} &= \frac{\partial^2 p}{\partial a_i \partial a_j} \cdot q + \frac{\partial p}{\partial a_i} \frac{\partial q}{\partial a_j} + \frac{\partial p}{\partial a_j} \frac{\partial q}{\partial a_i} + p \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial a_i \partial a_j}, \\ \frac{\partial^3 r}{\partial a_i \partial a_j \partial a_k} &= \frac{\partial^3 p}{\partial a_i \partial a_j \partial a_k} \cdot q \\ &+ \frac{\partial^2 p}{\partial a_i \partial a_j} \frac{\partial q}{\partial a_k} + \frac{\partial^2 p}{\partial a_i \partial a_k} \frac{\partial q}{\partial a_j} + \frac{\partial^2 p}{\partial a_j \partial a_k} \frac{\partial q}{\partial a_i} \\ &+ \frac{\partial p}{\partial a_i} \frac{\partial^2 q}{\partial a_j \partial a_k} + \frac{\partial p}{\partial a_j} \frac{\partial^2 q}{\partial a_i \partial a_k} + \frac{\partial p}{\partial a_k} \frac{\partial^2 q}{\partial a_i \partial a_j} \\ &+ p \cdot \frac{\partial^3 q}{\partial a_i \partial a_j \partial a_k}. \end{aligned} \quad (127)$$

Для операции возведения в произвольную степень  $b$ , выполняемой над массивом чисел  $P(p)$ , достаточно определить значения элементов массива  $R(r)$ :

$$\begin{aligned}
r &= p^b, \\
\frac{\partial r}{\partial a_i} &= b \cdot p^{b-1} \cdot \frac{\partial p}{\partial a_i}, \\
\frac{\partial^2 r}{\partial a_i \partial a_j} &= b \cdot (b-1) \cdot p^{b-2} \cdot \frac{\partial p}{\partial a_i} \frac{\partial p}{\partial a_j} \\
&\quad + b \cdot p^{b-1} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial a_i \partial a_j}, \\
\frac{\partial^3 r}{\partial a_i \partial a_j \partial a_k} &= b \cdot (b-1) \cdot (b-2) \cdot p^{b-3} \cdot \frac{\partial p}{\partial a_i} \frac{\partial p}{\partial a_j} \frac{\partial p}{\partial a_k} \\
&\quad + b \cdot (b-1) \cdot p^{b-2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial a_i \partial a_j} \frac{\partial p}{\partial a_k} \\
&\quad + b \cdot (b-1) \cdot p^{b-2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial a_i \partial a_k} \frac{\partial p}{\partial a_j} \\
&\quad + b \cdot (b-1) \cdot p^{b-2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial a_j \partial a_k} \frac{\partial p}{\partial a_i} \\
&\quad + b \cdot p^{b-1} \cdot \frac{\partial^3 p}{\partial a_i \partial a_j \partial a_k}.
\end{aligned} \tag{128}$$

Входными параметрами алгоритма вычисления частных производных являются числовые значения позиционных элементов  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$ . Начальные одномерные массивы выглядят следующим образом:

$$a, 1, 0, 0, 0, \dots, 0; \quad e, 0, 1, 0, 0, \dots, 0; \quad \delta, 0, 0, 1, 0, \dots, 0. \tag{129}$$

Алгоритм формирования конечного множества  $\mathbf{M}$  заключается в вычислении массивов, содержащих частные производные от величин  $\varepsilon^2$  (формула (71) на с.54),  $Q$  (формула (72)),  $2\alpha_1$  (формула (68)),  $\alpha_2^2$  (формула (69)),  $\alpha_3^2$  (формула (70)), и всех остальных, включая упомянутые ранее параметры из списков под номерами (76), (85), (86). Алгоритм составлен так, что сумма или произведение параметров заменяются на операции сложения или умножения, выполняемые над массивами чисел, соответствующих этим параметрам. Деление равносильно возведению в степень, равную  $(-1)$ .

### 2.2.4 Производные от угловых переменных

Частные производные от угловых переменных  $\tilde{\varphi}$ ,  $\psi$ ,  $E$ ,  $\tilde{\Omega}$  по позиционным параметрам  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$  получаются путём непосредственного дифференцирования формул (103)-(106):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_i} = & \frac{1}{1 - e^* \cos E} \left[ \frac{\partial e^*}{\partial a_i} \sin E + \frac{\partial \lambda}{\partial a_i} (\psi - l) \right. \\ & - \sum_{k=1}^{2M} \left( \frac{\partial \gamma_k^p}{\partial a_i} \sin k\psi + \frac{\partial \gamma_k^f}{\partial a_i} \sin k\tilde{\varphi} \right) \\ & \left. + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial a_i} - \sum_{k=1}^{2M} \left( k \gamma_k^p \cos k\psi \frac{\partial \psi}{\partial a_i} + k \gamma_k^f \cos k\tilde{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial a_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (130)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_i} = \frac{1 + \bar{e} \cos \psi}{\sqrt{1 - \bar{e}^2}} \frac{\partial E}{\partial a_i} + \frac{\sin \psi}{1 - \bar{e}^2} \frac{\partial \bar{e}}{\partial a_i}, \quad (131)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial a_i} = & (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial a_i} + \frac{\partial \nu}{\partial a_i} (\psi - l) \\ & + \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \varkappa_{2k}}{\partial a_i} \sin 2k\psi + \frac{\partial \bar{\varkappa}_{2k}}{\partial a_i} \sin 2k\tilde{\varphi} \right) \end{aligned} \quad (132)$$

$$+ \sum_{k=1}^M \left( 2k \varkappa_{2k} \cos 2k\psi \frac{\partial \psi}{\partial a_i} + 2k \bar{\varkappa}_{2k} \cos 2k\tilde{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial a_i} \right),$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial a_i} = \frac{\partial \mu}{\partial a_i} (\psi - l) + \sum_{k=1}^{2M} \left( \frac{\partial \alpha_k^p}{\partial a_i} \sin k\psi + \frac{\partial \beta_k^f}{\partial a_i} \sin k\tilde{\varphi} \right) \quad (133)$$

$$+ \mu \frac{\partial \psi}{\partial a_i} + \sum_{k=1}^{2M} \left( k \alpha_k^p \cos k\psi \frac{\partial \psi}{\partial a_i} + k \beta_k^f \cos k\tilde{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial a_i} \right),$$

и использования метода последовательных приближений. В нулевом приближении частные производные определены формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_i} & \approx \frac{\sin E}{1 - e^* \cos E} \frac{\partial e^*}{\partial a_i}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial a_i} & \approx \frac{1 + \bar{e} \cos \psi}{\sqrt{1 - \bar{e}^2}} \frac{\partial E}{\partial a_i} + \frac{\sin \psi}{1 - \bar{e}^2} \frac{\partial \bar{e}}{\partial a_i}, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial a_i} & \approx (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial a_i} + \frac{\partial \nu}{\partial a_i} (\psi - l). \end{aligned}$$

Достаточно двух-трёх итераций.

Частные производные от переменных  $\tilde{\varphi}$ ,  $\psi$ ,  $E$ ,  $\tilde{\Omega}$  по каноническим угловым элементам  $l$ ,  $g$ ,  $h$  вычисляются по той же схеме:

$$\frac{\partial \psi}{\partial l} = \frac{1 + \bar{e} \cos \psi}{\sqrt{1 - \bar{e}^2} (1 - e^* \cos E)} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{\partial \psi}{\partial l} - 1 \right) - \sum_{k=1}^{2M} \left( k \gamma_k^p \cos k\psi \frac{\partial \psi}{\partial l} + k \gamma_k^f \cos k\tilde{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial l} \right) \right], \quad (134)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial l} = (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial l} - \nu + \sum_{k=1}^M \left( 2k \varkappa_{2k} \cos 2k\psi \frac{\partial \psi}{\partial l} + 2k \bar{\varkappa}_{2k} \cos 2k\tilde{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial l} \right), \quad (135)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial g} = 1 + (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial g} + \sum_{k=1}^M \left( 2k \varkappa_{2k} \cos 2k\psi \frac{\partial \psi}{\partial g} + 2k \bar{\varkappa}_{2k} \cos 2k\tilde{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial g} \right), \quad (136)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial g} = \frac{\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial g} - 1 - \sum_{k=1}^M 2k \bar{\varkappa}_{2k} \cos 2k\tilde{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial g}}{1 + \nu + \sum_{k=1}^M 2k \varkappa_{2k} \cos 2k\psi}, \quad (137)$$

$$\frac{\partial E}{\partial l} = \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}{1 + \bar{e} \cos \psi} \frac{\partial \psi}{\partial l}, \quad \frac{\partial E}{\partial g} = \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}{1 + \bar{e} \cos \psi} \frac{\partial \psi}{\partial g}, \quad (138)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial l} = \mu \left( \frac{\partial \psi}{\partial l} - 1 \right) + \sum_{k=1}^{2M} \left( k \alpha_k^p \cos k\psi \frac{\partial \psi}{\partial l} + k \beta_k^f \cos k\tilde{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial l} \right), \quad (139)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial g} = \mu \frac{\partial \psi}{\partial g} + \sum_{k=1}^{2M} \left( k \alpha_k^p \cos k\psi \frac{\partial \psi}{\partial g} + k \beta_k^f \cos k\tilde{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial g} \right), \quad (140)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial h} = 1, \quad (141)$$

с производными в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial l} &\approx \frac{1 + \bar{e} \cos \psi}{\sqrt{1 - \bar{e}^2} (1 - e^* \cos E)}, & \frac{\partial \psi}{\partial g} &\approx -2 \varkappa_2 \cos 2\tilde{\varphi}, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial l} &\approx (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial l} - \nu, & \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial g} &\approx 1 + (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial g}. \end{aligned}$$

### 2.2.5 Новые результаты

В разделе 2.2 представлены следующие новые результаты, полученные автором впервые [159].

- Разработан алгоритм вычисления численных значений канонических переменных действия.
- Разработан алгоритм вычисления частных производных по каноническим элементам промежуточной орбиты.
- Разработан алгоритм вычисления частных производных высших порядков по позиционным параметрам.
- Точность вычислений ограничена только возможностями компьютера.

Присутствие частных производных высших порядков позволяет сохранить информацию о том, как тот или иной параметр был вычислен. Пусть, например, одномерный массив чисел, соответствующий параметру  $p$ , получен для конкретных числовых значений позиционных элементов  $a_0$ ,  $e_0$ ,  $\delta_0$ . Расчёты показали, что для малых численных значений разностей

$$\Delta a = a - a_0 (\approx 10 \text{ км}), \Delta e = e - e_0 (\approx 0.01), \Delta \delta = \delta - \delta_0 (\approx 0.01)$$

мгновенное значение любого параметра  $p$  с относительной точностью порядка  $10^{-4} \div 10^{-7}$  определяется с помощью первых членов формулы Тейлора:

$$p(a, e, \delta) = p(a_0, e_0, \delta_0) + \frac{\partial p}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial p}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial p}{\partial \delta} \Delta \delta + \frac{1}{2} \Delta p^{(2)} + \frac{1}{6} \Delta p^{(3)}, \quad (142)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta p^{(2)} = & \frac{\partial^2 p}{\partial a^2} (\Delta a)^2 + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial a \partial e} \Delta a \Delta e + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial a \partial \delta} \Delta a \Delta \delta \\ & + \frac{\partial^2 p}{\partial e^2} (\Delta e)^2 + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial e \partial \delta} \Delta e \Delta \delta + \frac{\partial^2 p}{\partial \delta^2} (\Delta \delta)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta p^{(3)} = & \frac{\partial^3 p}{\partial a^3} (\Delta a)^3 + 3 \frac{\partial^3 p}{\partial a^2 \partial e} (\Delta a)^2 \Delta e + 3 \frac{\partial^3 p}{\partial a^2 \partial \delta} (\Delta a)^2 \Delta \delta \\ & + 3 \frac{\partial^3 p}{\partial a \partial e^2} \Delta a (\Delta e)^2 + 6 \frac{\partial^3 p}{\partial a \partial e \partial \delta} \Delta a \Delta e \Delta \delta + 3 \frac{\partial^3 p}{\partial a \partial \delta^2} \Delta a (\Delta \delta)^2 \\ & + \frac{\partial^3 p}{\partial e^3} (\Delta e)^3 + 3 \frac{\partial^3 p}{\partial e^2 \partial \delta} (\Delta e)^2 \Delta \delta + 3 \frac{\partial^3 p}{\partial e \partial \delta^2} \Delta e (\Delta \delta)^2 + \frac{\partial^3 p}{\partial \delta^3} (\Delta \delta)^3. \end{aligned}$$

### 2.3 Алгоритм преобразования

В публикациях А.М.Фоминова [154, 155], В.В.Нестерова и Г.В.Романовой [108, 111] авторы использовали различные промежуточные орбиты (кеплеровскую орбиту и орбиту, построенную на основе решения К.Акснеса [176]), но *разложение* возмущающей функции было выполнено с помощью формул кеплеровского движения, то есть с точностью до второго порядка относительно малого параметра – сжатия Земли.

В статьях Н.В.Емельянова [68], Н.В.Емельянова и Л.П.Насоновой [71] с помощью некеплеровской промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров, получено *разложение* возмущающей функции, обусловленной гравитационным полем Земли, притяжением Луны и Солнца, с точностью до третьей степени относительно сжатия.

В данном разделе представлен алгоритм **преобразования** возмущающего гамильтониана с произвольной методической точностью.

#### 2.3.1 Аномальный геопотенциал

Пусть  $x, y, z$  – координаты вектора  $\vec{r}$  в системе отсчёта, связанной с истинным экватором.

Модуль расстояния равен  $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Координаты вектора  $\vec{r}$  в земной системе отсчёта обозначим  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ .

С точностью до первых степеней малых параметров  $x_p, y_p$  (координаты полюса, с.24) приближённые формулы связи земной системы отсчёта и системы истинного экватора имеют вид

$$\hat{z} = z - x_p \cdot (x \cos S_{\oplus} + y \sin S_{\oplus}) - y_p \cdot (x \sin S_{\oplus} - y \cos S_{\oplus}). \quad (143)$$

Возмущающая функция, обусловленная аномальной частью геопотенциала, в земной системе отсчёта представлена формулой (44) (с.46).

Величина  $\lambda$  в этом выражении – угол долготы в земной системе отсчёта.

Угол долготы, отсчитываемый от истинной точки весеннего равноденствия вдоль истинного экватора, равен  $w = S_{\oplus} + \lambda$ , причём  $S_{\oplus}$  – гринвичское

истинное звёздное время (с.24), и

$$\cos w = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin w = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (144)$$

Разложим выражение для полинома Лежандра  $P_n(\hat{z}/r)$  в ряд Тейлора. С точностью до первого порядка относительно  $\Delta z$  (формула (143)) получим

$$P_n\left(\frac{\hat{z}}{r}\right) = P_n\left(\frac{z}{r}\right) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} P_n^{(1)}\left(\frac{z}{r}\right) \cdot \Delta z,$$

Аномальную часть геопотенциала в системе истинного экватора запишем в виде

$$\begin{aligned} R_{\oplus} = & \frac{fm}{r_0} \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n\left(\frac{z}{r}\right) \\ & + \frac{fm}{r_0} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n^{(k)}\left(\frac{z}{r}\right) [\hat{C}_{nk} \cos kw + \hat{S}_{nk} \sin kw] \\ & + \frac{fm}{r_0} \sum_{n=2}^4 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n^{(1)}\left(\frac{z}{r}\right) [\tilde{C}_{n1} \cos w + \tilde{S}_{n1} \sin w], \end{aligned} \quad (145)$$

где величины

$$\begin{aligned} \hat{C}_{nk} &= C_{nk} \cos kS_{\oplus} - S_{nk} \sin kS_{\oplus}, & \hat{S}_{nk} &= C_{nk} \sin kS_{\oplus} + S_{nk} \cos kS_{\oplus}, \\ \tilde{C}_{n1} &= J_n \cdot (x_p \cos S_{\oplus} + y_p \sin S_{\oplus}), & \tilde{S}_{n1} &= J_n \cdot (x_p \sin S_{\oplus} - y_p \cos S_{\oplus}). \end{aligned}$$

являются функциями звёздного времени.

Принимая во внимание определение присоединённых функций Лежандра (формула (237) на с.172 приложения), формулу (144) и две теоремы сложения для суммы аргументов тригонометрических функций (239), получим следующий результат: рекуррентный алгоритм расчёта возмущающего потенциала (145) основан на начальных значениях четырёх функций координат спутника

$$\frac{r_0}{r}, \quad \frac{z}{r}, \quad \frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}. \quad (146)$$

Знаменатель  $(\sqrt{x^2 + y^2})^k$ , возникающий при вычислении  $\cos kw$ ,  $\sin kw$ , сокращается с таким же выражением в числителе после раскрытия соотношения для присоединённой функции Лежандра  $P_n^{(k)}(z/r)$  (приложение, с.172).

### 2.3.2 Притяжение светил

Возмущающий потенциал, обусловленный притяжением Луны или Солнца, можно представить в виде (27) (с.37)

$$R_p = \frac{fm_p}{r_p} \sum_{n=2}^{N_p} \left(\frac{r}{r_p}\right)^n P_n\left(\frac{xx_p + yy_p + zz_p}{rr_p}\right),$$

в разложении оставлено  $N_p - 1$  слагаемых, индекс  $p$  в случае Луны принимает значение  $M$ , в случае Солнца –  $S$ ,  $\vec{r}_p$  – геоцентрический вектор положения возмущающего тела,  $r_p$  – геоцентрическое расстояние,

Угол долготы возмущающего тела, отсчитываемый от истинной точки весеннего равноденствия вдоль истинного экватора, обозначим  $w_p$ . Раскроем выражение

$$\frac{xx_p + yy_p + zz_p}{rr_p} = \frac{z}{r} \frac{z_p}{r_p} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} \frac{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}}{r_p} \cos(w - w_p)$$

и применим теорему сложения для полиномов Лежандра (формула (238), с.172 приложения):

$$P_n\left(\frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_p)}{rr_p}\right) = P_n\left(\frac{z}{r}\right) P_n\left(\frac{z_p}{r_p}\right) + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}\left(\frac{z}{r}\right) P_n^{(k)}\left(\frac{z_p}{r_p}\right) \cos k(w - w_p).$$

Формула (27) выглядит теперь так

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{fm}{r_0} \sum_{n=2}^{N_p} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n\left(\frac{z}{r}\right) \cdot A_{n0}^{(p)} \\ &+ \frac{fm}{r_0} \sum_{n=2}^{N_p} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n^{(k)}\left(\frac{z}{r}\right) [A_{nk}^{(p)} \cos kw + B_{nk}^{(p)} \sin kw], \end{aligned} \quad (147)$$

где коэффициенты зависят только от координат возмущающего объекта

$$\begin{aligned} A_{n0}^{(p)} &= \left(\frac{fm_p}{fm}\right) \left(\frac{r_0}{r_p}\right)^{n+1} \cdot P_n\left(\frac{z_p}{r_p}\right), \\ A_{nk}^{(p)} &= 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \left(\frac{fm_p}{fm}\right) \left(\frac{r_0}{r_p}\right)^{n+1} \cdot P_n^{(k)}\left(\frac{z_p}{r_p}\right) \cos kw_p, \\ B_{nk}^{(p)} &= 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \left(\frac{fm_p}{fm}\right) \left(\frac{r_0}{r_p}\right)^{n+1} \cdot P_n^{(k)}\left(\frac{z_p}{r_p}\right) \sin kw_p. \end{aligned} \quad (148)$$

Сравнение выражений (145) и (147) показывает, что рекуррентный алгоритм расчёта потенциала (147), обусловленного притяжением третьего тела, основан на начальных значениях четырёх функций координат спутника

$$\frac{r}{r_0}, \frac{z}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}. \quad (149)$$

### 2.3.3 Эффект приливов

Гравитационное действие Луны и Солнца вызывает приливы упругой Земли. Во внешнем пространстве появляется дополнительный потенциал (формула (33) на с.40)

$$\begin{aligned} R_{pt} = & \frac{fm}{r_0} \sum_{n=2}^3 k_{n0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n\left(\frac{z}{r}\right) \cdot A_{n0}^{(p)} \\ & + \frac{fm}{r_0} \sum_{n=2}^3 \sum_{k=1}^n k_{nk} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n^{(k)}\left(\frac{z}{r}\right) [A_{nk}^{(p)} \cos kw + B_{nk}^{(p)} \sin kw], \end{aligned} \quad (150)$$

где  $k_{nk}$  – числа Лява. В современной теории приливов параметры  $k_{2k}$  состоят из действительной  $k_{2k}^R$  и мнимой  $k_{2k}^I$  частей и зависят от частоты приливной волны. Параметры  $k_{3k}$  являются действительными числами. Коэффициенты  $A_{nk}^{(p)}$ ,  $B_{nk}^{(p)}$  зависят от координат возмущающего объекта в системе истинного экватора и определены соотношениями (148).

Рекуррентный алгоритм расчёта дополнительного потенциала (150) основан, как и в случае геопотенциала (145), на начальных значениях четырёх функций координат спутника (146) (с.79):

$$\frac{r_0}{r}, \frac{z}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}.$$

### 2.3.4 Световое давление

Выражение для ускорения  $\vec{F}_r$ , обусловленного давлением солнечного света, записано на с.38 (формула (28)).

Коэффициент отражения  $C_r$  является произведением двух сомножителей, один из которых есть постоянная величина  $P_0$ , а значение второго – сложная

функция времени, определяемая конструктивными особенностями космического аппарата.

Величина  $P_0 = 4.5606 \cdot 10^{-6}$  н/м<sup>2</sup> соответствует давлению солнечного света на среднем расстоянии Земли от Солнца, приблизительно равном одной астрономической единице  $a_E$ .

Значение коэффициента отражения определяется формулой

$$C_r = 10^{-3} \cdot P_0 \cdot k_r \cdot \frac{A_s}{m_s} \text{ (км/с}^2\text{)}, \quad (151)$$

где

$k_r$  – эмпирический коэффициент отражения,  $1 < k_r < 1.5$ ,

$A_s$  – площадь поперечного сечения объекта, измеряемая в м<sup>2</sup>,

$m_s$  – масса объекта, измеряемая в кг.

Если ввести функцию

$$R_r = -C_r \frac{a_E^2}{|\vec{r}(t) - \vec{r}_S(t')|} = -C_r r_0 \left( \frac{a_E}{r_S} \right)^2 \left( \frac{r}{r_0} \right) \left( \frac{x}{r} \frac{x_S}{r_S} + \frac{y}{r} \frac{y_S}{r_S} + \frac{z}{r} \frac{z_S}{r_S} \right), \quad (152)$$

то она будет возмущающей функцией, ибо её частные производные по координатам соответственно равны проекциям возмущающего ускорения (28) на координатные оси [5]. В выражении (152) использовано разложение в ряд по полиномам Лежандра. В силу малости отношения  $r_0/r_S$  в разложении оставлен только один член. Координаты Солнца должны быть вычислены на момент излучения света  $t'$ .

Выражение (152) запишем в виде:

$$R_r = -10^{-3} P_0 r_0 \left( k_r \frac{A_s}{m_s} \right) \left( \frac{r}{r_0} \right) \left[ A_{10} \cdot \left( \frac{z}{r} \right) + A_{11} \cdot \left( \frac{x}{r} \right) + B_{11} \cdot \left( \frac{y}{r} \right) \right], \quad (153)$$

где величины  $A_{10}$ ,  $A_{11}$ ,  $B_{11}$  являются функциями параметров движения Солнца

$$A_{10} = \left( \frac{a_E}{r_S} \right)^2 \left( \frac{z_S}{r_S} \right), \quad A_{11} = \left( \frac{a_E}{r_S} \right)^2 \left( \frac{x_S}{r_S} \right), \quad B_{11} = \left( \frac{a_E}{r_S} \right)^2 \left( \frac{y_S}{r_S} \right).$$

В формулу (153) входят начальные значения четырёх функций координат спутника (149) (с.81):

$$\frac{r}{r_0}, \quad \frac{z}{r}, \quad \frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}.$$

### 2.3.5 Положения светил

В алгоритмах численного интегрирования для расчёта мгновенных значений векторов положений Луны и Солнца в геоцентрической небесной системе отсчёта используют современную численную модель движения планет [202].

Аналитический подход предполагает вычисление *неопределённого интеграла* от возмущающей функции по независимой переменной – времени  $t$  (соотношение (61) на с.50).

Для взятия интеграла коэффициенты (148) должны быть выражены в аналитическом виде как функции угловых переменных, явно или неявно зависящих от времени. Как и в случае с преобразованием систем отсчёта (выражение (143) на с.78), приходится применять приближённые формулы. Здесь таковыми являются отрезки тригонометрических рядов, аппроксимирующие координаты Луны и Солнца на длительных интервалах времени [102]. В качестве угловых переменных необходимо использовать *фундаментальные аргументы* (12) (с.23). Именно эти величины входят составной частью в классические теории движения Луны и Солнца [1].

Алгоритм вычисления функций от координат Луны и Солнца в системе отсчёта, связанной с истинным экватором, представлен в приложении на с.173.

### 2.3.6 Начальные функции

Выражения для пяти “начальных” функций  $\frac{r}{r_0}$ ,  $\frac{r_0}{r}$ ,  $\frac{z}{r}$ ,  $\frac{x}{r}$ ,  $\frac{y}{r}$  запишем при помощи соотношений промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров (с.64).

Для модуля расстояния  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  справедливы соотношения:

$$\frac{r}{r_0} = \frac{\xi}{r_0} \left[ 1 + 2c\sigma \frac{\eta}{\xi} - c^2 \frac{\eta^2}{\xi^2} + (1 + \sigma^2) \frac{c^2}{\xi^2} \right]^{+\frac{1}{2}},$$

$$\frac{r_0}{r} = \frac{r_0}{\xi} \left[ 1 + 2c\sigma \frac{\eta}{\xi} - c^2 \frac{\eta^2}{\xi^2} + (1 + \sigma^2) \frac{c^2}{\xi^2} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Выражение в квадратных скобках обозначим  $1 + \epsilon$  и перепишем в виде многочлена от двух переменных  $\eta$  и  $\frac{r_0}{\xi}$ :

$$1 + \epsilon = 1 + 2\sigma \left(\frac{c}{r_0}\right) \eta \left(\frac{r_0}{\xi}\right) - \left(\frac{c}{r_0}\right)^2 \eta^2 \left(\frac{r_0}{\xi}\right)^2 + (1 + \sigma^2) \left(\frac{c}{r_0}\right)^2 \left(\frac{r_0}{\xi}\right)^2.$$

Квадратный корень из этого выражения входит в знаменатель трёх других начальных функций (формула (112) на с.64):

$$\begin{aligned} \frac{z}{r} &= \left[ \eta + \sigma \left(\frac{c}{r_0}\right) \left(\frac{r_0}{\xi}\right) \right] \left(1 + \epsilon\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \frac{x}{r} &= \left[ 1 + \left(\frac{c}{r_0}\right)^2 \left(\frac{r_0}{\xi}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(1 + \epsilon\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \cos w, \\ \frac{y}{r} &= \left[ 1 + \left(\frac{c}{r_0}\right)^2 \left(\frac{r_0}{\xi}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(1 + \epsilon\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \sin w. \end{aligned} \quad (154)$$

Величины  $\sigma \left(\frac{c}{r_0}\right)$  и  $\left(\frac{c}{r_0}\right)^2$  имеют первый порядок малости относительно сжатия. Используя числовые значения величин  $r_0$ ,  $c$ ,  $\sigma$  (с.65) и формулы

$$\sqrt{1 + \phi} = 1 + \frac{1}{2} \phi - \frac{1}{8} \phi^2 + \frac{1}{16} \phi^3 - \frac{5}{128} \phi^4 + \frac{7}{256} \phi^5 - \dots, \quad (155)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \phi}} = 1 - \frac{1}{2} \phi + \frac{3}{8} \phi^2 - \frac{5}{16} \phi^3 + \frac{35}{128} \phi^4 - \frac{63}{256} \phi^5 - \dots \quad (156)$$

для разложения в ряды при малых значениях  $\phi$  [30], получаем

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_0} &= \frac{\xi}{r_0} + \sum \tilde{a}_{ij} \eta^i \left(\frac{r_0}{\xi}\right)^j, \quad \frac{r_0}{r} = \sum \tilde{b}_{ij} \eta^i \left(\frac{r_0}{\xi}\right)^j, \quad \frac{z}{r} = \sum \tilde{z}_{ij} \eta^i \left(\frac{r_0}{\xi}\right)^j, \\ &\left[ 1 + \left(\frac{c}{r_0}\right)^2 \left(\frac{r_0}{\xi}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(1 + \epsilon\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum \tilde{x}_{ij} \eta^i \left(\frac{r_0}{\xi}\right)^j. \end{aligned} \quad (157)$$

Значения коэффициентов  $\tilde{a}_{ij}$ ,  $\tilde{b}_{ij}$ ,  $\tilde{z}_{ij}$ ,  $\tilde{x}_{ij}$  получены с помощью формул, выполняющих умножение и сложение многочленов с двумя переменными [66] и обобщающих соотношения (91). В качестве примера в табл.3 (с.85) представлены ненулевые значения коэффициентов  $\tilde{a}_{ij}$ ,  $\tilde{b}_{ij}$ ,  $\tilde{z}_{ij}$ ,  $\tilde{x}_{ij}$ .

Таблица 3: Коэффициенты многочленов от двух переменных

$i$	$j$	$\tilde{a}_{ij}$	$\tilde{b}_{ij}$	$\tilde{z}_{ij}$	$i$	$j$	$\tilde{x}_{ij}$
0	1	0.0005413133150	1.0000000000000	-0.0011695792786	0	0	1.0000000000000
0	3	-0.0000001465101	-0.0005413133150	0.0000006331088	0	2	-0.0000006839578
0	5	0.0000000000793	0.0000004395302	-0.0000000005141	0	4	0.0000000007402
0	7		-0.0000000003965				
1	0	-0.0011695792786		1.0000000000000	1	1	0.0011695792786
1	2	0.0000006331088	0.0011695792786	-0.0005426812307	1	3	-0.0000012670176
1	4	-0.0000000005141	-0.0000018993265	0.0000004417516	1	5	0.0000000013726
1	6		0.0000000025703	-0.0000000003995	1	7	-0.0000000000015
1	8		-0.0000000000032				
2	1	-0.0005413133150		0.0011695792786	2	2	0.0005426812307
2	3	0.0000002937606	0.0005426812307	-0.0000025340352	2	4	-0.0000005901137
2	5	-0.0000000002391	-0.0000008835031	0.0000000036037	2	6	0.0000000006417
2	7		0.0000000011986	-0.0000000000046	3	3	0.0000019009264
2	9		-0.0000000000015				
3	2	-0.0000006331088		0.0005426812307	3	5	-0.0000000041216
3	4	0.0000000010290	0.0000019009264	-0.0000008857264	3	7	0.0000000000067
3	6	-0.0000000000014	-0.0000000051493	0.0000000012047			
3	8		0.0000000000098	-0.0000000000015			
4	3	-0.0000001472505		0.0000019009264	4	4	0.0000004439749
4	5	0.0000000002403	0.0000004439749	-0.0000000056686	4	6	-0.0000000009676
4	7		-0.0000000012077	0.0000000000112	4	8	0.0000000000016
4	9		0.0000000000023				
5	4	-0.0000000005149		0.0000004439749	5	5	0.0000000025790
5	6	0.0000000000014	0.0000000025790	-0.0000000012107	5	7	-0.0000000000084
5	8		-0.0000000000098	0.0000000000023			
6	5	-0.0000000000805		0.0000000025790	6	6	0.0000000004056
6	7		0.0000000004056	-0.0000000000103	6	8	-0.0000000000013
6	9		-0.0000000000015				
7	6			0.0000000004056	7	7	0.0000000000033
7	8		0.0000000000033	-0.0000000000016			
8	7			0.0000000000033			

В равенствах (154) и (157) пять “начальных” функций выражены через сжатые сфероидальные координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $w$ . Представим эти равенства как функции параметров и угловых переменных промежуточной орбиты.

Формулу (96) (с.60) и выражение (107) со с.64 запишем в следующем виде

$$\frac{\xi}{r_0} = \frac{a}{r_0} (1 - e \cos E), \quad (158)$$

$$\frac{r_0}{\xi} = \frac{r_0}{a} \frac{1 + \bar{e} \cos \psi}{(1 - e\bar{e})} \frac{1}{1 - \bar{q} \cos \psi}, \quad (159)$$

$$\eta = (-s \cos \tilde{\varphi} + \gamma) \frac{1}{1 - d \cos \tilde{\varphi}}. \quad (160)$$

Определение для угла долготы  $w = \tilde{w} + \tilde{\Omega}$  и соотношения (109), (110) (с.64) позволяют записать

$$\sqrt{1 - \eta^2} \cos w = \left[ -\frac{1 - \alpha}{2} \cos(\tilde{\varphi} - \tilde{\Omega}) + \frac{1 + \alpha}{2} \cos(\tilde{\varphi} + \tilde{\Omega}) - \beta \cos \tilde{\Omega} \right] \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}} (1 - d \cos \tilde{\varphi})}, \quad (161)$$

$$\sqrt{1 - \eta^2} \sin w = \left[ +\frac{1 - \alpha}{2} \sin(\tilde{\varphi} - \tilde{\Omega}) + \frac{1 + \alpha}{2} \sin(\tilde{\varphi} + \tilde{\Omega}) + \beta \sin \tilde{\Omega} \right] \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}} (1 - d \cos \tilde{\varphi})}. \quad (162)$$

В правых частях формул (158) - (162) присутствуют параметры промежуточной орбиты  $a, e, \bar{e}, s, \alpha, \bar{q}, d, \gamma, \beta, \bar{\gamma}$  и угловые переменные  $\tilde{\varphi}, \psi, E, \tilde{\Omega}$ . Величины  $\bar{q}, d, \gamma, \beta$  имеют первый порядок малости относительно сжатия. Разложения для величин  $\frac{1}{1 - \bar{q} \cos \psi}, \frac{1}{1 - d \cos \tilde{\varphi}}$  с точностью до пятого порядка относительно малого параметра даны в приложении на с.175.

Сохранить в *буквенном виде зависимость* от всех параметров промежуточной орбиты не представляется возможным: число слагаемых возмущающей функции оказалось бы непомерно большим. Количество членов существенно уменьшится, если использовать только численные значения позиционных параметров, но такой подход приводит к серьёзным ограничениям по точности вследствие существенных вариаций числовых значений эксцентриситета орбиты (рис.1 на с.32) и, для некоторых начальных условий, угла наклона орбиты (рис.2 на с.44).

В данной работе предложен алгоритм, основанный на использовании **рядов**, состоящих из *элементарных слагаемых*, и **операций** сложения и умножения, выполняемых над такими слагаемыми.

### 2.3.7 Элементарное слагаемое

Пусть, как и в разделе 2.1,

$a, e, \bar{e}, s, \alpha$  – параметры промежуточной орбиты спутника (с.54),  
 $\tilde{\varphi}, \psi, E, \tilde{\Omega}$  – угловые переменные промежуточной орбиты (с.63),  
 $S_{\oplus}$  – гринвичское истинное звёздное время (с.24),  
 $l_M, l'_S, F_M, D, \Omega_M$  – фундаментальные аргументы (с.23).

Пусть известны также приближённые *численные значения* позиционных параметров орбиты объекта  $a_0, e_0, \delta_0$  и знак параметра  $\alpha_3$ , зависящий от величины угла наклона орбиты (с.63).

С помощью алгоритма раздела 2.2.3 и значений  $a_0, e_0, \delta_0$  образуем одномерные массивы, принадлежащие множеству  $\mathbf{M}$  (с.72), и содержащие численные значения как параметров промежуточной орбиты, так и частных производных высших порядков по параметрам  $a, e, \delta$ .

Определим *элементарное слагаемое* как структуру вида

$$A(a_0, e_0, \delta_0) \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \bar{e}^{j_3} \left(\frac{1}{1 - e\bar{e}}\right)^{j_4} s^{j_5} \alpha^{j_6} \cdot \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad (163)$$

$$\vartheta = k_1 \tilde{\varphi} + k_2 \psi + k_3 E + k_4 \tilde{\Omega} + k_5 S_{\oplus} + k_6 l_M + k_7 l'_S + k_8 F_M + k_9 D + k_{10} \Omega_M, \quad (164)$$

где  $A(a_0, e_0, \delta_0)$  – одномерный массив действительных чисел, принадлежащий множеству  $\mathbf{M}$  и полученный на основе начальных значений  $a_0, e_0, \delta_0$ ; показатель степени  $j_1$  может принимать положительные и отрицательные целые значения и нуль и удовлетворяет условию  $j_1^{(min)} \leq j_1 \leq j_1^{(max)}$ ; показатели степени  $j_2, j_3, j_4, j_5, j_6$  могут принимать только положительные целые значения и нуль и удовлетворяют условиям  $0 \leq j_k \leq j_k^{(max)}$ ; коэффициенты  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, k_{10}$  принимают любые положительные и отрицательные целые значения и нуль.

Граничные значения показателей степени  $j_1^{(min)}, j_1^{(max)}, j_k^{(max)}$  следует выбирать, исходя из особенностей орбиты и возможностей компьютера. Изучение источников, анализ массивов орбитальных элементов “NORAD” и численные эксперименты позволяют утверждать, что для всех объектов, не удаляющихся от геоцентра на расстояния более 10 радиусов Земли, характерны

малые, 1-2 километра, вариации большой полуоси промежуточной орбиты. В этом случае допустимы значения  $j_1^{(min)} = j_1^{(max)} = 0$ . Отличие текущего значения параметра  $a$  от начального  $a_0$  будет учтено путём подстановки одномерного массива чисел  $A(a_0, e_0, \delta_0)$  (163) и вариации  $\Delta a = a - a_0$  в формулу (142) (с.77).

Орбитам всех геодезических спутников (табл.1 на с.31) присущи малые, порядка 0.01 радиана, вариации угла наклона. Максимальные значения показателей степени  $j_5, j_6$  можно приравнять нулю:  $j_5^{(max)} = 0, j_6^{(max)} = 0$ . Информация для учёта изменений параметров  $s$  и  $\alpha$  будет накапливаться и сохраняться в элементах одномерного массива  $A(a_0, e_0, \delta_0)$ .

Для “стационарных” объектов (рис.2) на длительных интервалах времени характерны большие, около 15 градусов, изменения угла наклона орбиты. В таких специальных случаях значения показателей степени  $j_5$  и  $j_6$  в выражении (163) *не следует ограничивать* каким-либо числом.

Различные варианты использования элементарного слагаемого будут даны в табл.11 (раздел 3.3 на с.124).

Два элементарных слагаемых назовём “подобными”, если у них совпадают типы и аргументы тригонометрических функций и численные значения показателей степени позиционных переменных. “Подобные” слагаемые можно *складывать*. Сложению подлежат только соответствующие элементы одномерных массивов (равенства (126) на с.73).

Операция *умножения* двух элементарных слагаемых заключается в следующем: одномерные массивы перемножаются по правилам (127) (с.73), определённым на множестве  $\mathbf{M}$ , показатели степени складываются, а типы функций *косинус* и *синус* и их аргументы преобразуются по правилам умножения тригонометрических функций.

Операции сложения, умножения и приведения подобных членов, выполняемые над элементарными слагаемыми, не меняют их вида.

В результате дифференцирования по позиционным параметрам  $a, e, \delta$  и по угловым переменным  $l, g, h$  в силу формул раздела 2.2.4 (с.75) *структура* (163) *не сохраняется*.

### 2.3.8 Сумма слагаемых

Выражение (158) состоит из двух слагаемых типа (163):

$$\frac{\xi}{r_0} = + \left( \frac{a}{r_0} \right) - \left( \frac{a}{r_0} \right) e \cos E.$$

Представление выражения (159) в виде суммы элементарных слагаемых дано в табл.4. Использована формула со с.175 приложения.

Таблица 4: Функция  $r_0/\xi$  как сумма элементарных слагаемых

A	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$j_4$	$j_5$	$j_6$		$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$k_9$	$k_{10}$
$\bar{Q}_1$	-1	0	0	+1	0	0	cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}_2$	-1	0	0	+1	0	0	cos	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}_3$	-1	0	0	+1	0	0	cos	0	+2	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}_4$	-1	0	0	+1	0	0	cos	0	+3	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}_5$	-1	0	0	+1	0	0	cos	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}_6$	-1	0	0	+1	0	0	cos	0	+5	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}_7$	-1	0	+1	+1	0	0	cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}_8$	-1	0	+1	+1	0	0	cos	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}_9$	-1	0	+1	+1	0	0	cos	0	+2	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}_{10}$	-1	0	+1	+1	0	0	cos	0	+3	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}_{11}$	-1	0	+1	+1	0	0	cos	0	+4	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}_{12}$	-1	0	+1	+1	0	0	cos	0	+5	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{Q}_{13}$	-1	0	+1	+1	0	0	cos	0	+6	0	0	0	0	0	0	0	0

Символами  $\bar{Q}_n$  обозначены одномерные массивы, принадлежащие множеству  $\mathbf{M}$  и образованные с помощью следующих выражений:

$$\bar{Q}_1 = 1 + \frac{1}{2} \bar{q}^2 + \frac{3}{8} \bar{q}^4, \quad \bar{Q}_2 = \bar{q} + \frac{3}{4} \bar{q}^3 + \frac{5}{8} \bar{q}^5,$$

$$\bar{Q}_3 = \frac{1}{2} \bar{q}^2 + \frac{1}{2} \bar{q}^4, \quad \bar{Q}_4 = \frac{1}{4} \bar{q}^3 + \frac{5}{16} \bar{q}^5, \quad \bar{Q}_5 = \frac{1}{8} \bar{q}^4,$$

$$\bar{Q}_6 = \frac{1}{16} \bar{q}^5, \quad \bar{Q}_7 = \frac{1}{2} \bar{Q}_2, \quad \bar{Q}_8 = \bar{Q}_1 + \frac{1}{2} \bar{Q}_3,$$

$$\bar{Q}_9 = \frac{1}{2} \bar{Q}_2 + \frac{1}{2} \bar{Q}_4, \quad \bar{Q}_{10} = \frac{1}{2} \bar{Q}_3 + \frac{1}{2} \bar{Q}_5, \quad \bar{Q}_{11} = \frac{1}{2} \bar{Q}_4 + \frac{1}{2} \bar{Q}_6,$$

$$\bar{Q}_{12} = \frac{1}{2} \bar{Q}_5, \quad \bar{Q}_{13} = \frac{1}{2} \bar{Q}_6.$$

Представление выражения (160) в виде суммы элементарных слагаемых дано в табл.5. Использована формула со с.175 приложения.

