

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ АСТРОНОМИИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Эбауэр Константин Викторович

**Высокоточное определение динамических параметров Земли с использованием
данных лазерной локации околоземных спутников**

01.03.01 – Астрометрия и небесная механика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р техн. наук Татевян Сурия Керимовна

Москва – 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 ЛАЗЕРНАЯ ЛОКАЦИЯ ИСЗ КАК СРЕДСТВО ИЗУЧЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗЕМЛИ	13
1.1 Методы наблюдения.....	13
1.2 Принцип лазерной локации и уравнение наблюдений	21
1.2.1 Поправка за влияние тропосферы.....	21
1.2.2 Релятивистская поправка в измеренные дальности	22
1.2.3 Поправка за центр масс спутника	22
1.2.4 Поправка за систематические погрешности лазерных дальномеров	23
1.3 Выводы к главе 1.....	23
2 ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ	24
2.1 Шкалы времени и системы координат	24
2.1.1 Системы координат и преобразования между ними	24
2.1.2 Шкалы времени.....	28
2.2 Вычисление правых частей дифференциальных уравнений движения.....	28
2.2.1 Геопотенциал.....	29
2.2.2 Твердые земные приливы.....	32
2.2.3 Океанические приливы	34
2.2.4 Полюсные приливы.....	35
2.2.5 Атмосферные приливы.....	36
2.2.6 Неприливные перемещения масс в атмосфере и океанах	37
2.2.7 Влияние тел Солнечной системы.....	38
2.2.8 Атмосферное торможение	39
2.2.9 Световое давление.....	41
2.2.10 Релятивистские возмущения.....	42
2.2.11 Переотражение и переизлучение Землей солнечной радиации	42
2.2.12 Эмпирические ускорения	44
2.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СМЕЩЕНИЙ ПУНКТОВ НАБЛЮДЕНИЯ.....	44
2.3.1 Нагрузка от твердых земных приливов.....	45
2.3.2 Океаническая приливная нагрузка.....	45
2.3.3 Нагрузка, вызванная океаническими полюсными приливами	46
2.3.4 Нагрузка от атмосферного давления	47
2.3.5 Деформации земной поверхности, вызванные движением полюсов	49
2.3.6 Эксцентриситеты станций наблюдения	49
2.4 РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ	49
2.4.1 Уравнения поправок и система нормальных уравнений	49
2.4.2 Решение вариационных уравнений	53
2.5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ	54
2.6 Выводы к главе 2.....	56

3	ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ЛАЗЕРНОЙ ЛОКАЦИИ ИСЗ «ГЕОИС (ГЕОДИНАМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ)»	57
3.1	ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА «ГЕОИС»	57
3.2	АПРОБАЦИЯ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА «ГЕОИС».....	62
3.3	Выводы к главе 3.....	65
4	АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ ФАКТОРОВ И НАГРУЗОЧНЫХ ЭФФЕКТОВ НА ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ГЕОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ	66
4.1	СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ПЛОТНОСТИ АТМОСФЕРЫ И СПОСОБОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ СКОРОСТИ АТМОСФЕРНЫХ ПОТОКОВ	68
4.2	СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ АТМОСФЕРНЫХ ПРИЛИВОВ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ ВЛИЯНИЯ НА ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПАРАМЕТРЫ	70
4.3	ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЭФФЕКТА ПЕРЕОТРАЖЕНИЯ И ПЕРЕИЗЛУЧЕНИЯ ЗЕМЛЕЙ СОЛНЕЧНОЙ РАДИАЦИИ.....	76
4.4	ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ НЕПРИЛИВНЫХ МАСС В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНАХ (МОДЕЛЬ AOD1B)	80
4.5	ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ АТМОСФЕРНОЙ НАГРУЗКИ.....	86
4.6	Выводы к главе 4.....	90
5	КОМБИНИРОВАНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ ЛАЗЕРНЫХ ДАЛЬНОСТЕЙ СПУТНИКОВ С РАЗНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ОРБИТ С ЦЕЛЬЮ СОВМЕСТНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.....	92
5.1	Методы комбинирования, применяемые при обработке наблюдений околоземных ИСЗ	92
5.1.1	Комбинирование на уровне наблюдений	92
5.1.2	Комбинирование на уровне нормальных уравнений	99
5.2	Результаты определения геодинимических параметров из комбинированной обработки лазерных наблюдений ИСЗ.....	101
5.3	Выводы к главе 5.....	122
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	125
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	128
	ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	138
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	141
	ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	142
	ПРИЛОЖЕНИЕ Г	143
	ПРИЛОЖЕНИЕ Д	144

Введение

Актуальность работы и степень ее разработанности

Систематические наблюдения траекторий движения искусственных спутников Земли (ИСЗ), позволяющие с высокой точностью отследить малейшие изменения элементов их орбит, дают ценную информацию для изучения физических свойств околоземного пространства, динамических параметров Земли, как планеты Солнечной системы, и ее гравитационного поля. В 70х-90х гг. прошлого века особенно быстро развивалась квантово-оптическая или лазерная локация спутников (Satellite Laser Ranging – SLR) и Луны (Lunar Laser Ranging – LLR). Лазерная локация спутников изменила подход к решению многих астрометрических задач и внесла исключительный вклад в развитие новой отрасли в науках о Земле, а именно космической геодезии. После запуска первых двух геодезических спутников правильной сферической формы, специально разработанных для лазерной локации – Starlette в 1975г. и LAGEOS-1 (Laser GEODynamics Satellite) в 1976г. – появилась возможность определять орбиты этих спутников сначала с дециметровой, а затем и с сантиметровой точностью. Это позволило значительно уточнить общеземную систему координат, определять параметры вращения Земли (ПВЗ) и длинноволновую составляющую гравитационного поля Земли (ГПЗ) с высокой точностью. Продолжительные ряды лазерных наблюдений дали возможность определять вековые движения станций наблюдения за сравнительно короткий исторический период, и тем самым подтвердили теорию движения тектонических плит, а также позволили определить с высокой точностью одну из важнейших постоянных астрономии и физики – геоцентрическую гравитационную постоянную GM_{\oplus} [115]. Лазерная локация ИСЗ по-прежнему играет важную роль при решении многих научных задач, несмотря на то, что в некоторых случаях она конкурирует с радиотехническими (ГЛОНАСС, GPS, РСДБ, ДОРИС), градиентметрическими (проект GOCE [61]) и межспутниковыми (проекты CHAMP [109], GRACE [121]) измерительными средствами. Так, наиболее подходящим инструментом для построения глобальной геодезической сети, фиксирующей общеземную систему координат, и для определения ПВЗ стали глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС) в силу большого количества равномерно распределенных станций и большого числа наблюдений. Для определения гравитационного поля Земли и изучения его вариаций используется спутниковая градиентметрия (GOCE) и системы «спутник-спутник» (CHAMP, GRACE) вследствие их высокой чувствительности к малым изменениям в гравитационном поле Земли. Тем не менее, вклад лазерной локации ИСЗ в установление земной системы координат (в том числе, в изучение движения геоцентра – начала земной системы отсчета), определения ПВЗ, масштаба и низкочастотной составляющей ГПЗ остается значительным благодаря высокой точности измерения дальностей (0,5-2см)

современными лазерными дальномерами [42]. Кроме того, возможность использования продолжительных рядов наблюдений, накопленных с середины 70х гг., позволяет изучать изменения определяемых параметров со временем. Эти особенности лазерной локации ИСЗ делают ее незаменимой для определения целого ряда геодинамических параметров с высокой точностью [111]. Под геодинамическими параметрами здесь и далее понимаются координаты станций наблюдения, параметры вращения Земли, движение геоцентра, коэффициенты гравитационного поля Земли и их изменения со временем.

На ближайшее десятилетие главными проблемами в изучении Земли определены: мониторинг водного цикла в глобальном и региональном масштабах, исследования изменений уровня Мирового океана и ледниковых масс с целью регистрации сигналов глобальных планетарных изменений [104]. Поскольку амплитуды этих изменений малы (на уровне нескольких миллиметров), то для их регистрации необходимо иметь земную опорную систему координат соответствующей точности и стабильности, а именно 1мм по координатам и 0,1мм/год по скорости их изменения. Достижение таких точностей к 2020 году является основной целью проекта Глобальной Геодезической Системы Наблюдений (Global Geodetic Observing System – GGOS) [104]. В рамках проекта GGOS Земля рассматривается как единое целое, включая твердую Землю, океаны, атмосферу, как в статике, так и их изменения со временем. В случае успешной реализации проект GGOS внесет значительный вклад в фундаментальные научные исследования глобальных изменений Земли.

Малые изменения уровня Мирового океана, объема ледниковых масс и глобального водного цикла отражаются на структуре гравитационного поля планеты и его изменениях со временем. Отметим некоторые особенности определения коэффициентов гравитационного поля. При уточнении коэффициентов гравитационного поля на основе математической обработки лазерных наблюдений обычно ограничиваются второй степенью и порядком в разложении геопотенциала, используя для этого наблюдения спутников LAGEOS-1/2 [4,16]. Тонкая структура гравитационного поля определяется из градиентометрических наблюдений (GOCE) и наблюдений в измерительных системах «спутник-спутник» по схеме «низкий-низкий» (GRACE) и «высокий-низкий» (CHAMP, GRACE). Преимущества этих методов по сравнению с SLR очевидны:

- Непрерывность измерений, независимость от погодных условий.
- Высокоточное определение орбит в реальном времени по наблюдениям GPS.
- Чувствительность к высокочастотным составляющим геопотенциала.

Тем не менее, указанные методы наблюдений имеют существенные недостатки. Так, градиентометр спутника GOCE имеет полосу измерений от 0,005 Гц до 0,1 Гц (что приблизительно соответствует интервалу от 27 до 540 степени коэффициентов гравитационного поля), в пределах которой достигается заявленная точность [135,136]. Поэтому низкочастотная составляющая гравитационного поля определяется из анализа орбит спутника по межспутниковым наблюдениям по схеме «высокий-низкий» (с применением системы GPS).

Погрешности определения низкочастотной составляющей гравитационного поля присущи и межспутниковому проекту GRACE. Это прежде всего касается шумовой составляющей в межспутниковых измерениях по схеме «низкий-низкий» (в К-диапазоне), которая влияет на точность определения низкочастотной составляющей гравитационного поля [55,60]. При определении орбит спутников проекта GRACE с привлечением спутников системы GPS (схема «высокий-низкий») также имеет место шумовая составляющая, вызванная влиянием, главным образом, океанической приливной волны S_2 [46], которая затрудняет определение коэффициента при второй зональной гармонике \bar{C}_{20} . В связи с этим в некоторых работах констатируется невозможность корректного определения и коэффициента \bar{C}_{40} [79]. Имеют место также незначительные шумовые составляющие и от других приливных волн [68,116].

Кроме того, указанные космические измерительные средства не могут дать такой продолжительный ряд наблюдений, как SLR, что делает невозможным изучение долгопериодических изменений в коэффициентах гравитационного поля. Во многом это объясняет тот факт, что коэффициент при второй зональной гармонике, рекомендованный Соглашениями Международной Службы Вращения Земли/МСВЗ (International Earth Rotations Service/IERS) [105], определяется именно из многолетних наблюдений спутников LAGEOS-1/2.

В связи с вышесказанным задача исследования возможности использования SLR для высокоточного определения координат станций и параметров вращения Земли с одновременным уточнением коэффициентов первых гармоник гравитационного поля Земли становится актуальной и соответствует концепции проекта GGOS о единой планетарной системе и тесной связи между геометрией, вращением Земли и гравитационным полем [104]. Предполагается, что привлечение высокоточных лазерных наблюдений низкоорбитальных ИСЗ, которые обычно не используются в решении позиционных задач, позволит решить эту задачу за счет не только увеличения общего количества используемой в решении измерительной информации, но и за счет наличия набора разнообразных орбит, как по высоте, так и по углу наклона и эксцентриситету.

В отечественной литературе данные вопросы освещены слабо. Однако необходимо отметить работы [6,11,13], в которых рассматриваются методики учета гравитационных возмущений в движении спутников (в основном, приливных) на современном уровне точности. В Соглашениях МСВЗ [90,105] даются рекомендации по учету приливных эффектов в движении ИСЗ и некоторых составляющих приливной нагрузки при определении величин нагрузочных деформаций станций наблюдения. Однако, как показывают экспериментальные вычисления, необходимость учета некоторых неприливных и негравитационных эффектов требует дополнительных исследований с учетом целей проекта GGOS [30,99,110,124]. Определению координат станций и ПВЗ из обработки данных SLR и РСДБ посвящена работа [24]. В работе [5] приводятся результаты отдельного определения коэффициентов гравитационного поля \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} и параметров вращения Земли из обработки наблюдений спутников LAGEOS-1/2.

Целью представленной работы является разработка методики и алгоритмов высокоточного (принимая во внимание требования проекта GGOS) совместного определения динамических параметров Земли с применением современных моделей учета возмущающих факторов в движении ИСЗ и нагрузочных эффектов, действующих на положение наземных станций наблюдения.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработать методику совместного определения орбит геодезических спутников и геодинамических параметров путем комбинирования данных лазерной локации спутников с разными параметрами и высотами орбит с применением современных моделей и методов учета возмущающих факторов в движении ИСЗ и нагрузочных эффектов, действующих на положение станций наблюдения, используя при этом оптимальный метод численного интегрирования орбит.
2. На основе проведенных исследований разработать алгоритмы и программно-вычислительный комплекс для определения орбит спутников, координат станций, параметров вращения Земли и коэффициентов гравитационного поля Земли на основе математической обработки лазерных наблюдений низко- и высокоорбитальных геодезических спутников.
3. С помощью разработанного программно-вычислительного комплекса выполнить исследование влияния малых возмущающих факторов и нагрузочных эффектов, а именно атмосферных приливов, перемещений неприливных масс в атмосфере и океанах, альбедо Земли, атмосферной неприливной нагрузки, не описанных в действующих Соглашениях

МСВЗ 2010 [105], на определяемые геодинамические параметры и орбиты спутников. Показать необходимость их учета в дальнейших исследованиях.

4. С помощью разработанного программно-вычислительного комплекса, принимая во внимание результаты выполненных исследований, выполнить математическую обработку реальных лазерных наблюдений геодезических ИСЗ на многолетнем временном интервале с целью совместного определения координат станций, параметров вращения Земли и коэффициентов ее гравитационного поля.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Впервые выполнен детальный анализ влияния малых возмущающих факторов и нагрузочных эффектов, не учтенных в действующих Соглашениях МСВЗ 2010 [105], а именно атмосферных приливов, перемещений неприливных масс в атмосфере и океанах, альbedo Земли, атмосферной неприливной нагрузки, на орбиты низко- и высокоорбитальных геодезических ИСЗ, а также на координаты станций, параметры вращения Земли и на коэффициенты геопотенциала $\bar{C}_{20}, \bar{C}_{21}, \bar{S}_{21}$.
2. Впервые выполнена комбинированная обработка лазерных измерений дальностей спутников LAGEOS-1/2, AJISAI, Stella, Starlette за период 13 лет (с 2001 по 2013 гг.) с одновременным определением координат 25 станций глобальной сети Международной Службы Лазерной Локации (International Laser Ranging Service/ILRS), в том числе 9 российских, параметров вращения Земли и коэффициентов гравитационного поля до четвертой степени и порядка. Сравнительная оценка точности с результатами ведущих центров анализа показала высокую точность полученных рядов геодинамических параметров.
3. Показано, что комбинированная обработка лазерных наблюдений низко- и высокоорбитальных спутников позволит значительно (примерно в 5 раз) повысить точность определения вариаций продолжительности суток ΔLOD (и поправок к Всемирному времени $\Delta UT1$) из обработки лазерных наблюдений спутников, а также значительно повысить надежность определения некоторых коэффициентов гравитационного поля из наблюдений космических комплексов типа GRACE и изучать их временные вариации.

Практическая значимость работы:

1. Разработанная методика комбинированного анализа лазерных наблюдений разноорбитальных геодезических ИСЗ и созданный на основе этой методики программно-

вычислительный комплекс, включающий алгоритм метода численного интегрирования с аппроксимацией правых частей дифференциальных уравнений движения смещенными полиномами Чебышева первого рода, может быть использован для определения геодинамических параметров и их временных вариаций с высокой точностью.

2. Разработанная методика и программно-вычислительный комплекс для уточнения коэффициентов геопотенциала до четвертой степени и порядка предполагается использовать в дальнейшем для исследований изменений водного баланса в глобальном масштабе, вариаций уровня Мирового океана и объема ледниковых масс с целью выявления их взаимосвязи с глобальными изменениями.
3. Разработанная методика совместного определения геодинамических параметров путем комбинирования лазерных измерений дальностей до спутников с разными высотами орбит может быть применена при решении задач фундаментального координатно-временного обеспечения системы ГЛОНАСС.
4. Разработанный автором программный комплекс предполагается использовать в Институте астрономии РАН для получения ежегодного решения общеземной системы координат и параметров вращения Земли по данным лазерной локации спутников с глобальной сети станций ILRS с целью представления его в МСВЗ для совместного анализа с данными ведущих аналитических центров.

Личный вклад автора заключается в разработке методики, алгоритмов и программного комплекса для обработки лазерных наблюдений. Автором лично выполнены экспериментальные исследования влияния малых возмущающих факторов на определяемые геодинамические параметры, все вычислительные работы с использованием реальных лазерных наблюдений спутников LAGEOS-1/2, AJISAI, Stella, Starlette со станций глобальной сети за 13-летний период и анализ полученных результатов.

Методом исследования являются:

- изучение и анализ современной научной литературы (отечественной и зарубежной) по данной проблеме;
- разработка алгоритмов и программно-вычислительного комплекса;
- экспериментальные вычисления с использованием реальных лазерных измерений дальностей со станций глобальной сети ILRS с помощью разработанного программно-вычислительного комплекса, анализ полученных результатов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Методика и алгоритмы комбинированной обработки лазерных измерений дальностей до геодезических спутников с разными высотами орбит.
2. Программно-вычислительный комплекс для математической обработки лазерных наблюдений геодезических ИСЗ на длительных интервалах времени для определения орбит и геодинамических параметров.
3. Результаты исследования влияния малых возмущающих факторов и нагрузочных эффектов, таких как атмосферные приливы, перемещения неприливных масс в атмосфере и океанах, альbedo Земли, атмосферная неприливно-нагрузка, на определяемые геодинамические параметры и орбиты спутников.
4. Результаты определения геоцентрических координат станций глобальной сети ILRS, в том числе 9 российских станций, параметров вращения Земли и коэффициентов гравитационного поля до четвертой степени и порядка по данным лазерных наблюдений спутников LAGEOS-1/2, AJISAI, Stella, Starlette за период 13 лет (с 2001 по 2013гг.).

Апробация работы

Результаты, полученные в работе, докладывались на следующих международных и российских конференциях:

1. 67-ая научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых МИИГАиК. МИИГАиК, Москва, 3-4 апреля 2012г.
2. Конференция молодых ученых ИНАСАН. ИНАСАН, Москва, 5 ноября 2012г.
3. 68-ая научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых МИИГАиК. МИИГАиК, Москва, 9-10 апреля 2013 г.
4. Конференция молодых ученых ИКИ РАН. ИКИ РАН, Москва, 3-5 апреля 2013 г.
5. 5-я Всероссийская конференция «Фундаментальное и прикладное координатно-временное и навигационное обеспечение (КВНО-2013)». ИПА РАН, С.-Петербург, 14-19 апреля 2013 г.
6. Научная ассамблея Международной Ассоциации Геодезии. Потсдам, Германия, 1-6 сентября, 2013г.
7. Конференция молодых ученых ИНАСАН. ИНАСАН, Москва, 5 ноября 2013г.
8. 69-ая научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых МИИГАиК. МИИГАиК, Москва, 9-10 апреля 2014г.
9. Международная научно-техническая конференция «Геодезия, картография, кадастр – современность и перспективы». МИИГАиК, Москва, 27-28 мая 2014 г.
10. 40-ая научная ассамблея КОСПАР. МГУ, Москва, 2-10 августа 2014г.

11. 19-ый симпозиум Международной Службы Лазерной Локации. Аннаполис, США, 27-31 октября 2014 г.
12. Общественный семинар по небесной механике в Государственном астрономическом институте имени П.К. Штернберга МГУ (ГАИШ МГУ), 10 февраля 2015г.
13. Семинар «Проблемы происхождения и эволюции кометно-астероидного вещества в Солнечной системе и проблема астероидной опасности». ИНАСАН, Москва, 18 марта, 2015г.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 6 печатных работах:

1. Эбауэр К.В., Сорокин Н.А. Особенности учета гравитационных возмущений от Луны, Солнца и планет Солнечной системы при определении орбит геодезических ИСЗ // Изв. ВУЗов: Геодезия и Аэрофотосъемка, 2013. № 1. С. 14-19.
2. Эбауэр К.В., Сорокин Н.А. Высокоточные методы численного интегрирования уравнений движения ИСЗ с чебышевской аппроксимацией для обработки лазерных наблюдений ИСЗ // Известия ВУЗов: Геодезия и Аэрофотосъемка, 2013. № 3. С. 3-8.
3. Эбауэр К.В. Исследование возмущенного движения ИСЗ БЛИЦ // Изв. ВУЗов: Геодезия и Аэрофотосъемка, 2013. № 5. С. 22-28.
4. Эбауэр К.В. Разработка программного комплекса для обработки высокоточных лазерных наблюдений искусственных спутников Земли (первые результаты) // Труды ИПА РАН. 2013. Т. 27. С. 558-561.
5. Эбауэр К.В. Исследование влияния периодических эффектов в атмосфере и океанах на геодинамические параметры, определяемые из обработки лазерных наблюдений ИСЗ // Геодезия и Картография. 2015. № 4.
6. Эбауэр К.В. Совместное определение координат станций, параметров вращения Земли и коэффициентов гравитационного поля из комбинированной обработки лазерных наблюдений ИСЗ. Теоретические и практические аспекты // Геодезия и Картография. 2015. № 6 (в печати).