Таблица 5: Функция  $\eta$  как сумма элементарных слагаемых

A	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$j_4$	$j_5$	$j_6$		$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$k_9$	$k_{10}$
$\bar{D}_1$	0	0	0	0	0	0	cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{D}_2$	0	0	0	0	0	0	cos	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{D}_3$	0	0	0	0	0	0	cos	+2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{D}_4$	0	0	0	0	0	0	cos	+3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{D}_5$	0	0	0	0	0	0	cos	+4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{D}_6$	0	0	0	0	0	0	cos	+5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{D}_7$	0	0	0	0	+1	0	cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{D}_8$	0	0	0	0	+1	0	cos	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{D}_9$	0	0	0	0	+1	0	cos	+2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{D}_{10}$	0	0	0	0	+1	0	cos	+3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{D}_{11}$	0	0	0	0	+1	0	cos	+4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{D}_{12}$	0	0	0	0	+1	0	cos	+5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{D}_{13}$	0	0	0	0	+1	0	cos	+6	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Символами  $\bar{D}_n$  обозначены одномерные массивы, принадлежащие множеству  $\mathbf{M}$  и образованные с помощью следующих выражений:

$$\begin{aligned}
\bar{D}_1 &= \gamma \left( 1 + \frac{1}{2} d^2 + \frac{3}{8} d^4 \right), & \bar{D}_3 &= \gamma \left( \frac{1}{2} d^2 + \frac{1}{2} d^4 \right), \\
\bar{D}_2 &= \gamma \left( d + \frac{3}{4} d^3 + \frac{5}{8} d^5 \right), & \bar{D}_4 &= \gamma \left( \frac{1}{4} d^3 + \frac{5}{16} d^5 \right), \\
\bar{D}_5 &= \gamma \left( \frac{1}{8} d^4 \right), & \bar{D}_6 &= \gamma \left( \frac{1}{16} d^5 \right), \\
\bar{D}_7 &= -\frac{1}{2} d - \frac{3}{8} d^3 - \frac{5}{16} d^5, \\
\bar{D}_8 &= -1 - \frac{3}{4} d^2 - \frac{5}{8} d^4, & \bar{D}_{10} &= -\frac{1}{4} d^2 - \frac{5}{16} d^4, \\
\bar{D}_9 &= -\frac{1}{2} d - \frac{1}{2} d^3 - \frac{15}{32} d^5, & \bar{D}_{11} &= -\frac{1}{8} d^3 - \frac{3}{16} d^5, \\
\bar{D}_{12} &= -\frac{1}{16} d^4, & \bar{D}_{13} &= -\frac{1}{32} d^5.
\end{aligned}$$

Представление выражений (161) и (162) в виде суммы элементарных слагаемых даны в приложении, в табл.26 (с.177) и табл.27 (с.178).

Примеры сумм элементарных слагаемых записаны в явном виде, но все таблицы (4, 5, 26, 27) были получены с помощью алгоритма перемножения. Выражение (161), например, является произведением двух рядов (с.176):

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1 &= \alpha \cos(\tilde{\varphi} - \tilde{\Omega}) + \alpha \cos(\tilde{\varphi} + \tilde{\Omega}) - \cos(\tilde{\varphi} - \tilde{\Omega}) + \cos(\tilde{\varphi} + \tilde{\Omega}) - 2\beta \cos \tilde{\Omega}, \\ \tilde{X}_2 &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cos \tilde{\varphi} + \bar{a}_2 \cos 2\tilde{\varphi} + \bar{a}_3 \cos 3\tilde{\varphi} + \bar{a}_4 \cos 4\tilde{\varphi} + \bar{a}_5 \cos 5\tilde{\varphi}.\end{aligned}$$

Каждый член суммы  $\tilde{X}_1$  умножается на каждое слагаемое суммы  $\tilde{X}_2$  по правилам операции умножения элементарных слагаемых (с.88). Далее выполняется операция приведения подобных членов, и результат накапливается в новой сумме  $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$ , слагаемые которой даны в табл.26.

Следующий шаг алгоритма – вычисление рядов, состоящих из элементарных слагаемых и соответствующих различным степеням двух величин:  $\eta$  и  $r_0/\xi$ . Пусть  $\tilde{Y}_1$  – сумма слагаемых для функции  $r_0/\xi$  (табл.4) или функции  $\eta$  (табл.5), а  $\tilde{Y}_n$  – сумма элементарных слагаемых, соответствующая функции в степени  $n$ . Возведение в степень осуществляется последовательным перемножением рядов:  $\tilde{Y}_n = \tilde{Y}_{n-1} \times \tilde{Y}_1$ , ( $n > 1$ ).

Далее по формулам (154) и (157) с использованием операций умножения и сложения составим суммы элементарных слагаемых, соответствующие пяти “начальным” функциям и двум выражениям

$$\left[ \left( \frac{\xi}{r_0} \right)^2 + \left( \frac{c}{r_0} \right)^2 \eta^2 \right] \cdot \left( \frac{r}{r_0} \right), \quad (165)$$

$$\left[ \left( \frac{\xi}{r_0} \right)^2 + \left( \frac{c}{r_0} \right)^2 \eta^2 \right] \cdot \left( \frac{r_0}{r} \right)^2. \quad (166)$$

Величина  $r_0^2/(\xi^2 + c^2\eta^2)$ , обратная множителю, использованному в этих выражениях, будет необходима на этапе аналитического интегрирования.

Предлагаемый алгоритм преобразований включает в себя ещё одну величину: числовое значение параметра точности  $\tilde{\varepsilon}$ . Параметр  $\tilde{\varepsilon}$  налагает ограничение на величину первого элемента одномерного массива  $A(a_0, e_0, \delta_0)$  каждого элементарного слагаемого. Элементарных слагаемых в суммах будет тем больше, чем выше задаваемая *точность вычислений*.

В табл.6, иллюстрирующей это утверждение, использованы численные значения элементов орбиты спутника Лагеос (с.31). Для значения  $\tilde{\varepsilon} = 10^{-2}$

Таблица 6: Начальные функции: число слагаемых

$\tilde{\varepsilon}$	$r/r_0$	$r_0/r$	$z/r$	$x/r$	$y/r$	(165)	(166)
$10^{-2}$	2	2	1	4	4	6	1
$10^{-7}$	20	108	107	226	226	40	139
$10^{-10}$	392	1092	949	3035	3035	215	990
$10^{-13}$	1626	4420	4131	11728	11728	744	3945

результатом преобразований являются ряды, соответствующие *кеплеровской промежуточной орбите*. При числовых значениях параметра точности  $\tilde{\varepsilon}$ , равных  $10^{-7}$ ,  $10^{-10}$  или  $10^{-13}$ , в суммах оставлены слагаемые, имеющие, соответственно, второй, третий или четвёртый порядок малости.

На максимальные и минимальные значения показателей степеней  $j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6$  не накладывалось никаких ограничений. Явная зависимость начальных функций от шести величин

$$\frac{a}{r_0}, e, \bar{e}, \frac{1}{1 - e\bar{e}}, s, \alpha \quad (167)$$

и угловых элементов

$$\tilde{\varphi}, \psi, E, \tilde{\Omega} \quad (168)$$

содержится в “буквенном” виде. Конкретные численные значения элементов орбиты были необходимы только при вычислении одномерных массивов типа  $A(a_0, e_0, \delta_0)$ , соответствующих параметрам

$$\bar{q} = \frac{e - \bar{e}}{1 - e\bar{e}}, \gamma, d, \beta, \frac{1}{\sqrt{\gamma}}. \quad (169)$$

Величины  $\bar{q}, \gamma, d, \beta$  имеют первый порядок малости относительно сжатия, величина  $\sqrt{\gamma}$  отличается от единицы во втором порядке малости.

Разности между наибольшими и наименьшими значениями показателей степени  $j_1, j_3, j_4$  и  $j_5$ , например, возрастают от +1 при значении  $\tilde{\varepsilon} = 10^{-2}$  до +4 при  $\tilde{\varepsilon} = 10^{-7}$  и достигают величины +10 при значении параметра точности  $\tilde{\varepsilon} = 10^{-13}$ . Для  $j_2$  разность не превышает +3, для  $j_6 - \leq +1$ .

### 2.3.9 Формулы рекурсии

В качестве стартовых условий примем “начальные” функции (табл.6). Для произвольных целых значений  $n$  и  $k$  справедливы *рекуррентные формулы*:

$$\frac{J}{r_0^2} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{n+1} = \frac{J}{r_0^2} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \cdot \frac{r}{r_0}, \quad (170)$$

$$\frac{J}{r_0^2} \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n+1} = \frac{J}{r_0^2} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n \cdot \frac{r_0}{r}, \quad (171)$$

$$\left( \frac{z}{r} \right)^{n+1} = \left( \frac{z}{r} \right)^n \cdot \frac{z}{r}, \quad (172)$$

$$(\cos \varphi)^{k+1} \cos [(k+1)w] = (\cos \varphi)^k \cos kw \cdot \frac{x}{r} - (\cos \varphi)^k \sin kw \cdot \frac{y}{r}, \quad (173)$$

$$(\cos \varphi)^{k+1} \sin [(k+1)w] = (\cos \varphi)^k \sin kw \cdot \frac{x}{r} + (\cos \varphi)^k \cos kw \cdot \frac{y}{r}, \quad (174)$$

$$\frac{J}{r_0^2} = \left[ \left( \frac{\xi}{r_0} \right)^2 + \left( \frac{c}{r_0} \right)^2 \eta^2 \right], \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \left( \frac{z}{r} \right)^2}.$$

Простая идея предлагаемого алгоритма заключается в том, что *возмущающую функцию*, обусловленную действием на спутник *различных факторов*, можно представить в виде суммы слагаемых, обладающих структурой (163). Идея основана на том факте, что каждое слагаемое возмущающей функции является произведением соотношений, одно из которых зависит *только от координат спутника*, а другое содержит зависимость либо от звёздного времени, либо от координат Луны или Солнца.

При записи разложения для геопотенциала в системе истинного экватора (формула (145) на с.79) были использованы функции звёздного времени  $S_{\oplus}$ . Каждая из этих функций –  $\hat{C}_{nk}$ ,  $\hat{S}_{nk}$ ,  $\tilde{C}_{n1}$  и  $\tilde{S}_{n1}$  – не зависит от координат объекта и является суммой двух элементарных слагаемых.

При записи возмущающей функции, обусловленной действием Луны и Солнца (формула (147) на с.80), приливами упругой Земли (формула (150) на с.81) и световым давлением (формула (153) на с.82) были использованы функции от координат Луны и Солнца (формулы (148) на с.80). Каждая из этих функций в результате аналитических операций (приложение, с.174) преобразованы к сумме членов типа (163).

Следующий шаг состоит в преобразовании соотношений, зависящих только от координат спутника, к сумме элементарных слагаемых.

В возмущающих функциях, обусловленных геопотенциалом, притяжением Луны и Солнца, приливами и световым давлением, при произвольных целых значениях  $n$  и  $k$  выделяются четыре различных сомножителя:

$$\begin{aligned}
 & \frac{J}{r_0^2} \cdot \frac{fm}{r_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} \frac{d^k P_n(z/r)}{d(z/r)^k} (\cos \varphi)^k \cos kw, \\
 & \frac{J}{r_0^2} \cdot \frac{fm}{r_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} \frac{d^k P_n(z/r)}{d(z/r)^k} (\cos \varphi)^k \sin kw, \\
 & \frac{J}{r_0^2} \cdot \frac{fm}{r_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \frac{d^k P_n(z/r)}{d(z/r)^k} (\cos \varphi)^k \cos kw, \\
 & \frac{J}{r_0^2} \cdot \frac{fm}{r_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \frac{d^k P_n(z/r)}{d(z/r)^k} (\cos \varphi)^k \sin kw.
 \end{aligned} \tag{175}$$

Производная порядка  $k$  по аргументу  $z/r$  от полинома Лежандра  $P_n(z/r)$  является многочленом порядка  $n - k$  относительно  $z/r$ . В результате применения алгоритмов рекурсии (170) ÷ (174), рекуррентных формул для многочленов Лежандра (233) ÷ (236) и операций перемножения и сложения рядов каждый сомножитель принимает вид суммы элементарных слагаемых.

Последний шаг преобразования возмущающей функции заключается в умножении рядов, полученных для каждого из сомножителей, зависящих только от координат спутника, на соответствующие суммы элементарных слагаемых, образованные для выражений  $\hat{C}_{nk}$ ,  $\hat{S}_{nk}$ ,  $A_{nk}^{(p)}$ ,  $B_{nk}^{(p)}$ .

### 2.3.10 Новые результаты

- Разработан алгоритм преобразования возмущающей функции в сумму “элементарных” слагаемых.
- Отличительной чертой алгоритма является способ конструирования возмущающей функции на основе “начальных” функций координат.
- В предлагаемом алгоритме формулы промежуточного движения учитываются с максимально возможной точностью.

Преимущество использования в теории возмущений вместо кеплеровской орбиты промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров, иллюстрирует рис.4. Для модельного объекта

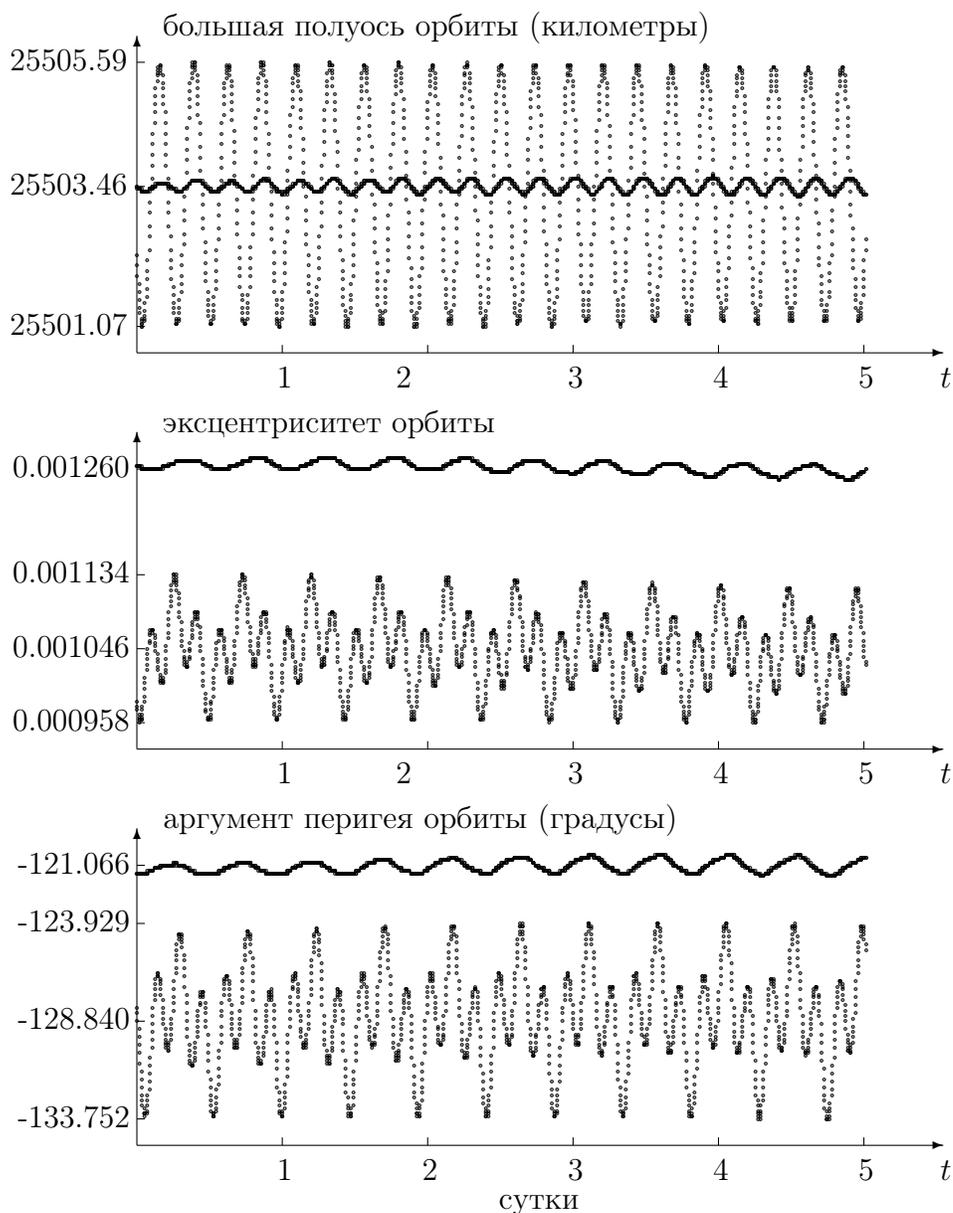


Рис. 4: Сравнение элементов

с параметрами орбиты спутника Эталон (табл.1 на с.31) на интервале, равном десяти оборотам, было выполнено *численное интегрирование уравнений движения с учётом всех возмущающих факторов*. Вариации кеплеровских элементов орбиты (пунктирная кривая) значительно превосходят по амплитуде вариации элементов промежуточной орбиты (сплошная кривая).

## 2.4 Алгоритм интегрирования

Алгоритм, изложенный в предыдущем разделе, позволяет представить возмущающую функцию, обусловленную действием различных факторов, как сумму слагаемых вида (163), (164):

$$\begin{aligned} & \frac{r_0^2}{\xi^2 + c^2\eta^2} \cdot X(a_0, e_0, \delta_0) \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \bar{e}^{j_3} \left(\frac{1}{1 - e\bar{e}}\right)^{j_4} s^{j_5} \alpha^{j_6} \cdot \cos \vartheta, \\ & \frac{r_0^2}{\xi^2 + c^2\eta^2} \cdot Y(a_0, e_0, \delta_0) \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \bar{e}^{j_3} \left(\frac{1}{1 - e\bar{e}}\right)^{j_4} s^{j_5} \alpha^{j_6} \cdot \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (176)$$

Первые элементы одномерных массивов  $X(a_0, e_0, \delta_0)$  и  $Y(a_0, e_0, \delta_0)$  имеют второй порядок относительно малого параметра – сжатия Земли. Это утверждение основано на том факте, что возмущающая функция является величиной второго порядка малости (формула (48) на с.47). Зависимость от позиционных параметров промежуточной орбиты учтена частично в “буквенном” виде через величины и показатели степени и, частично, численно, с помощью частных производных высших порядков, хранящихся в одномерных массивах. Угол  $\vartheta$  определён на с.87 как линейная комбинация угловых переменных промежуточной орбиты, звёздного времени и фундаментальных аргументов. Величина  $r_0^2/(\xi^2 + c^2\eta^2)$ , появившаяся ещё в выражениях на с.91, компенсирует множитель  $J/r_0^2$  из соотношений (175) и необходима на этапе аналитического интегрирования.

В публикациях Д.Брауэра [179], А.А.Орлова [116] и в современных исследованиях М.А.Вашковьяка [38] интегрирование слагаемых возмущающей функции выполняется с помощью дифференциальных соотношений:

$$dt = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{fm}} r \cdot dE, \quad dt = \frac{1}{\sqrt{fma(1 - e^2)}} r^2 \cdot dv,$$

где  $dt$  – дифференциал от независимой переменной, обозначающей время,  $fm$  – планетоцентрическая гравитационная постоянная,  $a$  и  $e$  – большая полуось и эксцентриситет орбиты,  $r$  – модуль расстояния,  $v$  и  $E$  – истинная и эксцентрисическая аномалии *кеплеровской* промежуточной орбиты.

В данном разделе предложен алгоритм интегрирования на основе промежуточной орбиты *обобщённой задачи двух неподвижных центров* [159].

### 2.4.1 Дифференциальные соотношения

Поскольку в промежуточном движении  $dt = (\xi^2 + c^2\eta^2) d\tau$ , то неопределённые интегралы по времени  $t$  от слагаемых (176) принимают вид

$$r_0^2 X(a_0, e_0, \delta_0) \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \bar{e}^{j_3} \left(\frac{1}{1-e\bar{e}}\right)^{j_4} s^{j_5} \alpha^{j_6} \cdot \int \cos \vartheta d\tau, \quad (177)$$

$$r_0^2 Y(a_0, e_0, \delta_0) \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \bar{e}^{j_3} \left(\frac{1}{1-e\bar{e}}\right)^{j_4} s^{j_5} \alpha^{j_6} \cdot \int \sin \vartheta d\tau. \quad (178)$$

Дифференциальные соотношения между переменной  $\tau$  и угловыми переменными  $\tilde{\varphi}$  и  $\psi$  с точностью до пятого порядка малости имеют вид (с.57):

$$d\tilde{\varphi} = \sigma_1 \sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}} \cdot d\tau = f_0 d\tau + \left( \sum_{k=1}^5 f_k \cos 2k\tilde{\varphi} \right) d\tau, \quad (179)$$

$$d\psi = \bar{\sigma}_2 \sqrt{1 - \bar{k}_2^2 \cos^2 \psi} \cdot d\tau = p_0 d\tau + \left( \sum_{k=1}^5 p_k \cos 2k\psi \right) d\tau. \quad (180)$$

Величины  $f_0, f_k, p_0, p_k$  в этих формулах являются *одномерными массивами*, образованными по правилам умножения и сложения одномерных массивов, соответствующих величинам  $\sigma_1, k_1^2, \bar{\sigma}_2, \bar{k}_2^2$ . Для разложения подкоренных выражений было принято во внимание, что  $k_1^2$  и  $\bar{k}_2^2$  являются величинами первого порядка малости, и использована формула (155) (с.84).

Эта же приближённая формула применяется к соотношению:

$$dE = \sqrt{-2\alpha_1} \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{2p}{\xi} - \frac{p^2 + q^2}{\xi^2} \right)} \cdot d\tau,$$

$$dE = \sqrt{-2\alpha_1} \left[ \xi - p + \frac{p^2 + q^2}{2\xi} - \frac{1}{8\xi} \left( 2p - \frac{p^2 + q^2}{\xi} \right)^2 - \dots \right] \cdot d\tau,$$

которое является следствием подстановки равенств

$$\Phi(\xi) = -2\alpha_1 (\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_1)(\xi^2 - 2p\xi + p^2 + q^2),$$

$$(\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_1) = a^2 e^2 \sin^2 E, \quad d\xi = a e \sin E dE$$

в первое из выражений (53) на с.48. Для связи дифференциалов имеем

$$dE = \tilde{p}_0 d\tau - \sqrt{-2\alpha_1} r_0 \left(\frac{a}{r_0}\right) e \cos E d\tau + \left( \sum_{k=1}^{10} \tilde{p}_k \cos k\psi \right) d\tau. \quad (181)$$

Величины  $f_k, p_k, \tilde{p}_{2k-1}$  и  $\tilde{p}_{2k}$  пропорциональны сжатию в степени  $k$ .

По определению четвёртой угловой переменной  $\tilde{\Omega}$  (формула (106) на с.63) дифференциал  $d\tilde{\Omega}$  является комбинацией дифференциалов (179) и (180):

$$d\tilde{\Omega} = \mu d\psi + \left( \sum_{i=1}^{10} i \alpha_i^p \cos i\psi \right) d\psi + \left( \sum_{i=1}^{10} i \beta_i^f \cos i\tilde{\varphi} \right) d\tilde{\varphi}.$$

Выполним операции перемножения и сложения рядов из элементарных слагаемых, входящих в это выражение, и получим соотношение

$$d\tilde{\Omega} = \bar{p}_1 d\tau + \left( \sum_{k=1}^{10} \bar{p}_k \cos k\psi \right) d\tau + \left( \sum_{k=1}^{10} \bar{f}_k \cos k\tilde{\varphi} \right) d\tau, \quad (182)$$

в котором численный коэффициент  $\bar{p}_1$  имеет первый порядок малости относительно сжатия, а первые элементы одномерных массивов, соответствующих коэффициентам  $\bar{p}_{2k-1}$ ,  $\bar{p}_{2k}$ ,  $\bar{f}_{2k-1}$  и  $\bar{f}_{2k}$ , пропорциональны малому параметру в степени  $k$ .

Дифференциалы  $d\tilde{\varphi}$ ,  $d\psi$ ,  $dE$ ,  $d\tilde{\Omega}$  дополним соотношениями

$$\begin{aligned} dS_{\oplus} &= \dot{S}_{\oplus} \cdot dt, \\ dl_M &= \dot{l}_M \cdot dt, \quad dl'_S = \dot{l}'_S \cdot dt, \\ dF_M &= \dot{F}_M \cdot dt, \quad dD = \dot{D} \cdot dt, \quad d\Omega_M = \dot{\Omega}_M \cdot dt, \end{aligned} \quad (183)$$

где точка означает дифференцирование по времени, а дифференциал  $dt$  получим преобразованием формулы  $dt = (\xi^2 + c^2\eta^2) d\tau$  с помощью алгоритмов перемножения и сложения рядов, состоящих из элементарных слагаемых:

$$\begin{aligned} dt &= \tilde{a}_0 d\tau - 2a^2e \cos E d\tau + \frac{1}{2} a^2e^2 \cos 2E d\tau \\ &+ \frac{1}{2} a^2e^2 d\tau + \left( \sum_{k=1}^{10} \tilde{a}_k \cos k\tilde{\varphi} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (184)$$

Первые элементы массивов, соответствующих величинам  $\tilde{a}_{2k-1}$ ,  $\tilde{a}_{2k}$ , пропорциональны  $k$ -той степени малого параметра – сжатия Земли. Обозначим

$$\tilde{\xi}_0 = \tilde{a}_0 + \frac{1}{2} a^2 e^2, \quad \xi^2 + c^2\eta^2 = \tilde{\xi}_0 + \tilde{\xi}_p, \quad (185)$$

$$\tilde{\xi}_p = -2a^2e \cos E + \frac{1}{2} a^2e^2 \cos 2E + \sum_{k=1}^{10} \tilde{a}_k \cos k\tilde{\varphi}. \quad (186)$$

Величинам  $\tilde{a}_0$  и  $\tilde{\xi}_0$  следует поставить в соответствие одномерные массивы чисел со структурой (124), (125), принадлежащие множеству  $\mathbf{M}$ . В сумму для величины  $\tilde{\xi}_p$  входят только периодические слагаемые.

### 2.4.2 Рекуррентный алгоритм

При произвольных комбинациях целых чисел  $k_5 \div k_{10}$  обозначим

$$q_k = k_5 S_{\oplus} + k_6 l_M + k_7 l'_S + k_8 F_M + k_9 D + k_{10} \Omega_M, \quad (187)$$

$$\dot{q}_k = k_5 \dot{S}_{\oplus} + k_6 \dot{l}_M + k_7 \dot{l}'_S + k_8 \dot{F}_M + k_9 \dot{D} + k_{10} \dot{\Omega}_M. \quad (188)$$

Для вычисления неопределённых интегралов (177), (178)

$$\int \cos \vartheta d\tau = \int \cos \left( k_1 \tilde{\varphi} + k_2 \psi + k_3 E + k_4 \tilde{\Omega} + q_k \right) d\tau,$$

$$\int \sin \vartheta d\tau = \int \sin \left( k_1 \tilde{\varphi} + k_2 \psi + k_3 E + k_4 \tilde{\Omega} + q_k \right) d\tau$$

представим дифференциал  $d\tau$  как *линейную комбинацию дифференциалов от всех угловых переменных*: каждое из дифференциальных соотношений (179), (180), (181), (182), (183) умножим, соответственно, на одно из целых чисел  $k_1 \div k_{10}$  и, складывая с учётом (184), (187) и (188), получим

$$\begin{aligned} \bar{A}(a_0, e_0, \delta_0) d\tau &= d \left( k_1 \tilde{\varphi} + k_2 \psi + k_3 E + k_4 \tilde{\Omega} + q_k \right) \\ &+ k_3 \sqrt{-2\alpha_1} r_0 \left( \frac{a}{r_0} \right) e \cos E d\tau \\ &+ 2 \dot{q}_k r_0^2 \left( \frac{a}{r_0} \right)^2 e \cos E d\tau \\ &- \frac{1}{2} \dot{q}_k r_0^2 \left( \frac{a}{r_0} \right)^2 e^2 \cos 2E d\tau \\ &- \frac{1}{2} \dot{q}_k r_0^2 \left( \frac{a}{r_0} \right)^2 e^2 d\tau \\ &- \sum_{k=1}^{10} (k_2 p_k + k_3 \tilde{p}_k + k_4 \bar{p}_k) \cos k \psi d\tau \\ &- \sum_{k=1}^{10} (k_1 f_k + k_4 \bar{f}_k + \dot{q}_k \tilde{a}_k) \cos k \tilde{\varphi} d\tau, \end{aligned} \quad (189)$$

$$\bar{A}(a_0, e_0, \delta_0) = k_1 f_0 + k_2 p_0 + k_3 \tilde{p}_0 + k_4 \bar{p}_1 + \dot{q}_k \tilde{a}_0. \quad (190)$$

Величина  $\bar{A}$  является одномерным массивом чисел со структурой (124) и вычисляется на основе начальных численных значений позиционных параметров  $a_0, e_0, \delta_0$  по правилам, определённым для объектов множества  $\mathbf{M}$ .

Произведение части сомножителей обозначим символом

$$\tilde{Z}_j = \bar{e}^{j_3} \left( \frac{1}{1 - e \bar{e}} \right)^{j_4} s^{j_5} \alpha^{j_6}.$$

Формула (189) позволяет записать два рекуррентных соотношения

$$\begin{aligned} r_0^2 X \left( \frac{a}{r_0} \right)^{j_1} e^{j_2} \tilde{Z}_j \int \cos \vartheta d\tau = & + r_0^2 \left( X \bar{A}^{-1} \right) \left( \frac{a}{r_0} \right)^{j_1} e^{j_2} \tilde{Z}_j \sin \vartheta \\ & + r_0^2 \left( X \bar{A}^{-1} \right) \int \tilde{\Sigma} \cos \vartheta d\tau, \end{aligned} \quad (191)$$

$$\begin{aligned} r_0^2 Y \left( \frac{a}{r_0} \right)^{j_1} e^{j_2} \tilde{Z}_j \int \sin \vartheta d\tau = & - r_0^2 \left( Y \bar{A}^{-1} \right) \left( \frac{a}{r_0} \right)^{j_1} e^{j_2} \tilde{Z}_j \cos \vartheta \\ & + r_0^2 \left( Y \bar{A}^{-1} \right) \int \tilde{\Sigma} \sin \vartheta d\tau, \end{aligned} \quad (192)$$

где через  $\tilde{\Sigma}$  обозначена сумма элементарных слагаемых

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} = & + k_3 \sqrt{-2\alpha_1} r_0 \left( \frac{a}{r_0} \right)^{j_1+1} e^{j_2+1} \tilde{Z}_j \cos E \\ & + 2 \dot{q}_k r_0^2 \left( \frac{a}{r_0} \right)^{j_1+2} e^{j_2+1} \tilde{Z}_j \cos E \\ & - \frac{1}{2} \dot{q}_k r_0^2 \left( \frac{a}{r_0} \right)^{j_1+2} e^{j_2+2} \tilde{Z}_j (1 + \cos 2E) \\ & - \left( \frac{a}{r_0} \right)^{j_1} e^{j_2} \tilde{Z}_j \sum_{k=1}^{10} (k_2 p_k + k_3 \tilde{p}_k + k_4 \bar{p}_k) \cos k \psi \\ & - \left( \frac{a}{r_0} \right)^{j_1} e^{j_2} \tilde{Z}_j \sum_{k=1}^{10} (k_1 f_k + k_4 \bar{f}_k + \dot{q}_k \tilde{a}_k) \cos k \tilde{\varphi}. \end{aligned} \quad (193)$$

### 2.4.3 Особые слагаемые

Интегрирование возможно не всегда. В возмущающую функцию входят слагаемые как короткого, от долей оборота до нескольких суток, так и долгого периодов, и, что важно для всей модели, слагаемые с очень большими периодами изменений и вековой член.

Информация о периоде и частоте изменения для конкретного слагаемого содержится в численном значении первого элемента одномерного массива  $\bar{A}(a_0, e_0, \delta_0)$ . Если величина  $\bar{A}(a_0, e_0, \delta_0)/a_0^2$  меньше заранее выбранной частоты, то интегрирование не выполняется, а соответствующий член возмущающей функции называется “особым”.

Пусть при выполнении интегрирования (177) (с.97) численное значение первого элемента массива (190) указывает на то, что очередное слагаемое

$$r_0^2 (\xi^2 + c^2 \eta^2)^{-1} X(a_0, e_0, \delta_0) \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \tilde{Z}_j \cdot \cos \vartheta \quad (194)$$

с аргументом  $\vartheta$  является особым.

В “осреднённый” гамильтониан добавим слагаемое

$$r_0^2 (\tilde{\xi}_0)^{-1} X(a_0, e_0, \delta_0) \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \tilde{Z}_j \cdot \cos \vartheta. \quad (195)$$

Следуя формуле (61), вычтем это слагаемое из (194) и запишем интеграл

$$r_0^2 X(a_0, e_0, \delta_0) \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \tilde{Z}_j \int \left[1 - (\tilde{\xi}_0)^{-1} (\xi^2 + c^2 \eta^2)\right] \cos \vartheta d\tau.$$

Подставляя обозначение  $\xi^2 + c^2 \eta^2 = \tilde{\xi}_0 + \tilde{\xi}_p$  из формулы (185), получим

$$r_0^2 X(a_0, e_0, \delta_0) \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \tilde{Z}_j \int (\tilde{\xi}_0)^{-1} \tilde{\xi}_p \cos \vartheta d\tau.$$

С помощью равенства (186) подынтегральное выражение принимает вид

$$\int (\tilde{\xi}_0)^{-1} \left[ +2 a^2 e \cos E - \frac{1}{2} a^2 e^2 \cos 2E - \sum_{k=1}^{10} \tilde{a}_k \cos k\tilde{\varphi} \right] \cos \vartheta d\tau, \quad (196)$$

где уже нет особых слагаемых с аргументом  $\vartheta$  и возможно продолжение рекуррентного процесса интегрирования.

Если при интегрировании “особым” окажется слагаемое вида (178) (с.97)

$$r_0^2 (\xi^2 + c^2 \eta^2)^{-1} Y(a_0, e_0, \delta_0) \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \tilde{Z}_j \cdot \sin \vartheta,$$

то в выражениях (195) и (196) следуют  $\cos \vartheta$  заменить на  $\sin \vartheta$ .

#### 2.4.4 Новые результаты

- Разработан рекуррентный алгоритм интегрирования элементарных слагаемых возмущающей функции (формулы (191), (192), (193)).
- Разработан алгоритм выделения особых слагаемых – долгопериодических, резонансных и вековых (формулы (194), (195), (196)).
- Формулы промежуточного движения учтены с точностью, ограниченной только разрядной сеткой компьютера.

## 2.5 Осреднённые уравнения

### 2.5.1 “Несингулярные” переменные

Воспользуемся набором “несингулярных” элементов:

$$a', \quad l' + g' + h', \quad e' \cos(g' + h'), \quad e' \sin(g' + h'), \quad \delta' \cos h', \quad \delta' \sin h'. \quad (197)$$

Штрихи означают, что все величины являются “средними” (с.50).

Преобразуем “осреднённые” уравнения (63) (с.51) к виду

$$\begin{aligned} \frac{da'}{dt} &= + \frac{\partial a'}{\partial L'} \frac{\partial K_2^*}{\partial l'} + \frac{\partial a'}{\partial G'} \frac{\partial K_2^*}{\partial g'} + \frac{\partial a'}{\partial H'} \frac{\partial K_2^*}{\partial h'}, \\ \frac{d(l' + g' + h')}{dt} &= + \frac{\partial \alpha_1}{\partial L'} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial G'} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} \\ &\quad - \frac{\partial K_2^*}{\partial L'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial G'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'}, \\ \frac{d[e' \cos(g' + h')]}{dt} &= + \frac{de'}{dt} \cos(g' + h') \\ &\quad - e' \sin(g' + h') \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial G'} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial G'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'} \right), \\ \frac{d[e' \sin(g' + h')]}{dt} &= + \frac{de'}{dt} \sin(g' + h') \\ &\quad + e' \cos(g' + h') \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial G'} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial G'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'} \right), \\ \frac{d[\delta' \cos h']}{dt} &= + \frac{d\delta'}{dt} \cos h' - \delta' \sin h' \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'} \right), \\ \frac{d[\delta' \sin h']}{dt} &= + \frac{d\delta'}{dt} \sin h' + \delta' \cos h' \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial H'} - \frac{\partial K_2^*}{\partial H'} \right). \end{aligned} \quad (198)$$

Производные от параметров  $e'$  и  $\delta'$  по времени  $t$  равны

$$\begin{aligned} \frac{de'}{dt} &= + \frac{1}{2e'} \left( \frac{\partial e'^2}{\partial L'} \frac{\partial K_2^*}{\partial l'} + \frac{\partial e'^2}{\partial G'} \frac{\partial K_2^*}{\partial g'} + \frac{\partial e'^2}{\partial H'} \frac{\partial K_2^*}{\partial h'} \right), \\ \frac{d\delta'}{dt} &= + \frac{1}{2\delta'} \left( \frac{\partial \delta'^2}{\partial L'} \frac{\partial K_2^*}{\partial l'} + \frac{\partial \delta'^2}{\partial G'} \frac{\partial K_2^*}{\partial g'} + \frac{\partial \delta'^2}{\partial H'} \frac{\partial K_2^*}{\partial h'} \right). \end{aligned} \quad (199)$$

В произвольный момент времени надо знать *только числовые значения правых частей* “осреднённых” уравнений (198), (199) в несингулярных переменных, поскольку эти уравнения будут проинтегрированы численным образом.

### 2.5.2 Частные производные

Рассмотрим алгоритм вычисления правых частей уравнений.

Частные производные от величины  $\alpha_1$  получены на с.70 (формулы (120)), причём значения параметров  $n_0, \nu, \mu, \lambda$  надо вычислять на основе “средних” значений элементов  $a', e', \delta'$  по формулам промежуточного движения.

Алгоритм вычисления частных производных от величин  $a', e'^2, \delta'^2$  по каноническим переменным действия  $L', G', H'$  изложен на с.71.

В “особых” слагаемых (195), составляющих новый гамильтониан  $K_2^*$ , сохранена структура “элементарного” слагаемого (163). Обозначим

$$\hat{A}(a', e', \delta') = \left(\frac{a'}{r_0}\right)^{j_1} (e')^{j_2} (\bar{e}')^{j_3} \left(\frac{1}{1 - e' \bar{e}'}\right)^{j_4} s'^{j_5} \alpha'^{j_6}, \quad (200)$$

$$X = A(a_0, e_0, \delta_0) \cdot \hat{A} \cdot \cos \vartheta, \quad Y = A(a_0, e_0, \delta_0) \cdot \hat{A} \cdot \sin \vartheta.$$

Производные по переменным  $l', g', h'$  (с заменой  $l'$  на  $g'$  и  $h'$ ) равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial l'} &= -A \cdot \hat{A} \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial l'}, & \frac{\partial Y}{\partial l'} &= +A \cdot \hat{A} \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial l'}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial l'} &= k_1 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial l'} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial l'} + k_3 \frac{\partial E}{\partial l'} + k_4 \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial l'}. \end{aligned}$$

Алгоритм вычисления частных производных от переменных  $\tilde{\varphi}, \psi, E, \tilde{\Omega}$  по каноническим угловым элементам  $l, g, h$  представлен на с.76.

Производные по переменным  $L', G', H'$  (с заменой  $L'$  на  $G'$  и  $H'$ ) равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial L'} &= \frac{\partial A}{\partial L'} \hat{A} \cos \vartheta + A \frac{\partial \hat{A}}{\partial L'} \cos \vartheta - A \hat{A} \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial L'}, \\ \frac{\partial Y}{\partial L'} &= \frac{\partial A}{\partial L'} \hat{A} \sin \vartheta + A \frac{\partial \hat{A}}{\partial L'} \sin \vartheta + A \hat{A} \cos \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial L'}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial L'} &= k_1 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial L'} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial L'} + k_3 \frac{\partial E}{\partial L'} + k_4 \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial L'}. \end{aligned}$$

Частные производные от величины  $A$ , функции  $\hat{A}$  и угловых переменных  $\tilde{\varphi}, \psi, E, \tilde{\Omega}$  по каноническим переменным действия  $L', G', H'$  следует вычислять по правилам дифференцирования функции многих переменных. Запишем, например, частную производную от функции  $B(a', e', \delta')$ :

$$\frac{\partial B}{\partial L'} = \frac{\partial B}{\partial a'} \frac{\partial a'}{\partial L'} + \frac{1}{2e'} \frac{\partial B}{\partial e'} \frac{\partial e'^2}{\partial L'} + \frac{1}{2\delta'} \frac{\partial B}{\partial \delta'} \frac{\partial \delta'^2}{\partial L'}. \quad (201)$$

Рассмотрим в деталях каждый из вариантов дифференцирования.

Значения частных производных от  $A$  по  $a'$ ,  $e'$  и  $\delta'$  вычисляются с помощью ряда Тейлора по формуле, аналогичной формуле (142) на с.77:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(a', e', \delta')}{\partial a'} &= + \frac{\partial A(a_0, e_0, \delta_0)}{\partial a} \\ &+ \frac{\partial^2 A}{\partial a^2} \Delta a + \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial e} \Delta e + \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial \delta} \Delta \delta \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 A}{\partial a^3} (\Delta a)^2 + \frac{\partial^3 A}{\partial a^2 \partial e} \Delta a \Delta e + \frac{\partial^3 A}{\partial a^2 \partial \delta} \Delta a \Delta \delta \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 A}{\partial a \partial e^2} (\Delta e)^2 + \frac{\partial^3 A}{\partial a \partial e \partial \delta} \Delta e \Delta \delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 A}{\partial a \partial \delta^2} (\Delta \delta)^2. \end{aligned} \quad (202)$$

Частные производные от функции  $\hat{A}(a', e', \delta')$  заданы формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{A}(a', e', \delta')}{\partial a'} &= \frac{\partial \hat{A}}{\partial \bar{e}'} \frac{\partial \bar{e}'}{\partial a'} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial s'} \frac{\partial s'}{\partial a'} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial \alpha'} \frac{\partial \alpha'}{\partial a'} \\ &+ j_1 \frac{1}{r_0} \left( \frac{a'}{r_0} \right)^{j_1-1} (e')^{j_2} (\bar{e}')^{j_3} \left( \frac{1}{1 - e' \bar{e}'} \right)^{j_4} s'^{j_5} \alpha'^{j_6}, \\ \frac{\partial \hat{A}(a', e', \delta')}{\partial e'} &= \frac{\partial \hat{A}}{\partial \bar{e}'} \frac{\partial \bar{e}'}{\partial e'} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial s'} \frac{\partial s'}{\partial e'} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial \alpha'} \frac{\partial \alpha'}{\partial e'} \\ &+ j_2 \left( \frac{a'}{r_0} \right)^{j_1} (e')^{j_2-1} (\bar{e}')^{j_3} \left( \frac{1}{1 - e' \bar{e}'} \right)^{j_4} s'^{j_5} \alpha'^{j_6}, \\ &+ j_4 \left( \frac{a'}{r_0} \right)^{j_1} (e')^{j_2} (\bar{e}')^{j_3+1} \left( \frac{1}{1 - e' \bar{e}'} \right)^{j_4+1} s'^{j_5} \alpha'^{j_6}, \\ \frac{\partial \hat{A}(a', e', \delta')}{\partial \delta'} &= \frac{\partial \hat{A}}{\partial \bar{e}'} \frac{\partial \bar{e}'}{\partial \delta'} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial s'} \frac{\partial s'}{\partial \delta'} + \frac{\partial \hat{A}}{\partial \alpha'} \frac{\partial \alpha'}{\partial \delta'}, \\ \frac{\partial \hat{A}(a', e', \delta')}{\partial \bar{e}'} &= j_3 \left( \frac{a'}{r_0} \right)^{j_1} (e')^{j_2} (\bar{e}')^{j_3-1} \left( \frac{1}{1 - e' \bar{e}'} \right)^{j_4} s'^{j_5} \alpha'^{j_6}, \\ &+ j_4 \left( \frac{a'}{r_0} \right)^{j_1} (e')^{j_2+1} (\bar{e}')^{j_3} \left( \frac{1}{1 - e' \bar{e}'} \right)^{j_4+1} s'^{j_5} \alpha'^{j_6}, \\ \frac{\partial \hat{A}(a', e', \delta')}{\partial s'} &= j_5 \left( \frac{a'}{r_0} \right)^{j_1} (e')^{j_2} (\bar{e}')^{j_3} \left( \frac{1}{1 - e' \bar{e}'} \right)^{j_4} s'^{j_5-1} \alpha'^{j_6}, \\ \frac{\partial \hat{A}(a', e', \delta')}{\partial \alpha'} &= j_6 \left( \frac{a'}{r_0} \right)^{j_1} (e')^{j_2} (\bar{e}')^{j_3} \left( \frac{1}{1 - e' \bar{e}'} \right)^{j_4} s'^{j_5} \alpha'^{j_6-1}, \end{aligned}$$

в которых значения производных от параметров  $\bar{e}'$ ,  $s'$ ,  $\alpha'$  определяются с помощью соответствующих *одномерных массивов* по формулам типа (202).