2 работы написаны совместно с другим автором. В совместных работах автору принадлежат разработка методики, алгоритмов и программного обеспечения, выполнение численных экспериментов и интерпретация полученных результатов.

Зарегистрировано одно программное обеспечение:

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014663125. ГеоИС (Геодинамические Исследования) / Эбауэр К.В.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы (всего 136 наименований, из них 105 на иностранном языке) и пяти приложений. Работа изложена на 138 страницах машинописного текста и содержит 42 иллюстрации и 31 таблицу. Приложения занимают 8 страниц и включают 4 таблицы и 7 графиков.

1 Лазерная локация ИСЗ как средство изучения динамических параметров Земли

1.1 Методы наблюдения

Изучение Земли астрометрическими и геодезическими методами подразумевает решение трех основных задач (Рисунок 1.1):

- высокоточное определение положения точек земной поверхности, а также скоростей их изменения и положения центра масс Земли (геоцентра);
- исследования изменений ориентации оси вращения в теле Земли (движение полюсов) и в пространстве (прецессия и нутация), а также изучение вариаций скорости вращения Земли;
- определение гравитационного поля Земли, изучение его временных вариаций.

Необходимым условием определения и изучения этих трех составляющих является наличие общей системы отсчета, относительно которой проводятся все измерения. Построение и контроль стабильности такой системы отсчета есть первоочередная задача космической геодезии.

В настоящее время исследования Земли выполняются с применением 6 основных методов наблюдений, каждый из которых позволяет определять некоторый набор геодинамических параметров:

- Радиоинтерферометрия со сверхдлинными базами (РСДБ – VLBI).
- Глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС – ГЛОНАСС, GPS, COMPASS, GALILEO).
- Доплеровские наблюдения (система ДОРИС - Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite/DORIS).
- Лазерные наблюдения спутников (SLR) и Луны (LLR).
- Спутниковая альтиметрия.
- Спутниковая градиентометрия (SGG) и системы «спутник-спутник» (STT).

Каждый из методов решает определенный круг задач (Таблица 1.1) [111]. В таблице 1.1 красным цветом отмечены параметры, определение которых потенциально возможно указанным



Рисунок 1.1 – Основные задачи космической геодезии [104]

измерительным средством, желтым – параметры, регулярно получаемые из обработки соответствующих измерений в центрах анализа, зеленым – параметры, для которых указанный метод является основным.

Таблица 1.1 – Применение измерительных средств космической геодезии. Дополненная версия таблицы, основанная на работе [111]

Определяемые параметры	РСДБ	ГНСС	ДОРИС	SLR	LLR	Альтиметрия	SGG STT
Нутация	Зеленый	Красный	Белый	Красный	Желтый	Белый	Белый
Движение полюсов	Желтый	Зеленый	Красный	Желтый	Красный	Белый	Белый
UT1-UTC	Зеленый	Белый	Белый	Белый	Желтый	Белый	Белый
ΔLOD	Желтый	Зеленый	Желтый	Зеленый	Красный	Белый	Белый
Амплитуды океанических волн	Желтый	Желтый	Желтый	Желтый	Белый	Зеленый	Желтый
Координаты станций	Зеленый	Зеленый	Зеленый	Зеленый	Желтый	Красный	Белый
Гравитационная постоянная GM	Белый	Красный	Красный	Зеленый	Желтый	Белый	Белый
Координаты геоцентра	Белый	Желтый	Желтый	Зеленый	Красный	Красный	Красный
Гравитационное поле	Белый	Желтый	Желтый	Зеленый	Красный	Красный	Зеленый

Каждый метод наблюдений обладает своими преимуществами и недостатками, о которых необходимо упомянуть.

РСДБ является единственным инструментом для установления небесной системы координат (ICRF) и параметров перехода к земной системе (ITRF), поскольку она фиксируется относительно внегалактических радиоисточников. РСДБ позволяет непосредственно определять параметры нутации и поправки к Всемирному времени $\Delta UT1$. Особенности этого метода измерений является то, что он не зависит от спутниковых орбит (исключаются погрешности моделирования орбит ИСЗ), и он всепогоден.

К существенным недостаткам стоит отнести высокую стоимость телескопов и значительные инструментальные ошибки в виду массивности конструкций. Кроме того, координаты станций определяются не относительно геоцентра, а относительно некоторого

выбранного начала. В связи с этим метод используется в основном для установления ICRF, связей между ICRF и ITRF.

Спутниковые методики (в данном случае имеются в виду ГНСС, DORIS и SLR) имеют похожий круг решаемых задач (см. таблицу 1.1) в силу того, что все они основываются на орбитах ИСЗ, однако наблюдения выполняются в разных диапазонах – радио- и оптическом.

Метод ГНСС получил наиболее широкое распространение благодаря своим очевидным достоинствам: сравнительно низкая стоимость наземной аппаратуры (необходим только приемник), всепогодность, высокая частота наблюдений (до 100 наблюдений в секунду). Эти факторы позволяют вести наблюдения непрерывно, в независимости от погодных условий. В результате уже сейчас стало возможным определять координаты полюса на субсуточных интервалах времени [122]. Причем получение результатов возможно практически в реальном времени.

Основное применение ДОРИС – высокоточное определение орбит спутников, оснащенных альтиметрической аппаратурой для изучения поверхности океанов. При наличии нескольких таких спутников на околоземных орбитах появилась возможность использовать эту систему для определения координат станций-маяков, положения геоцентра и вариаций продолжительности суток ΔLOD . Метод также является всепогодным. Кроме того, для ее реализации не требуются специальные конструкции космического аппарата (КА). Обычно модулем DORIS оснащается КА, выполняющий научные функции (например, ИСЗ ENVISAT или океанографические ИСЗ TOPEX/Poseidon, Jason и др.).

В последнее время получили активное развитие метод спутниковой градиентометрии и системы «спутник-спутник». Это связано в первую очередь с тем, что эти методы позволяют определять параметры гравитационного поля Земли с высоким разрешением. За 2 десятилетия реализовано несколько проектов (CHAMP, GRACE и GOCE). В настоящий момент разрабатывается проект GRACE Follow-on [128].

Круг задач, решаемых с использованием лазерной локации спутников, чрезвычайно широк – он охватывает все задачи космической геодезии (Рисунок 1.1). Кроме того, это единственный метод измерений, позволяющий непосредственно определять координаты геоцентра (исходное начало общеземной системы координат).

К достоинствам данного метода относятся:

- Система оптическая, поэтому не зависит от ошибок измерения запаздывания сигнала при прохождении атмосферы. При этом поправки за рефракцию могут быть учтены с точностью до долей сантиметра [91,92].
- Широкий набор наблюдаемых ИСЗ.
- Высокая точность измерений расстояний (0,5-2,0см [42]).
- Получение результатов измерений дальности до спутника практически в реальном времени.
- Наличие результатов измерений в банках данных, начиная с 1975г., что позволяет изучать некоторые параметры на продолжительном временном интервале.
- Определение координат геоцентра и геоцентрических координат станций.
- Контроль точности определения орбит ИСЗ с использованием радиотехнических методов в силу различной физической природы. Все спутники системы ГЛОНАСС оборудованы лазерными отражателями. В результате становится возможным т.н. космическая коллокация (т.е. совмещение разных типов измерений на одном спутнике) [122].

Первые лазерные наблюдения ИСЗ выполнены в 1965 году – наблюдался ИСЗ BEACON-V. Точность первых наблюдений составляла несколько метров [115]. Однако наиболее активное развитие лазерная локация ИСЗ получила в 70х-90х гг. XX века. В 1971-1973гг. успешно проведен международный эксперимент ISAGEX [12,19] по определению координат станций и некоторых гармоник геопотенциала фотографическим методом и методом лазерной локации, координируемый Комитетом космических исследований Франции. В эксперименте участвовали также станции Астросовета АН СССР: Афгой, Восток, Даланзадгад, Звенигород, Каир, Кергелен, Мирный, Молодежная, Ново-Лазаревская, Рига, Ужгород, Улан-Батор, Южно-Сахалинск. Результаты данного эксперимента позволили уточнить координаты некоторых станций геометрическим методом (например, Улан-Батор), а также уточнить некоторые тессеральные гармоники геопотенциала, во многом благодаря наличию продолжительных рядов качественных лазерных наблюдений. Анализ результатов показал, что точность лазерных наблюдений в эксперименте ISAGEX составила уже 1-2 метра.

Запуск двух сферических спутников, специально разработанных для лазерной локации, – Starlette (1975г.) и LAGEOS-1 (1976г.) – открыл новую страницу в развитии рассматриваемого метода. В период с 1983г. по 1984г. реализуется международный проект MERIT-COTES, направленный на определение параметров ориентации Земли и установление стандартной земной системы отсчета. Весомый вклад в этот проект внесла лазерная локация спутников.

К концу 80х гг. по лазерным наблюдениям ИСЗ получены значительные результаты, превосходящие по точности другие измерительные средства. Приведем лишь некоторые из них:

1. получены параметры вращения Земли со среднеквадратическими погрешностями менее 2мс дуги для координат полюса и менее 0,15мс для ΔLOD [119];
2. уточнены координаты 26 станций со среднеквадратической погрешностью не более 80мм [119];
3. различными научными центрами разработаны модели гравитационного поля, позволившие повысить точность определения орбит спутников. Так, модель GEM-L2, полученная по лазерным наблюдениям, позволила повысить точность определения орбиты ИСЗ LAGEOS в 4 раза – с 1м до 25см [81];
4. получены параметры некоторых океанических приливных волн, согласующиеся с результатами, полученными из обработки различных типов наблюдений (наземных и спутниковых) [133].

В конце 80х гг. проводятся первые эксперименты по определению геодезических параметров из совместной обработки наблюдений разноорбитальных ИСЗ. Так, в работе [57] приводятся результаты определения ПВЗ, нагрузочных чисел Лява и Шида второй степени, а также 44 океанических приливных волн из совместной обработки наблюдения ИСЗ LAGEOS-1 и Starlette.