В случае угловых переменных в (201) надо подставить формулы со с.75.

### 2.5.3 Короткопериодические неравенства

Простая связь между оскулирующими и “сглаженными” параметрами орбиты, определяемая формулой (62) (с.50), для “несингулярных” элементов (197) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a &= a' + \frac{\partial a'}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l'} + \frac{\partial a'}{\partial G'} \frac{\partial S_2}{\partial g'} + \frac{\partial a'}{\partial H'} \frac{\partial S_2}{\partial h'}, \\
 l + g + h &= l' + g' + h' - \frac{\partial S_2}{\partial L'} - \frac{\partial S_2}{\partial G'} - \frac{\partial S_2}{\partial H'}, \\
 e \cos(g + h) &= e' \cos(g' + h') \\
 &\quad + \{ e', S_2 \} \cos(g' + h') - e' \sin(g' + h') \{ g' + h', S_2 \}, \\
 e \sin(g + h) &= e' \sin(g' + h') \\
 &\quad + \{ e', S_2 \} \sin(g' + h') + e' \cos(g' + h') \{ g' + h', S_2 \}, \\
 \delta \cos h &= \delta' \cos h' + \{ \delta', S_2 \} \cos h' - \delta' \sin h' \{ h', S_2 \}, \\
 \delta \sin h &= \delta' \sin h' + \{ \delta', S_2 \} \sin h' + \delta' \cos h' \{ h', S_2 \},
 \end{aligned} \tag{203}$$

где скобки Пуассона равны [156]

$$\begin{aligned}
 \{ e', S_2 \} &= + \frac{1}{2e'} \left( \frac{\partial e'^2}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l'} + \frac{\partial e'^2}{\partial G'} \frac{\partial S_2}{\partial g'} + \frac{\partial e'^2}{\partial H'} \frac{\partial S_2}{\partial h'} \right), \\
 \{ g' + h', S_2 \} &= - \frac{\partial S_2}{\partial G'} - \frac{\partial S_2}{\partial H'}, \\
 \{ \delta', S_2 \} &= + \frac{1}{2\delta'} \left( \frac{\partial \delta'^2}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l'} + \frac{\partial \delta'^2}{\partial G'} \frac{\partial S_2}{\partial g'} + \frac{\partial \delta'^2}{\partial H'} \frac{\partial S_2}{\partial h'} \right), \\
 \{ h', S_2 \} &= - \frac{\partial S_2}{\partial H'}.
 \end{aligned} \tag{204}$$

Как и в случае “осреднённых” дифференциальных уравнений, в произвольный момент времени надо знать *только численные значения* правых частей выражений (203), (204). Функция преобразования  $S_2$  (с.50) является результатом интегрирования слагаемых возмущающей функции с помощью рекуррентных соотношений (191) и (192) и представляет из себя сумму короткопериодических членов, сохранивших структуру “элементарного” слагаемого (163). По этой причине остаётся в силе алгоритм вычисления частных производных, разработанный в предыдущем разделе.

### 2.5.4 Порядок действий

Для заданных приближённых *численных значений* позиционных параметров орбиты  $a_0$ ,  $e_0$ ,  $\delta_0$  и знака параметра  $\alpha_3$  найдём слагаемые возмущающей функции (раздел 2.3) и получим ряды для функции преобразования  $S_2$  и “осреднённого” гамильтониана  $K_2^*$  (раздел 2.4).

Пусть в начальный момент времени  $t_0$  известны численные значения “средних” элементов орбиты  $a'(t_0)$ ,  $e'(t_0)$ ,  $\delta'(t_0)$ ,  $l'(t_0)$ ,  $g'(t_0)$ ,  $h'(t_0)$ .

Вычислим числовые значения “несингулярных” переменных (197) в момент времени  $t_0$ . С такими начальными условиями на заданном интервале времени выполним численное интегрирование “осреднённых” уравнений (198).

Для преобразований от системы сглаженных “несингулярных” элементов к “средним” параметрам орбиты  $e'(t)$ ,  $\delta'(t)$ ,  $l'(t)$ ,  $g'(t)$ ,  $h'(t)$  в произвольный момент времени  $t$  будем использовать формулы

$$\begin{aligned} e'(t) &= \sqrt{[e' \cos(g' + h')]^2 + [e' \sin(g' + h')]^2}, \\ \delta'(t) &= \sqrt{(\delta' \cos h')^2 + (\delta' \sin h')^2}, \\ \cos(g'(t) + h'(t)) &= \frac{e' \cos(g' + h')}{e'(t)}, \quad \cos h'(t) = \frac{\delta' \cos h'}{\delta'(t)}, \\ \sin(g'(t) + h'(t)) &= \frac{e' \sin(g' + h')}{e'(t)}, \quad \sin h'(t) = \frac{\delta' \sin h'}{\delta'(t)}, \end{aligned} \quad (205)$$

$$l'(t) = (l' + g' + h') - (g'(t) + h'(t)), \quad g'(t) = (g'(t) + h'(t)) - h'(t).$$

На основе “средних” параметров орбиты с помощью соотношений (203) и (204) на любой момент времени внутри интервала интегрирования определим числовые значения оскулирующих “несингулярных” элементов:

$$a, \quad l + g + h, \quad e \cos(g + h), \quad e \sin(g + h), \quad \delta \cos h, \quad \delta \sin h.$$

Оскулирующие элементы промежуточной орбиты  $e$ ,  $\delta$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $h$  вычислим из соотношений, аналогичных формулам (205).

Далее с помощью алгоритма раздела 2.1.6 (с.63) и числовых значений оскулирующих элементов промежуточной орбиты получим мгновенные значения прямоугольных координат и скоростей объекта.

### 2.5.5 Функции координат

Количество членов в разложениях функций от координат возмущающих тел (формулы (148) на с.80 и алгоритм на с.173 приложения) в зависимости от ограничений на модуль амплитуды представлено в таблице 7:

Таблица 7: Функции координат: число слагаемых

Луна	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	Солнце	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$A_{20}^{(M)}$	23	72	187	420	$A_{20}^{(S)}$	4	7	10	19
$A_{21}^{(M)}$	18	48	141	322	$A_{21}^{(S)}$	3	4	6	13
$B_{21}^{(M)}$	20	64	170	401	$B_{21}^{(S)}$	5	7	10	16
$A_{22}^{(M)}$	13	48	119	231	$A_{22}^{(S)}$	4	6	10	17
$B_{22}^{(M)}$	11	41	102	251	$B_{22}^{(S)}$	3	4	7	12
$A_{30}^{(M)}$	35	103	279	618	$A_{30}^{(S)}$	5	9	12	
$A_{31}^{(M)}$	24	69	197	439	$A_{31}^{(S)}$	5	8	12	
$B_{31}^{(M)}$	23	74	214	481	$B_{31}^{(S)}$	5	8	11	
$A_{32}^{(M)}$	16	51	154	346	$A_{32}^{(S)}$	4	7	9	
$B_{32}^{(M)}$	15	46	144	311	$B_{32}^{(S)}$	4	7	9	
$A_{33}^{(M)}$	9	28	78	221	$A_{33}^{(S)}$	3	6	7	15
$B_{33}^{(M)}$	9	29	81	231	$B_{33}^{(S)}$	3	6	7	15
$A_{40}^{(M)}$	45	146	383	804	$A_{40}^{(S)}$	7	10	15	
$A_{41}^{(M)}$	24	82	240	561	$A_{41}^{(S)}$	5	7	9	
$B_{41}^{(M)}$	22	84	216	549	$B_{41}^{(S)}$	6	10	11	
$A_{42}^{(M)}$	11	52	150	355	$A_{42}^{(S)}$	6	8	11	
$B_{42}^{(M)}$	10	46	131	344	$B_{42}^{(S)}$	4	6	8	
$A_{43}^{(M)}$	6	22	83	222	$A_{43}^{(S)}$	2	5	8	12
$B_{43}^{(M)}$	6	24	89	244	$B_{43}^{(S)}$	2	6	10	15
$A_{44}^{(M)}$	2	12	46	128	$A_{44}^{(S)}$	1	4	7	11
$B_{44}^{(M)}$	2	12	45	124	$B_{44}^{(S)}$	1	4	6	9

В приложении на с.179 записаны самые большие по модулю амплитуды слагаемые разложения функций  $A_{nk}^{(M)}$ ,  $B_{nk}^{(M)}$  и  $A_{nk}^{(S)}$ ,  $B_{nk}^{(S)}$  в тригонометрические ряды с численными коэффициентами (табл.28). Алгоритм уточнения значений функций рассмотрен в разделе **2.6.4** (с.115).

### 2.5.6 Список упрощений

В ходе построения численно-аналитической модели движения сделано несколько упрощающих предположений:

- аномальная часть геопотенциала (145) и разложение потенциала, обусловленного притяжением Луны и Солнца (147), были ограничены по порядку и степени сферических функций;
- были использованы приближённые тригонометрические ряды (148) для представления функций от координат возмущающих тел;
- при построении возмущающей функции в “буквенном” виде (163) ограничена величина максимальной степени позиционных параметров;
- при интегрировании предполагается, что звёздное время и фундаментальные аргументы являются линейными функциями времени (188);
- алгоритм аналитического интегрирования (191), (192) не учитывает короткопериодические вариации позиционных параметров.

Влияние части из этих упрощений на методическую точность предлагаемой модели будет уменьшено с помощью специальных алгоритмов, представленных в следующем разделе, влияние же остальных можно будет оценить в процессе обработки наблюдений искусственных спутников Земли.

### 2.5.7 Новые результаты

- Выполнено преобразование осреднённых уравнений движения в систему несингулярных элементов орбиты.
- Дан алгоритм дифференцирования элементарных слагаемых по каноническим переменным промежуточной орбиты.
- Разработан алгоритм вычисления правых частей уравнений движения.
- Разработан алгоритм вычисления короткопериодических неравенств.

## 2.6 Дополнительные алгоритмы

### 2.6.1 Координатные условия

Современная теория движения планет, Луны и Солнца [202], построенная в барицентрической системе отсчёта, получена численным интегрированием релятивистских уравнений движения, записанных в постньютоновском приближении с помощью изотропных координатных условий [200].

Международный астрономический союз, принимая во внимание факт, что многие работы по теории относительности выполнены при использовании “гармонических” координат, оказавшихся полезными для приложений, рекомендует выбор гармонических координатных условий [199].

Обозначим

$f$  – гравитационная постоянная,

$m_0$  – масса Солнца,

$m_k$ ,  $k > 0$  – массы планет,

$\vec{r}$  – барицентрический вектор положения произвольной точки в пространстве,

$\vec{r}_k$  – барицентрический вектор положения объекта с номером  $k$ ,

$\vec{v}_k$  – барицентрический вектор скорости объекта с номером  $k$ ,

$v_k^2$  – квадрат модуля вектора скорости,

$U$  – потенциал в произвольной точке пространства, создаваемый системой частиц, взаимодействующих по закону Ньютона,

$W$  – скалярная функция,

$\vec{V}$  – векторная функция с компонентами  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ .

Пространство-время определяется значениями 10 компонент метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$ . Составляющие метрического тензора равны

$$g_{00} = -1 + \frac{2U}{c^2} - \frac{2U^2}{c^4} + \frac{2W}{c^4}, \quad (206)$$

$$g_{0i} = -\frac{1}{c^3} V_i, \quad (207)$$

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{ij}. \quad (208)$$

Изотропная форма представления метрики пространства-времени  $N + 1$  взаимодействующих частиц предполагает, что

$$U = \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}, \quad (209)$$

$$W = \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \left( \frac{3}{2} v_k^2 - \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{f m_l}{|\vec{r}_l - \vec{r}_k|} \right), \quad (210)$$

$$\vec{V} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \left( 7 \vec{v}_k + \frac{((\vec{r} - \vec{r}_k) \vec{v}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \right). \quad (211)$$

Метрика, полученная под гармоническими координатными условиями, отличается от изотропной в выражениях для дополнительных потенциалов

$$W = \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \left[ 2 v_k^2 - \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{f m_l}{|\vec{r}_l - \vec{r}_k|} \right. \quad (212)$$

$$\left. - \frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{r}_k) \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{f m_l}{|\vec{r}_l - \vec{r}_k|^3} (\vec{r}_k - \vec{r}_l) - \frac{1}{2} \frac{((\vec{r} - \vec{r}_k) \vec{v}_k)^2}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} \right],$$

$$\vec{V} = 4 \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \vec{v}_k. \quad (213)$$

Обратимся к формулам (209)-(213).

Потенциал  $U$  пропорционален  $v^2$ .

Выражение  $\frac{W}{c^4}$  имеет порядок  $\frac{v^4}{c^4}$ .

Выражение  $\frac{|\vec{V}|}{c^3}$  пропорционально  $\frac{v^3}{c^3}$ .

Формулы для метрических коэффициентов  $g_{ij}$  совпадают для обоих координатных условий. Отличие в коэффициенте  $g_{00}$  возникает только в четвёртом порядке, отличие в коэффициентах  $g_{0i}$  возникает в третьем порядке относительно  $\frac{v}{c}$ .

Из этого следуют следующие выводы: отличия в координатах  $x^1, x^2, x^3$  будут порядка  $\frac{v^2}{c^2}$ , отличия в координатном времени  $x^0$  смогут проявиться на уровне  $\frac{v^4}{c^4}$ .

С помощью тензорного преобразования

$$g_{\alpha\beta}(x^0, x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g'_{\mu\nu}(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \quad (214)$$

выведем формулы связи между координатами  $x'^0, x'^1, x'^2, x'^3$ , удовлетворяющими “изотропным” координатным условиям, и “гармоническими” координатами  $x^0, x^1, x^2, x^3$ .

Закон преобразования ищем в виде

$$x^\alpha = x'^\alpha + \delta x^\alpha(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \quad (215)$$

причём вариация  $\delta x^0(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$  имеет четвёртый порядок, а вариация  $\delta x^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$  – второй порядок относительно  $\frac{v}{c}$ .

Подставим соотношения для координат в формулу преобразования, выполним разложение правой и левой частей равенства в ряд Тейлора и приравняем величины одинакового порядка малости. В результате получим следующие дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta x^i}{\partial x'^0} &= \frac{1}{c^3} \left( V'_i(x') - V_i(x') \right), \\ \frac{\partial \delta x^i}{\partial x'^j} &= 0, \\ \frac{\partial \delta x^0}{\partial x'^0} &= \frac{1}{c^4} \left( W'(x') - W(x') \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial U(x')}{\partial x'^i} \cdot \delta x^i(x'^0), \\ \frac{\partial \delta x^0}{\partial x'^j} &= 0. \end{aligned} \quad (216)$$

Зависимость функций  $\delta x^0$  и  $\delta x^i$  от координат исчезает, а интегрирование по переменной  $x'^0$  приводит к определенным интегралам

$$\begin{aligned} \delta x^i(t') &= \frac{1}{c^2} \int_{t'_0}^{t'} \left( V'_i(x') - V_i(x') \right) dt', \\ \delta t(t') &= \frac{1}{c^4} \int_{t'_0}^{t'} \left( W'(x') - W(x') - c^2 \frac{\partial U(x')}{\partial x'^i} \delta x^i(t') \right) dt'. \end{aligned} \quad (217)$$

Выражения, стоящие под знаком интеграла, суть известные функции координат и времени и вычисляются на основе численной теории движения Солнца, Луны и планет [202].

Существует два способа выполнения расчётов. В первом фиксирована точка с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , и поправки на каждый следующий момент времени вычисляются именно для этой точки. Второй способ состоит в вычислении вариаций  $\delta t(t')$ ,  $\delta x^i(t')$  вдоль траектории движения небесного тела или космического аппарата.

Расчёты показали, что значения вариаций очень малы. Для простран-

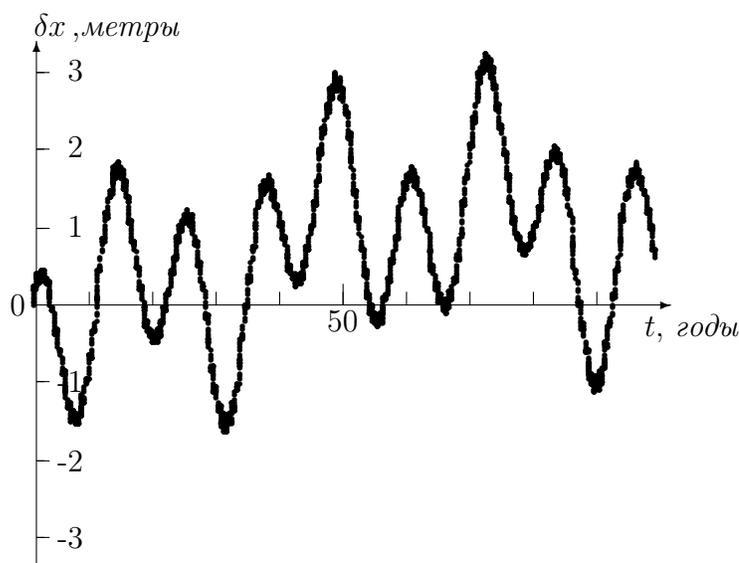


Рис. 5: Вариация

венно-временной траектории Земли, например, они не превосходят 3 метра на интервале 100 лет. Рис.5 иллюстрирует результаты вычислений. Начальная точка совпадает с эпохой 2000.0, январь, 1.5.

### 2.6.2 Влияние приливов

Преобразование функций  $R_{Mt}$  и  $R_{St}$ , обусловленных приливными деформациями, вызываемыми, соответственно, Луной и Солнцем, выполнено на основе формулы (150). В алгоритме использованы номинальные значения приливных чисел Лява  $k_{2k}^{R(0)}$ ,  $k_{2k}^{I(0)}$ ,  $k_{30}$ ,  $k_{31}$ ,  $k_{32}$ ,  $k_{33}$  [189], не зависящие от частоты приливной волны.

Формула (150) записана в системе истинного экватора. Вид функции в земной опорной системе отсчёта приведён на с.40. Именно такой вид функции был использован авторами стандарта вычислений [198]. Угол долготы Луны и угол долготы Солнца привязаны к гринвичскому меридиану. Для возмущающей функции было получено выражение, использующее поправки к численным значениям коэффициентов геопотенциала (34). В земной системе отсчёта функция, обусловленная приливными деформациями, имеет периоды изменения, приблизительно кратные звёздным суткам. В исходной формуле (150), связанной с истинным экватором даты, таких периодов нет.

Использование *земной* системы отсчёта удобно в алгоритмах численного интегрирования: влияние приливов на движение спутников учитывается вместе с вычислением ускорений от гравитационного поля Земли. При аналитическом подходе возмущения, обусловленные приливами упругой Земли, рассматриваются вместе с прямыми возмущениями от Луны и Солнца.

В стандартных соглашениях [189] возмущения, вызываемые зависимостью чисел Лява от частоты приливной волны и океаническими приливами, рекомендовано учитывать тем же способом, что и основные приливные эффекты: путём вычисления вариаций числовых значений коэффициентов разложения гравитационного поля Земли в ряд по сферическим функциям (формулы (37) и (38), с.41). Вариации зависят от звёздного времени и пяти фундаментальных аргументов. В результате *перехода* в систему *истинного* экватора формулы становятся значительно проще.

Для примера используем только два слагаемых суммы (37). Запишем их в ненормированном виде и учтём угол фазы, равный  $180^\circ$ . Сделаем одно допущение: будем пренебрегать отличиями среднего и истинного звёздного времени и величину  $S_\oplus^m$  заменим на  $S_\oplus$ :

$$\begin{aligned}\Delta C_{21} &= \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \left[ -b_1 \cos(S_\oplus - \vartheta) - a_1 \sin(S_\oplus - \vartheta) \right], \\ \Delta S_{21} &= \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \left[ +b_1 \sin(S_\oplus - \vartheta) - a_1 \cos(S_\oplus - \vartheta) \right],\end{aligned}$$

где

$$\vartheta = j_1 l_M + j_2 l'_S + j_3 F_M + j_4 D + j_5 \Omega_M.$$

Используем соотношения

$$\begin{aligned}\Delta\hat{C}_{21} &= \Delta C_{21} \cos S_{\oplus} - \Delta S_{21} \sin S_{\oplus}, \\ \Delta\hat{S}_{21} &= \Delta C_{21} \sin S_{\oplus} + \Delta S_{21} \cos S_{\oplus},\end{aligned}$$

аналогичные формулам на с.79, и получим

$$\begin{aligned}\Delta\hat{C}_{21} &= \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot [-b_1 \cos \vartheta + a_1 \sin \vartheta], \\ \Delta\hat{S}_{21} &= \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot [-b_1 \sin \vartheta - a_1 \cos \vartheta].\end{aligned}$$

Угловая величина  $\vartheta$  является линейной комбинацией фундаментальных аргументов. Зависимость от звёздного времени у возмущающей функции, обусловленной чувствительностью чисел Лява к частоте приливной волны, исчезает при переходе к системе истинного экватора. Это же утверждение справедливо и для возмущающей функции, обусловленной океаническими приливами и вычисляемой с помощью поправок (38) (с.41).

### 2.6.3 Тень Земли

Функцию (153), обусловленную действием светового давления, следует добавить в возмущающий гамильтониан (48).

При расчётах необходимо учитывать эффект, обусловленный прохождением спутника в тени Земли. Алгоритм вычисления моментов захода в тень и выхода из тени изложен, например, в лекциях профессора В.В.Нестерова [110].

Пусть  $\vec{r}(t)$  и  $\vec{R}_{\odot}(t')$  – векторы положения объекта и Солнца относительно центра Земли в любой системе отсчёта. Координаты Солнца следует вычислить на более ранний по отношению к  $t$  момент  $t'$  с учётом времени распространения света. Перенесём центр системы координат на спутник и определим косинус угла между направлением на Солнце и на центр Земли:

$$\cos v = - \frac{\vec{r}(t) \cdot (\vec{R}_{\odot}(t') - \vec{r}(t))}{|\vec{r}(t)| |\vec{R}_{\odot}(t') - \vec{r}(t)|}.$$

Объект находится в тени Земли при выполнении двух неравенств

$$\cos v > 0, \quad |\vec{r}_\perp| < 6402 \text{ км},$$

где  $\vec{r}_\perp$  – перпендикуляр к линии, соединяющей Солнце и спутник:

$$\vec{r}_\perp = \frac{\vec{r}(t) + q \vec{R}_\odot(t')}{1 + q}, \quad q = \frac{|\vec{r}(t)| \cos v}{|\vec{R}_\odot(t') - \vec{r}(t)| - |\vec{r}(t)| \cos v}.$$

На затенённом участке орбиты сила светового давления равна нулю. Алгоритм учёта эффекта тени заключается в процедуре внесения поправок в числовые значения как средних, так и оскулирующих параметров орбиты.

В процессе численного интегрирования осреднённых уравнений движения принимают во внимание возмущения, обусловленные гамильтонианом (48) (с.47) и функцией (153). На интервале очередного шага численного интегрирования находят все случаи прохождения спутника в тени Земли. Для каждого затенённого участка орбиты с помощью функции (153) определяют числовые значения изменений “несингулярных” элементов, обусловленных действием светового давления. Все изменения суммируют и результат суммирования *вычитают* из числовых значений “несингулярных” элементов, полученных на конце очередного шага численного интегрирования. Таким способом выполняют коррекцию *начальных условий* перед следующим шагом интегрирования осреднённых уравнений движения.

#### 2.6.4 Согласование моделей

При учёте возмущений в движении спутника от притяжения Луны и Солнца метод численного интегрирования имеет преимущество по быстродействию и точности перед численно-аналитическим подходом. Файлы с коэффициентами аппроксимации полиномами Чебышева [202], рекомендованные в качестве стандарта вычислений, позволяют в процессе численного интегрирования уравнений движения искусственных спутников почти мгновенно получать положения планет, Луны и Солнца относительно Земли, необходимые для определения возмущающих ускорений. В аналитическом подходе

используют приближённые ряды для представления функций от координат возмущающих тел (с.173), не отвечающие стандартным соглашениям [189].

Для *согласования* моделей движения Луны и Солнца используется методика разностно-полиномиальной коррекции [36]. На последовательных интервалах времени продолжительностью от двух до трёх суток вычисляются разности  $\Delta A_{nk}$ ,  $\Delta B_{nk}$  между значениями функций (148), определёнными с помощью приближённых разложений, и соответствующими значениями, полученными на основе координат небесных тел, взятых из численных эфемерид [202]. Разности, аппроксимированные полиномами по времени

$$\Delta A_{nk} = \sum_{i=0}^N \hat{A}_{nk,i} t^i, \quad \Delta B_{nk} = \sum_{i=0}^N \hat{B}_{nk,i} t^i,$$

подставляются в возмущающую функцию (формула (147) на с.80). Аналитическое интегрирование с помощью рекуррентных соотношений

$$\int \cos(\alpha + \dot{\alpha} t) t^i dt = +\frac{1}{\dot{\alpha}} \sin(\alpha + \dot{\alpha} t) t^i - \frac{i}{\dot{\alpha}} \int \sin(\alpha + \dot{\alpha} t) t^{i-1} dt,$$

$$\int \sin(\alpha + \dot{\alpha} t) t^i dt = -\frac{1}{\dot{\alpha}} \cos(\alpha + \dot{\alpha} t) t^i + \frac{i}{\dot{\alpha}} \int \cos(\alpha + \dot{\alpha} t) t^{i-1} dt$$

позволяет найти поправки к элементам орбиты на каждом из интервалов аппроксимации. Значения поправок в конце предыдущего интервала являются начальными условиями для операции интегрирования на следующем отрезке.

Время вычислений сокращается, точность возрастает, и ни одно из положений стандарта вычислений не нарушено.

### 2.6.5 Косвенное ускорение

При записи возмущающей функции (формула (27) на с.37), обусловленной притяжением внешнего тела, было учтено взаимодействие Земли и внешнего тела как материальных точек. В этом случае разложение не содержит косвенной части.

Учтём сжатие Земли и запишем дополнительную часть возмущающей

функции, обусловленной действием Луны на Землю:

$$\tilde{U} = -\frac{fm'}{r'} J_2 \left(\frac{r_0}{r'}\right)^2 P_2\left(\frac{z'}{r'}\right), \quad (218)$$

где

$f$  – гравитационная постоянная,

$m'$  – масса Луны,

$r_0$  – экваториальный радиус Земли,

$J_2$  – коэффициент при второй зональной гармонике,

$P_2(x)$  – полином Лежандра второго порядка,

$r'$  – расстояние между Землёй и Луной,

$x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  – координаты Земли относительно Луны.

Дифференцируя потенциал  $\tilde{U}$  по переменным  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , определим составляющие ускорения  $\vec{W}$  центра масс Земли, обусловленного взаимодействием Луны и сжатия Земли. Для того, чтобы в выражениях для ускорения перейти к координатам Луны относительно Земли, следует знак каждой из переменных  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  поменять на противоположный:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_x &= \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = fm' J_2 \frac{1}{r'^2} \left(\frac{r_0}{r'}\right)^2 \left(\frac{x'}{r'}\right) \left[ \frac{3}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{z'}{r'}\right)^2 \right], \\ \tilde{W}_y &= \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = fm' J_2 \frac{1}{r'^2} \left(\frac{r_0}{r'}\right)^2 \left(\frac{y'}{r'}\right) \left[ \frac{3}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{z'}{r'}\right)^2 \right], \\ \tilde{W}_z &= \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} = fm' J_2 \frac{1}{r'^2} \left(\frac{r_0}{r'}\right)^2 \left(\frac{z'}{r'}\right) \left[ \frac{9}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{z'}{r'}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (219)$$

Неинерциальность системы отсчёта, выбранной для изучения движения спутника, обусловлена не только вращением относительно небесной опорной системы отсчёта с угловой скоростью  $\vec{\Omega}(t)$  (формула (21) на с.34), но и ускорением  $\vec{W}$ , вызываемым взаимодействием Луны и сжатия Земли. Гамильтониан задачи К (с.35) надо дополнить ещё одним слагаемым – скалярным произведением ускорения  $\vec{W}$  на вектор положения объекта  $\vec{r}$  [117]:

$$K = \frac{1}{2} |\vec{p}|^2 + \left( \vec{W} \cdot \vec{r} \right) - \vec{\Omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}] - U_E - R - K_r. \quad (220)$$

Возмущающая функция  $R_{\tilde{W}} = -(\vec{\tilde{W}} \cdot \vec{r}) = -z\tilde{W}_z - x\tilde{W}_x - y\tilde{W}_y$  имеет вид

$$\begin{aligned} R_{\tilde{W}} = & + \left(\frac{fm}{r_0}\right) \left(\frac{r}{r_0}\right) P_1\left(\frac{z}{r}\right) \cdot A_{10}^{(\tilde{W})} \\ & + \left(\frac{fm}{r_0}\right) \left(\frac{r}{r_0}\right) P_1^{(1)}\left(\frac{z}{r}\right) \cdot \left[ A_{11}^{(\tilde{W})} \cos w + B_{11}^{(\tilde{W})} \sin w \right], \end{aligned} \quad (221)$$

где

$$A_{10}^{(\tilde{W})} = -\frac{r_0^2}{fm} \cdot \tilde{W}_z, \quad A_{11}^{(\tilde{W})} = -\frac{r_0^2}{fm} \cdot \tilde{W}_x, \quad B_{11}^{(\tilde{W})} = -\frac{r_0^2}{fm} \cdot \tilde{W}_y.$$

Действия с функцией (221) выполняются с помощью тех же алгоритмов, которые были использованы для преобразования возмущающих функций, обусловленных притяжением Луны и Солнца (формула (147) на с.80).

### 2.6.6 Новые результаты

- Общий вывод заключается в следующей рекомендации:  
в прикладных задачах достаточно записать релятивистские уравнения движения пробной частицы на основе “гармонических” координатных условий, а при вычислении возмущающих сил использовать “изотропные” координаты Солнца, Луны и планет.
- Выражения для учёта возмущений от приливов упругой Земли и океанических приливов, записанные во *вращающейся системе отсчёта* и рекомендованные Международной службой вращения Земли, были *преобразованы* к системе отсчёта, связанной с истинным экватором даты.
- Для согласования численной и аналитической моделей возмущающих сил, обусловленных действием Луны и Солнца, использована методика разностно-полиномиальной коррекции.
- Неравенства вследствие косвенного ускорения вычисляются с помощью ранее разработанных алгоритмов.

## 3 Применение алгоритмов

### 3.1 “Средние” элементы

Начальные параметры движения искусственных спутников Земли в формате “двустрочных” (“средних”) элементов кеплеровской орбиты [206] и наборы данных с результатами высокоточных измерений топоцентрических дальностей [190] являются составной частью массива исходных данных.

Параметры орбиты, входящие в соотношения обобщённой задачи двух неподвижных центров, с точностью до второй степени относительно малого параметра, сжатия Земли, близки параметрам движения в формате “двустрочных” элементов. Для шести спутников (табл.8) использованы “средние”

Таблица 8: Оценка погрешности прогноза на основе “средних” элементов

Спутник	минимальная высота полёта	интервал прогноза 5 суток	интервал прогноза 15 суток
международное имя	$h_{min}$	погрешность	погрешность
<i>Стелла</i>	800	1300 м	4100 м
<i>Старлет</i>	900	2400 м	5000 м
<i>Эйджисаи</i>	1500	1000 м	1500 м
<i>Лагеос</i>	6000	1200 м	1900 м
<i>Эталон</i>	19500	1600 м	2400 м
<i>Космос 2458 (ГЛОНАСС)</i>	19500	2400 м	3900 м

элементы и массивы измерений топоцентрических дальностей за январь и февраль месяцы 2010 года.

С помощью формул обобщённой задачи двух неподвижных центров на основе наборов двустрочных элементов орбиты на моменты наблюдений были получены вычисленные значения топоцентрических дальностей и разности между измеренными и вычисленными величинами (“невязки”). Продолжительность интервала прогнозирования составляет 5 и 15 суток. Самые большие значения “невязок” приблизительно соответствуют оценкам погрешности вычисления положений вдоль траектории движения. Именно эти значения в метрах представлены в табл.8.

### 3.2 Вычислительные аспекты

Рекуррентное соотношение (233) для вычисления полиномов Лежандра высших порядков со с.172 приложения запишем в виде:

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} \cdot x \cdot P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} \cdot P_{n-2}(x) \quad (222)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq +1, \\ P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot x^2. \end{aligned} \quad (223)$$

Возможны два варианта применения рекуррентной формулы.

1. Вычисление значения функции  $P_n(x)$  для произвольного  $n$  при заданном числовом значении аргумента  $x$  (численное интегрирование).
2. Нахождение численных значений коэффициентов полинома  $P_n(x)$  при различных степенях аргумента  $x$  (аналитический подход).

Преимущество рекуррентных соотношений заключается в скорости достижения результата, недостатком является возможная потеря вычислительной точности при вычитании больших чисел.

*Первый вариант* может быть проверен с помощью тождеств [5]

$$P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_n(+1) = +1. \quad (224)$$

Расчёты показали, что в результате использования формулы (222) с начальными условиями (223) и аргументами  $x = -1$  и  $x = +1$  тождества (224) справедливы с точностью до 15 знаков после запятой при всех порядках полинома Лежандра от  $n = 1$  до  $n = 720$ .

Второй способ проверки состоит в использовании формулы для производящей функции полиномов Лежандра [6]:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x). \quad (225)$$

Расчёты показали (табл.9), что при различных численных значениях параметра  $\alpha$  и аргумента  $x$  значение суммы в правой части выражения (225) соответствует значению функции в левой части с точностью до 12 значащих

Таблица 9: Производящая функция для полиномов Лежандра

$\alpha$	$x$	функция	разность	$N_{max}$
0.96	+1.00	25.0000000000000000	$-0.988 \cdot 10^{-12}$	755
0.96	+0.99	6.9337524528153640	$-0.196 \cdot 10^{-12}$	606
0.96	+0.95	3.2009219983223993	$-0.090 \cdot 10^{-12}$	546
0.96	+0.90	2.2727272727272727	$+0.685 \cdot 10^{-12}$	565
0.96	+0.80	1.6103915660020771	$-0.926 \cdot 10^{-12}$	547
0.96	+0.50	1.0197712705600052	$-0.897 \cdot 10^{-12}$	561
0.96	+0.20	0.8064516129032258	$-0.269 \cdot 10^{-12}$	502
0.96	+0.00	0.7213873210309515	$+0.978 \cdot 10^{-12}$	576
0.96	-0.20	0.6585792122172903	$-0.972 \cdot 10^{-12}$	471
0.96	-0.50	0.5890920370328413	$-0.907 \cdot 10^{-12}$	550
0.96	-0.80	0.5377898796468977	$+0.210 \cdot 10^{-12}$	525
0.96	-1.00	0.5102040816326531	$+0.975 \cdot 10^{-12}$	660

цифр. Целое число  $N_{max}$  в последней колонке означает наибольший порядок полинома  $P_n(x)$  в сумме (225). Значение  $\alpha = 0.96$  характерно для объектов с высотой полёта 300 километров над поверхностью Земли.

Для параметра  $\alpha = 0.90$ , присущего геодезическим спутникам с высотой полёта более 700 километров, значение  $N_{max} < 300$ .

**Вывод:** для заданных значений аргумента  $-1 \leq x \leq +1$  численные значения полиномов  $P_n(x)$  с помощью рекуррентного алгоритма определяются практически без потери вычислительной точности.

*Второй вариант* используется в разделе **2.3** на предварительной стадии преобразования возмущающей функции.

Пусть  $a_i^{(n)}$  – численные коэффициенты полинома  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} \cdot x^i$ :

$$a_i^{(n)} = \frac{2n-1}{n} \cdot a_i^{(n-1)} - \frac{n-1}{n} \cdot a_i^{(n-2)}; \quad (226)$$

$$a_0^{(0)} = 1; \quad a_1^{(0)} = 0, \quad a_1^{(1)} = 1; \quad a_2^{(0)} = -\frac{1}{2}, \quad a_2^{(1)} = 0, \quad a_2^{(2)} = \frac{3}{2}.$$

Сумма коэффициентов полинома любого порядка всегда равна единице

$$\sum_{i=0}^n a_i^{(n)} = +1,$$

но величины коэффициентов достигают больших значений.

В табл.10 приводятся числовые значения некоторых коэффициентов:

Таблица 10: Величины коэффициентов полиномов

$n$	$i$	$a_i^{(n)}$
23	1	-0.1681880950927734
23	17	-18733148.9151477814000000
23	23	981501.4276027679440000
26	0	-0.1549810171127319
26	18	229350982.8986495730000000
26	26	7389761.9984761476500000
29	1	4.3339334428310394
29	21	2978545001.5916727500000000
29	29	56004648.0960045755000000
36	0	0.1320605995715596
36	26	-1150785784265.5309200000000000
36	36	6439404973.5978009900000000
45	1	5.3821880423697621
45	33	2523815359824958.2900000000000000
45	45	2950952798742.9865800000000000
50	0	-0.1122751726592170
50	36	-189971831414987581.0000000000000000
50	50	89609514959900.0547000000000000

Большое количество нулей после восемнадцатой значащей цифры каждого числа возникает как следствие ограниченности разрядной сетки компьютера.

**Вывод:** алгоритм (226) определения значений коэффициентов полинома  $P_n(x)$  при различных степенях аргумента  $x$  приводит к потере вычислительной точности в случае полиномов высоких порядков. Для  $n = 36$  погрешность может оказаться в пятом знаке после запятой. При значениях  $n > 39$  нет смысла использовать полученные коэффициенты.

Рекуррентное соотношение (236) для вычисления производных высших порядков от полиномов Лежандра со с.172 приложения запишем в виде:

$$\frac{d^k P_n(x)}{dx^k} = (2n - 1) \frac{d^{k-1} P_{n-1}(x)}{dx^{k-1}} + \frac{d^k P_{n-2}(x)}{dx^k} \quad (227)$$

с начальными условиями  $(-1 \leq x \leq +1)$

$$\frac{dP_1(x)}{dx} = 1, \quad \frac{dP_2(x)}{dx} = 3x, \quad \frac{dP_n(x)}{dx} = nP_{n-1}(x) + x \frac{dP_{n-1}(x)}{dx}. \quad (228)$$

Каждая из производных представляет из себя полином относительно аргумента  $x$  порядка  $n - k$ . Точность вычисления производных при заданном числовом значении аргумента  $x$  можно проверить с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1} P_n(x)}{dx^{n-1}} &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 3) \cdot (2n - 1) \cdot x, \\ \frac{d^n P_n(x)}{dx^n} &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 3) \cdot (2n - 1). \end{aligned} \quad (229)$$

Расчёты показали, что в результате использования формулы (227) с различными значениями аргумента  $-1 \leq x \leq +1$  тождества (229) справедливы с точностью до 17 значащих цифр при всех порядках полинома Лежандра от  $n = 1$  до  $n = 720$ . Из этого следует, что рекуррентные формулы можно применять для вычисления мгновенных значений правых частей в алгоритме численного интегрирования уравнений движения (с.167 приложения).

В аналитическом подходе (с.78) надо знать числовые значения коэффициентов  $a_i^{(n,k)}$  полиномов  $\frac{d^k P_n(x)}{dx^k} = \sum_{i=0}^{n-k} a_i^{(n,k)} \cdot x^i$ . Алгоритм имеет вид:

$$a_i^{(n,1)} = (i + 1) \cdot a_{i+1}^{(n)}, \quad a_i^{(n,k)} = (i + 1) \cdot a_{i+1}^{(n,k-1)}. \quad (230)$$

Сравним по порядку величины две пары коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_1^{(36,6)} &= -3.06 \cdot 10^8, & | & a_1^{(36,22)} = -7.67 \cdot 10^{32}, \\ a_{13}^{(36,6)} &= -2.45 \cdot 10^{20}, & | & a_7^{(36,22)} = -3.52 \cdot 10^{40}. \end{aligned}$$

В процессе вычисления производных 6-го порядка от  $P_{36}\left(\frac{z}{r}\right)$  на основе полученных значений коэффициентов (алгоритм раздела **2.3.1**) точность будет ограничена пятью или шестью значащими цифрами. Для производных 22-го порядка точность окажется ограниченной десятью значащими цифрами.

### 3.3 Реализация алгоритмов

Все предлагаемые алгоритмы были реализованы на языке программирования **Free Pascal**. Для расчётов использовался персональный компьютер **AMD Athlon XP 1800+** с тактовой частотой **1539 МГц**.

Пакет прикладных программ получил условное название **ЛЕНТА**. В первой части программного приложения выполняется вычисление тригонометрических рядов для возмущающих функций, обусловленных различными факторами. Далее, в процессе аналитического интегрирования, определяются ряды для функции преобразования и “осреднённого” гамильтониана. Все ряды являются суммами *элементарных слагаемых* (табл.11).

Таблица 11: Объекты и функции

Степени переменных (с.87)						
показатель	Лагеос	Эталон	Эйджисаи	Старлет	Стелла	“стационар”
$j_1^{min}$	0	0	0	0	0	0
$j_1^{max}$	0	0	0	0	0	0
$j_2^{max}$	0	2	2	2	2	2
$j_3^{max}$	0	2	2	2	2	2
$j_4^{max}$	0	1	1	1	2	1
$j_5^{max}$	0	0	0	0	0	13
$j_6^{max}$	0	0	0	0	0	13
Число гармоник (с.78)						
число	Лагеос	Эталон	Эйджисаи	Старлет	Стелла	“стационар”
$N_{max}$	16	15	30	30	30	11
$N_M$	6	6	6	6	6	6
$N_S$	4	4	4	4	4	4
Количество слагаемых (с.50)						
функция	Лагеос	Эталон	Эйджисаи	Старлет	Стелла	“стационар”
$R_{\oplus}$	3900	7837	53435	75516	75072	1566
$R_M$	15000	69148	22383	26159	18912	87829
$R_S$	1600	6949	2578	2726	2521	9941
$R_r$	800	1579	981	1188	1079	1881
$S_2$	21052	94906	105268	158444	148541	130017
$K_2^*$	935	10103	5266	6238	5559	17316

### 3.4 Сравнительные испытания

Важное место в процессе разработки и отладки программного обеспечения занимает методика сравнительных испытаний, направленная на определение точностных характеристик расчётов.

Одним из вариантов методики является сравнение результатов прогноза движения с результатами высокоточных измерений топоцентрических дальностей до искусственных спутников Земли, снабжённых уголковыми отражателями. Такие измерения проводятся на обсерваториях с помощью лазерных дальномеров [103].

Вариант заключается в применении алгоритма дифференциального улучшения орбит (с.180) на интервалах времени продолжительностью несколько суток. Результатом вычислений являются оценки параметров модели и “невязки” – разности между измеренными и вычисленными значениями. Полученные “невязки” необходимо сравнить с результатами аналогичных вычислений, регулярно выполняемых в центрах обработки данных Международной службы лазерной дальнометрии [190]. В табл.12 даны названия некоторых центров.

Таблица 12: Центры анализа

SAO	астрономическая обсерватория, Шанхай (Китай)
DGFI	Институт геодезических исследований (Германия)
HIT-U	университет Хитоцубаши, Токио (Япония)
JCET	отдел НАСА и университет Мэриленд (США)
MCC	Центр управления полётами (Россия)
CSR	Центр космических исследований, Техас (США)
DELFT	Технологический университет, Дельфт, Нидерланды

Ежедневно, по мере поступления новых массивов измерений топоцентрических дальностей, выполняется улучшение начальных параметров движения объектов и ряда эмпирических параметров. Для всех измерительных пунктов на каждом прохождении вычисляются “невязки”. В результате линейной аппроксимации таких “невязок” получают оценку “среднего смеще-

ния” (СС) дальностей, измеренных на отдельном прохождении спутника в поле видимости обсерватории, и оценку “среднего квадратического отклонения” (СКО) от аппроксимирующей прямой.

В табл.13 представлены названия спутников, с наблюдениями которых работает конкретный центр анализа данных, и интервалы времени, применяемые для улучшения параметров модели движения.

Таблица 13: Объекты анализа

центр	объекты	интервал (сутки)
SAO	Лагеос-1, Лагеос-2	3
DGFI	Лагеос-1, Лагеос-2	7
HIT-U	Лагеос-1, Лагеос-2	7
JCET	Лагеос-1, Лагеос-2	7
MCC	Лагеос-1, Лагеос-2	3
CSR	Лагеос-1, Лагеос-2	3
DELFT	Лагеос-1, Лагеос-2	7
DGFI	Эталон-1, Эталон-2	7
HIT-U	Эталон-1, Эталон-2	14
JCET	Эталон-1, Эталон-2	7
HIT-U	Эйджисаи, Старлет, Стелла	2
JCET	Эйджисаи, Старлет, Стелла	7

Наблюдения двух спутников Лагеос поставляют основной материал для вывода осреднённых на коротких интервалах времени параметров вращения Земли и координат измерительных пунктов.

Совокупности измеренных дальностей до двух спутников Эталон недостаточно для решения этих задач в полном объёме. Обработка наблюдений этих объектов, обращающихся на орбитах спутников системы Глонавс, необходима для калибровки измерительной аппаратуры и отладки пакетов вычислительных программ.

Геодезические спутники Эйджисаи, Старлет, Стелла обращаются вокруг Земли на низких орбитах (табл.8). Обработка наблюдений этих объектов затруднена необходимостью учёта гармоник геопотенциала большого порядка и непредсказуемыми вариациями плотности верхней атмосферы Земли.

Результаты расчётов, относящиеся к спутникам Лагеос-1 и Лагеос-2, собирает и публикует Европейский центр определения орбит (**CODE**), расположенный в городе Берн (Швейцария).

Для проведения сравнительных испытаний была выполнена фильтрация лазерных наблюдений с помощью пакета программ **LENTA** [21], разработанного на основе предлагаемых в данном исследовании алгоритмов.

Некоторые результаты сравнительных испытаний представлены в разделе об обработке наблюдений спутника Лагеос (с.139, с.140, с.141).

В табл.14 содержатся результаты определения “среднего смещения” и “среднего квадратического отклонения” для измерений топоцентрической дальности до спутника Лагеос-1, выполненных на пунктах 7080 (Форт Дэ-

Таблица 14: Лагеос, сравнительные испытания, пункты 7080 и 7105

Оценка “среднего смещения” в миллиметрах, пункт 7080							
дата	$N_p$	LENTA	DGFI	MCC	HIT-U	JCET	SAO
05.10.2009	14	$27 \pm 3$	$9 \pm 3$	$-7 \pm 3$	$19 \pm 3$	$35 \pm 4$	$22 \pm 3$
09.10.2009	8	$3 \pm 10$	$-7 \pm 14$	$-30 \pm 11$	$-1 \pm 7$	$-21 \pm 12$	$4 \pm 8$
10.10.2009	8	$30 \pm 3$	$-19 \pm 3$	$-19 \pm 4$	$-14 \pm 3$	$23 \pm 6$	$5 \pm 3$
11.10.2009	15	$-12 \pm 9$	$-18 \pm 11$	$-27 \pm 5$	$-6 \pm 3$	$-12 \pm 8$	$-2 \pm 4$
Оценка “среднего смещения” в миллиметрах, пункт 7105							
дата	$N_p$	LENTA	DGFI	MCC	HIT-U	JCET	SAO
05.10.2009	7	$9 \pm 5$	$9 \pm 6$	$5 \pm 3$	$6 \pm 4$	$11 \pm 8$	$13 \pm 6$
06.10.2009	19	$-11 \pm 9$	$21 \pm 4$	$-60 \pm 3$	$2 \pm 2$	$-16 \pm 5$	$-10 \pm 3$
07.10.2009	16	$-34 \pm 4$	$-14 \pm 3$	$-16 \pm 3$	$-13 \pm 4$	$-3 \pm 5$	$-23 \pm 1$
07.10.2009	9	$-12 \pm 5$	$-4 \pm 5$	$1 \pm 3$	$-7 \pm 4$	$-18 \pm 6$	$-9 \pm 2$
07.10.2009	12	$58 \pm 3$	$-7 \pm 4$	$3 \pm 1$	$5 \pm 2$	$-3 \pm 8$	$-5 \pm 3$
08.10.2009	6	$31 \pm 6$	$-5 \pm 3$	$15 \pm 2$	$5 \pm 2$	$31 \pm 1$	$4 \pm 2$
09.10.2009	4	$-23 \pm 1$	$-13 \pm 3$	$-3 \pm 3$	$-11 \pm 2$	$-26 \pm 4$	$-22 \pm 1$
09.10.2009	13	$-12 \pm 5$	$-3 \pm 5$	$-5 \pm 4$	$-7 \pm 2$	$-29 \pm 7$	$-13 \pm 3$
09.10.2009	18	$40 \pm 4$	$-15 \pm 4$	$6 \pm 3$	$-3 \pm 2$	$-2 \pm 5$	$-4 \pm 2$

вис, США) и 7105 (Вашингтон, США). В таблице оценки “СС” и “СКО” даны в миллиметрах. В колонке  $N_p$  дано число “нормальных точек”. Данные по пяти центрам обработки были взяты из отчёта CODE, данные в колонке LENTA получены в процессе вычислений.

Аналогичные результаты сравнительных испытаний для измерений, полученных в Яррагади (Австралия), представлены в табл.15.

Таблица 15: Лагеос, сравнительные испытания, пункт 7090

Оценка “среднего смещения” в миллиметрах, пункт 7090							
дата	$N_p$	LENTA	DGFI	MCC	HIT-U	JCET	SAO
04.10.2009	9	$-30 \pm 5$	$14 \pm 6$	$2 \pm 1$	$13 \pm 2$	$17 \pm 3$	$13 \pm 4$
04.10.2009	12	$-20 \pm 4$	$20 \pm 4$	$16 \pm 5$	$1 \pm 4$	$-35 \pm 4$	$-1 \pm 3$
04.10.2009	12	$12 \pm 3$	$8 \pm 2$	$8 \pm 2$	$8 \pm 2$	$2 \pm 4$	$9 \pm 1$
04.10.2009	6	$39 \pm 4$	$0 \pm 5$	$7 \pm 3$	$5 \pm 3$	$-17 \pm 3$	$5 \pm 2$
05.10.2009	13	$-1 \pm 2$	$29 \pm 3$	$3 \pm 2$	$16 \pm 1$	$-34 \pm 5$	$7 \pm 1$
05.10.2009	14	$-13 \pm 2$	$23 \pm 3$	$4 \pm 2$	$2 \pm 2$	$34 \pm 2$	$0 \pm 1$
05.10.2009	14	$10 \pm 3$	$21 \pm 3$	$9 \pm 2$	$9 \pm 2$	$-28 \pm 3$	$14 \pm 2$
05.10.2009	14	$8 \pm 4$	$-15 \pm 4$	$1 \pm 2$	$1 \pm 3$	$42 \pm 7$	$-5 \pm 2$
06.10.2009	17	$1 \pm 2$	$14 \pm 3$	$16 \pm 2$	$21 \pm 1$	$17 \pm 4$	$20 \pm 2$
06.10.2009	12	$-3 \pm 6$	$31 \pm 7$	$17 \pm 5$	$7 \pm 5$	$-28 \pm 10$	$-4 \pm 6$
06.10.2009	10	$-2 \pm 5$	$28 \pm 8$	$13 \pm 2$	$3 \pm 1$	$-30 \pm 6$	$3 \pm 5$
06.10.2009	18	$62 \pm 2$	$1 \pm 2$	$6 \pm 2$	$-3 \pm 2$	$-8 \pm 0$	$2 \pm 1$
07.10.2009	14	$-27 \pm 5$	$14 \pm 5$	$10 \pm 5$	$7 \pm 2$	$-39 \pm 5$	$7 \pm 2$
07.10.2009	15	$-7 \pm 2$	$40 \pm 3$	$15 \pm 1$	$14 \pm 1$	$34 \pm 3$	$5 \pm 1$
07.10.2009	11	$8 \pm 4$	$17 \pm 6$	$-3 \pm 2$	$-5 \pm 3$	$-24 \pm 8$	$-7 \pm 2$
07.10.2009	16	$59 \pm 9$	$14 \pm 5$	$-20 \pm 4$	$0 \pm 3$	$-6 \pm 5$	$2 \pm 3$
07.10.2009	13	$54 \pm 5$	$-20 \pm 4$	$5 \pm 4$	$0 \pm 2$	$15 \pm 10$	$16 \pm 4$
08.10.2009	12	$15 \pm 4$	$18 \pm 4$	$9 \pm 1$	$-2 \pm 2$	$-10 \pm 6$	$-8 \pm 3$
08.10.2009	16	$3 \pm 9$	$10 \pm 4$	$21 \pm 1$	$16 \pm 3$	$14 \pm 5$	$16 \pm 4$
08.10.2009	4	$32 \pm 1$	$9 \pm 3$	$4 \pm 4$	$30 \pm 1$	$-14 \pm 3$	$29 \pm 1$
08.10.2009	22	$6 \pm 6$	$17 \pm 3$	$-10 \pm 3$	$-9 \pm 1$	$13 \pm 4$	$-6 \pm 1$
09.10.2009	13	$15 \pm 5$	$10 \pm 2$	$34 \pm 1$	$13 \pm 1$	$1 \pm 3$	$15 \pm 1$
09.10.2009	4	$-40 \pm 2$	$16 \pm 2$	$22 \pm 2$	$-9 \pm 2$	$-4 \pm 2$	$2 \pm 1$
09.10.2009	10	$11 \pm 3$	$24 \pm 4$	$5 \pm 3$	$8 \pm 2$	$-36 \pm 4$	$-5 \pm 3$
10.10.2009	8	$-41 \pm 1$	$15 \pm 3$	$30 \pm 2$	$22 \pm 1$	$-4 \pm 5$	$-19 \pm 1$
10.10.2009	9	$48 \pm 3$	$19 \pm 5$	$3 \pm 3$	$-15 \pm 1$	$47 \pm 5$	$22 \pm 3$
11.10.2009	8	$3 \pm 4$	$2 \pm 6$	$7 \pm 2$	$1 \pm 2$	$-33 \pm 4$	$1 \pm 3$
11.10.2009	12	$-20 \pm 2$	$4 \pm 2$	$24 \pm 1$	$25 \pm 1$	$24 \pm 3$	$-2 \pm 1$
11.10.2009	6	$-7 \pm 1$	$5 \pm 2$	$9 \pm 2$	$3 \pm 2$	$-65 \pm 6$	$-7 \pm 1$
11.10.2009	8	$42 \pm 3$	$31 \pm 4$	$-5 \pm 3$	$-2 \pm 1$	$-86 \pm 3$	$13 \pm 1$
11.10.2009	23	$15 \pm 5$	$10 \pm 3$	$-17 \pm 6$	$8 \pm 2$	$29 \pm 3$	$-5 \pm 2$

Результаты сравнительных испытаний для измерений, полученных в обсерватории Матера (Италия), представлены в табл.16.

Таблица 16: Лагеос, сравнительные испытания, пункт 7941

Оценка “среднего смещения” в миллиметрах, пункт 7941							
дата	$N_p$	LENTA	DGFI	MCC	HIT-U	JCET	SAO
05.10.2009	12	$-5 \pm 4$	$0 \pm 4$	$19 \pm 3$	$-5 \pm 3$	$-17 \pm 4$	$1 \pm 3$
05.10.2009	14	$-6 \pm 3$	$-17 \pm 4$	$7 \pm 2$	$-12 \pm 1$	$16 \pm 3$	$1 \pm 3$
05.10.2009	14	$-27 \pm 4$	$-1 \pm 3$	$10 \pm 2$	$-4 \pm 2$	$-9 \pm 3$	$-57 \pm 2$
06.10.2009	6	$-14 \pm 3$	$-12 \pm 4$	$11 \pm 3$	$-29 \pm 3$	$-35 \pm 3$	$-43 \pm 2$
06.10.2009	19	$22 \pm 5$	$-1 \pm 2$	$29 \pm 2$	$-9 \pm 1$	$-1 \pm 3$	$14 \pm 7$
06.10.2009	13	$13 \pm 2$	$-1 \pm 3$	$3 \pm 3$	$-5 \pm 2$	$-5 \pm 3$	$-42 \pm 2$
06.10.2009	12	$21 \pm 4$	$3 \pm 3$	$32 \pm 2$	$-9 \pm 3$	$-41 \pm 4$	$-50 \pm 3$
07.10.2009	23	$18 \pm 6$	$-2 \pm 2$	$21 \pm 5$	$-10 \pm 2$	$-7 \pm 2$	$9 \pm 8$
07.10.2009	16	$21 \pm 6$	$-17 \pm 2$	$30 \pm 2$	$-5 \pm 2$	$16 \pm 4$	$-2 \pm 5$
07.10.2009	19	$-9 \pm 4$	$-11 \pm 3$	$-6 \pm 2$	$-10 \pm 2$	$-17 \pm 5$	$-5 \pm 3$
08.10.2009	19	$8 \pm 2$	$-11 \pm 3$	$16 \pm 3$	$-13 \pm 1$	$13 \pm 5$	$-10 \pm 3$
08.10.2009	16	$15 \pm 2$	$-10 \pm 2$	$18 \pm 4$	$-4 \pm 2$	$8 \pm 3$	$12 \pm 3$
08.10.2009	13	$13 \pm 2$	$-9 \pm 3$	$6 \pm 1$	$-12 \pm 1$	$-18 \pm 2$	$-57 \pm 2$
08.10.2009	17	$17 \pm 3$	$-14 \pm 3$	$16 \pm 3$	$-17 \pm 2$	$-35 \pm 5$	$-45 \pm 3$
08.10.2009	7	$45 \pm 1$	$2 \pm 3$	$45 \pm 1$	$-10 \pm 1$	$5 \pm 4$	$70 \pm 14$
09.10.2009	10	$22 \pm 1$	$-15 \pm 2$	$17 \pm 1$	$-1 \pm 1$	$4 \pm 8$	$25 \pm 1$
09.10.2009	15	$1 \pm 4$	$-1 \pm 2$	$3 \pm 2$	$-15 \pm 2$	$-12 \pm 2$	$-29 \pm 2$
09.10.2009	11	$29 \pm 4$	$-16 \pm 4$	$-10 \pm 5$	$-23 \pm 3$	$0 \pm 1$	$-57 \pm 3$
09.10.2009	17	$1 \pm 6$	$-10 \pm 3$	$23 \pm 3$	$-11 \pm 1$	$0 \pm 7$	$9 \pm 6$
10.10.2009	23	$8 \pm 3$	$3 \pm 2$	$8 \pm 4$	$3 \pm 2$	$-1 \pm 3$	$1 \pm 5$
10.10.2009	13	$-10 \pm 3$	$-14 \pm 2$	$0 \pm 1$	$-24 \pm 1$	$-23 \pm 1$	$-24 \pm 2$
11.10.2009	12	$20 \pm 2$	$12 \pm 2$	$14 \pm 2$	$3 \pm 2$	$-21 \pm 7$	$30 \pm 2$
11.10.2009	8	$-1 \pm 2$	$-9 \pm 2$	$12 \pm 1$	$-9 \pm 1$	$9 \pm 5$	$-5 \pm 2$

В табл.17 на с.130 содержатся результаты определения “среднего смещения” и “среднего квадратического отклонения” для измерений топоцентрической дальности до спутника Лагеос-1, выполненных на пунктах 7237 (Чангчун, Китай), 7841 (Потсдам, Германия), 1893 (Кацивели, Украина), 7821 (Шанхай), 7832 (Эль-Рийяд). В таблице оценки даны в миллиметрах. Данные взяты из отчёта CODE.

Таблица 17: Лагеос, сравнительные испытания, несколько пунктов

Оценка “среднего смещения” в миллиметрах, пункт 7237							
дата	$N_p$	LENTA	DGFI	MCC	HIT-U	JCET	SAO
05.10.2009	4	$20 \pm 2$	$58 \pm 7$	$62 \pm 4$	$68 \pm 4$	$57 \pm 8$	$71 \pm 3$
05.10.2009	19	$-10 \pm 5$	$-11 \pm 6$	$-17 \pm 6$	$-21 \pm 4$	$-22 \pm 7$	$13 \pm 4$
06.10.2009	11	$-2 \pm 1$	$-14 \pm 2$	$-20 \pm 1$	$-29 \pm 1$	$5 \pm 3$	$-5 \pm 1$
07.10.2009	8	$128 \pm 1$	$34 \pm 2$	$46 \pm 2$	$54 \pm 1$	$75 \pm 10$	$93 \pm 1$
07.10.2009	11	$40 \pm 3$	$-8 \pm 2$	$-7 \pm 2$	$1 \pm 1$	$-41 \pm 5$	$9 \pm 1$
07.10.2009	7	$-11 \pm 1$	$-28 \pm 8$	$-35 \pm 2$	$-24 \pm 6$	$-17 \pm 9$	$35 \pm 1$
08.10.2009	8	$55 \pm 2$	$38 \pm 3$	$22 \pm 3$	$26 \pm 2$	$41 \pm 5$	$75 \pm 1$
08.10.2009	6	$33 \pm 1$	$-31 \pm 6$	$-33 \pm 1$	$-25 \pm 1$	$-46 \pm 3$	$4 \pm 1$
09.10.2009	9	$68 \pm 3$	$31 \pm 4$	$16 \pm 3$	$22 \pm 3$	$92 \pm 6$	$82 \pm 1$
09.10.2009	11	$44 \pm 4$	$-5 \pm 3$	$-11 \pm 2$	$10 \pm 1$	$-50 \pm 5$	$8 \pm 1$
09.10.2009	4	$105 \pm 3$	$25 \pm 16$	$158 \pm 3$	$33 \pm 5$	$-23 \pm 3$	$192 \pm 4$
10.10.2009	6	$-5 \pm 2$	$-26 \pm 4$	$-66 \pm 5$	$-22 \pm 3$	$-12 \pm 4$	$13 \pm 1$
11.10.2009	10	$6 \pm 2$	$-20 \pm 4$	$-27 \pm 4$	$-20 \pm 2$	$-55 \pm 4$	$19 \pm 1$
Оценка “среднего смещения” в миллиметрах, пункт 7841							
дата	$N_p$	LENTA	DGFI	MCC	HIT-U	JCET	SAO
05.10.2009	12	$-15 \pm 5$	$-10 \pm 6$	$-6 \pm 5$	$-19 \pm 3$	$-26 \pm 6$	—
05.10.2009	15	$-15 \pm 5$	$-26 \pm 6$	$-12 \pm 3$	$-24 \pm 3$	$-7 \pm 4$	—
09.10.2009	10	$23 \pm 3$	$-32 \pm 3$	$-5 \pm 2$	$-12 \pm 3$	$-17 \pm 6$	—
09.10.2009	10	$21 \pm 3$	$-11 \pm 3$	$-16 \pm 3$	$-22 \pm 1$	$-16 \pm 5$	—
09.10.2009	10	$15 \pm 1$	$-24 \pm 4$	$-8 \pm 2$	$-31 \pm 1$	$-60 \pm 4$	—
09.10.2009	6	$19 \pm 1$	$-10 \pm 3$	$-11 \pm 1$	$-15 \pm 1$	$27 \pm 8$	—
Оценка “среднего смещения” в миллиметрах, пункт 1893							
дата	$N_p$	LENTA	DGFI	MCC	HIT-U	JCET	SAO
10.10.2009	5	$62 \pm 4$	$-51 \pm 10$	$21 \pm 10$	$-126 \pm 9$	$-136 \pm 14$	$20 \pm 9$
Оценка “среднего смещения” в миллиметрах, пункт 7821							
дата	$N_p$	LENTA	DGFI	MCC	HIT-U	JCET	SAO
06.10.2009	9	$160 \pm 6$	$39 \pm 9$	$135 \pm 7$	$23 \pm 7$	$68 \pm 12$	$196 \pm 6$
Оценка “среднего смещения” в миллиметрах, пункт 7832							
дата	$N_p$	LENTA	DGFI	MCC	HIT-U	JCET	SAO
05.10.2009	10	$-10 \pm 2$	$15 \pm 2$	$-25 \pm 4$	$8 \pm 1$	$34 \pm 2$	$-38 \pm 4$
06.10.2009	7	$-2 \pm 2$	$18 \pm 4$	$-41 \pm 3$	$4 \pm 2$	$22 \pm 8$	$-69 \pm 4$
06.10.2009	8	$-6 \pm 2$	$34 \pm 5$	$-17 \pm 3$	$2 \pm 4$	$116 \pm 5$	$-53 \pm 4$
07.10.2009	5	$19 \pm 4$	$13 \pm 7$	$-11 \pm 2$	$22 \pm 6$	$44 \pm 6$	$-67 \pm 4$

В табл.18 содержатся результаты определения “среднего смещения” и “среднего квадратического отклонения” для всех измерений топоцентрической дальности до спутника Лагеос-2, выполненных 29 апреля 2010 года. Значения даны в миллиметрах. В колонке UTC приводится момент времени начала измерений на данном прохождении. В колонке  $\Delta t$  приводится продолжительность интервала измерений в минутах времени.

Таблица 18: Лагеос-2, сравнительные испытания

пункт	дата	UTC	$\Delta t$	$N_p$	LENTA	JСЕТ	НИТ-U
1893	2010/04/29	20:22	24.7	10	$13.1 \pm 14.9$	$-145.2 \pm 8.2$	$-123 \pm 48$
7080	2010/04/29	01:30	35.2	16	$31.8 \pm 2.3$	$10.1 \pm 7.0$	$8 \pm 5$
7080	2010/04/29	06:02	9.1	4	$22.3 \pm 2.1$	$89.0 \pm 8.2$	$29 \pm 86$
7090	2010/04/29	03:38	31.6	17	$10.0 \pm 4.0$	$-22.6 \pm 6.4$	$-1 \pm 4$
7105	2010/04/29	01:28	20.9	7	$-15.2 \pm 2.5$	$-27.4 \pm 5.6$	$3 \pm 13$
7810	2010/04/29	11:52	44.9	17	$-38.0 \pm 7.9$	$32.2 \pm 4.7$	$18 \pm 3$
7810	2010/04/29	20:04	29.5	14	$-3.3 \pm 1.6$	$18.7 \pm 3.8$	$13 \pm 4$
7825	2010/04/29	13:46	27.7	15	$-25.7 \pm 2.7$	$16.5 \pm 6.1$	$-4 \pm 5$
7825	2010/04/29	18:10	5.6	4	$13.9 \pm 0.1$	$-20.6 \pm 9.2$	$6 \pm 4$
7825	2010/04/29	22:00	28.8	14	$29.6 \pm 3.5$	$-4.4 \pm 4.8$	$4 \pm 4$
7839	2010/04/29	12:16	23.9	13	$-4.6 \pm 2.7$	$1.4 \pm 5.4$	$-11 \pm 7$
7839	2010/04/29	16:08	22.5	11	$-36.2 \pm 1.8$	$-13.7 \pm 4.6$	$-18 \pm 3$
7841	2010/04/29	20:02	17.3	9	$-3.9 \pm 7.4$	—	$-5 \pm 10$
7845	2010/04/29	11:56	17.2	9	$18.9 \pm 3.0$	$-9.4 \pm 5.6$	$-24 \pm 12$
7845	2010/04/29	15:59	29.0	9	$-22.7 \pm 2.3$	$-1.4 \pm 7.4$	$-22 \pm 8$
7845	2010/04/29	20:04	17.7	10	$6.3 \pm 2.3$	$-15.6 \pm 5.3$	$-38 \pm 18$
7941	2010/04/29	12:20	17.1	10	$-11.7 \pm 2.5$	$9.7 \pm 6.4$	$4 \pm 18$
7941	2010/04/29	16:14	30.8	13	$6.5 \pm 3.9$	$-7.6 \pm 6.8$	$-10 \pm 5$
7941	2010/04/29	20:03	50.9	17	$3.6 \pm 3.5$	$-1.2 \pm 4.7$	$-7 \pm 3$

Результаты сравнительных испытаний выбраны случайным образом из большого массива данных. Отличия различных оценок “среднего смещения” и “среднего квадратического отклонения” на другие даты и для других измерительных пунктов для объектов Лагеос-1 и Лагеос-2 остаются в пределах нескольких сантиметров. Анализ табл.14 ÷ табл.18 позволяет сделать вывод, что пакет вычислительных программ LENTA уступает по точности пред-

ставления наблюдений спутников типа Лагеос пакетам DGFI, МСС и НИТ-У не более 20%. Точность пакетов LENTA, JCET и SAO при обработке высокоточных лазерных наблюдений Лагеос-1 и Лагеос-2 находится примерно на одном уровне.

В табл.19 содержатся результаты определения “среднего смещения” и “среднего квадратического отклонения” для измерений топоцентрической дальности до спутника Эталон-1. Значения даны в миллиметрах. Данные DGFI были взяты из отчёта Института геодезических исследований.

Таблица 19: Эталон-1, сравнительные испытания

пункт	дата	UTC	$\Delta t$	$N_p$	LENTA	DGFI
1868	2010/02/22	10:24	12.4	4	$380.5 \pm 0.8$	$-166.4 \pm 26.3$
7090	2010/02/21	11:59	221.4	11	$379.5 \pm 10.3$	$15.9 \pm 31.2$
7090	2010/02/22	11:13	32.1	8	$346.3 \pm 4.4$	$1.3 \pm 31.0$
7090	2010/02/24	21:49	166.2	10	$-19.6 \pm 7.0$	$-29.2 \pm 25.6$
7090	2010/02/25	19:43	228.6	8	$204.0 \pm 64.2$	$-3.0 \pm 14.0$
7090	2010/02/26	17:47	150.4	15	$-23.0 \pm 5.6$	$-28.5 \pm 20.6$
7090	2010/02/27	16:34	42.5	12	$-118.2 \pm 7.9$	$-2.8 \pm 32.2$
7090	2010/03/01	12:14	67.1	7	$-377.6 \pm 1.5$	$-16.3 \pm 13.2$
7090	2010/03/02	11:24	51.3	6	$-354.7 \pm 2.8$	$-14.8 \pm 11.6$
7110	2010/02/24	13:17	105.3	7	$-77.7 \pm 12.4$	$29.7 \pm 31.3$
7110	2010/02/25	13:14	33.0	4	$-33.2 \pm 1.0$	$-6.2 \pm 28.2$
7110	2010/03/02	17:52	27.7	4	$448.6 \pm 2.9$	$-4.4 \pm 14.7$
7308	2010/02/22	10:09	16.2	5	$252.5 \pm 4.5$	$206.6 \pm 23.1$
7405	2010/02/27	04:57	18.6	5	$53.2 \pm 1.7$	$18.3 \pm 29.3$
7406	2010/02/22	02:34	10.9	4	$79.3 \pm 11.8$	$-1.8 \pm 32.6$
7810	2010/03/01	06:28	184.5	14	$30.3 \pm 5.0$	$10.5 \pm 11.4$
7810	2010/03/02	05:48	25.1	5	$92.4 \pm 0.9$	$22.1 \pm 12.5$
7839	2010/02/22	19:32	112.6	6	$-69.7 \pm 4.3$	$1.1 \pm 32.2$
7840	2010/03/01	08:03	16.4	5	$-60.8 \pm 3.3$	$-20.6 \pm 13.5$
7840	2010/03/02	18:33	109.8	5	$-239.6 \pm 0.8$	$1.3 \pm 7.8$
7845	2010/03/02	19:03	11.6	4	$-280.6 \pm 0.3$	$-32.5 \pm 9.1$
7941	2010/02/25	14:58	157.0	21	$-63.9 \pm 5.3$	$-24.0 \pm 22.6$
7941	2010/02/27	09:18	252.7	18	$32.9 \pm 7.6$	$-2.2 \pm 19.0$
7941	2010/03/02	04:54	116.4	16	$63.7 \pm 3.1$	$-17.9 \pm 10.6$

Оценки “среднего смещения” и “среднего квадратического отклонения” для спутников Эталон-1 и Эталон-2 по данным JCET находятся на уровне оценок DGFI, точность результатов вычислений с помощью пакета HIT-U лучше почти в два раза.

Результаты сравнения приводят к выводу, что пакет вычислительных программ LENTA уступает по точности представления наблюдений спутников типа Эталон пакетам DGFI, JCET и HIT-U.

Такой же вывод следует из анализа наблюдений низкоорбитальных объектов, выполненных на измерительном пункте 7090 (табл.20):

Таблица 20: Обсерватория Яррагади, сравнительные испытания

спутник	дата	UTC	$\Delta t$	$N_p$	LENTA	HIT-U
Эйджисаи	2010/01/21	10:47	13.6	21	$272.6 \pm 159.1$	$43 \pm 5$
Эйджисаи	2010/01/21	12:48	14.8	31	$384.7 \pm 429.5$	$1 \pm 4$
Эйджисаи	2010/01/21	14:58	4.0	9	$-850.0 \pm 5.3$	$-9 \pm 5$
Эйджисаи	2010/01/21	17:00	9.1	20	$-1274.3 \pm 491.4$	$5 \pm 5$
Эйджисаи	2010/01/21	19:12	3.9	9	$-618.6 \pm 20.8$	$20 \pm 43$
Эйджисаи	2010/01/21	21:07	10.0	20	$-3639.5 \pm 896.3$	$25 \pm 6$
Старлет	2010/03/01	07:13	2.6	6	$1047.6 \pm 9.5$	$22 \pm 6$
Старлет	2010/03/01	09:00	6.6	15	$-717.3 \pm 59.6$	$24 \pm 5$
Старлет	2010/03/01	14:33	4.3	10	$-1143.0 \pm 20.4$	$11 \pm 1$
Старлет	2010/03/01	16:21	9.8	21	$-929.5 \pm 83.4$	$-0 \pm 4$
Старлет	2010/03/01	18:11	6.6	15	$636.5 \pm 60.3$	$-8 \pm 4$
Стелла	2010/01/21	06:08	7.8	17	$-1762.9 \pm 3823.5$	$-2 \pm 3$
Стелла	2010/01/21	17:22	7.2	16	$5780.8 \pm 987.1$	$-3 \pm 6$
спутник	дата	UTC	$\Delta t$	$N_p$	LENTA	JCET
Эйджисаи	2010/01/21	10:47	13.6	21	$272.6 \pm 159.1$	$-16 \pm 16$
Эйджисаи	2010/01/21	12:48	14.8	31	$384.7 \pm 429.5$	$74 \pm 13$
Эйджисаи	2010/01/21	14:58	4.0	9	$-850.0 \pm 5.3$	$195 \pm 24$
Эйджисаи	2010/01/21	17:00	9.1	20	$-1274.3 \pm 491.4$	$154 \pm 21$
Эйджисаи	2010/01/21	19:12	3.9	9	$-618.6 \pm 20.8$	$321 \pm 39$
Эйджисаи	2010/01/21	21:07	10.0	20	$-3639.5 \pm 896.3$	$59 \pm 19$
Старлет	2010/03/01	09:00	6.6	15	$-717.3 \pm 59.6$	$267 \pm 131$
Старлет	2010/03/01	14:33	4.3	10	$-1143.0 \pm 20.4$	$348 \pm 232$
Старлет	2010/03/01	16:21	9.8	21	$-929.5 \pm 83.4$	$126 \pm 91$

### 3.5 Спутник Лагеос

Вот уже более тридцати лет сеть наблюдательных станций, расположенных на всех континентах, проводит измерения наклонной дальности до искусственного спутника Земли Лагеос. С 1992 года среди объектов наблюдений появился ещё один спутник – Лагеос-2 (приложение, с.184).

Ряды лазерных наблюдений объектов Лагеос и Лагеос-2 с 1994 по 2002 год были разделены на пятисуточные интервалы. Для обработки наблюдений с 2003 года по 2010 год был выбран интервал, составляющий трое суток.

На каждом интервале времени были определены *шесть* численных зна-

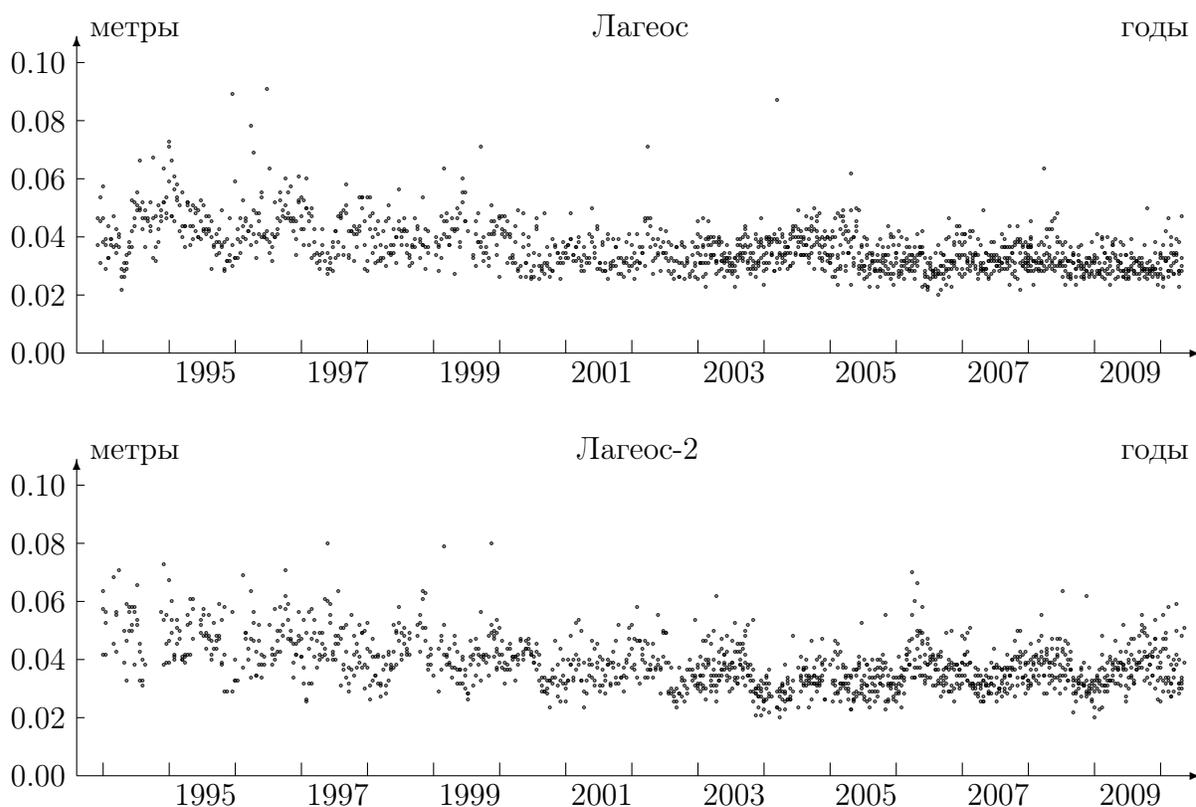


Рис. 6: Лагеос и Лагеос-2, стандартное отклонение

чений “сглаженных” элементов орбиты и *три* значения параметров вращения Земли: координаты полюса  $x_p$ ,  $y_p$  и вариация продолжительности суток LOD (приложение, с.180). На рис.6 представлены оценки средних квадратических погрешностей одного измерения.

### 3.5.1 Параметры вращения Земли

На рис.7 и 8 представлены разности двух рядов координат полюса  $x_p$ ,  $y_p$ . Из значений, полученных на основе наблюдений, были вычтены значения, опубликованные в материалах Международной службы вращения Земли.

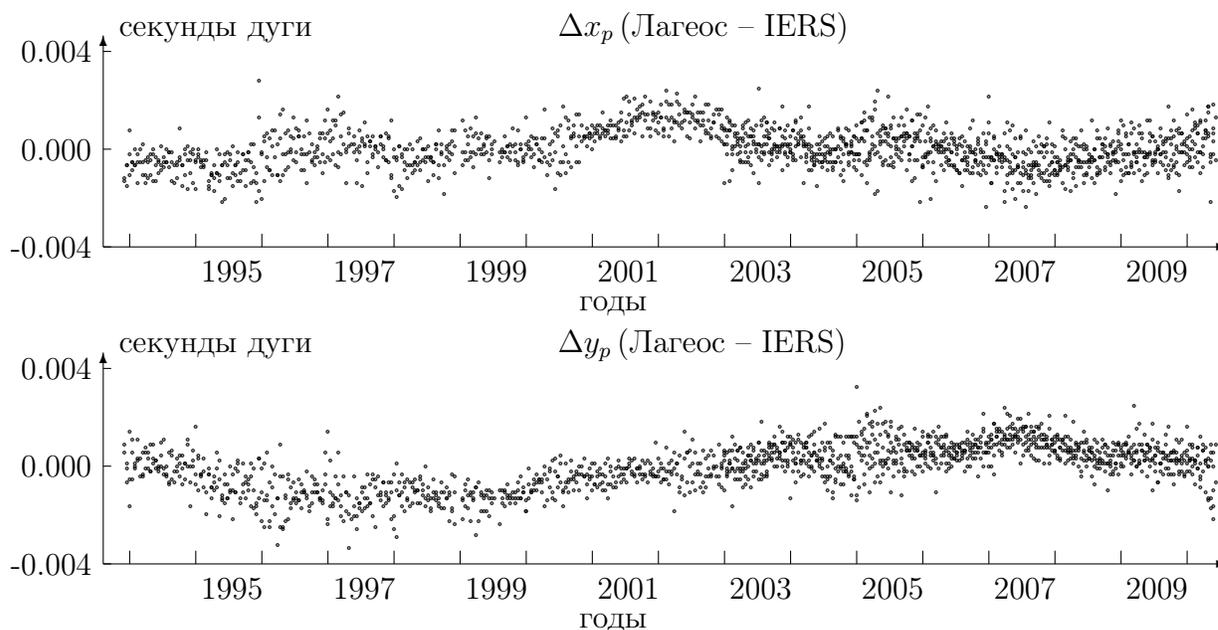


Рис. 7: Лагеос и IERS, разности координат полюса

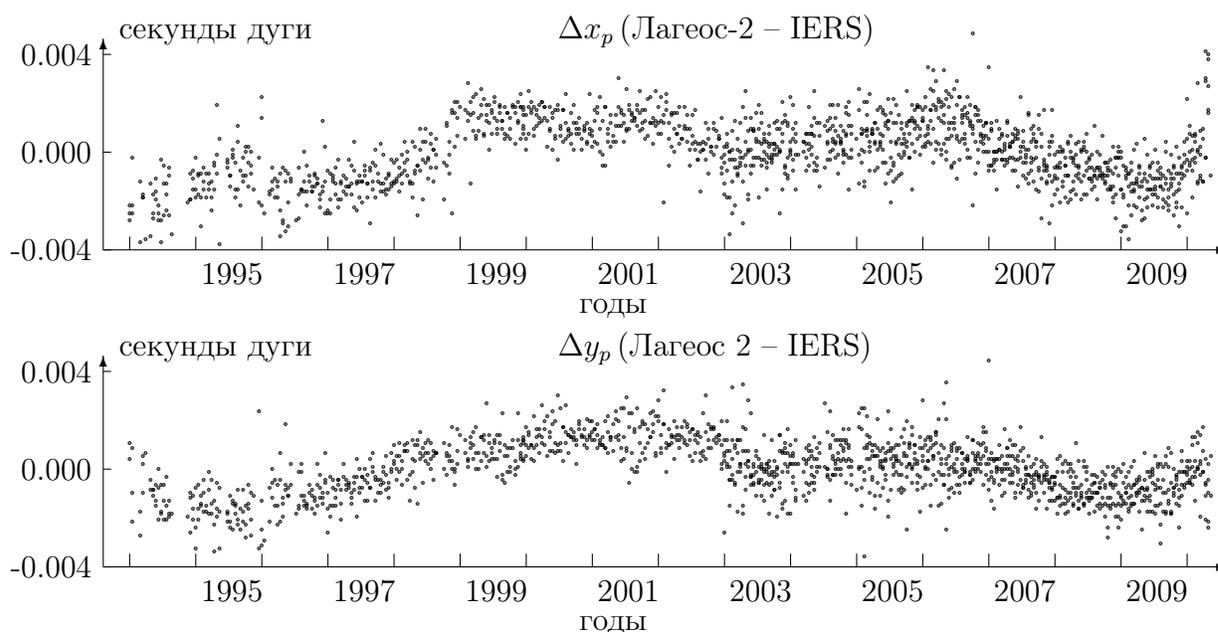


Рис. 8: Лагеос-2 и IERS, разности координат полюса

График на рис.9 даёт представление о вариациях продолжительности суток, которым соответствуют вариации угловой скорости вращения Земли, на интервале времени 16 лет. Результаты опубликованы в материалах Международной службы вращения Земли.