Для дальнейшей координации работ по построению единой системы отсчета и определению параметров ориентации Земли в международном масштабе в 1988г. организуется Международная Служба Вращения Земли (International Earth Rotation Service and Reference System Service – IERS). В задачи этой службы входит установление Международной Небесной Системы Отсчета (ICRS) и ее реализации – Международной Небесной Системы Координат (ICRF), установление Международной Земной Системы Отсчета (ITRS) и ее реализации – Международной Земной Системы Координат (ITRF), определение параметров ориентации Земли (Earth Orientation Parameters – EOP) и разработка единых стандартов вычисления орбит ИСЗ и координат наземных пунктов (учет нагрузочных эффектов).

К середине 90х гг. XX века точность измерения дальностей достигает субсантиметровой точности [115]. На орбиту выводятся новые спутники, предназначенные для лазерной локации: AJISAI (1986г.), Эталон-1 и Эталон-2 (1989г.), LAGEOS-2 (1992г.), Stella (1993г.).

Для координации работ международной сети станций лазерной локации спутников с целью выполнения геофизических исследований и установления высокоточной земной системы

отсчета Международной Ассоциацией Геодезии (International Association of Geodesy – IAG) в 1998 году образована Международная Служба Лазерной Локации (International Laser Ranging Service – ILRS) [103]. На настоящий момент в ILRS входят 50 станций (Рисунок 1.2). Данные со станций поступают в два банка данных (в США¹ и Германии²) в виде сырых измерений (т.н. *full-rate data*) и в виде нормальных точек, которые получаются в результате математической обработки сырых измерений. Обычно одна нормальная точка получается из обработки сырых измерений на интервале несколько минут (в зависимости от высоты орбиты спутника). Точность нормальных точек выше, чем точность самих измерений за счет исключения некоторых систематических ошибок и может достигать 1мм [98].

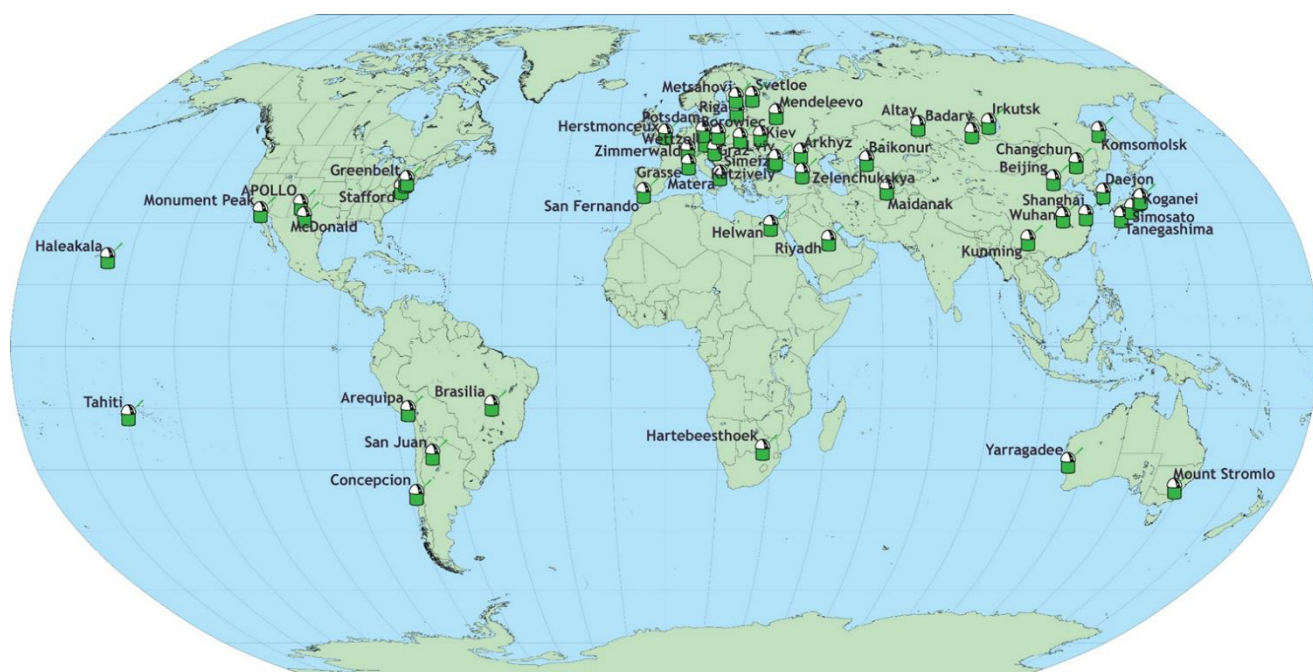


Рисунок 1.2– Станции Международной Службы Лазерной Локации (ILRS)³

На сегодняшний день станциями ILRS наблюдается порядка 30 спутников, оборудованных лазерными отражателями. Среди них не только спутники, непосредственно предназначенные для решения задач геодезии, геофизики и геодинамики, но и научно-исследовательские спутники, для которых нужны определения точных элементов орбит. Средствами Службы производится мониторинг и контроль орбит космических градиентометрических комплексов и систем «спутник-спутник» (GOCE, GRACE, CHAMP), выводимых на орбиту спутников навигационных систем ГЛОНАСС, Galileo, QZSS, Compass, а также различных спутников дистанционного зондирования Земли. В настоящий момент

¹ <ftp://cddis.gsfc.nasa.gov/slr>

² <ftp://edc.dgfi.badw.de/pub/slr/>

³ <http://ilrs.gsfc.nasa.gov/network/stations/active/index.html>

орбитальная группировка «лазерных геодезических» ИСЗ (т.е. спутников сферической формы, специально разработанных для использования в лазерных наблюдениях) насчитывает 9 спутников (Таблица 1.2) с различными высотами и углами наклона орбит.

Отечественные спутники Эталон-1 и Эталон-2 выведены на орбиту в 1989г. и имеют самую большую высоту орбиты (почти 20000км). Одна из основных целей запуска этих спутников – изучение негравитационных эффектов, воздействующих на спутники системы ГЛОНАСС [94]. В то же время эти спутники используются, благодаря стабильности их орбиты, для определения вариаций продолжительности суток.

Отдельно стоит отметить ИСЗ БЛИЦ, запущенный в 2009г. (в настоящий момент прекратил свое существование после столкновения с фрагментом космического мусора 22 января 2013г. [14]). Спутник БЛИЦ был разработан в ОАО «Научно-производственная корпорация «Системы прецизионного приборостроения» (далее ОАО «НПК «СПП») для исследования возможностей применения линзы Люнеберга в качестве отражателя для лазерной локации ИСЗ с субмиллиметровой точностью измерения дальностей [125].

Таблица 1.2 – ИСЗ, разработанные для лазерной локации и наблюдаемые станциями ILRS

ИСЗ	Страна	Год запуска	Высота орбиты, км	Угол наклона орбиты, °	Отношение площади поперечного сечения к массе, м ² /кг
Starlette	Франция	1975	800-1100	49,84	0,0009425
LAGEOS-1	США	1976	5860	109,90	0,0006948
AJISAI	Япония	1986	1500	50,04	0,0053000
Эталон-1	СССР	1989	19140	65	0,0009294
Эталон-2	СССР	1989	19140	65	0,0009294
LAGEOS-2	США/Италия	1992	5620	52,67	0,0006975
Stella	Франция	1993	830	98,57	0,0009625
Larets	Россия	2003	691	98,2	0,0014878
LARES	Италия	2012	1450	69,5	0,0002690
БЛИЦ	Россия	2009	832	98,8	0,0030257

(утрачен в 2013)

Спутник состоит из внутреннего стеклянного шара (радиус 53,52мм, коэффициент преломления $n=1,76$) и внешней стеклянной оболочки (радиус 85,11мм, коэффициент преломления $n=1,47$), состоящей из двух равных полусфер, одна из которых прозрачна, а другая имеет алюминиевое отражающее покрытие. При проектировании ИСЗ БЛИЦ был использован совершенно иной подход к конструкции отражателей для применения в лазерной локации спутников. Обычно в качестве отражающих элементов применяются уголковые отражатели, расположенные равномерно по всему спутнику (например, Эталон-1) или собранные в панели (например, такие панели уголковых отражателей размещают на спутниках систем ГЛОНАСС и GPS). Все спутники, в конструкции которых использованы уголковые отражатели, имеют ошибку цели, то есть смещение центра отражения лазерного импульса относительно центра масс спутника в зависимости от угла прихода лазерного излучения на отражатель, и ненулевую сигнатуру (удлинение отраженного импульса и искажение его формы). Эти факторы препятствуют достижению субмиллиметровой точности измерения дальностей. Благодаря особенностям конструкции ИСЗ БЛИЦ имеет практически нулевую ошибку цели и нулевую сигнатуру. Поэтому прецизионная привязка центра оптического отражения к центру масс спутника осуществляется с погрешностью менее 100мкм во всех условиях космического полета при произвольных рабочих углах прихода излучения на отражатель.

Указанные в таблице 1.2 геодезические спутники можно разделить на 2 типа по высоте орбиты: низкоорбитальные и высокоорбитальные. Высокоорбитальные используются для установления высокоточной общеземной системы координат (ITRF) и определения ПВЗ. Это вызвано прежде всего тем, что данные ИСЗ практически не подвержены короткопериодическим вариациям гравитационного поля Земли, а также практически отсутствует влияние атмосферного торможения. По наблюдениям этих спутников проводятся исследования временных вариаций низкочастотной составляющей гравитационного поля Земли (до второй степени и порядка) [4,48,97]. Известны некоторые работы по использованию наблюдений низкоорбитальных спутников для определения более тонкой структуры гравитационного поля Земли [47] и параметров вращения Земли [113]. Однако требуемых точностей достичь не удавалось.

Ограничение использования низкоорбитальных спутников для решения геодезических задач вызвано прежде всего тем фактом, что эти ИСЗ подвержены значительному влиянию атмосферного торможения [27], для учета которого необходимо знать плотность воздуха в каждой точке траектории полета. Плотность воздуха, в свою очередь, – величина непрерывная, зависящая от множества факторов. Смоделировать ее абсолютно точно не представляется возможным. Поэтому имеют место ошибки моделей атмосферы, которые непосредственным

образом влияют на точность определяемых параметров. В настоящее время наиболее эффективными считаются модели атмосферы NRLMSISE-00 [106], DTM-2013 [41] и JB2008 [39].

1.2 Принцип лазерной локации и уравнение наблюдений

Принцип, лежащий в основе лазерной локации ИСЗ, прост. С наземного пункта посылаются ультракороткие импульсы в направлении на ИСЗ, при этом фиксируется момент отправки сигнала. Затем на этом же пункте регистрируется отраженный от спутника сигнал. В результате измеряется время прохождения сигнала «туда» и «обратно», по которым можно вычислить двойные дальности (т.н. *two-way ranges*). Технические аспекты работы спутниковых лазерных дальномеров подробно описаны в работе [53].