Рис. 9: Данные Международной службы вращения Земли



Рис. 10: Результаты обработки наблюдений Лагеос и Лагеос-2

На рис.10 представлены результаты определения вариаций продолжительности суток. Результаты были получены на основе обработки измерений топоцентрических дальностей до спутников Лагеос и Лагеос-2.

### 3.5.2 Эмпирические коэффициенты

Объединим невязки в серии по 30 суток. Для каждой серии определим значения коэффициента ускорения  $c_t = -5.61 \cdot 10^5 \cdot a \cdot \ddot{M}$  (рис.11) и эмпирического коэффициента отражения  $k_r$  (рис.12), а также поправки к координатам наблюдательных станций.

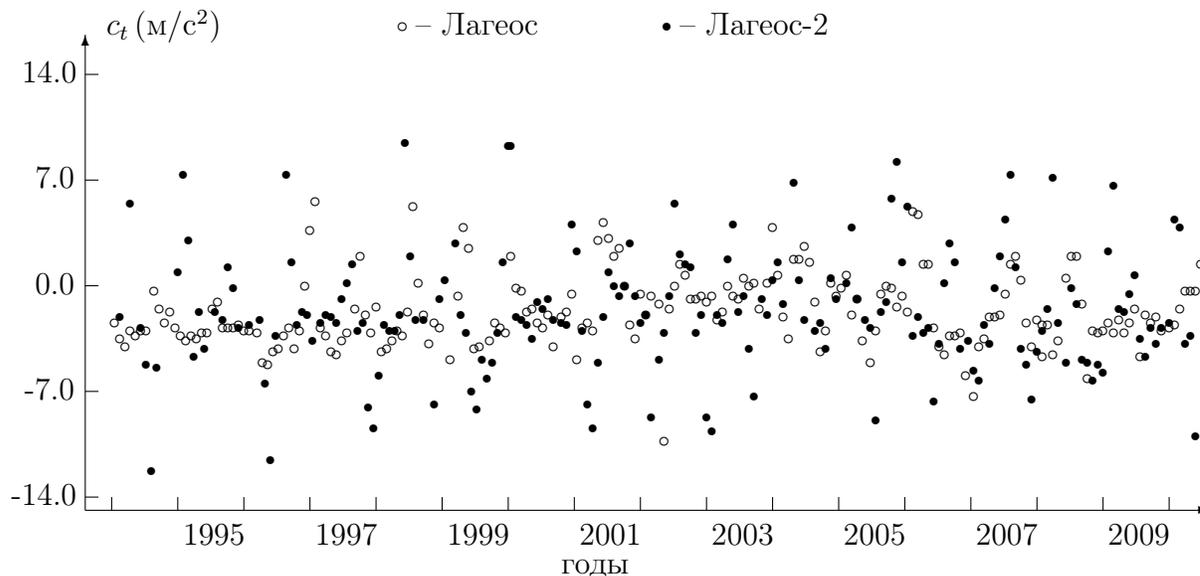


Рис. 11: Коэффициент эмпирического ускорения

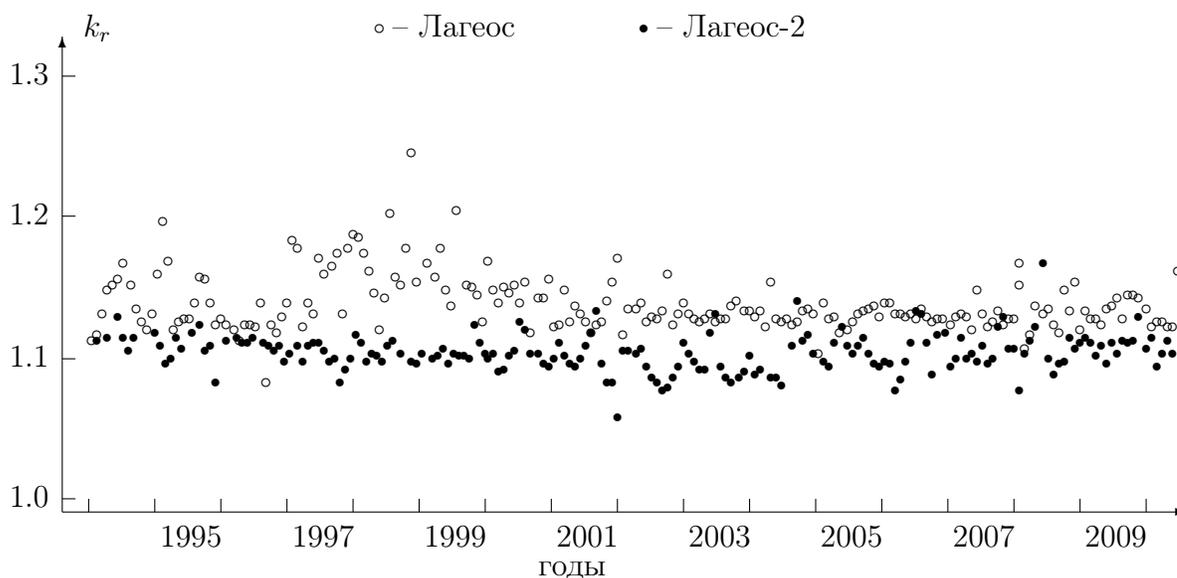


Рис. 12: Эмпирический коэффициент отражения

### 3.5.3 Поле скоростей

Поправки координат наблюдательных станций позволяют получить оценки вековых изменений положений пунктов на поверхности Земли (табл.21 и

Таблица 21: Поле скоростей для пяти пунктов

$\dot{X}$ (м/год)	$\dot{Y}$ (м/год)	$\dot{Z}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{X}}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{Y}}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{Z}}$ (м/год)	
Европа, Рига, 1884						
$\lambda = 24^{\circ}3'32''.74$ , $\varphi = +56^{\circ}56'54''.79$ , $H = 24.1$ м						
-0.0212	0.0118	-0.0001	0.0015	0.0021	0.0017	Лагос
-0.0290	0.0309	0.0026	0.0019	0.0023	0.0026	Лагос-2
-0.0184	0.0151	0.0046	0.0055	0.0038	0.0081	ITRF
Тихий океан, Мауи, 7210						
$\lambda = 203^{\circ}44'38''.77$ , $\varphi = 20^{\circ}42'26''.01$ , $H = 3061.2$ м						
-0.0133	0.0678	0.0254	0.0019	0.0039	0.0018	Лагос
-0.0011	0.0419	0.0353	0.0020	0.0034	0.0018	Лагос-2
-0.0154	0.0589	0.0338	0.0007	0.0005	0.0004	ITRF
Африка, Хартебестёк, 7501						
$\lambda = 27^{\circ}41'10''.30$ , $\varphi = -25^{\circ}53'22''.95$ , $H = 1402.8$ м						
-0.0038	0.0356	0.0223	0.0012	0.0017	0.0016	Лагос
-0.0242	0.0708	0.0192	0.0026	0.0036	0.0015	Лагос-2
-0.0090	0.0187	0.0160	0.0012	0.0008	0.0007	ITRF
Испания, Андалусия, Сан Фернандо, 7824						
$\lambda = 353^{\circ}47'40''.95$ , $\varphi = 36^{\circ}27'54''.92$ , $H = 91.0$ м						
0.0080	0.0267	0.0263	0.0023	0.0014	0.0015	Лагос
0.0085	0.0597	0.0247	0.0029	0.0033	0.0018	Лагос-2
-0.0025	0.0179	0.0163	0.0025	0.0006	0.0019	ITRF
Австралия, Маунт Стромло, 7825						
$\lambda = 149^{\circ}0'35''.63$ , $\varphi = -35^{\circ}18'58''.11$ , $H = 797.8$ м						
-0.0435	-0.0055	0.0524	0.0023	0.0018	0.0026	Лагос
-0.0352	-0.0039	0.0356	0.0029	0.0026	0.0032	Лагос-2
-0.0363	0.0003	0.0457	0.0012	0.0015	0.0010	ITRF

табл.30 на с.186 приложения). В строке “ITRF” (Международная земная система отсчета) приводятся данные Международной службы вращения Земли.

### 3.5.4 Сравнение результатов, пункт 7090

На рис.13 представлены разности между измеренными и вычисленными значениями топоцентрических дальностей до спутника Лагеос на интервале наблюдений 30 суток. Наблюдения были выполнены в Яррагади.

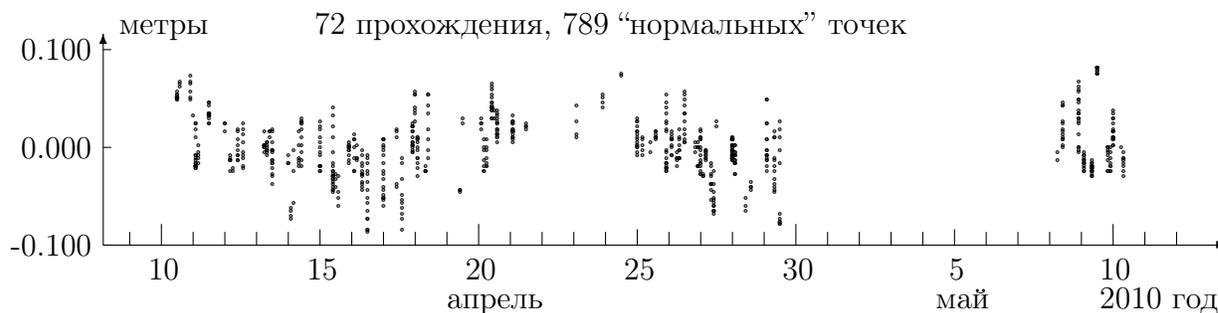


Рис. 13: Лагеос, пункт 7090, “невязки”

На каждом прохождении выполним линейную аппроксимацию “невязок” и получим оценки “среднего смещения” (СС) и “среднего квадратического отклонения” (СКО) от аппроксимирующей прямой. На рис.14 даны результаты

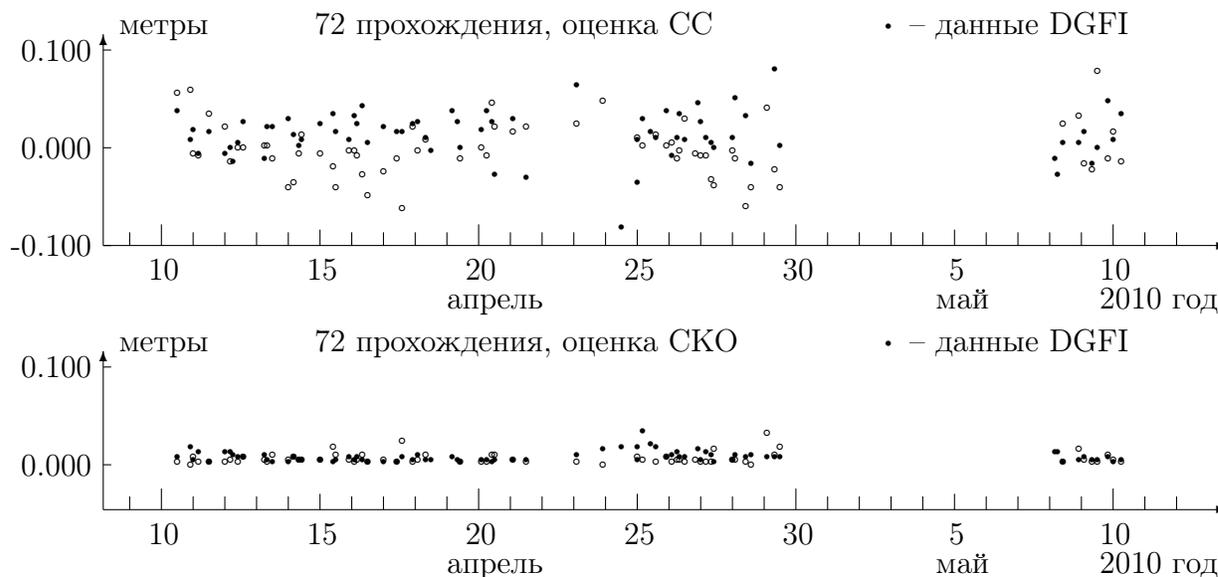


Рис. 14: Лагеос, пункт 7090, “невязки”, линейная аппроксимация

вычислений и выполнено сравнение с аналогичными оценками, представленными Институтом геодезических исследований (Мюнхен, Германия) [190].

### 3.5.5 Сравнение результатов, пункт 7825

На рис.15 представлены разности между измеренными и вычисленными значениями топоцентрических дальностей до спутника Лагеос на интервале наблюдений 30 суток. Наблюдения были выполнены в Маунт Стромло.



Рис. 15: Лагеос, пункт 7825, “невязки”

На каждом прохождении выполним линейную аппроксимацию “невязок” и получим оценки “среднего смещения” (СС) и “среднего квадратического отклонения” (СКО) от аппроксимирующей прямой. На рис.16 даны результаты

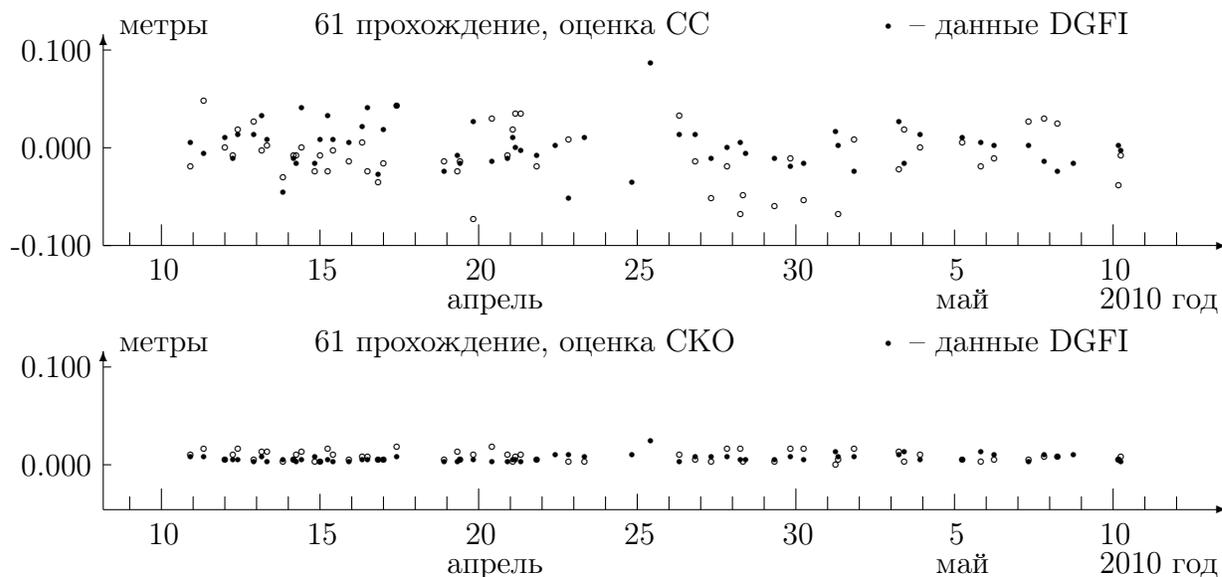


Рис. 16: Лагеос, пункт 7825, “невязки”, линейная аппроксимация

вычислений и выполнено сравнение с аналогичными оценками, представленными Институтом геодезических исследований (Мюнхен, Германия) [190].

### 3.5.6 Сравнение результатов, пункт 7840

На рис.17 представлены разности между измеренными и вычисленными значениями топоцентрических дальностей до спутника Лагеос на интервале наблюдений 30 суток. Наблюдения были выполнены в Хертсмонсо.

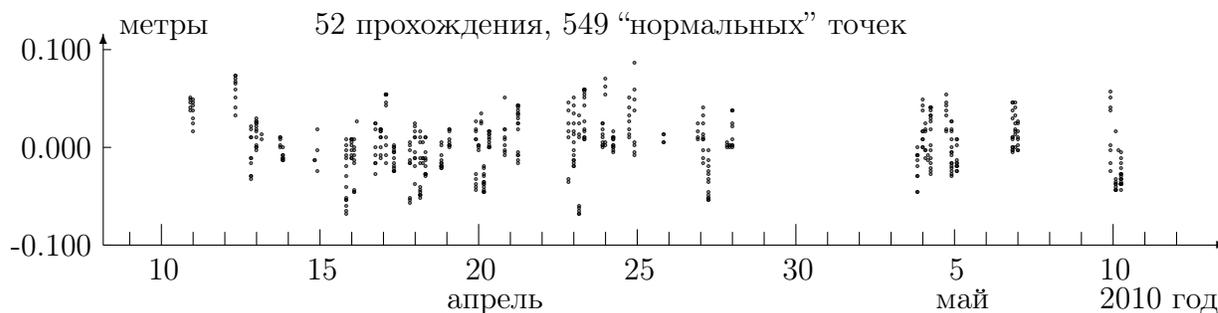


Рис. 17: Лагеос, пункт 7840, “невязки”

На каждом прохождении выполним линейную аппроксимацию “невязок” и получим оценки “среднего смещения” (СС) и “среднего квадратического отклонения” (СКО) от аппроксимирующей прямой. На рис.18 даны результаты

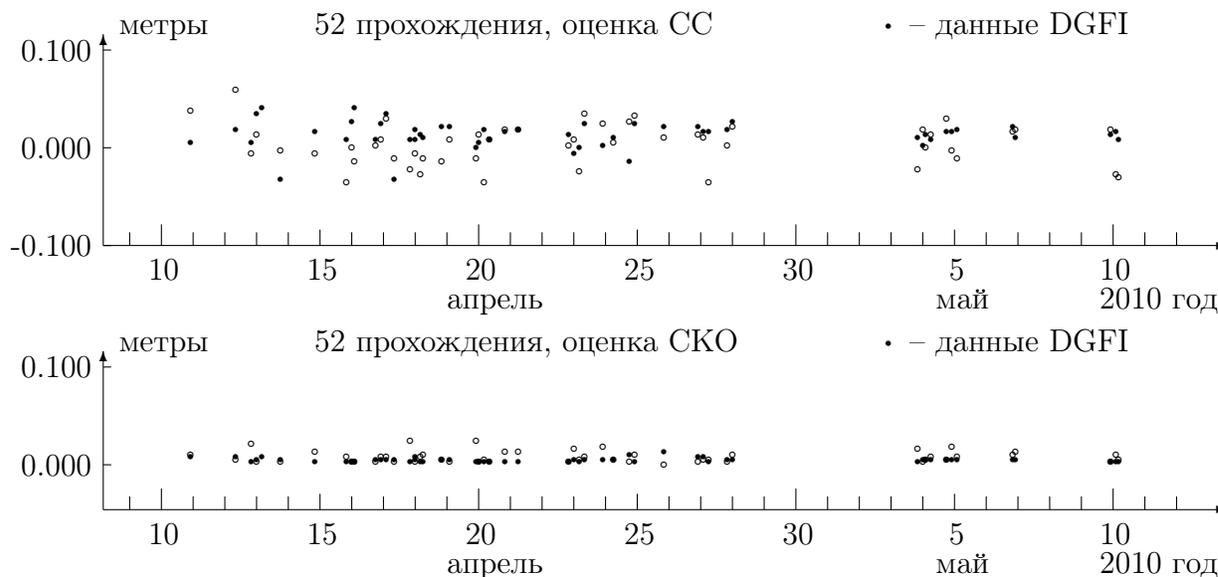


Рис. 18: Лагеос, пункт 7840, “невязки”, линейная аппроксимация

вычислений и выполнено сравнение с аналогичными оценками, представленными Институтом геодезических исследований (Мюнхен, Германия) [190].

### 3.6 Ситуации сближения

Алгоритм расчёта прохождений искусственных спутников Земли на некотором расстоянии друг от друга необходим для решения следующих задач:

1. предсказание опасных сближений объектов в заданном диапазоне высот над поверхностью Земли;
2. предсказание опасных сближений конкретного космического аппарата с другими спутниками;
3. вычисление взаимных расстояний между конкретным космическим аппаратом и спутниками, отобранными в список по какому-либо признаку.

Ошибка прогноза положений объектов с помощью начальных параметров движения в формате “двустрочных” элементов орбиты на интервале времени до трёх суток не превышает 5 километров. Такой точности достаточно при расчёте моментов близких прохождений объектов.

Для решения двух первых задач должны быть заданы верхний предел расстояния между объектами (например, 110 километров) и величина расстояния опасного сближения (например, 20 километров). В третьей задаче верхний предел расстояния между объектами может достигать 5000 километров. Также должны быть заданы начальный и конечный момент времени для вычислений.

Алгоритм состоит из нескольких этапов.

Вначале из общего списка выделяют объекты, орбиты которых пересекают или находятся в заданном диапазоне высот над поверхностью Земли.

Далее от начального до конечного момента времени с некоторым шагом вычисляются геоцентрические положения и геоцентрические расстояния всех выбранных объектов. Шаг может быть достаточно большой, порядка 30 секунд или более. На каждом шаге выполняется *сортировка* по возрастанию геоцентрического расстояния. Спутники с геоцентрическими расстояниями, не попадающими в заданный диапазон высот над поверхностью Земли, исключаются из списка на этом шаге вычислений.

Если разность геоцентрических расстояний двух объектов по величине меньше верхнего предела, то вычисляется взаимное расстояние между этими объектами. Если, в свою очередь, взаимное расстояние меньше верхнего предела расстояний, то имеет место ситуация близкого прохождения. В этом случае предварительный момент времени сближения и условные номера объектов запоминаются.

Следующий этап заключается в расчёте параметров сближения только для тех пар объектов, которые были отобраны ранее. Достаточно использовать шаг по времени порядка 1 секунды. Вычисления выполняются на интервале, равном удвоенному значению шага на предыдущем этапе. Предварительное значение момента сближения находится в середине интервала вычислений. Если взаимное расстояние между парой объектов окажется меньше заданной величины расстояния опасного сближения, то текущий момент времени и взаимное расстояние являются искомыми величинами.

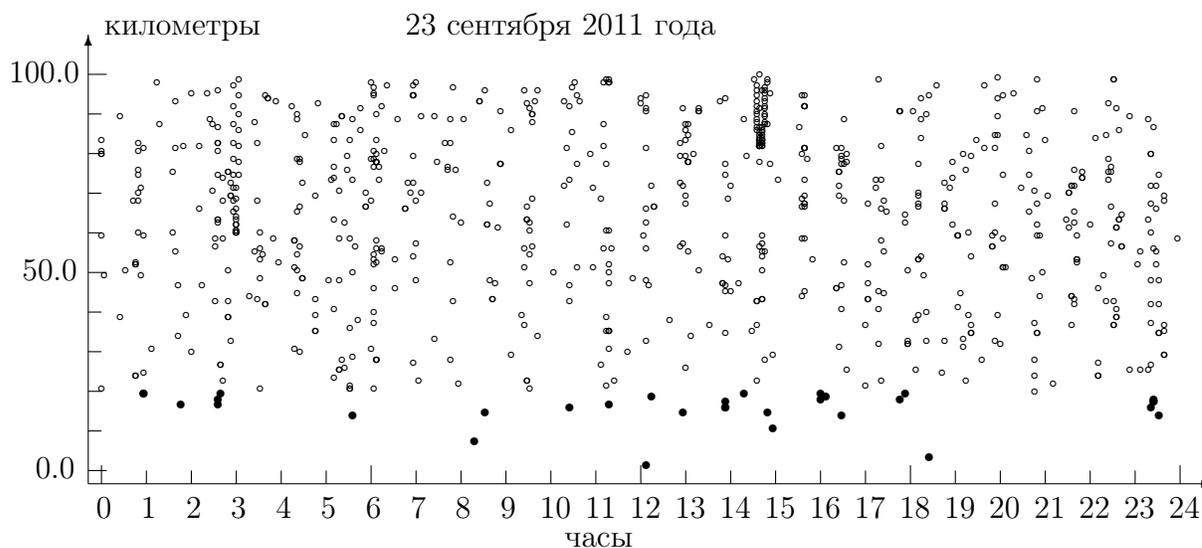


Рис. 19: Расчёт ситуаций сближения

На рис.19 представлены результаты определения ситуаций сближения искусственного спутника “Татьяна” (порядковый номер 28523, международный номер 0500203) со всеми объектами из каталога службы “NORAD” [206]. Расчёт выполнен на дату 23 сентября 2011 года. Каждая точка на графике соответствует расстоянию между одним из спутников и объектом “Татьяна”.

В 2005 году была выполнена работа [85] по прогнозированию возможных опасных сближений космических объектов с космическим аппаратом “Электро-Л” в период с 1 января 2006 года по 15 января 2009 года.

Гидрометеорологический космический комплекс второго поколения “Электро-Л” должен был быть выведен на геостационарную орбиту с точкой стояния  $76^\circ$  восточной долготы.

Был выполнен долгосрочный прогноз положений 528 объектов, находящихся на орбитах, пересекающих область геостационарных орбит. В качестве оценки расстояния опасного сближения выбрано расстояние, равное 110 километрам. Расстояния, меньшие 20 километров, были приняты как особенно опасные.

В результате расчётов были выявлено, что максимальная скорость сближения объектов достигает 0.12 км/с.

Имеется несколько объектов, представляющих особую опасность. Это объекты Луч 1-1, Sirio-1, Galaxy-4 и Радуга-32 (рис.20).

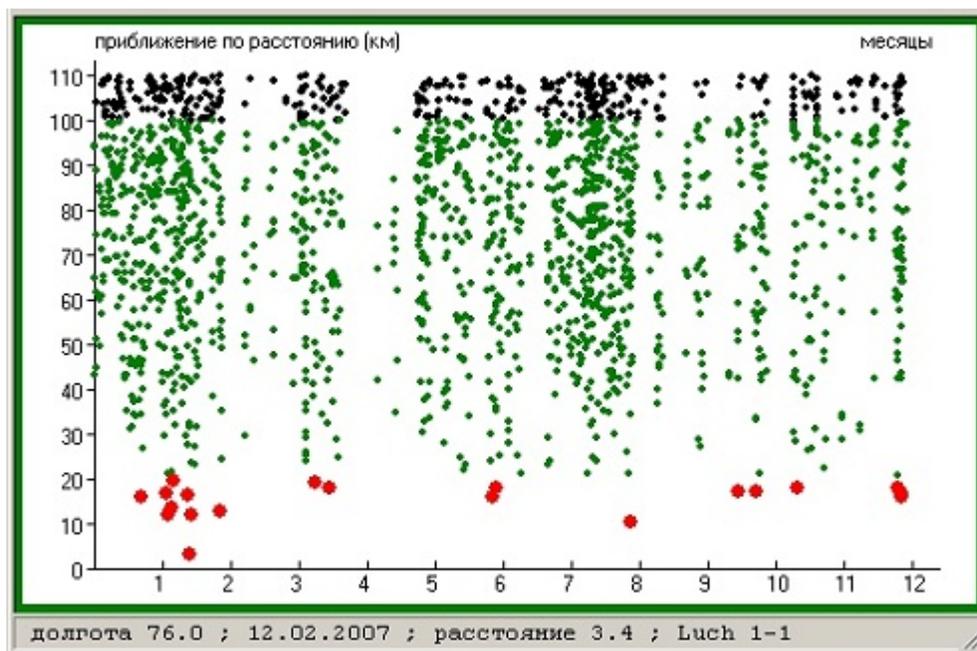


Рис. 20: “Электро-Л”, прогноз ситуаций сближения на 2007 год

Космический аппарат “Электро-Л” (КОСПАР № 1100101) был доставлен в заданную точку геостационарной орбиты 12 февраля 2011 года.

### 3.7 “Стационарный” объект

В Терскольском филиале Института астрономии Российской академии наук проводятся регулярные наблюдения космического мусора [178].

16 октября 2009 года во время наблюдений был обнаружен неизвестный объект 18-й звёздной величины [19].

Объект получил временный номер 95334. Продолжительность наблюдений составила шесть вечеров. 21 октября объект вышел из зоны видимости. Было получено 695 отдельных положений объекта – топоцентрических значений прямых восхождений и склонений в системе стандартного экватора.

На основе наблюдений было выполнено улучшение элементов орбиты и получена оценка эмпирического коэффициента отражения  $C_r$ . Так как это значение определяется формулой (151) на с.82

$$C_r = 4.5606 \cdot 10^{-9} k_r \frac{A}{m},$$

то, полагая  $k_r \approx 1.0$ , можно оценить отношение средней площади поверхности  $A$  к массе объекта  $m$ .

Оскулирующие кеплеровские элементы орбиты объекта в системе истинного экватора даты приведены в табл.22. В последней строке дана оценка отношения средней площади объекта к его массе.

Таблица 22: Параметры орбиты объекта 95334

дата	16.10.2009
UT	00 <sup>h</sup> 00 <sup>m</sup> 00.000 <sup>s</sup>
$a$	41715.137 ± 0.020 км
$e$	0.029916301 ± 0.00001
$i$	14.005113° ± 0.0002°
$\Omega$	347.868781° ± 0.0002°
$\omega$	163.477533° ± 0.003°
$M$	307.308140° ± 0.003°
$A/m$	2.2206 ± 0.005 м <sup>2</sup> /кг

Средняя квадратическая погрешность одного измерения по прямому восхождению составила 1.40'', а по склонению – 0.44''.

Разности между измеренными и вычисленными на основе улучшенных параметров движения значениями прямых восхождений и склонений объекта за первый вечер и за все ночи наблюдений представлены на рис.21 и рис.22:

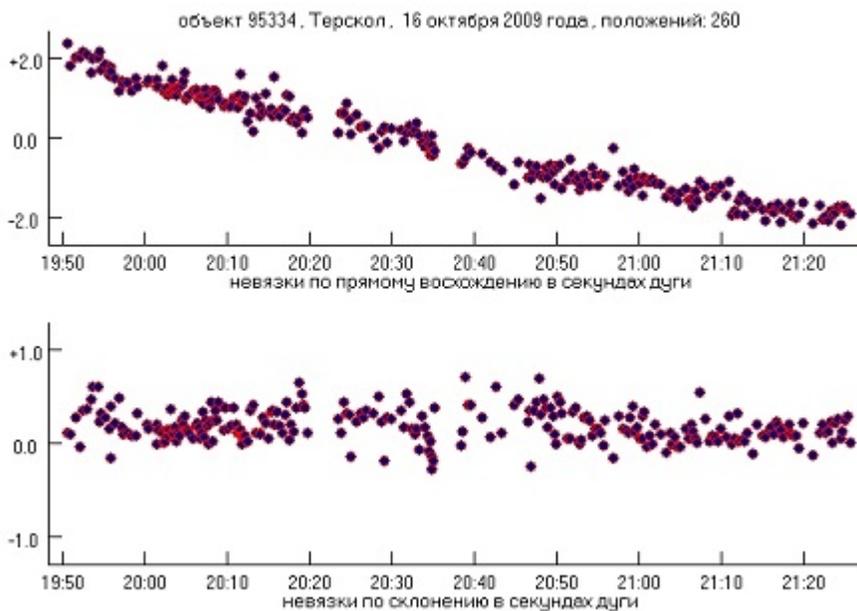


Рис. 21: Объект 95334, первый вечер

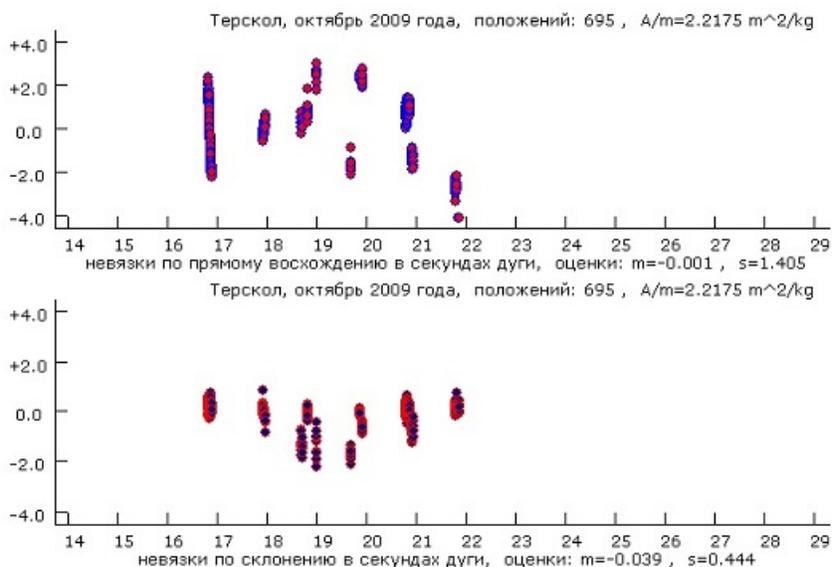


Рис. 22: Объект 95334, “невязки”

Результаты прогноза движения объекта показывают, что с периодом два месяца объект появляется в поле зрения пункта наблюдений. Время доступ-

ности объекта для наблюдений составляет несколько суток.

На рис.23 представлены графики изменения большой полуоси орбиты и эксцентриситета орбиты объекта 95334 на интервале времени, равном 3 года.

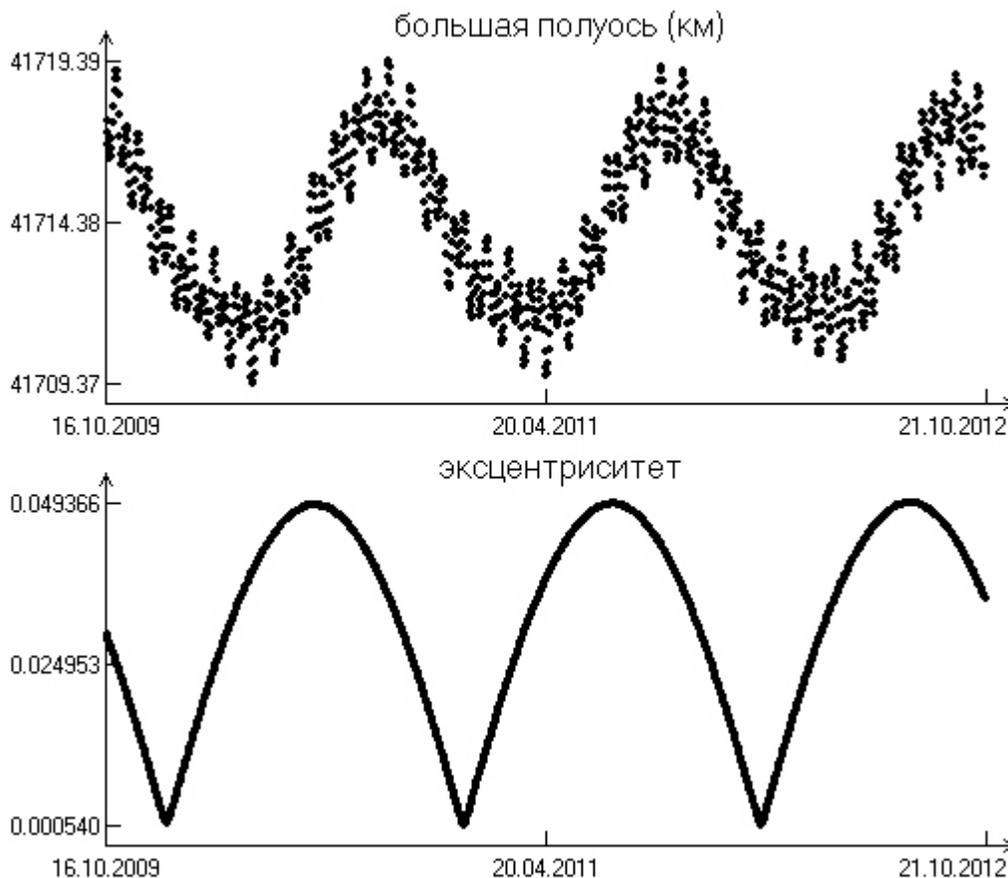


Рис. 23: Объект 95334, прогноз

Основной период изменения элементов равен примерно одному году. Амплитуда изменения большой полуоси составляет 5 километров, амплитуда изменения эксцентриситета орбиты превышает величину 0.024.

Особенности эволюции элементов орбиты связаны с большим значением отношения средней площади к массе объекта и, как следствие, значительными возмущениями, обусловленными силой светового давления.

Большой цикл теоретических и практических исследований влияния “парусности” космических объектов на эволюцию орбиты выполнен в Коуровской астрономической обсерватории Уральского федерального университета [89].

### 3.8 Объект Молния

Космический аппарат Молния 3-39 был выведен на орбиту 20 сентября 1990 года. Активная работа на орбите продолжалась 6 лет (рис.24).

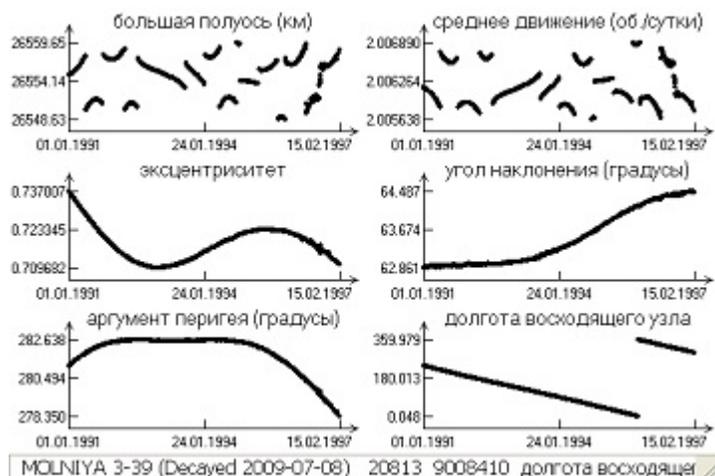


Рис. 24: Молния 3-39, активный режим полёта

Для поддержания траектории космического аппарата относительно поверхности Земли было выполнено около 15 орбитальных маневров (рис.25).

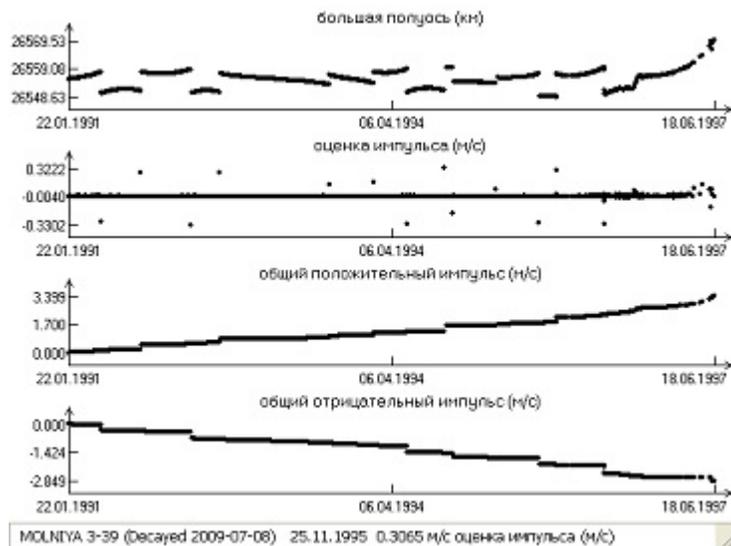


Рис. 25: Молния 3-39, коррекция орбиты

Наибольший удельный импульс по абсолютной величине немного превышал 0.3 м/с. Суммарный удельный импульс был равен величине 6.2 м/с. Даты

выполнения коррекций траектории получены на основе анализа данных из базы “NORAD” [206]. В наборах данных результаты коррекций орбиты или, другими словами, результаты включения двигательной установки проявляются в резких изменениях значения среднего движения  $n$ . Числовое значение среднего движения однозначно связано со средним значением  $a$  большой полуоси орбиты. Оценки величин удельных импульсов вычислены на основе этих данных и формул, приведённых в учебном пособии Лукьянова Л.Г. и Ширмина Г.И. [99].

В пассивном режиме полёта в результате действия притяжения Луны и Солнца эксцентриситет орбиты объектов типа **Молния** подвержен долгопериодическим изменениям, постепенно достигает критического значения 0.752, и в перигее орбиты спутник входит в плотные слои атмосферы [94].

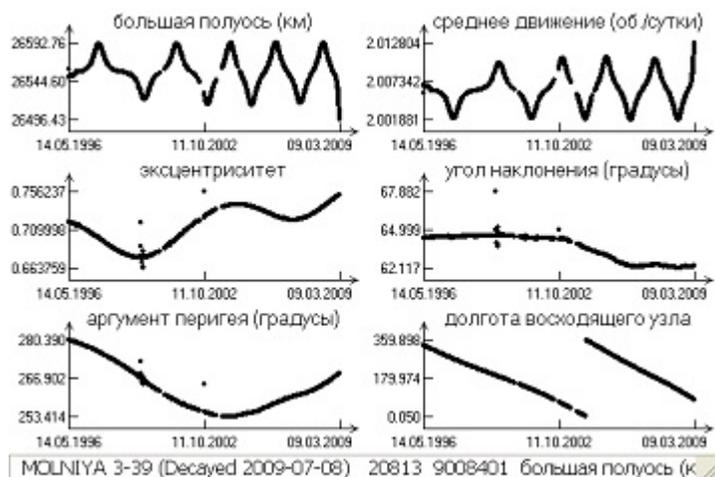


Рис. 26: Молния 3-39, пассивный режим полёта

В феврале 2009 года эксцентриситет орбиты космического аппарата Молния 3-39 достиг критического значения (рис.26). Под действием силы сопротивления атмосферы большая полуось и высота апогея орбиты стали уменьшаться. Объект завершил свой полёт во второй половине даты 8 июля 2009 года после входа в плотные слои атмосферы.

В мае 2009 года на базе Института астрономии Российской академии наук в Звенигороде старшим научным сотрудником Бахтигираевым Н.С. были выполнены позиционные наблюдения космического аппарата Молния 3-39 [160].

Получено 313 топоцентрических положений объекта: прямое восхождение и склонение в небесной системе отсчёта.

Обработка результатов позиционных наблюдений с помощью численной модели (с.36) позволила уточнить начальный вектор состояния объекта на момент 18 мая 2009 года (полночь). Средняя квадратическая погрешность одного измерения составила 1.4 секунд дуги. Графики разностей измеренных и вычисленных положений объекта представлены на рис.27.

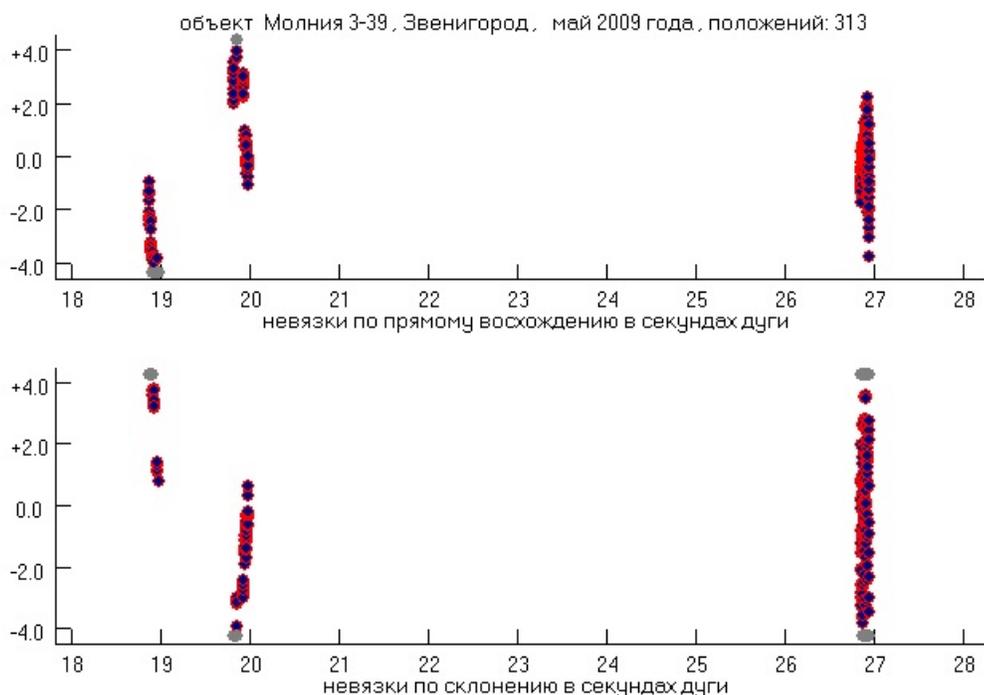


Рис. 27: Молния 3-39, фильтрация наблюдений

В результате вычислений была получена оценка отношения миделевой площади к массе спутника. С относительной погрешностью 10% оценка составила  $0.003 \text{ м}^2/\text{кг}$ . Был выполнен прогноз движения космического аппарата с целью оценки момента завершения полёта.

При вычислениях были использованы динамическая модель плотности верхней атмосферы Земли [17] и данные об индексах солнечной активности и геомагнитных индексах [207].

С учётом погрешности оценки отношения площади к массе был получен интервал вероятных дат завершения полёта: от первой половины 7 июля до

первой половины 9 июля.

Прогноз изменения элементов орбиты объекта приведён на рис.28.

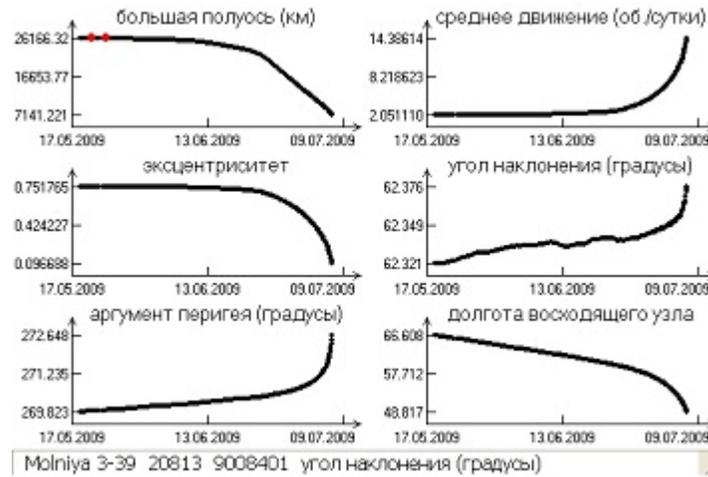


Рис. 28: Молния 3-39, прогноз

Изменения элементов орбиты космического аппарата Молния 3-39 по данным службы “NORAD” [206] представлены на рис.29.

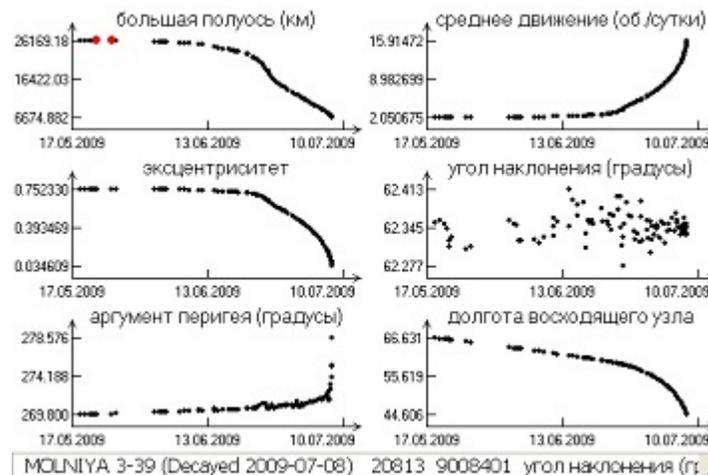


Рис. 29: Молния 3-39, данные “NORAD”

С погрешностью 12 часов теоретическая оценка времени существования, выполненная только на основе наблюдений в Звенигороде, совпала с реальной датой завершения полёта. Это показало как хорошую точность проведённых позиционных наблюдений, так и применимость алгоритмов и программного приложения для решения таких сложных задач.

### 3.9 Объекты Глонасс

Космические аппараты *глобальной навигационной спутниковой системы* (ГЛОНАСС) снабжены уголковыми отражателями для измерения топоцентрических дальностей.

Длинные ряды лазерных наблюдений различных объектов ГЛОНАСС содержатся в базе данных [190].

В табл.23 представлены результаты обработки наблюдений космического аппарата Глонасс 109 (Космос 2436, международный номер – 0706503, номер по каталогу “НОРАД” – 32395). В колонке  $N_p$  приводится количество измерений топоцентрических дальностей за текущий месяц. Минимальные  $\Delta\rho_{min}$  и максимальные  $\Delta\rho_{max}$  разности между измеренными и вычисленными значениями дальностей и значение средней квадратической погрешности одного измерения  $\sigma$  даны в метрах. Оценка отношения средней площади поверхности к массе объекта  $A/m$  имеет размерность квадратный метр на килограмм массы.

Таблица 23: Глонасс 109, фильтрация наблюдений

дата	$N_p$	$\Delta\rho_{min}$ (м)	$\Delta\rho_{max}$ (м)	$\sigma$ (м)	$A/m$ (м <sup>2</sup> /кг)
2011/09/01	747	-20.368	13.022	5.124	$0.0321 \pm 8.4 \cdot 10^{-6}$
2011/10/01	684	-38.719	20.351	10.788	$0.0327 \pm 2.0 \cdot 10^{-5}$
2011/11/01	724	-36.902	30.871	11.435	$0.0322 \pm 2.4 \cdot 10^{-5}$
2011/12/01	539	-38.109	28.598	9.780	$0.0325 \pm 3.2 \cdot 10^{-5}$
2012/01/01	491	-10.911	15.106	5.190	$0.0325 \pm 1.8 \cdot 10^{-5}$
2012/02/01	509	-14.730	11.456	4.673	$0.0323 \pm 9.9 \cdot 10^{-6}$
2012/03/01	795	-22.915	21.870	6.942	$0.0328 \pm 1.2 \cdot 10^{-5}$
2012/04/01	514	-27.426	33.752	12.450	$0.0330 \pm 2.3 \cdot 10^{-5}$

На дату 1 сентября 2011 года средние значения элементов орбиты космического аппарата Глонасс 109 были следующими:

большая полуось  $a = 25507.638$  километров,

эксцентриситет орбиты  $e = 0.00147652$ ,

угол наклона  $i = 65.42425^\circ$ ,

среднее движение  $n = 2.131031$  оборотов за сутки.

Национальная геодезическая служба (NGS) Североамериканских соединённых штатов поддерживает обширную базу данных о точных положениях навигационных спутников GPS и Глонасс [197].

Каждый отдельный файл этой базы содержит геоцентрические прямоугольные координаты спутников в земной системе отсчёта. Координаты приводятся через 15 минут на интервале времени, равном одним суткам. Эти данные позволяют оценить реальную точность предлагаемых алгоритмов вычисления положений и улучшения параметров на основе наблюдений.

На графиках рис.30 представлены разности между измеренными и вычисленными значениями топоцентрических дальностей до космического аппарата Глонасс 118 и разности между положениями объекта, вычисленными с помощью улучшенных параметров движения, и данными из базы NGS, которые послужили эталонной орбитой:

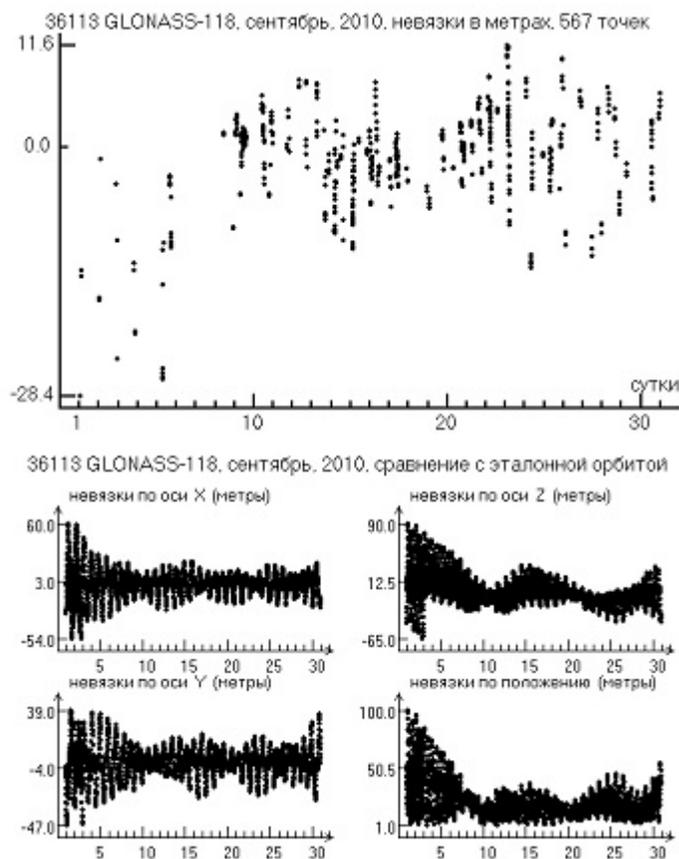


Рис. 30: Глонасс 118, фильтрация наблюдений

На с.21 отмечалось, что нуль-пункт шкалы всемирного координированного времени UTC только на целое число секунд отличается от нуль-пункта шкалы атомного времени TAI:

$$\text{UTC} = \text{TT} - \Delta\text{TT} = \text{TAI} + 32.184 - \Delta\text{TT} \text{ (с)}.$$

В базе данных о положениях навигационных объектов используются шкала времени GPS. Секунда времени шкалы GPS совпадает с секундой шкал UTC и TAI. Разность нуль-пунктов шкалы TAI и шкалы GPS постоянная и равна 19.0 секунд.

Шкалы GPS и UTC совпадали в период с 1 января 1980 года по 1 июля 1981 года. В дальнейшем нуль-пункты шкал GPS и UTC отличаются на целое число секунд (табл.24):  $\text{GPS} = \text{UTC} - 51.184 + \Delta\text{TT} \text{ (с)}.$

Таблица 24: Разность нуль-пунктов шкал времени

юлианский день	$\Delta\text{TT}$ (с)	GPS – UTC (с)	дата
2443509.5	49.184	–	1978/01/01
2443874.5	50.184	–	1979/01/01
2444239.5	51.184	0.0	1980/01/01
2444786.5	52.184	1.0	1981/07/01
2445151.5	53.184	2.0	1982/07/01
2445516.5	54.184	3.0	1983/07/01
2446247.5	55.184	4.0	1985/07/01
2447161.5	56.184	5.0	1988/01/01
2447892.5	57.184	6.0	1990/01/01
2448257.5	58.184	7.0	1991/01/01
2448804.5	59.184	8.0	1992/07/01
2449169.5	60.184	9.0	1993/07/01
2449534.5	61.184	10.0	1994/07/01
2450083.5	62.184	11.0	1996/01/01
2450630.5	63.184	12.0	1997/07/01
2451178.5	64.184	13.0	1999/01/01
2453736.5	65.184	14.0	2006/01/01
2454832.5	66.184	15.0	2009/01/01
2456109.5	67.184	16.0	2012/07/01

### 3.10 Спутник Метеор-3М

Научный космический аппарат Метеор-3М был запущен в августе 2001 года (международный номер 105601, номер по каталогу “НОРАД” 27001).

На дату 1 июня 2002 года средние значения элементов орбиты космического аппарата были следующими:

большая полуось  $a = 7384.122$  километров,

эксцентриситет орбиты  $e = 0.00136692$ ,

угол наклона  $i = 99.62887^\circ$ ,

среднее движение  $n = 13.6816913$  оборотов за сутки.

Для улучшения параметров орбиты были использованы лазерные наблюдения объекта на интервалах времени, равных одному месяцу.

Рис.31 иллюстрирует результаты вычислений.

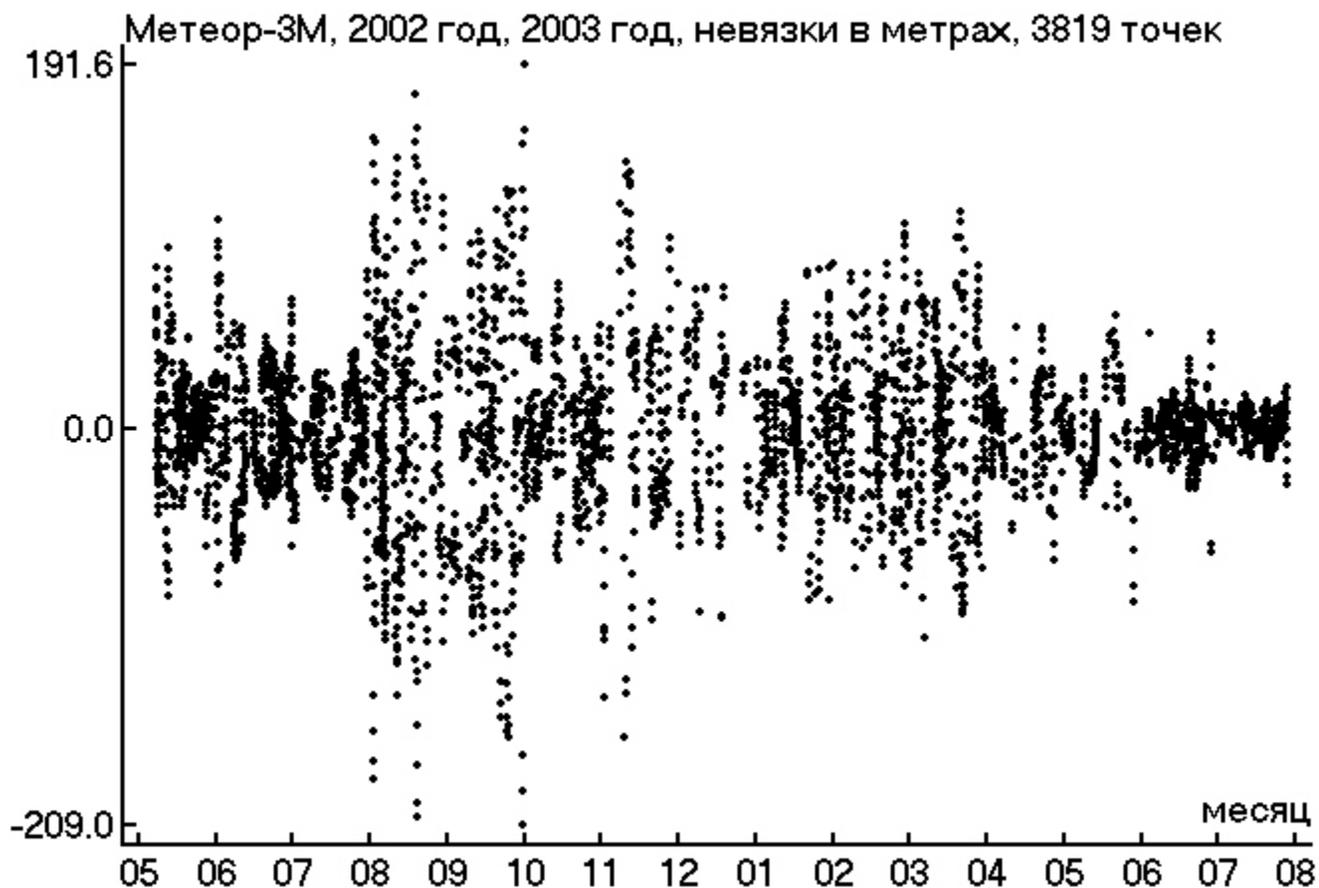


Рис. 31: Метеор-3М, фильтрация наблюдений

### 3.11 Спутник Блиц

Наноспутник Блиц был разработан и изготовлен в Институте прецизионного приборостроения [201].

Спутник был запущен на орбиту 17 сентября 2009 года.

На дату 1 января 2010 года средние значения элементов орбиты космического аппарата были следующими:

большая полуось  $a = 7198.152$  километров,

эксцентриситет орбиты  $e = 0.000476105$ ,

угол наклона  $i = 98.785179^\circ$ ,

среднее движение  $n = 14.2153763$  оборотов за сутки.

Рис.32 иллюстрирует результаты улучшения параметров движения на основе лазерных наблюдений на интервалах один месяц.

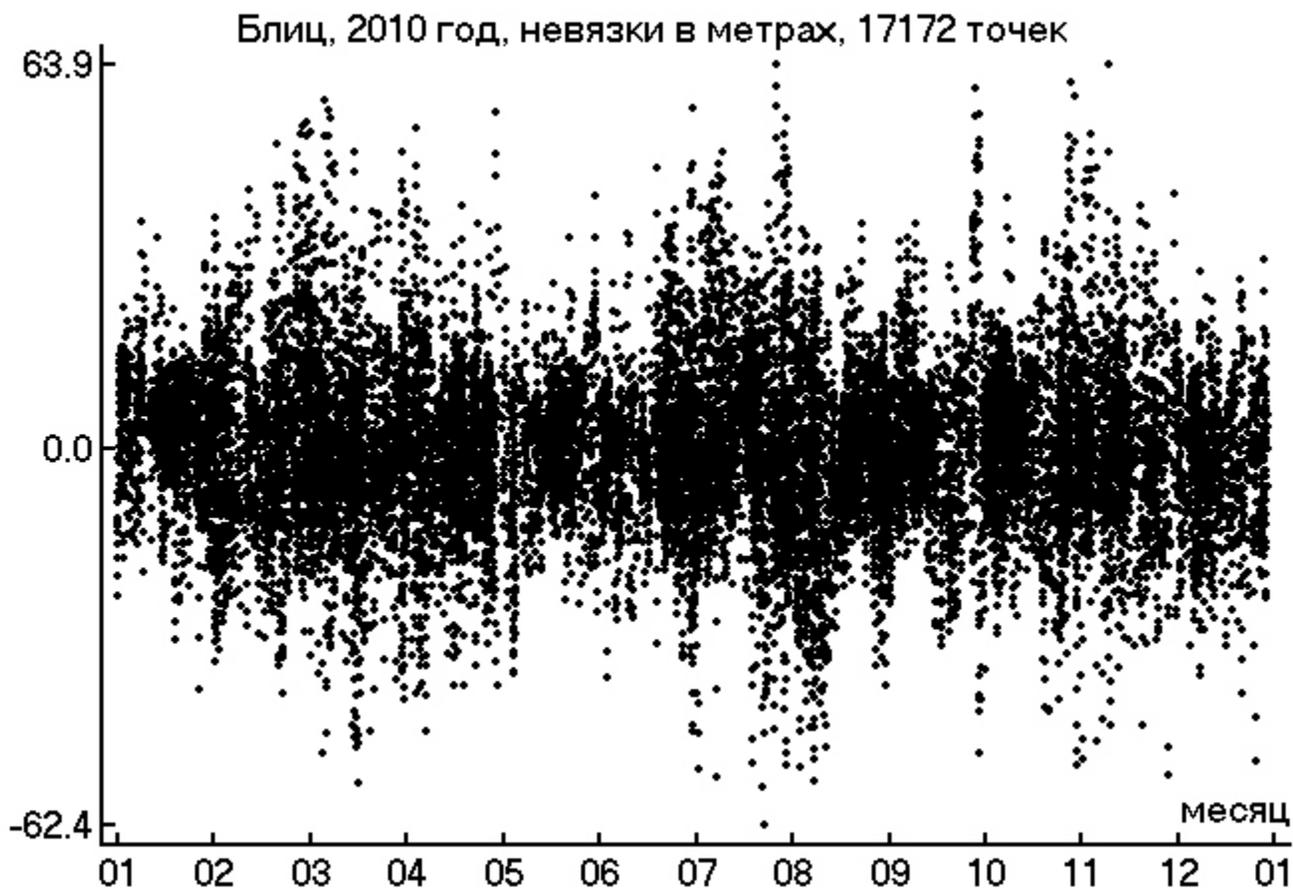


Рис. 32: Блиц, фильтрация наблюдений

### 3.12 Спутник Ларец

Спутник Ларец был разработан и изготовлен в Институте прецизионного приборостроения [182].

Спутник был запущен на орбиту 27 сентября 2003 года.

На дату 1 января 2010 года средние значения элементов орбиты космического аппарата были следующими:

большая полуось  $a = 7062.249$  километров,

эксцентриситет орбиты  $e = 0.001133228$ ,

угол наклона  $i = 97.904212^\circ$ ,

среднее движение  $n = 14.6277446$  оборотов за сутки.

Рис.33 иллюстрирует результаты улучшения параметров движения на основе лазерных наблюдений на интервалах один месяц.

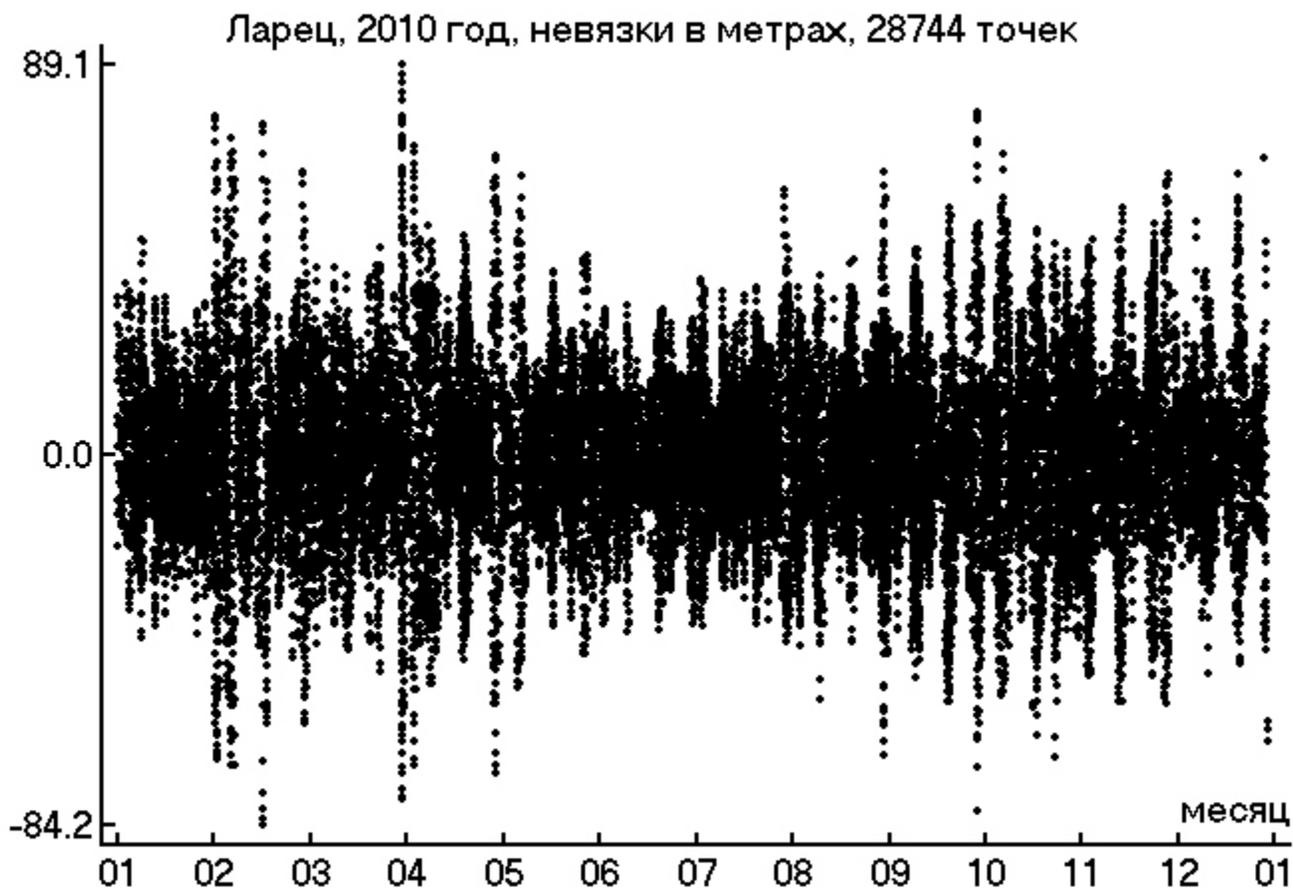


Рис. 33: Ларец, фильтрация наблюдений

### 3.13 Точность прогноза

В табл.25 даны оценки максимальной ошибки прогноза для искусственных спутников Земли, находящихся на орбитах с различной высотой полёта. Высота полёта  $h_{min}$  дана в километрах.

Для каждого объекта оценки были получены с помощью лазерных наблюдений. На основе  $N_p$  значений топоцентрических дальностей на интервале времени  $\Delta T_a$  в сутках выполняется улучшение параметров движения (с.180): шесть средних элементов орбиты, эмпирический коэффициент отражения и эмпирический коэффициент ускорения. Оценка средней квадратической погрешности одного измерения в метрах дана в столбце  $\sigma$ .

На интервале времени  $\Delta T_p$  суток, следующим сразу за интервалом  $\Delta T_a$ , на основе улучшенных параметров движения проводится прогноз движения объекта и сравнение с измеренными значениями топоцентрических расстояний. Абсолютная величина самой большой разности измеренных и вычисленных величин в метрах обозначена  $|\Delta \rho_{max}|$ .

Таблица 25: Оценка точности прогноза

спутник	$h_{min}$	$\Delta T_a$	$N_p$	$\sigma$	$\Delta T_p$	$ \Delta \rho_{max} $
<i>Эталон-1</i>	19500	30	1530	7.0	30	41.2
<i>Глонасс 109</i>	19500	30	720	11.4	30	268.1
<i>Глонасс 115</i>	19500	30	960	6.2	30	194.2
<i>Lageos</i>	6000	30	7000	1.7	30	9.2
<i>Ajisai (EGP)</i>	1400	30	11000	5.8	30	149.0
<i>Метеор-3М</i>	1000	30	380	47.8	30	5349.0
<i>Метеор-3М</i>	1000	5	60	1.2	5	71.3
<i>Starlette</i>	900	30	6500	18.2	30	320.0
<i>WestPac</i>	830	30	1070	18.4	30	2446.3
<i>Блунц</i>	820	30	1680	13.9	30	146.4
<i>Stella</i>	800	30	3500	8.8	30	281.1
<i>Ларец</i>	680	30	3250	15.0	30	239.6
<i>Tandem X</i>	510	2	210	16.4	2	886.7
<i>Grace A</i>	470	2	220	4.9	2	214.1
<i>Champ</i>	420	2	380	6.0	2	2682.7

В алгоритмах дифференциального улучшения орбит эмпирические коэффициенты отражения и ускорения выполняют две функции. С их помощью удаётся частично учесть влияние светового давления (формула (28) на с.38) и сопротивления атмосферы (формула (29) на с.38). Кроме того, использование эмпирических коэффициентов и формул для вычисления ускорений, в которые эти коэффициенты входят линейным образом, помогает частично компенсировать методические погрешности и упрощающие предположения, допущенные при построении аналитической модели движения объектов.

В предлагаемых алгоритмах эмпирический коэффициент ускорения был включён в число улучшаемых параметров модели движения как величина

$$\hat{k} = \frac{1}{2} \dot{n} = \ddot{M},$$

соответствующая половине средней скорости изменения среднего движения и измеряемая в радианах за секунду в квадрате.

Параметр  $\hat{k}$  добавлен в систему “осреднённых” уравнений ((198) на с.102) в первое уравнение для элемента  $a'$

$$\frac{da'}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{a'}{n'} \hat{k} + \frac{\partial a'}{\partial L'} \frac{\partial K_2^*}{\partial l'} + \frac{\partial a'}{\partial G'} \frac{\partial K_2^*}{\partial g'} + \frac{\partial a'}{\partial H'} \frac{\partial K_2^*}{\partial h'}.$$

Для объектов Эталон, Глонавс и спутников на орбитах, близких к “стационарным” орбитам, эмпирический коэффициент ускорения не включается в число улучшаемых параметров модели и  $\hat{k} = 0$ . Эмпирический коэффициент отражения в данной работе использован для оценки отношения средней площади поверхности к массе этих объектов. Результаты были представлены в табл.22 на с.145 и табл.23 на с.152.

Для объектов Лагеос и Лагеос-2 каждое значение  $\ddot{M}$ , полученное на трёх-суточном интервале времени (с.137), переводится в значение коэффициента

$$c_t = -5.61 \cdot 10^5 \cdot a \cdot \ddot{M}.$$

Преобразование было рекомендовано в стандартах вычислений, подготовленных к первой компании MERIT [198]. Результаты расчётов были представлены на с.137 (рис.11).

## Послесловие

Предлагаемая в данном исследовании схема вычислений предназначена для учета важнейших неравенств в движении космических объектов и решения практических задач с помощью алгоритмов фильтрации измерительной информации.

Сравнительные испытания алгоритмов и их применение показали, что

- погрешность вычисления коэффициентов полиномов Лежандра при различных степенях аргумента возрастает с увеличением порядка полинома. Это обстоятельство серьёзно **ограничивает возможности** аналитических методов для учёта возмущений, обусловленных гармониками геопотенциала;
- точность обработки высокоточных лазерных наблюдений спутников Лагеос-1 и Лагеос-2 с помощью вычислительных программ, основанных на предлагаемых в данной работе алгоритмах *численно-аналитического метода* расчёта положений космических объектов, находится примерно **на одном уровне** с оценками точности, публикуемыми основными центрами анализа данных;
- пакет вычислительных программ LENTA на интервалах времени порядка нескольких суток **уступает** по точности представления наблюдений спутников типа Эталон (*оценка погрешности прогноза находится на уровне 0.5 метра*) и низкоорбитальных объектов Эйджисаи, Старлет и Стелла (*оценка погрешности прогноза достигает значения 5.0 метров*) пакетам программ DGFI, JCET и HIT-U, использующим *метод численного интегрирования* уравнений движения;
- основное **преимущество** *численно-аналитических алгоритмов* в сравнении с методом численного интегрирования заключается в сокращении времени обработки очередной порции измерительной информации;
- программное приложение может быть использовано для решения задач информационной поддержки космических экспериментов.

## Приложение

### Промежуточный экватор.

В резолюциях МАС [199] был рекомендован вариант, использующий новые понятия: “промежуточный экватор”, “невращающаяся начальная точка” и “угол вращения Земли”.

Преобразование между системами координат имеет похожий вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(C)} = Q(TT) \cdot R(UT1) \cdot W(TT) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(T)}, \quad (231)$$

где

$Q(TT)$  – матрица, представляющая движение небесного промежуточного полюса в небесной опорной системе  $OXYZ_{CRS}$ ,

$R(UT1)$  – матрица вращения Земли вокруг оси  $OZ_{CIP}$ , определяемой небесным промежуточным полюсом,

$W(TT)$  – матрица, обусловленная движением полюса Земли относительно небесного промежуточного полюса  $Z_{CIP}$ ,

однако алгоритм вычисления элементов матриц существенно отличается от используемого ранее.

В первом компоненте,  $W(TT)$ , появляется малый угол  $s'$

$$W(TT) = R_3(-s') \cdot R_1(y_p) \cdot R_2(x_p),$$

второй компонент – матрица поворота по часовой стрелке на угол вращения Земли  $\theta$

$$R(UT1) = R_3(-\theta),$$

а матрица  $Q(TT)$  состоит из произведения четырёх матриц

$$Q(TT) = R_3(-E) \cdot R_2(-d) \cdot R_3(E) \cdot R_3(s).$$

По определению угол вращения Земли  $\theta$  является линейной функцией всемирного времени  $UT1$ , выраженного в юлианских днях:

$$\theta(UT1) = 2\pi(0.7790572732640 + 1.00273781191135448 \times (UT1 - 2451545.0)).$$

Параметр  $s'$  задаёт положение **земной** начальной точки на небесном промежуточном экваторе, не участвующей в движении промежуточного экватора относительно экватора земной опорной системы координат вследствие движения полюса.

Величина  $s$  определяет положение **небесной** начальной точки на небесном промежуточном экваторе, не принимающей участие в общем движении промежуточного экватора относительно небесной опорной системы отсчёта.

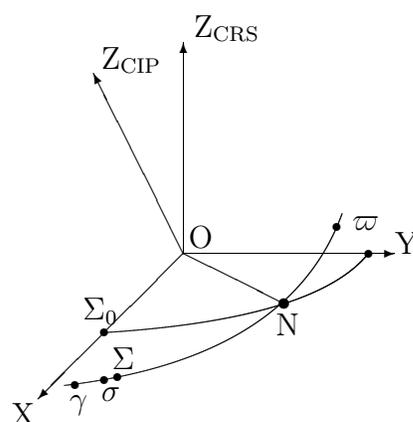


Рис. 34: Небесный промежуточный экватор

На рис. 34  
 плоскость  $XOY$  – экватор геоцентрической небесной опорной системы отсчёта,  
 ось  $OZ_{\text{CRS}}$  перпендикулярна промежуточному экватору,  
 точка  $N$  – восходящий узел небесного промежуточного экватора на опорном экваторе,  
 $\gamma$  – положение истинной точки весеннего равноденствия,  
 $\sigma$  – положение небесной начальной точки на небесном промежуточном экваторе,  
 $\varpi$  – положение земной начальной точки на небесном промежуточном экваторе,  
 дуга  $\widehat{\Sigma_0 N} = \widehat{\Sigma N} = 90^\circ + E$ ,

угол  $\angle \Sigma_0 N \Sigma = Z_{\text{CRS}} O Z_{\text{CIP}} = d$ ,

дуга  $\widehat{\sigma \Sigma} = s$ ,

дуга  $\widehat{\sigma \varpi} = \theta$  – угол поворота Земли,

дуга  $\widehat{\gamma \varpi} = S_{\oplus}$  – истинное гринвичское звёздное время.

### Двустрочные элементы (к с.30).

Двустрочные орбитальные элементы в формате “NORAD” ежедневно публикует радиотехническая служба слежения за спутниками США [206].

Данные для каждого спутника содержат три строки:

STELLA

1 22824U 93061B 04110.78132390 -.00000207 00000-0 -67902-4 0 7746

2 22824 98.2563 116.5245 0007837 91.7907 268.4122 14.27256914550382

В строке 0 записано имя объекта из одиннадцати символов.

### строка 1

колонка описание

01-01 номер линии,

03-07 номер спутника,

10-11 международный указатель (последние две цифры года запуска),

12-14 международный указатель (порядковый номер запуска),

15-17 международный указатель (часть запущенного изделия),

19-20 эпоха элементов (последние две цифры года),

21-32 эпоха элементов (день с дробной частью от начала года),

34-43 первая производная от среднего движения,

45-52 вторая производная от среднего движения,

54-61 эффективный коэффициент отражения,

63-63 тип эфемериды,

65-68 номер элементов,

69-69 контрольная сумма.

**строка 2**

колонка описание

01-01 номер линии,

03-07 номер спутника,

09-16 угол наклона (градусы),

18-25 прямое восхождение восходящего узла (градусы),

27-33 эксцентриситет (впереди числа ставить десятичную точку),

35-42 аргумент перигея (градусы),

44-51 средняя аномалия (градусы),

53-63 среднее движение (обороты за сутки),

64-68 количество витков на эпоху,

69-69 контрольная сумма.

**“Нормальные места” (к с.31).**

Наборы данных с “нормальными” точками можно найти в Интернете по адресу

<ftp://cddisa.gsfc.nasa.gov/pub/slr/slrql/>.

В одном наборе данных содержатся результаты первичной редукции измерений дальности, выполненных на различных обсерваториях в течение нескольких проходов спутника в зоне видимости данного пункта.

Каждая серия наблюдений, полученная на конкретной станции за одно прохождение, отделяется от следующей серии специальной “шапкой”, состоящей из пяти цифр 9.

Далее следуют одна “головная” строка, содержащая информацию, общую для всех измерений данной серии, и несколько строк с результатами наблюдений.

Более подробно формат “Quick Look” рассмотрим на следующем примере, представляющем из себя запись одной серии лазерных наблюдений “геодезического” спутника *Лагос* (наблюдения выполнены 1 ноября 1999 года на

обсерватории *Monument Peak*):

1	10	20	30	40	50
99999					
7603901993057110041153200009703600001600387307100580511					
021502028191051419271661000005908187288204200450000047					
022218028201050225271646000006508187288204202770000045					
022944028253049064925368000005708187288204200630000068					
043770028125052868096722000005408188288204202930000068					
044998028205055089599988000005008188286704201710000094					
045688028149056379716299000005108188286704200190000089					

99999 - ‘шапка’, отделяющая одну серию от другой.

7603901993057110041153200009703600001600387307100580511

- ‘головная’ строка.

‘Головная строка’ содержит следующую информацию:

колонки 01 - 07 : 7603901 - номер для отождествления спутника;

колонки 08 - 09 : 99 - номер года от начала столетия;

колонки 10 - 12 : 305 - номер дня от начала года;

колонки 13 - 16 : 7110 - номер для отождествления станции;

колонки 21 - 24 : 5320

- длина волны лазерного излучателя в единицах 0.1 нанометра;

колонка 43 : 7

- индикатор длительности интервала осреднения ‘сырых’ наблюдений при образовании одной нормальной точки:

0 = одиночное наблюдение,

2 = интервал осреднения 10 секунд,

3 = интервал осреднения 15 секунд,

4 = интервал осреднения 20 секунд,

5 = интервал осреднения 30 секунд,

6 = интервал осреднения 1 минута,

7 = интервал осреднения 2 минуты,

8 = интервал осреднения 3 минуты,

9 = интервал осреднения 5 минут;

колонка 44 : 3 - индикатор шкалы времени:

3 = UTC (USNO),

4 = UTC (GPS),

7 = UTC (BIN);

колонки 53 - 54 : 51

- контрольная сумма: остаток от деления на 100 суммы цифр в колонках 1-52.

021502028191051419271661000005908187288204200450000047

- строка результатов измерений.

Строка результатов измерений содержит следующую информацию:

колонки 01 - 12 : 021502028191

- момент излучения импульса,

измеряемый в единицах 0.1 микросекунды от 0 часов UTC,

если интервал наблюдений пересекает отметку 24 часа UTC, то приводится остаток от деления на 86400 секунд;

колонки 13 - 24 : 051419271661

- разность между моментом приёма

и моментом излучения импульса в пикосекундах;

колонки 25 - 31 : 0000059

- стандартное отклонение разности

между моментами приёма и возвращения импульса в пикосекундах;

колонки 32 - 36 : 08187

- атмосферное давление в единицах 0.1 миллибар;

колонки 37 - 40 : 2882

- температура по шкале Кельвина в единицах 0.1 градуса;

колонки 41 - 43 : 042 - относительная влажность в процентах;

колонки 44 - 47 : 0045

- количество одиночных измерений,

использованных при образовании данной ‘нормальной’ точки;

колонки 48 - 52 : 00000 - не используются;

колонки 53 - 54 : 47 - контрольная сумма.

### Правые части (к с.35).

В алгоритме численного интегрирования уравнений движения необходимо знать ускорения, обусловленные действием гравитационного поля Земли, вычисленные в Международной небесной геоцентрической системе отсчёта.

Разложение гравитационного поля Земли в ряд по сферическим функциям в Международной земной опорной системе отсчёта представлено формулой (24) на с. 35. Обозначим

$$U_0 = \frac{fm}{r},$$

$$U_1 = \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{k=0}^n u_{nk},$$

$$u_{nk} = \frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda].$$

Прямоугольные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и сферические координаты  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$  связаны соотношениями

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = r \sin \varphi.$$

Составляющие ускорения в земной опорной системе отсчёта

$$F_x = -fm \frac{x}{r^3} + \frac{\partial U_1}{\partial x},$$

$$F_y = -fm \frac{y}{r^3} + \frac{\partial U_1}{\partial y},$$

$$F_z = -fm \frac{z}{r^3} + \frac{\partial U_1}{\partial z}$$

при помощи матрицы преобразования (формула (13) на с.23) переводятся в геоцентрическую небесную систему отсчёта.

Каждое слагаемое  $u_{nk}$  представим в виде произведения трёх сомножителей

$$\begin{aligned} R_n \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{fm}{r} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n, \\ Z_{nk} \left( \frac{z}{r} \right) &= \frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^k}, \\ Q_{nk} \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) &= (\cos \varphi)^k [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda]. \end{aligned}$$

Тогда, например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{nk}}{\partial x} &= + \frac{dR_n}{d(1/r)} \frac{\partial(1/r)}{\partial x} \cdot Z_{nk} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot \frac{dZ_{nk}}{d(z/r)} \frac{\partial(z/r)}{\partial x} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot Z_{nk} \cdot \left[ \frac{\partial Q_{nk}}{\partial(x/r)} \frac{\partial(x/r)}{\partial x} + \frac{\partial Q_{nk}}{\partial(y/r)} \frac{\partial(y/r)}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

Частные производные от  $1/r$  по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равны

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial(1/r)}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial(1/r)}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}.$$

Частные производные от  $x/r$ ,  $y/r$ ,  $z/r$  по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x/r)}{\partial x} &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, & \frac{\partial(x/r)}{\partial y} &= -\frac{xy}{r^3}, & \frac{\partial(x/r)}{\partial z} &= -\frac{xz}{r^3}, \\ \frac{\partial(y/r)}{\partial x} &= -\frac{xy}{r^3}, & \frac{\partial(y/r)}{\partial y} &= \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, & \frac{\partial(y/r)}{\partial z} &= -\frac{yz}{r^3}, \\ \frac{\partial(z/r)}{\partial x} &= -\frac{xz}{r^3}, & \frac{\partial(z/r)}{\partial y} &= -\frac{yz}{r^3}, & \frac{\partial(z/r)}{\partial z} &= \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Вычисление  $Z_{nk}(\sin \varphi)$  выполняется на основе рекуррентных соотношений. Для значения индекса  $k = 0$  удобна формула:

$$\frac{dP_n(z)}{dz} = nP_{n-1}(z) + z \frac{dP_{n-1}(z)}{dz}.$$

При  $k > 0$  следует применять формулу:

$$\frac{d^k P_n(z)}{dz^k} = (2n-1) \frac{d^{k-1} P_{n-1}(z)}{dz^{k-1}} + \frac{d^k P_{n-2}(z)}{dz^k}.$$

Рекуррентное соотношение для вычисления сомножителя  $Q_{nk}$  получается следующим образом. Обозначим

$$Q_{nk} \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) = C_{nk} \cdot X_k + S_{nk} \cdot Y_k,$$

где

$$X_k = (\cos \varphi)^k \cos(k\lambda), \quad Y_k = (\cos \varphi)^k \sin(k\lambda).$$

При  $k = 0$  имеем

$$X_0 = 1, \quad Y_0 = 0.$$

Вывод рекуррентных соотношений основан на формулах сложения тригонометрических функций:

$$X_k = X_{k-1} \frac{x}{r} - Y_{k-1} \frac{y}{r}, \quad Y_k = Y_{k-1} \frac{x}{r} + X_{k-1} \frac{y}{r}.$$

Замечая, что величины  $X_k$ ,  $Y_k$  являются функциями отношений  $x/r$ ,  $y/r$ , получаем производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_k}{\partial(x/r)} &= \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{x}{r} + X_{k-1} - \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{y}{r}, \\ \frac{\partial X_k}{\partial(y/r)} &= \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{x}{r} - \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{y}{r} - Y_{k-1}, \\ \frac{\partial Y_k}{\partial(x/r)} &= \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{x}{r} + Y_{k-1} + \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{y}{r}, \\ \frac{\partial Y_k}{\partial(y/r)} &= \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{x}{r} + \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{y}{r} + X_{k-1}. \end{aligned}$$

Рекуррентный алгоритм заключается в следующем: для каждого значения индекса  $k$  от  $k = 0$  до  $k = N_{max}$  выполняется цикл по индексу  $n$  от  $n = k$  до  $n = N_{max}$ .