В силу влияния тропосферы, релятивистских и других эффектов необходимо внести соответствующие поправки в измеренные дальности. В общем виде уравнение наблюдений лазерной локации имеет вид:

$$r_{изм} = \frac{1}{2}(\tau_{изм}c) - \Delta_{троп} - \Delta_{рел} + \Delta_{цмс} + \Delta_{RB}. \quad (1.1)$$

Здесь

$\tau_{изм}$ – двухпутевое время прохождения лазерного импульса;

$c = 299792458$ м/с – скорость света [105];

$\Delta_{троп}$ – поправка за влияние тропосферы;

$\Delta_{рел}$ – поправка за релятивистские эффекты (задержка Шапиро);

$\Delta_{цмс}$ – поправка за несовпадение центра масс спутника, к которому относятся получаемые из интегрирования координаты, и отражателей (данная величина зависит от наблюдаемого спутника);

Δ_{RB} – поправка за систематическую погрешность лазерного дальномера (т.н. *range bias*), которая является уникальной для каждой комбинации пункт-спутник.

Рассмотрим подробнее каждую из поправок.

1.2.1 Поправка за влияние тропосферы

Точность лазерной локации во многом зависит от точности применяемой модели для учета тропосферной задержки, которая складывается из зенитной задержки и масштабирующей

функции, учитывающий угол возвышения над горизонтом. На совещании Рабочей Группы Анализа ILRS в 2006г. в качестве стандарта была принята масштабирующая функция Мендеса [91] и модель зенитной задержки Мендеса-Павлиса [92]. Сравнение этой модели с другими (Марини-Мюррея [84] и Саастамойнена [112]), а также с реальными измерениями на 180 станциях, показало, что новая модель зенитной задержки для длины волны 532нм на порядок точнее и позволяет работать с измерениями, угол возвышения которых составляет от 3^0 до 10^0 (модель тропосферной задержки Марини-Мюррея рассчитана для углов возвышения не менее 10^0).

1.2.2 Релятивистская поправка в измеренные дальности

Релятивистская поправка в измеренные дальности является следствием эффекта Шапиро (или гравитационного замедления времени), вызванного полем тяготения Земли [117]. Для вычисления этой поправки в измеренные дальности применяется следующее выражение:

$$\Delta_{rel} = \frac{2GM_{\oplus}}{c^3} \ln \left(\frac{|\vec{R}| + |\vec{r}| + |\vec{\rho}|}{|\vec{R}| + |\vec{r}| - |\vec{\rho}|} \right), \quad (1.2)$$

где

$GM_{\oplus} = 3,986004415 \text{ кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$ – геоцентрическая гравитационная постоянная [105];

$|\vec{R}|, |\vec{r}|$ – модули геоцентрических радиус-векторов пункта и спутника;

$|\vec{\rho}|$ – модуль радиус-вектора «пункт-спутник».

Для ИСЗ LAGEOS-1 (высота орбиты $\sim 6000 \text{ км}$) данная поправка составляет порядка 7мм, а для ИСЗ LARES (высота орбиты $\sim 1500 \text{ км}$) – 3-4мм.

1.2.3 Поправка за центр масс спутника

Необходимость учета данной поправки вызвана тем, что орбита относится к центру масс спутника, а сигнал, посылаемый с пункта, отражается от отражателя, расположенного на некотором расстоянии от центра масс. Традиционно эта поправка определялась инструментальным методом перед запуском спутника и считалась постоянной для всех типов лазерных дальномеров. Однако в работе [98] приводятся доказательства зависимости этой величины от характеристик используемого дальномера. В этой же работе разработана методика

определения поправки за центр масс спутника для пяти спутников: LAGEOS-1/2, Эталон-1/2, AJISAI. Для остальных ИСЗ поправки считаются постоянными и доступны в сети Интернет⁴.

1.2.4 Поправка за систематические погрешности лазерных дальномеров

Обычно величина систематической погрешности лазерного дальномера (*range bias*) определяется из решения (то есть является определяемым параметром) и включает в себя различные погрешности лазерного дальномера, часов, определенных метеопараметров, задержек в системе и др. [134].

Как показано в работе [118], игнорирование *range bias* может привести к скачку при определении высот станций. Однако, определение координат станций (высот) и величин *range bias* для всех станций, участвующих в решении, ведет к высокой корреляции между этими величинами, а, значит, и к ослаблению всей системы нормальных уравнений. Поэтому Рабочей Группой Анализа ILRS разработаны рекомендации по определению величин *range bias* для конкретных станций, а также даются эти величины для станций и моментов времени, когда это необходимо⁵.

1.3 Выводы к главе 1

В главе 1 рассмотрены наблюдательные методы космической геодезии, их достоинства и недостатки. Показан вклад каждого метода в изучение Земли.

Представлен краткий исторический обзор метода лазерной локации и показано текущее состояние орбитальной группировки спутников, предназначенных для лазерной локации, и сети станций наблюдения.

Рассмотрены поправки в измеренные дальности, которые необходимо учитывать для достижения высоких точностей:

- вычисление тропосферной задержки с применением модели Мендеса-Павлиса [92] и масштабирующей функции Мендеса [91], что делает возможным использование наблюдений с углами возвышения от 3^0 до 10^0 ;
- релятивистская поправка [117], величина которой зависит от высоты орбиты спутника и составляет порядка нескольких мм;
- прецизионная привязка оптического центра отражателя к центру масс спутника;
- поправка за систематические погрешности лазерных дальномеров.

⁴ http://ilrs.gsfc.nasa.gov/missions/satellite_missions/current_missions/index.html

⁵ http://ilrs.dgfi.badw.de/fileadmin/data_handling/ILRS_Data_Handling_File.snx

2 Динамический метод определения параметров

Динамический метод определения геодинимических параметров по лазерным наблюдениям спутников основан на использовании следующего уравнения:

$$\bar{\rho} = \bar{r}_i - \bar{R}_j. \quad (2.1)$$

Выражение (2.1) связывает топоцентрический вектор ИСЗ $\bar{\rho}$, его геоцентрический вектор $\bar{r}_i = (x \ y \ z)_i^T$ и геоцентрический вектор станции наблюдения j $\bar{R}_j = (X \ Y \ Z)_j^T$ в любой момент времени i . Для лазерной локации ИСЗ величина $\rho = |\bar{\rho}| = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}$ есть топоцентрическое расстояние между пунктом j и спутником в момент времени i .

Компоненты радиус-вектора ИСЗ (и компоненты скорости ИСЗ) определяются из интегрирования дифференциальных уравнений движения второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial x}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (2.2)$$

В выражении (2.2) F – суммарная сила, действующая на ИСЗ, включающая влияние гравитационных и негравитационных возмущений. Для интегрирования уравнений (2.2) необходим вектор начальных условий

$$\bar{r}_0 = (x_0 \ y_0 \ z_0 \ \dot{x}_0 \ \dot{y}_0 \ \dot{z}_0)^T, \quad (2.3)$$

компонентами которого являются координаты и скорости ИСЗ на начальный момент времени t_0 (в случае, если задача решается в прямоугольных координатах).

2.1 Шкалы времени и системы координат

2.1.1 Системы координат и преобразования между ними

Небесная и земная системы координат

В Соглашениях МСВЗ 2010 [105] определены две базовые системы отсчета: Международная Небесная Система Отсчета (ICRS) и Международная Земная Система Отсчета (ITRS), – которые реализованы в виде соответствующих опорных систем координат:

- Международная Небесная Система Координат (ICRF);
- Международная Земная Система Координат (ITRF);

Положения небесных тел (планет, Луны, Солнца) определяются именно в первой системе. Кроме того, она используется для интегрирования уравнений движения ИСЗ. При этом начало

системы переносится в геоцентр (таким образом, система становится Геоцентрической Небесной Системой Отсчета (GCRS)), так как рассматривается движение околоземных спутников. Система ICRF является заменой системе каталога FK5. Текущая, вторая, версия системы (ICRF-Ext.2) основана на РСДБ-наблюдениях 3119 внегалактических объектов (против 608 объектов у первой версии). Стабильность осей системы ICRF находится на уровне 10 микросекунд дуги [62]. Положение основной плоскости близко к положению среднего экватора эпохи J2000.0, положение начальной точки – к положению точки весеннего равноденствия на эпоху J2000.0.

Земная система координат – пространственная система координат, вращающаяся вместе с Землей. В данной системе обычно задаются координаты пунктов наблюдения, а также задается разложение гравитационного поля Земли. В настоящий момент общепринятой является Международная Земная Система Отсчета (ITRS). ITRS была принята на Генеральной Ассамблеи Международного Союза Геодезии и Геофизики в 2007г. [105] и удовлетворяет следующим условиям:

1. Система отсчета геоцентрическая, начало отсчета – центр масс Земли, включая океаны и атмосферу.
2. Единица измерения – метр.
3. Ориентировка оси Z системы соответствует полюсу ВИН1984.0 [67]. Полюс ВИН был установлен в 1967г., причем погрешности согласования его с Международным Условным Началом (МУН) составляют не более 0,03с дуги [89].
4. Эволюция системы со временем предполагается с условием отсутствия вращения (*No-Net-Rotation – NNR*).

Реализацией системы ITRS служит Международная Земная Система Координат (ITRF), представленная сетью станций, распределенных по земной поверхности. Текущая версия – ITRF2008 – закреплена каталогом координат и линейных скоростей глобальной сети станций, приведенных на эпоху J2005.0. Служба ILRS ведет собственный каталог, который пополняется по мере появления новых станций лазерных наблюдений. Такой каталог носит название SLRF, текущая версия – SLRF2008 – содержит координаты и скорости всех 174 станций лазерных наблюдений, действующих в настоящее время и действовавших ранее. Для приведения каталожных координат пунктов на текущую эпоху (эпоху наблюдения) необходимо, учитывая разницу между текущей эпохой и эпохой каталога, вычислить приращения координат станций по формуле:

$$X_i = X_0 + V_0 \frac{(MJD_i - MJD_0)}{365,25}. \quad (2.4)$$

В выражении (2.4) под X_i, X_0, V_0 подразумевается координата X на эпоху наблюдения i , каталожная координата на начальную эпоху и линейная скорость соответственно. По этой формуле вычисляются также поправки к компонентам Y и Z .