### Атмосферная задержка.

Каждая строка в наборе данных “Quick Look” содержит метеорологическую информацию на момент наблюдений.

Метеорологические данные необходимы для вычисления задержки, возникающей при прохождении лазерного луча в атмосфере Земли. Задержка

приводит к увеличению промежутка времени между моментами испускания и приёма импульса.

Пусть

$P_0$  – атмосферное давление в миллибарах,

$T_0$  – температура воздуха в градусах шкалы Кельвина,

$R_h$  – влажность воздуха в процентах на момент наблюдений,

$\lambda$  – длина волны лазерного излучателя в микрометрах.

Для вычисления поправки  $\Delta\rho$ , обусловленной задержкой в атмосфере, должны быть известны координаты станции наблюдений:

геодезическая широта  $\varphi$ ,

высота над уровнем моря  $H$  в километрах.

Необходимо знать угловую высоту спутника над горизонтом  $h$ . Оценка численного значения этой величины может быть получена в процессе дифференциального улучшения параметров орбиты на основе наблюдений.

В стандартах МЕРИТ [198] рекомендован следующий алгоритм вычисления задержки в атмосфере:

$$\Delta\rho = \frac{f(\lambda)}{f(\varphi, H)} \cdot \frac{A + B}{\sin h + \frac{B/(A + B)}{\sin h + 0.01}},$$

где

$$f(\lambda) = 0.9650 + \frac{0.0164}{\lambda^2} + \frac{0.000228}{\lambda^4},$$

$$f(\varphi, H) = 1 - 0.0026 \cos 2\varphi - 0.00031 H,$$

$$A = 0.002357 P_0 + 0.000141 e_0,$$

$$B = 1.084 \cdot 10^{-8} P_0 T_0 K + 4.734 \cdot 10^{-8} \frac{P_0^2}{T_0} \frac{2}{3 - 1/K},$$

$$K = 1.163 - 0.00968 \cos 2\varphi - 0.00104 T_0 + 0.1435 \cdot 10^{-4} P_0,$$

$$p = \frac{7.5 (T_0 - 273.15)}{237.3 + (T_0 - 273.15)},$$

$$e_0 = 0.0611 \cdot R_h \cdot 10^p.$$

Дж. Марини и К. Маррей опубликовали эти формулы в 1973 году в одном из отчётов НАСА.

**Простое дифференцирование (к с.71).**

Формулы для вычисления величин  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2^2$ ,  $\alpha_3^2$  получены на с.54. Дифференцируем  $\alpha_1$  по явно входящим параметрам  $a$ ,  $e^2$ ,  $\delta^2$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_1}{\partial a} &= -\frac{\alpha_1}{a} + \frac{fm}{2a} (1 - e^2) (1 - \delta^2) \left[ \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a} Q + \varepsilon^2 \frac{\partial Q}{\partial a} \right], \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial e^2} &= -\frac{fm}{2a} \varepsilon^2 (1 - \delta^2) Q + \frac{fm}{2a} (1 - e^2) (1 - \delta^2) \left[ \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial e^2} Q + \varepsilon^2 \frac{\partial Q}{\partial e^2} \right], \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta^2} &= -\frac{fm}{2a} \varepsilon^2 (1 - e^2) Q + \frac{fm}{2a} (1 - e^2) (1 - \delta^2) \varepsilon^2 \frac{\partial Q}{\partial \delta^2}.\end{aligned}$$

Частные производные от  $\alpha_2^2$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_2^2}{\partial a} &= +\frac{\alpha_2^2}{a} + fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [2(1 + e^2) + \varepsilon^2(1 - e^2)^2] \varepsilon^2 \frac{\partial Q}{\partial a} \\ &\quad + 2fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [(1 + e^2) + \varepsilon^2(1 - e^2)^2] \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a} Q, \\ \frac{\partial \alpha_2^2}{\partial e^2} &= -\frac{\alpha_2^2}{1 - e^2} + 2fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [1 - \varepsilon^2(1 - e^2)] \varepsilon^2 Q \\ &\quad + 2fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [(1 + e^2) + \varepsilon^2(1 - e^2)^2] \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial e^2} Q \\ &\quad + fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [2(1 + e^2) + \varepsilon^2(1 - e^2)^2] \varepsilon^2 \frac{\partial Q}{\partial e^2}, \\ \frac{\partial \alpha_2^2}{\partial \delta^2} &= +fma(1 - e^2) [2\varepsilon^2(1 + e^2) + \varepsilon^4(1 - e^2)^2] \left[ -Q + (1 - \delta^2) \frac{\partial Q}{\partial \delta^2} \right].\end{aligned}$$

Вычислим производные от параметра  $\alpha_3^2$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_3^2}{\partial a} &= +\frac{\alpha_3^2}{a} + fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [1 + 2\varepsilon^2(1 + e^2) + \varepsilon^4(1 - e^2)^2] \frac{\partial Q}{\partial a} \\ &\quad + 2fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [(1 + e^2) + \varepsilon^2(1 - e^2)^2] \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a} Q, \\ \frac{\partial \alpha_3^2}{\partial e^2} &= -\frac{\alpha_3^2}{1 - e^2} + 2fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [1 - \varepsilon^2(1 - e^2)] \varepsilon^2 Q \\ &\quad + 2fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [(1 + e^2) + \varepsilon^2(1 - e^2)^2] \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial e^2} Q \\ &\quad + fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [1 + 2\varepsilon^2(1 + e^2) + \varepsilon^4(1 - e^2)^2] \frac{\partial Q}{\partial e^2}, \\ \frac{\partial \alpha_3^2}{\partial \delta^2} &= -\frac{\alpha_3^2}{1 - \delta^2} \\ &\quad + fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [1 + 2\varepsilon^2(1 + e^2) + \varepsilon^4(1 - e^2)^2] \frac{\partial Q}{\partial \delta^2}.\end{aligned}$$

### Полиномы и присоединённые функции Лежандра (к с.79).

Справочный материал этого раздела приложения заимствован из монографии профессора Е.П.Аксёнова [5] и из “Справочника по математике” И.Н.Бронштейна и К.А.Семендяева [30].

Полином Лежандра  $P_n(z)$  порядка  $n$  можно определить формулой

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (z^2 - 1)^n}{dz^n}, \quad (232)$$

носящей название *формулы Родрига*.

Полиномы Лежандра высших порядков могут быть вычислены при помощи рекуррентного соотношения

$$(n + 1)P_{n+1}(z) - (2n + 1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0. \quad (233)$$

Полиномы Лежандра и их первые производные связаны соотношениями

$$\frac{dP_n(z)}{dz} = nP_{n-1}(z) + z \frac{dP_{n-1}(z)}{dz}, \quad (234)$$

$$\frac{dP_n(z)}{dz} = (2n - 1)P_{n-1}(z) + \frac{dP_{n-2}(z)}{dz}. \quad (235)$$

Из формулы (235) следует простая рекуррентная формула для вычисления производных высших порядков:

$$\frac{d^k P_n(z)}{dz^k} = (2n - 1) \frac{d^{k-1} P_{n-1}(z)}{dz^{k-1}} + \frac{d^k P_{n-2}(z)}{dz^k}. \quad (236)$$

Присоединённые функции Лежандра  $P_n^{(k)}(z)$  порядка  $n$  и индекса  $k$  можно определить формулой

$$P_n^{(k)}(z) = (1 - z^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(z)}{dz^k}, \quad (237)$$

где  $P_n(z)$  – полином Лежандра.

Теорема сложения для полиномов Лежандра

$$P_n(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega) = P_n(\cos \theta)P_n(\cos \theta') + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n - k)!}{(n + k)!} P_n^{(k)}(\cos \theta)P_n^{(k)}(\cos \theta') \cos k\omega. \quad (238)$$

Применение двух теорем сложения для тригонометрических функций:

$$\begin{aligned}\cos(k+1)w &= \cos w \cos kw - \sin w \sin kw, \\ \sin(k+1)w &= \sin w \cos kw + \cos w \sin kw.\end{aligned}\tag{239}$$

### Приближённые формулы (к с.83).

Рассмотрим вопрос о представлении функций от координат возмущающего тела (формулы (148) на с.80 и величины  $A_{10}$ ,  $A_{11}$ ,  $B_{11}$  в формуле (153)) в системе истинного экватора в виде тригонометрических рядов.

Классические теории движения Луны и Солнца построены в сферических координатах в системе мгновенной эклиптики и подвижной точки весеннего равноденствия [1].

С точностью до первых степеней малых параметров  $\Delta\psi$  и  $\Delta\varepsilon$  формулы перехода от среднего подвижного экватора к истинному имеют вид:

$$\begin{aligned}x &= \check{x} - \Delta\psi \cos \varepsilon_A \cdot \check{y} - \Delta\psi \sin \varepsilon_A \cdot \check{z}, \\ y &= \check{y} + \Delta\psi \cos \varepsilon_A \cdot \check{x} - \Delta\varepsilon \cdot \check{z}, \\ z &= \check{z} + \Delta\psi \sin \varepsilon_A \cdot \check{x} + \Delta\varepsilon \cdot \check{y}.\end{aligned}\tag{240}$$

Пусть  $r_p$  – расстояние от Земли до возмущающего тела,  $\lambda_p$  и  $\beta_p$  – эклиптическая долгота и эклиптическая широта возмущающего тела,  $\varepsilon_A$  – угол наклона мгновенной эклиптики к подвижному экватору.

Эклиптическая долгота Луны равна сумме средней долготы  $F_M + \Omega_M$  и величины  $\Delta\lambda_M$ , состоящей из суммы тригонометрических слагаемых с малыми амплитудами. Эклиптическая широта Луны  $\beta_M$  и величина  $r_0/r_M$  тоже представляют из себя суммы тригонометрических слагаемых с численными коэффициентами. В случае Солнца достаточно использовать приближённые выражения [102]:

$$\begin{aligned}\lambda_S &= F_M - D + \Omega_M + 6895''3645 \sin l'_S + 72''0393 \sin 2 l'_S + 1''0436 \sin 3 l'_S, \\ \beta &= 0''576 \sin F_M, \\ \frac{a_E}{r_S} &= 1.0 + 0.0167148 \cos l'_S + 0.0002794 \cos 2 l'_S + 0.0000052 \cos 3 l'_S.\end{aligned}$$

Прямоугольные координаты возмущающего тела  $x_p$ ,  $y_p$ ,  $z_p$  в системе подвижного экватора даты определены формулами:

$$\begin{aligned}\frac{x_p}{r_p} &= \cos \lambda_p \cos \beta_p, \\ \frac{y_p}{r_p} &= \sin \lambda_p \cos \beta_p \cos \varepsilon_A - \sin \beta_p \sin \varepsilon_A, \\ \frac{z_p}{r_p} &= \sin \lambda_p \cos \beta_p \sin \varepsilon_A + \sin \beta_p \cos \varepsilon_A.\end{aligned}$$

Воспользуемся малостью поправки к средней долготе и малой величиной эклиптической широты и составим алгоритм преобразования этих соотношений в суммы слагаемых с численными амплитудами и линейными комбинациями угловых переменных (12) в качестве аргументов тригонометрических функций. С помощью разложений для нутации в долготе  $\Delta\psi$ , нутации в наклоне  $\Delta\varepsilon$  и формулы (240) (с.173) переведём полученные ряды в систему истинного экватора.

Далее применим рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра и присоединённых функций Лежандра и представим формулы (148) и величины  $A_{10}$ ,  $A_{11}$ ,  $B_{11}$  в виде тригонометрических рядов, аргументами которых являются линейные комбинации фундаментальных аргументов.

### Переменные Дудсона.

Учёные-геофизики с большим вниманием относятся к составляющим приливного потенциала. Хорошо известны оценки средних значений амплитуд и частот основных приливных волн.

Многие из приливных волн обозначены даже специальными символами. Есть, например, такие обозначения:  $M_0$ ,  $M_f$ ,  $O_1$ ,  $K_1$ ,  $M_2$ ,  $S_2$ .

Вместо фундаментальных аргументов используются специальные переменные Дудсона  $\tau$ ,  $s$ ,  $h$ ,  $p$ ,  $N'$ ,  $p_1$  [198]. Аргументы приливных волн различают с помощью кодовых чисел Дудсона [103].

Обычное явление: исследователи, создающие основы нового раздела науки, создают и новую терминологию. Нам остаётся только уловить смысл их усилий и использовать полученные знания для решения своих задач.

Аргументное число Дудсона **135, 655** соответствует суточной волне, обозначаемой символом  $Q_1$  и имеющей аргумент, равный выражению

$$\mathbf{1} \cdot \tau - \mathbf{2} \cdot s + \mathbf{0} \cdot h + \mathbf{1} \cdot p + \mathbf{0} \cdot N' + \mathbf{0} \cdot p_1 = S_{\oplus} + 180^{\circ} - l_M - 2F_M - 2\Omega_M.$$

Связь фундаментальных аргументов и переменных Дудсона определена следующими формулами:

$$\begin{aligned} \tau &= S_{\oplus} + 180^{\circ} - F_M - \Omega_M && \text{— среднее лунное время,} \\ s &= F_M + \Omega_M && \text{— средняя долгота Луны,} \\ h &= F_M - D + \Omega_M && \text{— средняя долгота Солнца,} \\ p &= -l_M + F_M + \Omega_M && \text{— средняя долгота перигея Луны,} \\ N' &= -\Omega_M, && \text{— отрицательное значение долготы} \\ &&& \text{восходящего узла орбиты Луны,} \\ p_1 &= -l'_S + F_M - D + \Omega_M && \text{— средняя долгота перигелия Солнца.} \end{aligned}$$

### Простые разложения (к с.86).

С точностью до пятого порядка малости можно использовать разложения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \bar{q} \cos \psi} &= 1 + \frac{1}{2} \bar{q}^2 + \frac{3}{8} \bar{q}^4 + \left( \bar{q} + \frac{3}{4} \bar{q}^3 + \frac{5}{8} \bar{q}^5 \right) \cos \psi \\ &+ \left( \frac{1}{2} \bar{q}^2 + \frac{1}{2} \bar{q}^4 \right) \cos 2\psi \\ &+ \left( \frac{1}{4} \bar{q}^3 + \frac{5}{16} \bar{q}^5 \right) \cos 3\psi \\ &+ \frac{1}{8} \bar{q}^4 \cos 4\psi + \frac{1}{16} \bar{q}^5 \cos 5\psi + \dots, \\ \frac{1}{1 - d \cos \tilde{\varphi}} &= 1 + \frac{1}{2} d^2 + \frac{3}{8} d^4 + \left( d + \frac{3}{4} d^3 + \frac{5}{8} d^5 \right) \cos \tilde{\varphi} \\ &+ \left( \frac{1}{2} d^2 + \frac{1}{2} d^4 \right) \cos 2\tilde{\varphi} \\ &+ \left( \frac{1}{4} d^3 + \frac{5}{16} d^5 \right) \cos 3\tilde{\varphi} \\ &+ \frac{1}{8} d^4 \cos 4\tilde{\varphi} + \frac{1}{16} d^5 \cos 5\tilde{\varphi} + \dots \end{aligned}$$

**Две суммы элементарных слагаемых (к с.90).**

Пусть

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left( 1 + \frac{1}{2}d^2 + \frac{3}{8}d^4 \right), & \bar{a}_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left( d + \frac{3}{4}d^3 + \frac{5}{8}d^5 \right), \\ \bar{a}_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left( \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}d^4 \right), & \bar{a}_3 &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left( \frac{1}{4}d^3 + \frac{5}{16}d^5 \right), \\ \bar{a}_4 &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left( \frac{1}{8}d^4 \right), & \bar{a}_5 &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left( \frac{1}{16}d^5 \right). \end{aligned}$$

В табл.26 и табл.27 символами  $\bar{A}_n$  и  $\bar{B}_n$  обозначены одномерные массивы, принадлежащие множеству  $\mathbf{M}$ .

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \bar{a}_1, & \bar{B}_1 &= +\bar{A}_1, \\ \bar{A}_2 &= \bar{a}_0 + \frac{1}{2}\bar{a}_2, & \bar{A}_3 &= +\bar{A}_2, & \bar{B}_2 &= -\bar{A}_2, & \bar{B}_3 &= +\bar{A}_2, \\ \bar{A}_4 &= \frac{1}{2}\bar{a}_1 + \frac{1}{2}\bar{a}_3, & \bar{A}_5 &= +\bar{A}_4, & \bar{B}_4 &= -\bar{A}_4, & \bar{B}_5 &= +\bar{A}_4, \\ \bar{A}_6 &= \frac{1}{2}\bar{a}_2 + \frac{1}{2}\bar{a}_4, & \bar{A}_7 &= +\bar{A}_6, & \bar{B}_6 &= -\bar{A}_6, & \bar{B}_7 &= +\bar{A}_6, \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} \bar{A}_{14} &= -2\beta\bar{a}_0, & \bar{B}_{14} &= -\bar{A}_{14}, \\ \bar{A}_{15} &= -\bar{a}_0 + \frac{1}{2}\bar{a}_2 - \beta\bar{a}_1, & \bar{B}_{16} &= -\bar{A}_{15}, \\ \bar{A}_{16} &= +\bar{a}_0 - \frac{1}{2}\bar{a}_2 - \beta\bar{a}_1, & \bar{B}_{15} &= +\bar{A}_{16}, \\ \bar{A}_{17} &= -\frac{1}{2}\bar{a}_1 + \frac{1}{2}\bar{a}_3 - \beta\bar{a}_2, & \bar{B}_{18} &= -\bar{A}_{17}, \\ \bar{A}_{18} &= +\frac{1}{2}\bar{a}_1 - \frac{1}{2}\bar{a}_3 - \beta\bar{a}_2, & \bar{B}_{17} &= +\bar{A}_{18}, \\ \bar{A}_{19} &= -\frac{1}{2}\bar{a}_2 + \frac{1}{2}\bar{a}_4 - \beta\bar{a}_3, & \bar{B}_{20} &= -\bar{A}_{19}, \\ \bar{A}_{20} &= +\frac{1}{2}\bar{a}_2 - \frac{1}{2}\bar{a}_4 - \beta\bar{a}_3, & \bar{B}_{19} &= +\bar{A}_{20}, \\ \bar{A}_{21} &= -\frac{1}{2}\bar{a}_3 + \frac{1}{2}\bar{a}_5 - \beta\bar{a}_4, & \bar{B}_{22} &= -\bar{A}_{21}, \\ \bar{A}_{22} &= +\frac{1}{2}\bar{a}_3 - \frac{1}{2}\bar{a}_5 - \beta\bar{a}_4, & \bar{B}_{21} &= +\bar{A}_{22}, \end{aligned}$$

...

Элементарное слагаемое (с.87) имеет следующий вид

$$A(a_0, e_0, \delta_0) \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \bar{e}^{j_3} \left(\frac{1}{1-e\bar{e}}\right)^{j_4} s^{j_5} \alpha^{j_6} \cdot \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \vartheta,$$

$$\vartheta = k_1\tilde{\varphi} + k_2\psi + k_3E + k_4\tilde{\Omega} + k_5S_{\oplus} + k_6l_M + k_7l'_S + k_8F_M + k_9D + k_{10}\Omega_M.$$

Таблица 26: Функция  $\sqrt{1-\eta^2} \cos w$  как сумма элементарных слагаемых

A	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$j_4$	$j_5$	$j_6$		$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$k_9$	$k_{10}$
$\bar{A}_1$	0	0	0	0	0	+1	cos	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_2$	0	0	0	0	0	+1	cos	+1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_3$	0	0	0	0	0	+1	cos	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_4$	0	0	0	0	0	+1	cos	+2	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_5$	0	0	0	0	0	+1	cos	+2	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_6$	0	0	0	0	0	+1	cos	+3	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_7$	0	0	0	0	0	+1	cos	+3	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_8$	0	0	0	0	0	+1	cos	+4	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_9$	0	0	0	0	0	+1	cos	+4	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{10}$	0	0	0	0	0	+1	cos	+5	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{11}$	0	0	0	0	0	+1	cos	+5	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{12}$	0	0	0	0	0	+1	cos	+6	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{13}$	0	0	0	0	0	+1	cos	+6	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{14}$	0	0	0	0	0	0	cos	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{15}$	0	0	0	0	0	0	cos	+1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{16}$	0	0	0	0	0	0	cos	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{17}$	0	0	0	0	0	0	cos	+2	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{18}$	0	0	0	0	0	0	cos	+2	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{19}$	0	0	0	0	0	0	cos	+3	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{20}$	0	0	0	0	0	0	cos	+3	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{21}$	0	0	0	0	0	0	cos	+4	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{22}$	0	0	0	0	0	0	cos	+4	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{23}$	0	0	0	0	0	0	cos	+5	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{24}$	0	0	0	0	0	0	cos	+5	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{25}$	0	0	0	0	0	0	cos	+6	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{A}_{26}$	0	0	0	0	0	0	cos	+6	0	0	+1	0	0	0	0	0	0

Элементарное слагаемое (с.87) имеет следующий вид

$$A(a_0, e_0, \delta_0) \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^{j_1} e^{j_2} \bar{e}^{j_3} \left(\frac{1}{1 - e\bar{e}}\right)^{j_4} s^{j_5} \alpha^{j_6} \cdot \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \vartheta,$$

$$\vartheta = k_1\tilde{\varphi} + k_2\psi + k_3E + k_4\tilde{\Omega} + k_5S_{\oplus} + k_6l_M + k_7l'_S + k_8F_M + k_9D + k_{10}\Omega_M.$$

Таблица 27: Функция  $\sqrt{1 - \eta^2} \sin w$  как сумма элементарных слагаемых

A	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$j_4$	$j_5$	$j_6$		$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$k_9$	$k_{10}$
$\bar{B}_1$	0	0	0	0	0	+1	sin	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_2$	0	0	0	0	0	+1	sin	+1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_3$	0	0	0	0	0	+1	sin	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_4$	0	0	0	0	0	+1	sin	+2	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_5$	0	0	0	0	0	+1	sin	+2	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_6$	0	0	0	0	0	+1	sin	+3	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_7$	0	0	0	0	0	+1	sin	+3	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_8$	0	0	0	0	0	+1	sin	+4	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_9$	0	0	0	0	0	+1	sin	+4	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{10}$	0	0	0	0	0	+1	sin	+5	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{11}$	0	0	0	0	0	+1	sin	+5	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{12}$	0	0	0	0	0	+1	sin	+6	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{13}$	0	0	0	0	0	+1	sin	+6	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{14}$	0	0	0	0	0	0	sin	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{15}$	0	0	0	0	0	0	sin	+1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{16}$	0	0	0	0	0	0	sin	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{17}$	0	0	0	0	0	0	sin	+2	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{18}$	0	0	0	0	0	0	sin	+2	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{19}$	0	0	0	0	0	0	sin	+3	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{20}$	0	0	0	0	0	0	sin	+3	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{21}$	0	0	0	0	0	0	sin	+4	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{22}$	0	0	0	0	0	0	sin	+4	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{23}$	0	0	0	0	0	0	sin	+5	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{24}$	0	0	0	0	0	0	sin	+5	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{25}$	0	0	0	0	0	0	sin	+6	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$\bar{B}_{26}$	0	0	0	0	0	0	sin	+6	0	0	+1	0	0	0	0	0	0

**Функции координат (к с.107).**

Модуль амплитуды слагаемых определялся после деления функций  $A_{nk}^{(M)}$ ,  $B_{nk}^{(M)}$  и  $A_{nk}^{(S)}$ ,  $B_{nk}^{(S)}$  соответственно на численные коэффициенты

$$\left(\frac{fm_M}{fm}\right)\left(\frac{r_0}{a_M}\right)^{n+1} \text{ и } \left(\frac{fm_S}{fm}\right)\left(\frac{r_0}{a_S}\right)^{n+1},$$

где  $a_M$  – большая полуось геоцентрической орбиты Луны,

$a_S$  – большая полуось гелиоцентрической орбиты Земли.

Функции координат Луны и Солнца, образованные таким способом, обозначим  $\hat{A}_{nk}^{(M)}$ ,  $\hat{B}_{nk}^{(M)}$  и  $\hat{A}_{nk}^{(S)}$ ,  $\hat{B}_{nk}^{(S)}$ .

Таблица 28: Функции координат: несколько слагаемых

$\hat{A}_{20}^{(M)}$	=	-0.378509		$\hat{A}_{20}^{(S)}$	=	-0.381489
		-0.11724 cos (2F <sub>M</sub> + 2Ω <sub>M</sub> )				-0.11858 cos (2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> )
		-0.06192 cos l <sub>M</sub>				-0.01912 cos l' <sub>S</sub>
		+0.04913 cos Ω <sub>M</sub>				-0.00693 cos (l' <sub>S</sub> + 2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> )
		-0.04860 cos (2F <sub>M</sub> + Ω <sub>M</sub> ),				+0.00099 cos (-l' <sub>S</sub> + 2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> ),
$\hat{A}_{21}^{(M)}$	=			$\hat{A}_{21}^{(S)}$	=	
		+0.19650 sin (2F <sub>M</sub> + 2Ω <sub>M</sub> )				+0.19874 sin (2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> )
		-0.04117 sin Ω <sub>M</sub>				+0.01162 sin (l' <sub>S</sub> + 2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> )
		+0.04072 sin (2F <sub>M</sub> + Ω <sub>M</sub> ),				-0.00166 sin (-l' <sub>S</sub> + 2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> ),
$\hat{B}_{21}^{(M)}$	=	+0.181126		$\hat{B}_{21}^{(S)}$	=	+0.182553
		-0.18028 cos (2F <sub>M</sub> + 2Ω <sub>M</sub> )				-0.18234 cos (2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> )
		-0.03451 cos (2F <sub>M</sub> + 2Ω <sub>M</sub> )				-0.01066 cos (l' <sub>S</sub> + 2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> )
		+0.03067 cos Ω <sub>M</sub> ,				+0.00915 cos l' <sub>S</sub> ,
$\hat{A}_{22}^{(M)}$	=	+0.019631		$\hat{A}_{22}^{(S)}$	=	+0.019786
		+0.22746 cos (2F <sub>M</sub> + 2Ω <sub>M</sub> )				+0.23006 cos (2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> )
		+0.04355 cos (l <sub>M</sub> + 2F <sub>M</sub> + 2Ω <sub>M</sub> )				+0.01346 cos (l' <sub>S</sub> + 2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> )
		+0.00819 cos Ω <sub>M</sub> ,				-0.00192 cos (-l' <sub>S</sub> + 2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> ),
$\hat{B}_{22}^{(M)}$	=			$\hat{B}_{22}^{(S)}$	=	
		+0.22662 sin (2F <sub>M</sub> + 2Ω <sub>M</sub> )				+0.22921 sin (2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> )
		+0.04339 sin (l <sub>M</sub> + 2F <sub>M</sub> + 2Ω <sub>M</sub> )				+0.01341 sin (l' <sub>S</sub> + 2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> )
		+0.00892 sin Ω <sub>M</sub> .				-0.00191 sin (-l' <sub>S</sub> + 2F <sub>M</sub> - 2D + 2Ω <sub>M</sub> ).

### Фильтрация наблюдений (к с.119).

Теоретический материал этого раздела приложения соответствует конспекту лекций профессора Нестерова В.В. [110].

Применительно к лазерной дальнометрии имеем формулу для топоцентрической дальности

$$\rho_c(t) = \sqrt{(x(t) - X(t))^2 + (y(t) - Y(t))^2 + (z(t) - Z(t))^2},$$

где  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  и  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$  – вычисленные на основе принятой модели положения спутника и обсерватории в системе истинного экватора. Для измеренного значения топоцентрической дальности в момент  $t$  будем использовать обозначение  $\rho_o(t)$ . Невязки

$$\Delta\rho(t) = \rho_o(t) - \rho_c(t)$$

обусловлены как случайными ошибками наблюдений, так и погрешностями модели. Второй случай очень важен, поскольку предоставляет возможность уточнить начальные значения параметров. Эта процедура хорошо известна под названием дифференциальное улучшение орбит по методу наименьших квадратов (МНК) [49, 59].

Основные уравнения фильтрации выводятся следующим образом.

Невязки  $\Delta\rho$  обусловлены ошибками величин  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ . Предполагая их малыми, ограничимся первым членом разложения разности в ряд Тейлора

$$\Delta\rho(t) = \frac{\partial\rho_c}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial\rho_c}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial\rho_c}{\partial z} \cdot \Delta z + \frac{\partial\rho_c}{\partial X} \cdot \Delta X + \frac{\partial\rho_c}{\partial Y} \cdot \Delta Y + \frac{\partial\rho_c}{\partial Z} \cdot \Delta Z,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho_c}{\partial x} &= +\frac{x - X}{\rho_c}, & \frac{\partial\rho_c}{\partial y} &= +\frac{y - Y}{\rho_c}, & \frac{\partial\rho_c}{\partial z} &= +\frac{z - Z}{\rho_c}, \\ \frac{\partial\rho_c}{\partial X} &= -\frac{x - X}{\rho_c}, & \frac{\partial\rho_c}{\partial Y} &= -\frac{y - Y}{\rho_c}, & \frac{\partial\rho_c}{\partial Z} &= -\frac{z - Z}{\rho_c}. \end{aligned}$$

Такой переход называется линеаризацией, сложная зависимость исходной невязки от координат станции и спутника заменяется пусть приближённым, но зато линейным соотношением.

В свою очередь, координаты спутника  $x, y, z$  являются сложными функциями шести начальных параметров орбиты, эмпирических коэффициентов  $C_t, C_r$  и ряда других величин, составляющих модель движения, приливного коэффициента Лява  $k_2$ , например, а координаты обсерватории  $X, Y, Z$  геометрически зависят от параметров вращения Земли

$$x_p(t) = x_p(t_0) + \dot{x}_p \cdot (t - t_0), \quad y_p(t) = y_p(t_0) + \dot{y}_p \cdot (t - t_0),$$

и  $LOD$  или  $\Delta\dot{S}_\oplus$  (с. 24). Для положений полюса внутри короткого, от одних суток до семи дней, интервала времени  $(t_1, t_2)$  выбрана дата  $t_0$  и использована линейная аппроксимация. На этом же интервале поправка скорости вращения Земли  $\Delta\dot{S}_\oplus$  входит в формулу коррекции звёздного времени:

$$S_\oplus(t) = S_\oplus(t_0) + \Delta\dot{S}_\oplus \cdot (t - t_0).$$

Вариация продолжительности суток  $LOD$  измеряется в секундах времени за звёздные сутки. Поправка скорости вращения Земли  $\Delta\dot{S}_\oplus$ , измеряемая в радианах в секунду, и вариация продолжительности суток связаны выражением

$$LOD = -\frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{\Delta\dot{S}_\oplus}{\omega},$$

где  $\omega = 0.7292115 \cdot 10^{-4}$  – скорость вращения Земли в радианах в секунду.

Дифференциальные соотношения для зависимостей геометрического типа запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x_p} &= -\bar{Z} \cdot \cos S_\oplus, & \frac{\partial X}{\partial y_p} &= -\bar{Z} \cdot \sin S_\oplus, \\ \frac{\partial Y}{\partial x_p} &= -\bar{Z} \cdot \sin S_\oplus, & \frac{\partial Y}{\partial y_p} &= +\bar{Z} \cdot \cos S_\oplus, \\ & \frac{\partial Z}{\partial x_p} = +\bar{X}, & \frac{\partial Z}{\partial y_p} &= -\bar{Y}, \\ \frac{\partial X}{\partial \Delta\dot{S}_\oplus} &= -Y \cdot (t - t_0), & \frac{\partial X}{\partial \Delta\dot{S}_\oplus} &= +X \cdot (t - t_0), \end{aligned}$$

где  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  – координаты станции наблюдений в земной системе координат на момент  $t$ .

Частные производные от измеряемого параметра  $\rho_c(t)$  по одному из определяемых параметров  $p$ , входящему в уравнение невязок посредством величин

$$X(t), Y(t), Z(t),$$

определяются по общим правилам

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial p} = \frac{\partial \rho_c}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial p} + \frac{\partial \rho_c}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p} + \frac{\partial \rho_c}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial p}.$$

Производные от дальности  $\rho_c$  по величинам  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  необходимы, когда по известной орбите требуется определить координаты обсерватории, впервые принявшей участие в общей программе наблюдений спутника. В силу линейности соотношений приближения сходятся очень быстро.

Частные производные по параметрам первого типа, влияющим на измеряемую величину посредством уравнений движения, нельзя записать в конечном виде. В самых первых по времени статьях можно найти такие формулы, но вычисления по ним не дают действительных значений, итерационный процесс если и сходится, то чрезвычайно медленно.

Во всех современных программах используют метод вариации улучшаемых параметров. Замечательно, что алгоритм метода достаточно прост и основан на уже готовой процедуре расчёта значения измеряемого параметра, только повторённой необходимое число раз.

В число  $m$  улучшаемых величин обязательно входят шесть начальных параметров движения, к ним присоединяют два эмпирических коэффициента, рекомендованных стандартом, и, если позволяет качество и количество наблюдательного материала, дополнительные параметры модели. При обработке наблюдений спутников Лагос и Лагос-2, например, были получены ряды параметров вращения Земли, координаты измерительных пунктов и оценки скоростей изменения координат.

В алгоритмах численного интегрирования начальные параметры движения – это, чаще всего, мгновенные вектор положения и вектор скорости объекта на заданную дату. Основа построения аналитических теорий – какой-либо набор средних элементов орбиты или их комбинация. Дальнейший ход

вычислений почти совпадает: идёт процесс численного интегрирования полных уравнений движения в первом случае и осреднённых – во втором. Для основного решения на среднюю орбиту накладываются короткопериодические возмущения, при расчёте изохронных производных этими поправками пренебрегают.

В методе вариаций, независимо от основного решения, выполняется численное интегрирование  $m + 1$  систем дифференциальных уравнений и определение на все моменты наблюдений  $m + 1$  значений величины

$$\rho_{ci}(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m + 1.$$

Параметры первой системы уравнений равны их начальным значениям в основном решении, в каждой из последующих систем от начального значения на небольшую поправку отличается, по очереди, только один улучшаемый параметр. Далее, опять же для всех наблюдений, составляется  $m$  разностей

$$\rho_{ci}(t) - \rho_{c1}(t), \quad i = 2, 3, \dots, m + 1.$$

Значения, достаточно близкие к искомым значениям частных производных, получаются после деления  $m$  найденных разностей на  $m$  поправок к соответствующим начальным параметрам модели.

В процессе расчётов, точка за точкой, составляется система условных уравнений метода наименьших квадратов. В левой части – разность наблюдённого и вычисленного значений топоцентрической дальности, в правой части – сумма  $m$  произведений уже найденных частных производных от измеряемой величины по очередному улучшаемому параметру на неизвестную вариацию этого параметра.

В методе наименьших квадратов по совокупности условных уравнений строят систему  $m$  нормальных уравнений. Решением системы являются вариации или, что то же, поправки к начальным значениям улучшаемых параметров. Учитывают поправки и, если это необходимо, повторяют процесс улучшения параметров модели.

Необходимость нескольких итераций обусловлена тем, что линеаризованные уравнения не отражают всей сложности изучаемых явлений.

**Лагеос и Лагеос-2. Состав наблюдений (к с.134).**

N – номер измерительного пункта.

Y – интервал наблюдений в годах.

M – число тридцатисуточных интервалов с наблюдениями.

P – количество прохождений.

NP – число “нормальных” точек.

Таблица 29: Состав наблюдений

N		Лагеос				Лагеос-2			
		Y	M	P	NP	Y	M	P	NP
1824	Киев	8.79	8	105	613	0.16	2	23	119
1831	Львов	1.15	3	16	110	5.09	7	48	402
1863	Майданак	2.30	9	99	913	0.98	6	64	711
1864	Майданак	14.06	89	1152	8435	13.09	76	903	7346
1868	Комсомольск	13.69	16	169	928	14.24	10	121	640
1873	Симеиз	13.80	15	138	744	10.46	21	176	1216
1879	Алтай	0.82	5	38	236	0.33	4	32	191
1884	Рига	15.85	119	1224	16111	16.13	95	800	10796
1893	Кацивели	15.00	51	619	5098	14.89	54	565	4727
1953	Куба	0.90	7	68	736	0.99	6	49	525
7080	Мак Дональд	16.41	194	3567	30328	16.37	182	3634	36299
7090	Яррагади	16.41	194	11638	132644	16.37	182	9837	138130
7105	Гринбелт	16.41	188	5126	52593	16.37	173	4195	49125
7109	Квинси	3.43	38	837	9752	3.37	26	550	7130
7110	Монумент Пик	16.41	192	7208	73971	16.29	177	6052	73144
7119	Халеакала	2.68	33	513	5518	3.45	39	696	8416
7124	Папеете	12.29	68	658	6508	12.10	59	596	6464
7210	Мауи	10.44	106	2176	23077	10.46	95	2256	27239
7236	Вухан	4.60	9	71	693	2.14	11	79	846
7237	Чангчун	15.74	144	3841	33819	14.24	135	2937	28668
7249	Бейджинг	12.65	92	1248	10771	15.22	82	1080	10437
7308	Коганей	14.37	48	622	5908	14.40	46	546	6113
7328	Коганей	1.64	12	186	1822	1.67	14	201	2163
7335	Кашима	1.72	14	189	1842	1.83	14	182	1717
7337	Миура	1.40	7	113	941	1.01	7	115	1242
7339	Татейяма	2.79	18	267	2561	2.90	19	264	3052

N		Лагеос				Лагеос-2			
		Y	M	P	NP	Y	M	P	NP
7403	Арекира	16.07	95	1509	14879	3.78	14	110	1047
7405	Концепсьон	7.80	73	2534	29998	15.39	90	1449	15444
7406	Сан Хуан	3.92	49	2239	24236	1.07	6	34	533
7411	Ля Грандэ	0.16	2	25	338	7.80	69	2016	26598
7501	Хартебестёк	9.36	97	2342	23975	4.27	51	1875	22985
7525	Хрисокалария	0.25	3	38	376	9.53	98	2310	26160
7548	Кальяри	4.43	8	64	455	7.75	23	175	2304
7597	Ветцель	1.48	5	22	248	1.07	3	17	219
7805	Метсашови	1.23	6	34	389	0.74	3	11	142
7806	Метсашови	5.26	26	208	2601	5.69	16	96	1132
7810	Циммервальд	16.41	154	6024	114208	16.21	142	4342	84794
7811	Боровец	15.45	120	1273	14663	15.63	84	732	8616
7820	Кунминг	9.86	27	347	3165	9.88	25	421	4149
7821	Щанхай	1.72	9	115	878	4.35	18	186	1785
7824	Сан Фернандо	12.73	115	2106	14807	13.00	101	1778	13524
7825	Маунт Стромло	5.07	63	3406	34276	5.75	68	3250	40230
7831	Хелуан	4.85	4	35	265	0.33	2	12	82
7832	Эль Рийяд	14.27	125	3838	35289	4.11	8	79	1697
7835	Грассе	11.59	121	2164	24490	14.24	116	4016	40467
7836	Потсдам	10.53	110	1555	16015	11.44	101	1564	20296
7837	Шанхай	11.43	92	861	8209	10.13	88	1029	10594
7838	Симосато	15.69	121	1862	27176	11.03	85	917	9895
7839	Грац	16.41	194	6089	78117	15.55	123	1869	32045
7840	Хертмонсо	16.41	197	8147	95427	16.37	184	4310	60982
7841	Потсдам	6.46	77	1290	14786	16.37	184	5684	73263
7843	Канберра	4.94	54	1618	13339	7.06	70	796	9935
7845	Грассе	12.38	87	1186	17545	4.93	46	1211	11413
7847	Яррагади	0.16	2	19	115	12.35	81	992	16586
7848	Аджаскиа	3.45	6	66	370	3.20	4	41	345
7849	Маунт Стромло	4.60	54	2392	21101	4.54	54	2144	21115
7918	Вашингтон	1.64	13	170	1667	1.40	10	149	1759
7939	Матера	6.99	65	1103	13025	6.52	58	817	10949
7941	Матера	8.76	89	2706	28173	8.79	81	2179	25279
8834	Ветцель	16.03	187	6547	57208	15.96	170	4792	44131

### Лагеос и Лагеос-2. Поле скоростей (к с.138).

В таблице представлены оценки скоростей изменения прямоугольных координат обсерваторий в метрах за год в земной системе отсчёта. Оценки получены на основе массива наблюдений (табл.29).

пункт – номер измерительного пункта.

$\dot{X}$  – оценка скорости изменения по оси  $X$ .

$\dot{Y}$  – оценка скорости изменения по оси  $Y$ .

$\dot{Z}$  – оценка скорости изменения по оси  $Z$ .

$\sigma_{\dot{X}}$ ,  $\sigma_{\dot{Y}}$ ,  $\sigma_{\dot{Z}}$  – оценки погрешностей соответствующих значений.