Связь двух систем осуществляется с помощью следующего выражения:

$$\bar{X}_{ITRS} = PN(t)S(t)P(t)\bar{X}_{GCRS}, \quad (2.5)$$

где матрицы преобразования $PN(t), S(t), P(t)$ описывают движение небесного полюса в небесной системе координат (прецессия и нутация), собственное вращение Земли вокруг оси и движение полюса Земли в земной системе. Движение небесного полюса в небесной системе координат определяется текущей теорией прецессии-нутации (теория прецессии-нутации IAU2006/2000A [105]). Собственное вращение Земли определяется Углом Вращения Земли (*Earth Rotation Angle – ERA*), который связан со шкалой Всемирного времени UT1. Вследствие влияния внешних сил на Землю имеют место неравномерности вращения Земли, выражающиеся в колебании угловой скорости вращения. В терминах шкал времени этот эффект выражается через поправку $\Delta UT1 = UT1 - UTC$, описывающую разность между равномерно-ступенчатой шкалой UTC (а значит и равномерным атомным временем AT) и шкалой UT1, задаваемой вращением Земли. Непосредственное определение этой величины возможно только из обработки РСДБ-измерений и данных лазерной локации Луны. Из спутниковых наблюдений определяется производная величина – вариации продолжительности суток (*length of day excess – ΔLOD*):

$$\Delta LOD = -\frac{d}{dt} \Delta UT1. \quad (2.6)$$

Положение полюс в земной системе задается величинами x_p, y_p в полярной системе координат, начало которой находится в IERS Reference Pole (IRP), ось x направлена по касательной к начальному меридиану (Гринвичскому), а ось y – по касательной к меридиану 270° . Положение IRP совпадает с положением полюса ВИН в пределах $0,005c$ дуги [105]. В результате соответствующей обработки результатов, полученных по различным методам наблюдения, МСВЗ получает т.н. продукт IERS C04 [35], включающий в себя помимо координат полюса x_p, y_p и поправок ко Всемирному времени $\Delta UT1$ (данная тройка составляет параметры вращения Земли/ПВЗ – *Earth rotation parameters/ERP*) также малый поправки в углы прецессии и нутации. Все вместе эти 5 величин носят названия параметров ориентации Земли (*Earth Orientation Parameters/EOP*).

Для использования в преобразованиях (2.5) величин $x_p, y_p, \Delta UT1$, публикуемых МСВЗ, необходимо выполнить интерполяцию на требуемые моменты в связи с тем, что величины приводятся на момент полуночи каждых суток. Кроме того, необходимо также учесть влияние приливных эффектов на указанные величины, а также влияние членов нутации с периодом менее 2 суток (не входят в текущую модель нутации IAU2000). Учет этих эффектов выполняется с привлечением программ ORTHO_EOP.F, PMSDNUT2.F и UTLIBR.F, распространяемых МСВЗ [105]. Кроме того, особого подхода требует учет долгопериодических приливных волн при интерполировании величин $\Delta UT1$. Так как вклад от этих волн уже включен в значения, публикуемые МСВЗ, процессу интерполирования на требуемый момент должен предшествовать процесс исключения этих величин из опубликованных значений. После интерполяции к полученному значению добавляется вклад от долгопериодических приливных волн, вычисленный на момент интерполяции. Для вычисления вклада долгопериодических приливных волн применяется программа RG_ZONT2.F [105].

Локальная система NEU

Для перевода прямоугольных геоцентрических координат X, Y, Z в локальную систему NEU (*north, east, up* – север, восток, вертикаль) используется следующая матрица преобразования:

$$U_{NEU} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{e} \\ \hat{u} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

При этом каждая строка в матрице U_{NEU} соответствует единичным векторам каждой компоненты NEU.

Орбитальная система RTN

В случае круговой (или околокруговой орбиты) оси системы RTN (*radial, transverse, normal* – радиальная, трансверсальная, бинормальная) направлены вдоль радиус-вектора Земля-спутник (R), по касательной к орбите (T), третий вектор направлен перпендикулярно к первым двум и дополняет систему до правой тройки вектором (N). При этом вектора R и T перпендикулярны. Для вычисления составляющих матрицы преобразования в систему RTN используются следующие выражения:

$$\bar{R} = \frac{\bar{x}}{r} \rightarrow \bar{N} = \bar{R} \times \frac{\dot{\bar{x}}}{v} \rightarrow \bar{T} = \bar{R} \times \bar{T}. \quad (2.8)$$

2.1.2 Шкалы времени

В процессе обработки наблюдений ИСЗ возникает необходимость использования различных шкал времени:

1. TAI – Международное атомное время. Эта равномерная шкала используется при интегрировании уравнений движения ИСЗ.
2. UT1 – Всемирное время. Является аргументом при вычислении гринвичского времени, определяющего вращение Земли.
3. UTC – Всемирное координированное время. Равномерно-ступенчатая шкала, которая является промежуточной между UT1 и TAI. Для поддержания разницы между UT1 и UTC в пределах 0,9с данная шкала периодически исправляется на 1 секунду (т.н. *leap second*). В результате разность между шкалами TAI и UTC постепенно увеличивается. Моменты наблюдения приводятся по шкале UTC.
4. TDB – Барицентрическое динамическое время. Является аргументом при вычислении эфемерид планет, Луны и Солнца.
5. TT – Земное время. Используется в качестве аргумента в преобразованиях систем координат. Связано с TAI следующим выражением: $TT = TAI + 31,184с$.

2.2 Вычисление правых частей дифференциальных уравнений движения

В выражении (2.2) суммарная сила F в общем виде записывается следующим образом:

$$F = F_{\oplus} + F_{tide} + F_{AOD} + F_{bodies} + F_{solar} + F_{drag} + F_{rel} + F_{emp}, \quad (2.9)$$

где

F_{\oplus} – влияние геопотенциала,

F_{tide} – влияние приливов (твердых, океанических, полюсных, атмосферных),

F_{AOD} – влияние непривливаемых перемещений масс в атмосфере и океане,

F_{bodies} – влияние тел Солнечной системы (Луны, Солнца, планет),

F_{solar} – световое давление,

F_{drag} – атмосферное торможение,

F_{rel} – влияние релятивистских эффектов (метрика Шварцшильда, эффект Линзе-Тирринга, прецессия ДеСиттера),

F_{emp} – эмпирическое ускорение.

Рассмотрим более подробно каждый из эффектов, входящих в выражение (2.9).

2.2.1 Геопотенциал

Ускорения, вызванные влиянием гравитационного поля Земли, традиционно вычисляются через разложение гравитационного потенциала Земли в ряд по сферическим функциям (в земной системе координат) [69]:

$$\ddot{r} = \nabla \frac{GM_{\oplus}}{r} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \right). \quad (2.10)$$

Здесь

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)^T;$$

$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ – нормированные присоединенные функции и полиномы Лежандра;

φ, λ – широта и долгота ИСЗ;

$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ – нормированные коэффициенты модели геопотенциала.

Обычно в выражении (2.10) ограничиваются некоторой конечной степенью $n = N$. Эта величина зависит от высоты орбиты ИСЗ над поверхностью Земли. Для спутников, высота орбиты которых составляет ~ 800 км, вполне достаточно ограничиться степенью $N = 90$, а для высоких (высота орбиты ~ 6000 км) $N = 20$ [105].

Полиномы Каннингэма

При вычислении производных (2.10) наиболее трудоемкой задачей является вычисление производных от функций и полиномов Лежандра по прямоугольным координатам спутника в виду их неявной зависимости. Использование полиномов Каннингэма позволяет упростить эту задачу в силу их явной зависимости от координат спутника и рекуррентного способа вычисления самих полиномов и их производных [17,18,51]:

$$\bar{V}_{nm} = \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{n+1} P_{nm}(\sin \phi) \cos m\lambda; \quad \bar{W}_{nm} = \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{n+1} P_{nm}(\sin \phi) \sin m\lambda. \quad (2.11)$$

Учитывая (2.11), перепишем выражение (2.10) в следующем виде:

$$U = \frac{\mu}{R_{\oplus}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \bar{V}_{nm} + \bar{S}_{nm} \bar{W}_{nm}). \quad (2.12)$$

Величины V_{nm}, W_{nm} вычисляются по рекуррентным формулам [17].

Однако необходимо не просто вычислить потенциал, а вычислить возмущающие ускорения, действующие на спутник. В проекции на оси прямоугольной системы координат возмущающие ускорения, вызванные несферичностью гравитационного поля Земли, можно представить в следующем виде:

$$\ddot{X}_{несф} = \sum_{n,m} \ddot{X}_{nm}; \quad \ddot{Y}_{несф} = \sum_{n,m} \ddot{Y}_{nm}; \quad \ddot{Z}_{несф} = \sum_{n,m} \ddot{Z}_{nm} \quad (2.13)$$

где каждое слагаемое в сумме вычисляется по соответствующим формулам [3]:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}_{nm}^{m=0} &= \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} (-\bar{C}_{n0} \bar{V}_{n+1,1}) \\ \ddot{X}_{nm}^{m>0} &= \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{(2n+3)}} (-\bar{C}_{nm} \bar{V}_{n+1,m+1} - \bar{S}_{nm} \bar{W}_{n+1,m+1}) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{(2-\delta_{0,m-1})(2n+3)}} (\bar{C}_{nm} \bar{V}_{n+1,m-1} + \bar{S}_{nm} \bar{W}_{n+1,m-1}) \right] \\ \ddot{Y}_{nm}^{m=0} &= \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} (-\bar{C}_{n0} \bar{W}_{n+1,1}) \\ \ddot{Y}_{nm}^{m>0} &= \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{(2n+3)}} (-\bar{C}_{nm} \bar{W}_{n+1,m+1} + \bar{S}_{nm} \bar{V}_{n+1,m+1}) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{(2-\delta_{0,m-1})(2n+3)}} (-\bar{C}_{nm} \bar{W}_{n+1,m-1} + \bar{S}_{nm} \bar{V}_{n+1,m-1}) \right] \\ \ddot{Z}_{nm} &= \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+1)(n-m+1)}{(2n+3)}} (-\bar{C}_{nm} \bar{V}_{n+1,m} - \bar{S}_{nm} \bar{W}_{n+1,m}) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Таким образом, для вычисления ускорений (2.14) необходимо знать полиномы $\bar{V}_{nm}, \bar{W}_{nm}$ до степени и порядка $n+1$, а для вычисления вторых производных от геопотенциала (см. пункт 2.4.2) – до степени и порядка $n+2$.

Формулы (2.14) определяют ускорения в системе координат, жестко связанной с Землей (ITRF). Для преобразования вектора ускорений из земной системы в небесную применяется выражение (2.5).

О моделях геопотенциала

К настоящему моменту разработано большое количество различных моделей геопотенциала, полученных с применением различных методов (лазерная локация, градиентометрия, наземная гравиметрия). В представленных исследованиях применялась модель EGM 2008 [102], так как ее применение рекомендовано последней редакцией Соглашений МСВЗ 2010 [105]. С этой моделью необходимо использовать следующие постоянные: $GM_{\oplus} = 398600,4415 \cdot 10^9 \text{ км}^3/\text{с}^2$, $a_e = 6378136,3 \text{ м}$ (если используется шкала времени ТТ). Модель была выведена на основе модели ITG-GRACE03S [88], полученной по наблюдениям комплекса GRACE. Данная модель имеет размерность 2159x2159. Указанная модель показала свою эффективность и точность при определении спутниковых орбит [76].