Таблица 30: Поле скоростей

пункт	$\dot{X}$ (м/год)	$\dot{Y}$ (м/год)	$\dot{Z}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{X}}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{Y}}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{Z}}$ (м/год)	
1864	-0.0257	0.0215	0.0169	0.0023	0.0017	0.0021	Лагеос
1864	-0.0497	0.0359	0.0193	0.0039	0.0026	0.0019	Лаг.-2
1864	-0.0294	0.0073	0.0020	0.0032	0.0055	0.0051	ITRF
1873	-0.0336	0.0285	-0.0139	0.0040	0.0025	0.0048	Лагеос
1873	-0.0590	0.0330	-0.0108	0.0081	0.0113	0.0069	Лаг.-2
1873	-0.0189	0.0163	0.0062	0.0067	0.0051	0.0076	ITRF
1893	-0.0338	0.0256	-0.0027	0.0019	0.0017	0.0020	Лагеос
1893	-0.0421	0.0381	-0.0006	0.0021	0.0030	0.0022	Лаг.-2
1893	-0.0198	0.0164	0.0084	0.0010	0.0007	0.0012	ITRF
7080	-0.0086	-0.0013	-0.0093	0.0016	0.0006	0.0008	Лагеос
7080	-0.0126	-0.0009	-0.0053	0.0003	0.0004	0.0004	ITRF
7090	-0.0505	0.0087	0.0530	0.0014	0.0007	0.0007	Лагеос
7090	-0.0819	-0.0071	0.0544	0.0015	0.0010	0.0008	Лаг.-2
7090	-0.0498	0.0110	0.0466	0.0009	0.0013	0.0010	ITRF
7105	-0.0126	-0.0022	-0.0013	0.0015	0.0005	0.0008	Лагеос
7105	-0.0140	-0.0010	0.0034	0.0006	0.0005	0.0005	ITRF
7110	-0.0277	0.0222	0.0114	0.0014	0.0009	0.0007	Лагеос
7110	-0.0335	0.0247	0.0141	0.0005	0.0005	0.0005	ITRF
7119	-0.0149	0.0734	0.0416	0.0060	0.0073	0.0052	Лагеос
7119	-0.0256	0.0771	0.0175	0.0066	0.0074	0.0096	Лаг.-2
7119	-0.0159	0.0602	0.0326	0.0012	0.0015	0.0010	ITRF

Продолжение таблицы 30

пункт	$\dot{X}$ (м/год)	$\dot{Y}$ (м/год)	$\dot{Z}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{X}}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{Y}}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{Z}}$ (м/год)	
7124	-0.0319	0.0374	0.0305	0.0016	0.0020	0.0015	Лагeoc
7124	-0.0166	0.0076	0.0358	0.0025	0.0043	0.0020	Лаг.-2
7124	-0.0425	0.0468	0.0291	0.0007	0.0008	0.0007	ITRF
7237	-0.0335	-0.0202	-0.0074	0.0012	0.0011	0.0010	Лагeoc
7237	-0.0509	-0.0304	-0.0080	0.0022	0.0014	0.0015	Лаг.-2
7237	-0.0223	-0.0041	-0.0101	0.0053	0.0068	0.0077	ITRF
7308	-0.0134	-0.0044	-0.0022	0.0018	0.0018	0.0016	Лагeoc
7308	-0.0196	-0.0185	0.0028	0.0025	0.0022	0.0019	Лаг.-2
7308	-0.0128	-0.0003	-0.0133	0.0010	0.0008	0.0007	ITRF
7405	0.0428	0.0005	0.0264	0.0019	0.0016	0.0016	Лагeoc
7405	0.0731	0.0040	0.0309	0.0049	0.0032	0.0029	Лаг.-2
7405	0.0128	0.0043	0.0134	0.0012	0.0015	0.0010	ITRF
7548	-0.0303	0.0119	-0.0006	0.0109	0.0156	0.0216	Лагeoc
7548	-0.0113	0.0357	0.0093	0.0087	0.0090	0.0084	Лаг.-2
7548	-0.0122	0.0195	0.0116	0.0049	0.0032	0.0029	ITRF
7806	-0.0129	0.0511	0.0199	0.0116	0.0122	0.0102	Лагeoc
7806	-0.0275	0.0458	0.0134	0.0157	0.0128	0.0126	Лаг.-2
7806	-0.0174	0.0145	0.0055	0.0055	0.0038	0.0091	ITRF
7810	-0.0078	0.0167	0.0164	0.0012	0.0013	0.0008	Лагeoc
7810	-0.0140	0.0531	0.0141	0.0015	0.0019	0.0013	Лаг.-2
7810	-0.0145	0.0202	0.0119	0.0019	0.0014	0.0018	ITRF
7811	-0.0175	0.0138	0.0033	0.0011	0.0023	0.0015	Лагeoc
7811	-0.0266	0.0370	0.0070	0.0019	0.0027	0.0023	Лаг.-2
7811	-0.0156	0.0167	0.0078	0.0068	0.0037	0.0086	ITRF
7820	-0.0629	0.0178	0.0197	0.0052	0.0073	0.0070	Лагeoc
7820	-0.0626	0.0162	-0.0117	0.0087	0.0075	0.0082	Лаг.-2
7820	-0.0318	-0.0024	-0.0203	0.0037	0.0083	0.0043	ITRF
7821	-0.0341	-0.0167	-0.0236	0.0086	0.0096	0.0098	Лагeoc
7821	-0.0057	-0.0207	-0.0228	0.0198	0.0139	0.0095	Лаг.-2
7821	0.0003	-0.0488	-0.0521	0.0012	0.0015	0.0010	ITRF
7831	0.0171	-0.0263	-0.0004	0.0270	0.0488	0.0156	Лагeoc
7831	-0.0250	0.0472	0.0298	0.0359	0.0116	0.0265	Лаг.-2
7831	-0.0179	0.0172	0.0231	0.0045	0.0032	0.0032	ITRF

Продолжение таблицы 30

пункт	$\dot{X}$ (м/год)	$\dot{Y}$ (м/год)	$\dot{Z}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{X}}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{Y}}$ (м/год)	$\sigma_{\dot{Z}}$ (м/год)	
7835	-0.0107	0.0084	0.0067	0.0011	0.0028	0.0014	Лагос
7835	-0.0077	0.0285	0.0094	0.0017	0.0034	0.0018	Лаг.-2
7835	-0.0116	0.0208	0.0074	0.0072	0.0014	0.0069	ITRF
7837	-0.0333	-0.0209	-0.0143	0.0034	0.0024	0.0022	Лагос
7837	-0.0456	-0.0252	0.0000	0.0044	0.0032	0.0024	Лаг.-2
7837	-0.0306	-0.0131	-0.0094	0.0010	0.0012	0.0010	ITRF
7838	-0.0037	-0.0007	-0.0038	0.0013	0.0012	0.0012	Лагос
7838	-0.0220	-0.0185	-0.0020	0.0019	0.0020	0.0015	Лаг.-2
7838	-0.0005	0.0058	-0.0020	0.0015	0.0015	0.0014	ITRF
7839	-0.0188	0.0184	0.0089	0.0005	0.0011	0.0008	Лагос
7839	-0.0238	0.0449	0.0109	0.0008	0.0016	0.0009	Лаг.-2
7839	-0.0177	0.0200	0.0097	0.0011	0.0009	0.0011	ITRF
7840	-0.0132	0.0161	0.0080	0.0004	0.0011	0.0007	Лагос
7840	-0.0120	0.0425	0.0106	0.0007	0.0015	0.0009	Лаг.-2
7840	-0.0137	0.0187	0.0112	0.0012	0.0009	0.0014	ITRF
7841	-0.0179	0.0186	0.0188	0.0016	0.0014	0.0017	Лагос
7841	-0.0238	0.0322	0.0164	0.0028	0.0031	0.0035	Лаг.-2
7841	-0.0153	0.0155	0.0099	0.0012	0.0015	0.0010	ITRF
7845	-0.0156	0.0278	0.0145	0.0009	0.0016	0.0012	Лагос
7845	-0.0204	0.0562	0.0161	0.0017	0.0026	0.0016	Лаг.-2
7845	-0.0131	0.0189	0.0101	0.0003	0.0001	0.0004	ITRF
7849	-0.0555	-0.0109	0.0565	0.0044	0.0053	0.0042	Лагос
7849	-0.0310	0.0164	0.0453	0.0033	0.0042	0.0041	Лаг.-2
7849	-0.0351	-0.0013	0.0461	0.0007	0.0007	0.0008	ITRF
7939	-0.0015	0.0196	0.0082	0.0031	0.0070	0.0040	Лагос
7939	-0.0117	0.0210	0.0022	0.0034	0.0057	0.0056	Лаг.-2
7939	-0.0226	0.0186	0.0116	0.0007	0.0004	0.0007	ITRF
7941	-0.0241	0.0250	0.0229	0.0013	0.0013	0.0015	Лагос
7941	-0.0361	0.0603	0.0187	0.0020	0.0038	0.0024	Лаг.-2
7941	-0.0184	0.0191	0.0137	0.0002	0.0002	0.0002	ITRF
8834	-0.0143	0.0163	0.0121	0.0007	0.0012	0.0007	Лагос
8834	-0.0191	0.0447	0.0131	0.0010	0.0016	0.0009	Лаг.-2
8834	-0.0184	0.0159	0.0071	0.0004	0.0003	0.0004	ITRF

## Список литературы

- [1] Абалакин В.К. Основы эфемеридной астрономии. М., Наука, 1979.
- [2] Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н.Дубошина. М., Наука, 1976.
- [3] Авдюшев В.А. Новая промежуточная орбита в задаче о движении близкого спутника сжатой планеты. //Исследования по баллистике и смежным вопросам механики. Томск: Изд-во ТГУ, 1999. вып.3. с.126-127.
- [4] Аксёнов Е.П. Асимметричные промежуточные орбиты искусственных спутников Земли. //Сообщения Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга, 1968, т.155, с.3.
- [5] Аксёнов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М., Наука, 1977.
- [6] Аксёнов Е.П. Специальные функции в небесной механике. М., Наука, 1986.
- [7] Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г. Обобщённая задача двух неподвижных центров и её применение в теории движения искусственных спутников Земли. //Астрономический журнал, 1963, т.40, вып.2, с.363-372.
- [8] Аксёнов Е.П., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Определение элементов орбит ИСЗ по фотографическим и лазерным наблюдениям. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1980, т.49, с.90-115.
- [9] Аксёнов Е.П., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Построение условных уравнений при улучшении промежуточной орбиты ИСЗ. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1980, т.49, с.116-121.

- 
- [10] Аксёнов Е.П., Доможилова Л.М. Вычисление симметричной промежуточной орбиты ИСЗ. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1972, т.38, номер 2, с.52-66.
- [11] Аксёнов Е.П., Доможилова Л.М. Вычисление асимметричной промежуточной орбиты ИСЗ. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1972, т.38, номер 2, с.67-81.
- [12] Аксёнов Е.П., Емельянов Н.В., Тамаров В.А. Практическое применение промежуточной орбиты спутника. Формулы. Программы. Тесты. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1988, т.59, с.3-40.
- [13] Аксёнов Е.П., Носков Б.Н. Одна форма дифференциальных уравнений возмущённого движения спутника. //Астрономический журнал, 1972, т.49, номер 6, с.1292-1299.
- [14] Аксёнов Е.П., Носков Б.Н. О вековых возмущениях в движении искусственных спутников, вызываемых сопротивлением атмосферы. //Астрономический журнал, 1973, т.50, номер 3, с.590-600.
- [15] Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание (перевод с английского под ред. Я.З.Цыпкина). М., Наука, 1977.
- [16] Алексеев В.М. Обобщённая пространственная задача двух неподвижных центров. Классификация движений. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1965, т.10, номер 4, с.241-271.
- [17] Атмосфера Земли верхняя. *Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли. Национальный стандарт Российской Федерации* ГОСТ Р 25645.166-2004.
- [18] Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М., Наука, 1970.

- [19] Бахтигараев Н.С., Лёвкина П.А., Сергеев А.В., Чазов В.В. Наблюдения неизвестного фрагмента космического мусора в Терскольской обсерватории. //Вестник СибГАУ. 2011. Выпуск 6(39). С.186-189.
- [20] Бахтигараев Н.С., Чазов В.В. Компьютерное моделирование условий наблюдений небесных тел. //Кинематика и физика небесных тел. Приложение. 2003, номер 4, с.105-107.
- [21] Бахтигараев Н.С., Чазов В.В. Информационное обеспечение космических экспериментов на основе численно-аналитической теории движения искусственных спутников Земли. //Космические исследования, 2005, т.43, номер 5, с.386-389.
- [22] Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М., Наука, 1972.
- [23] Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М., Наука, 1984.
- [24] Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения ИСЗ.  
<http://www.astro.tsu.ru/ISZ/ISZ.pdf>
- [25] Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Бороненко Т.С., Тамаров В.А., Шарковский Н.А., Шмидт Ю.Б. Численные и численно-аналитические алгоритмы прогнозирования движения ИСЗ. //Томск: Изд-во ТГУ, 1991, 156с.
- [26] Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Кардаш А.В. Федяев Ю.А., Шарковский Н.А. Эффективные алгоритмы численного моделирования движения ИСЗ. //Известия вузов. Физика, Томск: Изд-во ТГУ, 1992, т.35, с.62-70.
- [27] Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Авдюшев В.А. Проблемы применения регуляризирующих и стабилизирующих преобразований в задачах динамики спутников планет и астероидов. //Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1998, вып.16, с.33-57.

- [28] Бордовицына Т.В., Дружинина И.В. Математическое моделирование динамических параметров потока частиц, образовавшихся в результате распада космического аппарата на орбите. //Окологемная астрономия, под ред. А.Г.Масевич. М., ИНАСАН, 1998, с.102-117.
- [29] Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. Перевод с английского В.К.Абалакина. М., Мир, 1964.
- [30] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М., Наука, 1981, 720 с.
- [31] Брумберг В.А. Аналитические алгоритмы небесной механики. М., Наука, 1980.
- [32] Брумберг В.А. Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1967, т.11, номер 2, с.73-83.
- [33] Брумберг В.А., Глебова Н.И., Лукашова М.В., Малков А.А., Питьева Е.В., Румянцева Л.И., Свешников М.Л., Фурсенко М.А. Расширенное объяснение к “Астрономическому ежегоднику”. //Труды Института прикладной астрономии РАН, 2004, вып.10, с.3-488.
- [34] Вайнберг Ст. Гравитация и космология. М., Мир, 1975.
- [35] Васильев Н.Н. Об интегрировании функций эллиптического движения. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1982, т.15, номер 3, с.142-144.
- [36] Вашковьяк М.А. Численно – аналитический метод расчёта движения стационарных ИСЗ. 1. Описание алгоритмов и оценка методической точности. 2. Рабочие формулы. //Препринты Института прикладной математики АН СССР, 1971, номер 34, номер 35, с.3-69.
- [37] Вашковьяк М.А. О методе приближённого расчёта движения стационарного искусственного спутника Земли. //Космические исследования, 1972, т.10, номер 2, с.147-158.

- [38] Вашковьяк М.А. Численно-аналитический метод исследования эволюции орбит далёких спутников планет. //Письма в астрономический журнал, 2005, т.31, номер 1, с.66-75.
- [39] Вашковьяк М.А., Лидов М.Л. О приближённом описании эволюции орбиты стационарного ИСЗ. //Космические исследования, 1973, т.11, номер 3, с.347-359.
- [40] Вашковьяк М.А., Тесленко Н.М. Эволюционные характеристики орбит внешних спутников Юпитера. //Астрономический вестник, 2008, т.42, номер 4, с.301-316.
- [41] Вашковьяк М.А., Тесленко Н.М. Эволюционные характеристики орбит внешних спутников Сатурна, Урана и Нептуна. //Астрономический вестник, 2008, т.42. номер 6, с.521-537.
- [42] Вашковьяк С.Н. Промежуточные орбиты спутников Марса. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1968, т.10, номер 3, с.284-290.
- [43] Вашковьяк С.Н. Функция тени в задаче о влиянии светового давления на движение ИСЗ. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1974, т.15, номер 5, с.584-590.
- [44] Вашковьяк С.Н. Изменение орбит спутников – баллонов под действием светового излучения. //Астрономический журнал, 1976, т.53, номер 5, с.1085-1094.
- [45] Вашковьяк С.Н. Действие светового излучения на орбиты геодезических спутников. //Космические исследования, 1979, т.27, номер 2, с.218-224.
- [46] Вашковьяк С.Н. Учёт влияния нецентральности поля Луны на движение ИСЗ. //Астрономический журнал, 1993, т.70, номер 3, с.635-641.
- [47] Вернадский В.И. Труды по всеобщей истории науки. М.: Наука.,1988.

- [48] Гаипова А.Н., Чазов В.В. Комплекс программ “Лента”. //Измерительная техника. 1991. Т.6. С.30.
- [49] Гапошкин Е.М. Определение орбит. /В кн. Стандартная Земля. М., Мир, 1969, стр.49-96. Перевод с английского П.П.Медведева.
- [50] Герасимов И.А. Функции Вейерштрасса и их приложения к механике и астрономии. Москва. Изд-во Московского государственного университета, 1990.
- [51] Герасимов И.А. Задача двух неподвижных центров Л.Эйлера. Москва. Изд-во Век-2, 2007.
- [52] Герасимов И.А., Винников Е.Л., Мушаилов Б.Р. Канонические уравнения в небесной механике. *Учебное пособие*. Москва. ТОО “Эдем”, 1996.
- [53] Герасимов И.А., Чазов В.В.. Переменные действие-угол в обобщённой задаче двух неподвижных центров. //Труды ГАИШ. 1988. Т.59. С.46-52.
- [54] Герасимов И.А., Чазов В.В., Рыхлова Л.В., Тагаева Д.А. Построение теории движения тел Солнечной системы, основанной на универсальном методе вычисления возмущающей функции. //Астрономический вестник. 2000. Т.34. Номер 6. С.559-566.
- [55] Герасимов И.А., Чазов В.В., Тагаева Д.А. Применение универсального метода вычисления возмущающей функции в численно-аналитической теории движения малых планет. //Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2000. Номер 3. С.55-57.
- [56] Гребеников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М., Наука, 1986.
- [57] Гребеников Е.А., Митропольский Ю.А., Рябов Ю.А. Введение в резонансную аналитическую динамику. РФФИ. Москва. Изд-во Янус-К, 1999.

- [58] Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М., Наука, 1979.
- [59] Губанов В.С. Обобщённый метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. СПб., Наука, 1997.
- [60] Дёмин В.Г. Об орбитах задачи двух неподвижных центров. //Астрономический журнал, 1960, т.37, вып.6, с.1068-1075.
- [61] Дёмин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М., Наука, 1968.
- [62] Долгачёв В.П. О движении далёких ИСЗ в гравитационном поле Земли и Луны. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1968, т.10, номер 1, с.94-100.
- [63] Долгачёв В.П. Долгопериодические возмущения элементов орбит искусственных спутников Земли, обусловленные притяжением Луны. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1974, т.15, номер 5, с.591-596.
- [64] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Наука, 1975.
- [65] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., Наука, 1964.
- [66] Емельянов Н.В. Методы составления алгоритмов и программ в задачах небесной механики. М., Наука, 1983.
- [67] Емельянов Н.В. Возмущения 3-го и 4-го порядков относительно сжатия планеты в орбите спутника. //Астрономический журнал, 1979, т.56, номер 5, с.1070-1076.
- [68] Емельянов Н.В. Разложение возмущающей функции, обусловленной влиянием притяжения Луны и Солнца на движение ИСЗ. //Астрономический журнал, 1985, т.62, номер 6, с.1168-1174.

- [69] Емельянов Н.В. Построение аналитической теории движения ИСЗ с точностью до третьего порядка относительно сжатия Земли. //Астрономический журнал, 1986, т.63, номер 4, с.800-809.
- [70] Емельянов Н.В. О точности формул промежуточной орбиты спутника. //Астрономический журнал, 1990, т.67, номер 2, с.400-408.
- [71] Емельянов Н.В., Насонова Л.П. Разложение возмущающей функции, обусловленной несферичностью Земли. //Астрономический журнал, 1985, т.61, номер 5, с.1021-1028.
- [72] Жагар Ю.Х. Применение промежуточных орбит для прогнозирования движения ИСЗ. /Veröffentlichungen des Zentralinstitut für Physik der Erde, 1977, Nummer 52, Teil 3, S.990-1005.
- [73] Журавлёв С.Г. Аналитическая теория движения суточного спутника. Часть 1. Промежуточная орбита. /Проблемы механики управляемого движения, Пермь, 1972, номер 1, с.68-84.
- [74] Журавлёв С.Г. Аналитическая теория движения суточного спутника. Часть 2. Вековые, долгопериодические и короткопериодические возмущения. /Проблемы механики управляемого движения, Пермь, 1972, номер 1, с.85-101.
- [75] Журавлёв С.Г. О преобразовании Делоне–Цейпеля в резонансных задачах небесной механики. //Астрономический журнал, 1979, т.56, номер 3, с.652-663.
- [76] Журавлёв С.Г. Метод исследования острорезонансных задач небесной механики и космодинамики. РФФИ. Архангельск. 2000.
- [77] Журавлёв С.Г. Об одном общем подходе к выбору неособенных канонических систем переменных в острорезонансных задачах небесной механики и космодинамики. РФФИ. Архангельск. Труды кафедры прикладной математики АГТУ, 2001, вып.1, с.101-138.

- [78] Зленко А.А. Поступательно–вращательное движение резонансных спутников. М., Международная академия информационных технологий, 2004.
- [79] Идельсон Н.И. Этюды по истории небесной механики. М., Наука, 1983.
- [80] Кантер А.А. Представление лунно-солнечных возмущений в движении ИСЗ тригонометрическими рядами с коэффициентами, зависящими от времени. //Астрономический журнал, 1993, т.70, номер 1, с.226-229.
- [81] Кантер А.А. О разложении функций от координат возмущающего тела в задаче вычисления лунно-солнечных возмущений в движении ИСЗ. //Космические исследования, 1997, т.35, номер 3, с.303-307.
- [82] Кинг-Хили Д. Теория орбит искусственных спутников в атмосфере. М., Мир, 1966.
- [83] Кислик М.Д. Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. /Искусственные спутники Земли, 1960, вып.4, с.3-17.
- [84] Кислик М.Д. Анализ интегралов уравнений движения искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. /Искусственные спутники Земли, 1963, вып.13, с.23-52.
- [85] Клишин А.Ф., Чазов В.В., Бахтигараев Н.С., Костюк Н.Д. Об оценке уровня техногенной опасности в зоне размещения КА “ЭлектроЛ”. //Вопросы радиоэлектроники. Серия “Радиолокационная техника”. 2007. Выпуск 2. С.40-46.
- [86] Копейкин С.М. Релятивистские системы отсчёта в Солнечной системе. /Астрономия и гравитация. Итоги науки и техники. Серия Астрономия. М., ВИНТИ, 1991, т.41, с.87-146.
- [87] Кудрявцев С.М. Вычисление возмущений элементов орбиты спутника несферичной планеты на длительных интервалах времени. //Астрономический журнал, 1994, т.71, номер 1, с.161-165.

- [88] Кудрявцев С.М. Вычисление возмущений элементов орбиты спутника несферичной планеты на длительных интервалах времени. Аналитическая теория пятого порядка. //Астрономический журнал, 1995, т.72, номер 2, с.285-288.
- [89] Кузнецов Э.Д. О влиянии светового давления на орбитальную эволюцию геосинхронных объектов. //Астрономический вестник, 2011, т.45, с.444-457.
- [90] Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Динамическая эволюция слабозмущенной двухпланетной системы на космогоническом интервале времени: система Солнце-Юпитер-Сатурн. //Астрономический вестник, 2006, т.40, с.263-275.
- [91] Кузьмин А.В. Опорный каталог Тихо. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 2004, т.70, с.180-237.
- [92] Кутузов А.Л. Аналитическое решение главной задачи теории движения ИСЗ на ЭВМ. //Астрономия и геодезия, Томск, 1977, вып.6, с.26-31.
- [93] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.,1973.
- [94] Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних сил. /Искусственные спутники Земли, 1961, вып.8.
- [95] Лидов М.Л. Вековые эффекты эволюции орбит под влиянием светового давления. //Космические исследования, 1969, т.7, номер 4, с.467-484.
- [96] Лидов М.Л. Полуаналитические методы расчёта движения спутников. //Труды Института теоретической астрономии АН СССР, 1978, т.17, с.54-61.
- [97] Лидов М.Л., Соловьёв А.А. Метод расчёта атмосферных возмущений движения спутника по орбите с большим эксцентриситетом. //Космические исследования, 1978, т.16, номер 6, с.806-821.

- [98] Лукьянов Л.Г., Емельянов Н.В., Ширмин Г.И. Обобщённая задача двух неподвижных центров или задача Дарбу-Гредеакса. //Космические исследования, 2005, т.43, номер 3, с.194-200.
- [99] Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике. *Учебное пособие для высших учебных заведений*. Алматы. Изд-во “Эверо”, 2009.
- [100] Малкин З.М. Определение параметров вращения Земли из SLR наблюдений в ИПА РАН. //Труды Института прикладной астрономии Российской академии наук, С.Пб., 1997, вып.1, с.113-132.
- [101] Моисеев Н.Д. О некоторых упрощённых схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трёх точек. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1945, т.15, номер 1, с.75-117.
- [102] Монтенбрук О., Пфлегер Т. Астрономия на персональном компьютере. Санкт-Петербург. Изд-во “Питер”, 2002.
- [103] Мориц Г., Мюллер А. Вращение Земли: теория и наблюдения. Киев, Наукова Думка, 1992.
- [104] Мукин Э.Э. Влияние светового давления на движение некоторых видов ИСЗ. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1972, т.43, номер 2, с.79-88.
- [105] Мушаилов Б.Р. Успехи небесной механики на рубеже веков. /Астрономический календарь. 2000. Выпуск 102, М., Космосинформ, 1999.
- [106] Насонова Л.П. О вековых возмущениях третьего порядка в движении спутников планет. //Астрономический журнал, 1971, т.48, номер 1, с.194-204.
- [107] Насонова Л.П. Вековые возмущения третьего порядка относительно сжатия от всех зональных гармоник гравитационного потенциала планеты. //Астрономический журнал, 1973, т.50, номер 4, с.849-861.

- [108] Нестеров В.В. Вычисление обусловленных Луной возмущений элементов орбит искусственных спутников Земли. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1983, т.53, с.154-169.
- [109] Нестеров В.В. Определение параметров вращения Земли по данным лазерной дальнометрии ИСЗ Лагос во время первой кампании Мерит. /Итоги науки и техники. Астрономия. Проблемы современной астрометрии. Под ред. В.В.Подобеда. М., 1983, т.23, с.102-133.
- [110] Нестеров В.В. Стандарт основных вычислений астрономии. Основные алгоритмы спутниковой геодинамики. *Лекции для студентов старших курсов*. РФФИ. Москва. Изд-во Янус-К, 2001.
- [111] Нестеров В.В., Романова Г.В. Вычисление возмущений движения искусственных спутников в гравитационном поле Земли. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1983, т.53, с.142-153.
- [112] Нечто из астрометрии и небесной механики.  
<http://vadimchazov.narod.ru>
- [113] Носков Б.Н. Влияние атмосферы на движение искусственных спутников Земли. /Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Движение искусственных спутников Земли. Под ред. В.Г.Дёмина. М., 1980, т.15, с.64-81.
- [114] Орлов А.А. О почти периодических движениях материальной точки в поле тяготения сфероида. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1954, т.24, с.139-153.
- [115] Орлов А.А. Вековые и долгопериодические возмущения в движении спутника несферической планеты. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1965, т.10, номер 1, с.6-26.

- [116] Орлов А.А. Приближённое аналитическое представление пространственных движений в задаче Хилла. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1965, т.10, номер 5, с.360-370.
- [117] Петкевич В.В. Теоретическая механика. *Учебное пособие для студентов университетов*. М., Наука, 1981.
- [118] Питьева Е.В. Новая численная теория движения планет ЕРМ98 и её сравнение с эфемеридой DE403 Лаборатории реактивного движения США. //Труды Института прикладной астрономии Российской академии наук, С.Пб., 1998, вып.3, с.5-23.
- [119] Питьева Е.В. Высокоточные эфемериды планет – ЕРМ и определение некоторых астрономических постоянных. //Астрономический вестник, 2005, т.39, номер 3, с.202-213.
- [120] Плахов Ю.В., Мыщенко А.В., Шельпов В.А. О методике численного интегрирования уравнений возмущённого движения ИСЗ в задачах космической геодезии. //Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. М., 1989, номер 4, с.61-67.
- [121] Поляхова Е.Н. Возмущающее влияние светового давления Солнца на движение ИСЗ. /Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Движение искусственных спутников Земли. Под ред. В.Г.Дёмина. М., 1980, т.15, с.82-113.
- [122] Поляхова Е.Н. Роль светового давления в астрономии и космических исследованиях. /Столкновения в околоземном пространстве. Сборник научных трудов. М., Космосинформ, 1995, с.173-252.
- [123] Проскурин В.Ф., Батраков Ю.В. Возмущения в движении искусственных спутников, вызываемые сжатием Земли. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1960, т.7, номер 7, с.537-548.
- [124] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Том 1. Перевод с французского под ред. В.И.Арнольда. М., Наука, 1971.

- [125] Романова Г.В. Использование данных лазерной дальнометрии спутников для определения приливного числа Лява. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1988, т.60, с.16-19.
- [126] Свешников М.Л. Саймон Ньюком (к 160-летию со дня рождения). /Препринт ИТА РАН, 1995, номер 50.
- [127] Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.-Л., ОНТИ, 1936.
- [128] Сорокин Н.А. Короткопериодические возмущения второго порядка в движении искусственных спутников. //Научные информации Астрономического совета АН СССР, 1972, вып.25, с.62-73.
- [129] Сорокин Н.А. Долгопериодические возмущения второго порядка в движении ИСЗ. //Научные информации Астрономического совета АН СССР, 1977, вып.35, с.123-132.
- [130] Сорокин Н.А. Уравнения Энке в обобщённой задаче двух неподвижных центров. //Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. М., 1994, номер 4, с.88-95.
- [131] Сорокин Н.А. Возмущения от планет Солнечной системы в движении искусственных спутников Земли. //Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. М., 2000, номер 2, с.80-91.
- [132] Сорокин Н.А. Влияние несферичности Луны на движение искусственного спутника Земли. //Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. М., 2003, номер 4, с.48-67.
- [133] Сочилина А.С. О влиянии резонансных возмущений от гравитационного поля планеты на движение спутника. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1981, т.15, номер 2, с.114-123.
- [134] Сочилина А.Н. О движении геостационарных спутников в гравитационном поле Земли. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1982, т.15, номер 4, с.225-233.

- [135] Сочилина А.С. Об эволюции высоких почти круговых орбит спутников с критическим наклоном. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1984, т.15, номер 5, с.278-283.
- [136] Сочилина А.Н., Гаязов И.С. Об одном способе вычисления возмущений в движении спутника от лунных неравенств. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1984, т.15, номер 5, с.284-287.
- [137] Стандартная Земля. Под ред. К.Лундквиста и Г.Вейса. Перевод с английского П.П.Медведева. М., Мир, 1969.
- [138] Стэндиш Е.М. Численные теории движения Солнца, Луны и планет, созданные в Лаборатории реактивного движения США. //Труды Института прикладной астрономии Российской академии наук, С.Пб., 2002, вып.8, с.166-169.
- [139] Тамаров В.А. Периодические возмущения 2-го и 3-го порядков в движении спутника несферичной планеты. //Астрономический журнал, 1986, т.64, номер 4, с.774-783.
- [140] Тамаров В.А., Черницов А.М. Аналитический алгоритм вычисления возмущений в движении ИСЗ, обусловленных сопротивлением атмосферы. //Астрономия и геодезия. Томск. Изд-во ТГУ, 1998, вып.16., с.134-148.
- [141] Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залёткин С.Ф. Об одном методе численного интегрирования дифференциальных уравнений первого и второго порядка в астродинамике и космической геодезии. /Пакеты прикладных программ. Москва. Изд-во Московского государственного университета, 1997, с.60-119.
- [142] Тимошкова Е.И. Уравнения возмущённого движения спутника. //Астрономический журнал, 1971, т.48, номер 5, с.1061-1066.
- [143] Тимошкова Е.И. К вопросу о разложении пертурбационной функции. //Астрономический журнал, 1972, т.49, номер 4, с.879-885.

- [144] Тимошкова Е.И. Вековые возмущения от несферичности центрального тела с точностью до членов третьей степени относительно динамического сжатия. //Вестник Ленинградского государственного университета, 1974, номер 19, с.145-150.
- [145] Тимошкова Е.И. Приближённая аналитическая теория движения стационарного ИСЗ. //Учёные записки Ленинградского государственного университета, 1977, номер 390, с.77-90.
- [146] Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Лунно-солнечные возмущения в движении спутников планеты. //Учёные записки Ленинградского государственного университета, 1974, номер 373, с.141-156.
- [147] Тупикова И.В. Построение на ЭВМ аналитической теории движения резонансных ИСЗ в гравитационном поле Земли. //Наблюдения искусственных спутников Земли, 1982, т.21, номер 1, с.21-24.
- [148] Тупикова И.В. Некоторые модификации метода Хори – Депри для построения полуаналитической теории третьего порядка для резонансных ИСЗ. //Наблюдения искусственных спутников Земли, 1984, т.23, с.240-242.
- [149] Уральская В.С. Полярные орбиты искусственных небесных тел. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1964, т.6, номер 4, с.34-44.
- [150] Уральская В.С. Эволюция орбит околополярных спутников под влиянием лунно-солнечных возмущений. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1969, т.11, номер 1, с.91-99.
- [151] Уральская В.С. Движение околополярных спутников. //Вестник Московского государственного университета. Физика, астрономия. 1969, т.11, номер 2, с.38-46.

- [152] Уральская В.С., Журавлёв С.Г. Движение искусственных спутников в гравитационном поле Земли. //Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Под ред. В.Г.Дёмина. М., 1980, т.15, с.3-43.
- [153] Филенко Л.Л. Буквенная теория движения ИСЗ в поле тессеральных гармоник потенциала притяжения Земли при малых эксцентриситетах. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1972, т.13, номер 4, с.246-257.
- [154] Фоминов А.М. Движение спутника Земли. 1. Линейные возмущения. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1980, т.14, номер 10, с.621-654.
- [155] Фоминов А.М. Движение спутника Земли. 2. Нелинейные возмущения. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1981, т.15, номер 1, с.53-58.
- [156] Холшевников К.В. Асимптотические методы небесной механики. Ленинград. Изд-во Ленинградского государственного университета, 1985.
- [157] Холшевников К.В., Тимошкова Е.И. Построение аналитической теории движения спутника в нецентральной поле тяготения. //Учёные записки Ленинградского государственного университета, 1971, номер 359, с.97-118.
- [158] Хокинг Ст. Краткая история времени. С.-Пб., Амфора/Эврика, 2001.
- [159] Чазов В.В. Основные алгоритмы численно-аналитической теории движения искусственных спутников Земли. //Труды Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга, 2000, т.68, с.5-20.
- [160] Чазов В.В., Бахтигараев Н.С., Костюк Н.Д. Наблюдения спутника “Молния 3-39” в Звенигородской обсерватории ИНАСАН и определение времени падения. //Вестник СибГАУ, 2011, выпуск 6(39), с.183-185.

- [161] Чазов В.В., Герасимов И.А., Соловьёва О.Д. Изотропные и гармонические координатные условия в пространстве-времени Солнечной системы. //Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2006, номер 2, с.66-68.
- [162] Чепурова В.М. Качественный анализ движения в гиперболическом случае задачи двух неподвижных центров. //Сообщения Государственного астроном. института им. П.К.Штернберга, 1968, номер 154, с.14-34.
- [163] Черницов А.М., Тамаров В.А. О способе построения аналитического алгоритма вычисления влияния светового давления на движение ИСЗ. // Астрономия и геодезия. Томск. Изд-во ТГУ, 1998, вып.16. с.239-245.
- [164] Шарлье К. Небесная механика. Перевод с немецкого под ред. Б.М.Щиголева. М., Наука, 1966.
- [165] Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. Перевод с английского под ред. В.А.Брумберга. М., Наука, 1975.
- [166] Эльясберг П.Е. Введение в теорию полёта искусственных спутников Земли. М., Наука, 1965.
- [167] Эльясберг П.Е. Информация, сколько её надо, как её обрабатывать? М., Наука, 1983.
- [168] Яров-Яровой М.С. Об одном способе исследования поступательного и вращательного движений спутников планет, имеющих ось симметрии. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1962, т.8, номер 9, с.647-659.
- [169] Яров-Яровой М.С. Работы в области небесной механики в МГУ за 50 лет (1917 – 1967 гг.). /История и методология естественных наук. Москва. Изд-во Московского государственного университета, 1968, вып.7, Астрономия и радиофизика.

- [170] Яров-Яровой М.С. О применении уточнённых методов численного интегрирования в небесной механике. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1974, т.45, с.178-200.
- [171] Яров-Яровой М.С. О выводе формул ускоренных и уточнённых методов численного интегрирования. /Современные проблемы математического моделирования. Теория и приложения. Москва. Изд-во Московского государственного университета, 1983, с.52-64.
- [172] Яров-Яровой М.С. О приближении прямоугольных координат, составляющих скорости и кеплеровых элементов орбит больших планет членами по времени. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1986, т.58, с.23-49.
- [173] Яшкин С.Н. Возмущения в элементах орбиты ИСЗ от тессеральных и секториальных гармоник потенциала Земли. //Астрономический журнал, 1970, т.47, номер 5, с.1112-1120.
- [174] Яшкин С.Н. Случаи резонанса в элементах орбиты ИСЗ. //Астрономический журнал, 1970, т.47, номер 6, с.1289-1295.
- [175] Яшкин С.Н. Один вид дифференциальных уравнений возмущённого движения в канонических элементах. //Астрономический журнал, 1974, т.51, номер 3, с.635-640.
- [176] Aksnes K. A second order artificial satellite theory based on intermediate orbit. //Astronomical Journal, 1970, v.75, number 9, pp.1066-1076.
- [177] Andrlé P. On the solution of the generalized problem of the two fixed centres by Weierstrassian functions. //Bull. astron. inst. Czechosl., 1976, v.27, number 2, pp.118-125.
- [178] Bakhtigaraev N., Sergeev A. Observations of Space Debris in GEO. //Proc. of 5th European Conf. on Space Debris, 2009, ESA SP-672.
- [179] Brouwer D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. //Astronomical Journal, 1959, v.64, number 9, pp.378-397.

- [180] Brouwer D., van Woerkom A.G. The secular variations of the orbital elements of the principal Planets. // *Astronomical papers*, 1950, v.13, pp.81-107.
- [181] Brumberg V.A. *Essential Relativistic Celestial Mechanics*. Hilger, Bristol. 1991.
- [182] Burmistrov V.B, Parkhomenko N.N., Shargorodsky V.D., Vasiliev V.P. REFLECTOR, LARETS and METEOR-3M(1) what did we learn from tracking campaign results. /14th International Workshop on Laser Ranging, 2004.
- [183] Dehant et al. Report of the IAU Working group on Non-rigid Earth Nutation Theory. // *Celestial Mechanics*, 1999, v.72, number 4, pp.245-310.
- [184] Deprit A., Rom A. The main problem of artificial satellite theory for small and moderate eccentricities. // *Celestial Mechanics*, 1970, v.2, number 2, pp.166-206.
- [185] Eanes R.J., Bettadpur S. The CSR 3.0 global ocean tide model. /Technical Memorandum CSR-TM-95-06, 1995, Center for Space Research, University of Texas, Austin.  
**ftp://csr.utexas.edu/pub/tide**
- [186] Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits. // *Celestial Mechanics*, 1974, v.19, number 1, pp.35-55.
- [187] Felix R. Hoots, Ronald R. Roehrich.  
SPACETRACK REPORT number 3, 1980.  
**http://celestrak.com/NORAD/documentation/**
- [188] IERS Conventions (1996). Dennis D. McCarthy (ed.) /IERS Technical note 21, Paris, 1996.
- [189] IERS Conventions (2000). Dennis D. McCarthy (ed.) /IERS Technical note 29, Paris, 2000.  
**http://tai.bipm.org/iers/conv2003/conv2003.html**

- [190] Pearlman M.R., Degnan J.J., Bosworth J.M.  
The International Laser Ranging Service. //Advances in Space Research, v.30, number 2, pp.135-143. <http://ilrs.gsfc.nasa.gov/>
- [191] Kinoshita H. Third-order solution of an artificial satellite theory. //SAO Special Reports, 1979, number 379.
- [192] Kozai Y. Second – order solution of artificial satellite theory without drag. //Astronomical Journal, 1962, v.67, number 5, pp.275-292.
- [193] Lagrange G. Ouevres. Paris, 1870, v.5.
- [194] Lemoine F.G., Kenyon S.C., Factor J.K., Trimmer R.G., Pavlis N.K., Chinn D.S., Cox C.M., Klosko S.M., Luthke S.B., Torrance M.H., Wang Y.M., Williamson R.G., Pavlis E.C., Rapp R.H., and Olson T.R. The Development of the Joint NASA GSFC and National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96. /NASA/TP-1998-206861, 1998, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland.  
<http://www.nima.mil/GandG/wgs-84/egm96.html>
- [195] Lerch F.J., Nerem R.S., Putney B.H., Felsentreger T.L., Sanchez B.V., Klosko S.M., Patel G.B., Williamson R.G., Chinn D.S., Chan J.C., Rachlin K.E., Chandler N.L., McCarthy J.J., Marshall J.A., Luthcke S.B., Pavlis D.E., Robbins J.W., Kapoor S., Pavlis E.C. Geopotential models from satellite tracking, altimeter and surface gravity data: GEM-T3 and GEM-T3S. //Journ. Geophys. Res., 1994, v.99, number 82, pp.2815-2839.
- [196] Newton R. Motion of a satellite around an unsymmetrical central body. //Journ. Appl. Phys., 1959, v.30, number 2, pp.78-83.
- [197] Precise GPS orbits computed at the National Geodetic Service.  
<http://www.ngs.noaa.gov/orbits/>
- [198] Project Merit Standards /US Naval observatory, 1983, circular 167.
- [199] Resolutions of the XXIVth General Assembly. /Internat. Astron. Union, Information bulletin. 2001. № 88. P.28.

- 
- [200] Seidelmann P.K., editor. Explanatory Supplement to the Astronomical Almanach. Sausalito, California, 1992.
- [201] Shargorodsky V.D., Vasiliev V.P., Novikov S.B., Chubykin A.A., Parkhomenko N.N., Sadovnikov M.A. Progress in Laser Systems for Precision Ranging, Angle Measurements, Photometry, and Data Transfer. /Presentation on ILRS Fall 2007 Workshop.
- [202] Standish E.M., Newhall X.X., Williams J.G. and Folkner W.F. JPL Planetary and Lunar Ephemeris, DE405/LE405. /JPL Inter office Memorandum. 1998, № 312.F-98-048, pp.1-28.
- [203] Sterne T.E. The gravitational orbit of a satellite of an oblate planet. //Astronomical Journal, 1958, v.63, pp.28-40.
- [204] Tapley B.D., Schutz B.E., Eans R.J. Satellite laser ranging and its applications. //Celestial Mechanics, 1985, v.37, number 3, pp.247-261.
- [205] Tapley B.D., Watkins M.M., Ries J.C., Davis G.W., Eanes R.J., Poole S.R., Rim H.J., Schutz B.E., Shum C.K., Nerem R.S., Lerch F.J., Marshall J.A., Klosko S.M., Pavlis N.K., and Williamson R.G. The Joint Gravity Model 3. //Journal Geophysical Research, 1996, v.101, pp.28029-28049.  
**<http://www.csr.utexas.edu>**
- [206] Two line elements.  
**<http://celestrak.com/NORAD/elements/>**
- [207] Vallado D.A., Kelso T.S. Using EOP and Space Weather Data for Satellite Operations. /6th US-Russian Space Surveillance Workshop, 2005, St.Petersburg, Russia.
- [208] Vinti J.P. Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy. //Journ. Res. Nat. Bur. Standards, 1961, v.B65, number 3, pp.169-201.