В Соглашениях МСВЗ 2010 [105] рекомендуется использовать значение для зональной гармоники (нулевой прилив) $\bar{C}_{20}(\text{нул. прилив}) = -0,48416948 \cdot 10^{-9}$, полученное не из обработки наблюдений комплекса GRACE, а из анализа данных лазерной локации за 17 лет. Это значение значительно отличается от соответствующей величины модели EGM 2008 [102] и имеет неопределенность порядка $2 \cdot 10^{-11}$ [49].

В рекомендуемой МСВЗ модели геопотенциала учитывается не только статическая составляющая гравитационного поля, но также и вековые изменения трех первых зональных коэффициентов [105]:

$$\bar{C}_{n0}(t) = \bar{C}_{n0}(t_0) + \frac{d\bar{C}_{n0}}{dt}(t - t_0), \quad n = 2, 3, 4. \quad (2.15)$$

В выражении (2.15) t_0 – эпоха J2000.0, на которую заданы значения \bar{C}_{n0} , а t – текущая эпоха.

Величины $\frac{d\bar{C}_{n0}}{dt}$ приведены в таблице 2.1 [48,97].

Таблица 2.1– Значения коэффициентов первых зональных гармоник ГПЗ и скорости их вековых изменений, рекомендуемые Соглашениями МСВЗ 2010 [105]

Коэффициент	Значение на эпоху J2000.0	$\frac{d\bar{C}_{n0}}{dt}$, год ⁻¹
\bar{C}_{20} (нул. прилив)	$-0,48416948 \cdot 10^{-3}$	$11,6 \cdot 10^{-12}$
\bar{C}_{30}	$0,957161207093473 \cdot 10^{-9}$	$4,9 \cdot 10^{-12}$
\bar{C}_{40}	$0,539965866638991 \cdot 10^{-6}$	$4,7 \cdot 10^{-12}$

О некоторых коэффициентах геопотенциала

Отметим некоторые особенности при выборе нижнего предела суммирования в формулах (2.12). При выборе $n = 0$, а также учитывая, что полином Лежандра нулевой степени всегда равен 1 и коэффициент $\bar{C}_{00} = 1$, получим:

$$U = \frac{\mu}{r}. \quad (2.16)$$

То есть получили гравитационный потенциал шара (центрального тела).

Если при вычислениях в качестве начала координат выбирается центр масс Земли, то коэффициенты $\bar{C}_{10}, \bar{C}_{11}, \bar{S}_{11}$, зависящие от координат геоцентра $x_{\oplus}, y_{\oplus}, z_{\oplus}$, также будут равны нулю:

$$\bar{C}_{10} = \frac{z_{\oplus}}{\sqrt{3R_{\oplus}}}; \quad \bar{C}_{11} = \frac{x_{\oplus}}{\sqrt{3R_{\oplus}}}; \quad \bar{S}_{11} = \frac{y_{\oplus}}{\sqrt{3R_{\oplus}}}. \quad (2.17)$$

Коэффициенты $\bar{C}_{21}, \bar{S}_{21}$ описывают положение оси фигуры Земли. Так как она изменяет свое положение, данные коэффициенты необходимо корректировать/перевычислять. Считается, что направление оси фигуры задается средним полюсом при условии, что осреднение проводилось на длительном интервале времени (не менее 6 лет – минимальный промежуток, охватывающий целое число периодов Чандлера и годовых периодов). Причем считается, что любые несовпадения среднего полюса и оси фигуры обусловлены долгопериодическими перемещениями масс в атмосфере, океанах и жидком ядре [126,127]. Поэтому этими явлениями можно пренебречь [105]. Таким образом, положение оси фигуры Земли учитывается через перевычисление на каждый момент времени коэффициентов $\bar{C}_{21}, \bar{S}_{21}$ [78]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{21}(t) &= \sqrt{3}\bar{x}_p\bar{C}_{20} - \bar{x}_p(t)\bar{C}_{22} + \bar{y}_p(t)\bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{21}(t) &= -\sqrt{3}\bar{y}_p\bar{C}_{20} - \bar{y}_p(t)\bar{C}_{22} - \bar{x}_p(t)\bar{S}_{22} \end{aligned} \right\}, \quad (2.18)$$

где значения $\bar{C}_{20}, \bar{C}_{22}, \bar{S}_{22}$ берутся из текущей модели, а $\bar{x}_p(t)$ и $\bar{y}_p(t)$ – координаты среднего полюса, который задает положение оси фигуры Земли (см. пункт 2.2.4).

2.2.2 Твердые земные приливы

Общепринятой методикой учета вариаций в гравитационном потенциале Земли, вызванных влиянием твердых земных приливов, является вычисление поправок $\Delta\bar{C}_{nm}, \Delta\bar{S}_{nm}$ к

коэффициентам геопотенциала. Процедура вычислений поправок к коэффициентам геопотенциала для учета влияния твердых земных приливов состоит из трех этапов [105].

На первом этапе вычисляется частотно-независимая часть. Так как упругие свойства Земли зависят от частоты действующих сил, на втором этапе необходимо вычислить поправки к определенным на первом этапе вариациям коэффициентов геопотенциала 2 степени, обусловленные отличием частотно-зависимых чисел Лява для каждой приливной волны от их номинальных значений. В Соглашения МСВЗ 2010 [105] приводятся формулы и значения коэффициентов, необходимых для вычисления поправок для 21 долгопериодической, 48 суточных и 2 полусуточных волн.

На третьем этапе производится исключение постоянного прилива. Гравитационный потенциал вблизи Земли (доступный для наблюдений) есть комбинация внешнего приливного потенциала, вызванного влиянием тел Солнечной системы, и собственного гравитационного потенциала Земли, на который влияет приливной потенциал. Внешний приливной потенциал содержит постоянную и переменную (зависящую от времени), а также возмущенную части геопотенциала (постоянный прилив). Исключение переменной составляющей внешнего гравитационного потенциала из потенциала в некоторой точке Р в окрестности Земли даст потенциал среднего прилива, а исключение постоянной составляющей – потенциал нулевого прилива (строго говоря, это и есть геопотенциал). Если теперь из потенциала нулевого прилива вычесть возмущенную часть геопотенциала, мы получим потенциал, свободный от приливов. Третий этап необходим в тех случаях, когда используется модель геопотенциала нулевого прилива. В этом случае, чтобы эффект от постоянного прилива не был учтен дважды, его необходимо исключить из поправок за твердые земные приливы:

$$\Delta\bar{C}_{20}^{zt} = \Delta\bar{C}_{20} - \Delta\bar{C}_{20}^{perm}, \quad (2.19)$$

Где $\Delta\bar{C}_{20}^{zt}$ – поправка для модели геопотенциала нулевого прилива;

$\Delta\bar{C}_{20}$ – поправка, вычисленная на первых двух этапах;

$\Delta\bar{C}_{20}^{perm} = -4,20068 \cdot 10^{-9}$ – величина влияния постоянного прилива.

В случае использования модели геопотенциала, свободной от приливов, третий этап не требуется, однако использование значений нулевого прилива с последующим вычитанием составляющей постоянного прилива рекомендовано Резолюцией 16 на 18-ой Генеральной Ассамблее Международной Ассоциации Геодезии в 1984г [70].

Поправки, полученные на каждом из трех этапов, необходимо просуммировать и добавить к коэффициентам \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} выбранной модели геопотенциала.

2.2.3 Океанические приливы

В последней редакции Соглашений МСВЗ 2010 [105] для вычисления орбит спутников рекомендована модель океанических приливов FES2004 [83]. Модель доступна в сети Интернет⁶. Данная модель содержит 6 долгопериодических волн (S_a , S_{sa} , M_m , M_f , M_{tm} , M_{sqm}), 4 суточных (Q_1 , O_1 , P_1 , K_1) и 6 полусуточных ($2N_2$, N_2 , M_2 , T_2 , S_2 , K_2), а также четвертьсуточную (M_4). Кроме того, в модель включены 2 волны с очень большими периодами – Ω_1 (период 18,6 лет) и Ω_2 (период 9,3 года). Для вычисления поправок к коэффициентам геопотенциала за влияние океанических приливов используются следующие выражения [105]:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{nm}^{OT} \\ \Delta \bar{S}_{nm}^{OT} \end{array} \right\} = \sum_{f(n,m)} \left[\begin{array}{l} \left\{ (C_f^+ + C_f^-) \cos \theta_f + (S_f^+ + S_f^-) \sin \theta_f \right\} \\ \left\{ (S_f^+ - S_f^-) \cos \theta_f - (C_f^+ - C_f^-) \sin \theta_f \right\} \end{array} \right], \quad (2.20)$$

где C_f^\pm и S_f^\pm – гармонические амплитуды геопотенциала для приливной волны f , а θ_f – приливной аргумент, вычисляемый с помощью аргументов Дудсона или Делоне [56,105].

Отдельно стоит отметить, что приливная волна S_1 не включена в каталог и приводится в отдельном файле⁷. Учитывать в вычислениях влияние этой волны стоит только в том случае, если дополнительно не учитывается влияние атмосферного давления на океанические массы (например, с применением модели *MOG2D* [12]).

Помимо указанных 16 основных волн спектр приливного потенциала может быть дополнен вторичными волнами, получающимися из линейного интерполирования по основным волнам. Гармонические амплитуды для вторичных приливных волн вычисляются с применением следующих выражений [105]:

$$\begin{aligned} C_{f,nm}^\pm &= \frac{\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1} \frac{H_f}{H_2} C_{2,nm}^\pm + \frac{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_f}{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1} \frac{H_f}{H_1} C_{1,nm}^\pm; \\ S_{f,nm}^\pm &= \frac{\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1} \frac{H_f}{H_2} S_{2,nm}^\pm + \frac{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_f}{\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1} \frac{H_f}{H_1} S_{1,nm}^\pm. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь $\dot{\theta}$ обозначает частоты соответствующих волн, индексами 1 и 2 обозначены главные волны, по которым ведется интерполяция. Для выбранной модели FES2004 необходимые величины

⁶ ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter6/tidemodels/fes2004_Cnm-Snm.dat

⁷ <ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter6/tidemodels/S1.dat>

приводятся в Приложении А. Согласно оценкам, использование только главных волн обычно позволяет учесть порядка 80% эффекта от океанических приливов [105].

2.2.4 Полюсные приливы

Твердые полюсные приливы

Учет эффекта твердого полюсного прилива производится с применением следующих выражений [105]:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{21} \\ \Delta \bar{S}_{21} \end{array} \right\} = -1,333 \times 10^{-9} \left\{ \begin{array}{l} (m_1 + 0,0115m_2) \\ (m_2 - 0,0115m_1) \end{array} \right\}, \quad (2.22)$$

где величины m_1, m_2 – малые безразмерные параметры, описывающие различия в положениях средней и мгновенной осей вращения Земли, вычисляются по формулам:

$$m_1 = x_p - \bar{x}_p, \quad m_2 = -(y_p - \bar{y}_p). \quad (2.23)$$

Координаты среднего полюса \bar{x}_p, \bar{y}_p представлены кубической моделью на интервале 1976,0-2010,0, а также линейной моделью для экстраполяции на интервале после 2010 года:

$$\bar{x}_p(t) = \sum_{i=0}^3 (t-t_0)^i \times \bar{x}_p^i; \quad \bar{y}_p(t) = \sum_{i=0}^3 (t-t_0)^i \times \bar{y}_p^i, \quad (2.24)$$

где t_0 – эпоха J2000.0, а коэффициенты \bar{x}_p^i, \bar{y}_p^i представлены в таблице 7.7 в работе [105].

Океанические полюсные приливы

Эффект рекомендуется учитывать [105] с помощью самосогласованной равновесной модели [54]. Согласно этой модели, влияние океанического полюсного прилива можно представить в виде поправок к нормированным коэффициентам геопотенциала [105]:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = R_n \left\{ \left[\begin{array}{l} \bar{A}_{nm}^R \\ \bar{B}_{nm}^R \end{array} \right] (m_1 \gamma_2^R + m_2 \gamma_1^I) + \left[\begin{array}{l} \bar{A}_{nm}^I \\ \bar{B}_{nm}^I \end{array} \right] (m_2 \gamma_2^R - m_1 \gamma_1^I) \right\}, \quad (2.25)$$

где

$$R_n = \frac{\Omega^2 a_E^4}{GM_\oplus} \frac{4\pi G \rho_w}{g_e} \left(\frac{1+k'_n}{2n+1} \right);$$

$\rho_w = 1025 \text{ кг/м}^3$ – плотность морской воды;

g_E – величина силы тяжести на экваторе;

$$\gamma = \gamma_2^R + i\gamma_2^I = (1 + k_2 - h_2) = 0,6870 + i0,0036;$$

$\bar{A}_{nm} = \bar{A}_{nm}^R + i\bar{A}_{nm}^I$ и $\bar{B}_{nm} = \bar{B}_{nm}^R + i\bar{B}_{nm}^I$ – коэффициенты самосогласованной модели, доступны в сети Интернет до степени и порядка 360^8 .

Однако, как показывают экспериментальные вычисления, до 90% рассматриваемого эффекта моделируется путем вычисления только лишь поправок $\Delta\bar{C}_{21}, \Delta\bar{S}_{21}$ [105]. С учетом численных значений констант в выражениях (2.25) и параметров модели [54] получим:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\bar{C}_{21} \\ \Delta\bar{S}_{21} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} -2,1778 \times 10^{-10} (m_1 - 0,01724m_2) \\ -1,7232 \times 10^{-10} (m_2 - 0,03365m_1) \end{array} \quad (2.26)$$

Учет поправок (2.25) до 10 степени и порядка позволяет учесть эффект океанического полюсного прилива на 99% [105].

2.2.5 Атмосферные приливы

Атмосферные приливы – вынужденные колебания, вызванные лунно-солнечным притяжением и изменениями солнечного излучения, которые приводят к колебаниям температуры и давления, что в свою очередь сказывается на вариациях гравитационного поля Земли. Учет таких вариаций производится аналогично учету других приливных эффектов – через вычисление поправок к коэффициентам геопотенциала по моделям. В настоящий момент модели атмосферных приливов строятся на основе анализа метеорологических данных. Так, модели ВВ03 [33] и РР03 [108] получены на основе анализа данных Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды (ECMWF). Характеристики моделей (разрешение и приливные волны) указаны в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Характеристики моделей атмосферных приливов

Модель	Волны	Разрешение
ВВ03	2 долгопериодические: S_a, S_{sa}	8×5
	1 суточная: S_1	
	1 полусуточная: S_2	
РР03	3 суточных: P_1, S_1, K_1	$10 \times 10^*$
	3 полусуточных: T_2, S_2, R_2	

* Для всех волн кроме S_1 . Волна S_1 представлена с разрешением 20×20 .

⁸ <ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter6/desaiiscopolecoef.txt.gz>

Необходимо отметить, что модели отличаются не только наборами включенных волн, но также и наличием проградных и ретроградных составляющих. Так, модель ВВ03 включает только проградные составляющие, а модель РР03 – и проградные, и ретроградные.

Сравнение данных моделей выполнено в работе [34], однако сравнение производилось только по волне S_2 . Кроме того, оценивалось их влияние только на орбиты спутников на трехсуточной дуге. Эти исследования показали практически полную идентичность обеих моделей по волне S_2 . Влияние данного эффекта на геодинимические параметры в работе [34] не рассматривалось. Результаты исследования влияния атмосферных приливов на орбиты спутников и геодинимические параметры представлены в параграфе 4.2.

2.2.6 Неприливные перемещения масс в атмосфере и океанах

Под влиянием различных факторов в атмосфере и океанах возникают перемещения масс, носящие неприливной характер (например, в связи с изменением давления в регионе или действием ветра). Такие возмущения невозможно учесть с применением аналитической модели, например, как в случае с учетом твердых земных или океанических приливов. Для определения этих величин привлекаются метеорологические данные и модель циркуляции океанических масс. По этим данным затем вычисляются поправки к коэффициентам геопотенциала с некоторым шагом (например, 6 часов).

На текущий момент существует единственный центр, предоставляющий такой продукт в открытый доступ – GFZ Potsdam. Последняя версия продукта носит название Atmosphere and Ocean De-Aliasing Level-1B (AOD1B) RL05 [63,64] и представлена в виде поправок в коэффициенты геопотенциала до степени и порядка 100 с шестичасовыми интервалами. Вычисление производится с привлечением метеорологических данных ECMWF и модели океана ОМСТ (Ocean Model for Circulation and Tides). Данный продукт изначально был разработан для обработки данных комплекса GRACE, однако затем временной интервал был существенно расширен, что делает возможным применение данной модели для обработки продолжительного ряда лазерных наблюдений ИСЗ.

Модель состоит из двух частей: океанической и атмосферной. Их сумма образует общую величину поправок за перемещения неприливных масс.

Стоит также отметить, что атмосферная приливная волны S_2 все ещё содержится в данных модели AOD1B, поэтому, когда одновременно учитывается также влияние атмосферных приливов, необходимо сначала исключить влияние волны S_2 из данных AOD1B по используемой модели атмосферных приливов с целью исключения повторного внесения поправок за влияние

этой приливной волны. Исследованию влияния рассматриваемого эффекта на орбиты спутников и геодинамические параметры посвящен параграф 4.4.

2.2.7 Влияние тел Солнечной системы

Вычисление возмущающих ускорений, вызванных влиянием тела (Луны, Солнца, планеты), принятого за точку, выполняется с использованием следующих выражений:

$$\ddot{x}_j = GM_j \left(\frac{x_j - x}{\Delta_j^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right); \quad \ddot{y}_j = GM_j \left(\frac{y_j - y}{\Delta_j^3} - \frac{y_j}{r_j^3} \right); \quad \ddot{z}_j = GM_j \left(\frac{z_j - z}{\Delta_j^3} - \frac{z_j}{r_j^3} \right); \quad (2.27)$$

Здесь x_j, y_j, z_j – геоцентрические координаты возмущающего тела, а $\Delta_j = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2}$ – радиус вектор тело-спутник.

Суммарное ускорение от тел Солнечной системы вычисляется суммированием соответствующих компонентов (2.27) для каждой из планет, Луны, Солнца:

$$\ddot{x} = \sum_{j=1}^{10} \ddot{x}_j; \quad \ddot{y} = \sum_{j=1}^{10} \ddot{y}_j; \quad \ddot{z} = \sum_{j=1}^{10} \ddot{z}_j. \quad (2.28)$$

Как показывают экспериментальные вычисления, необходимо учитывать только влияние Луны, Солнца, Венеры и Юпитера [16,25], так как они вносят наибольший вклад (при этом смещение орбиты в радиальной составляющей при учете влияния Юпитера – наименьшая из упомянутых составляющих – составляет всего несколько миллиметров на пятисуточной дуге).

В выражениях (2.27) рассматривалось взаимодействие Земли и внешнего тела как материальных точек. Такое упрощение допустимо при рассмотрении взаимодействия с Землей Солнца и планет Солнечной системы. Однако при рассмотрении взаимодействия Земли и Луны необходимо также учитывать сжатие Земли [96]:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(E) &= GM_M C_{20} \frac{1}{r_M^2} \left(\frac{R_\oplus}{r_M} \right)^2 \left(\frac{x_M}{r_M} \right) \left[\frac{3}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{z_M}{r_M} \right)^2 \right]; \\ \ddot{y}(E) &= GM_M C_{20} \frac{1}{r_M^2} \left(\frac{R_\oplus}{r_M} \right)^2 \left(\frac{y_M}{r_M} \right) \left[\frac{3}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{z_M}{r_M} \right)^2 \right]; \\ \ddot{z}(E) &= GM_M C_{20} \frac{1}{r_M^2} \left(\frac{R_\oplus}{r_M} \right)^2 \left(\frac{z_M}{r_M} \right) \left[\frac{9}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{z_M}{r_M} \right)^2 \right]; \end{aligned} \quad (2.29)$$

где

M_M – масса Луны;

C_{20} – коэффициент при второй зональной гармонике (ненормированный);

r_M – расстояние между Луной и Землей;

x_M, y_M, z_M – геоцентрические координаты Луны.

Координаты тел Солнечной системы определяются при помощи эфемерид DE421 [64].

2.2.8 Атмосферное торможение

Наибольшее влияние среди негравитационных возмущающих факторов при вычислении орбит низкоорбитальных ИСЗ имеет атмосферное торможение. Несмотря на относительно небольшую величину возмущающего ускорения (порядок изменяется от 10^{-9} м/с² до 10^{-12} м/с² при изменении высоты орбиты от 800 км до 2000 км), общий вклад становится значительным в виду того, что этот эффект действует постоянно, а направление действия всегда противоположно направлению движения ИСЗ. Например, для ИСЗ БЛИЦ (высота орбиты ~800 км) в результате игнорирования данного эффекта отклонение орбиты может достигать 200 метров на суточном интервале [27]. Кроме того, под влиянием атмосферного торможения большая полуось орбиты ИСЗ постепенно уменьшается, а скорость его вращения при этом увеличивается (т.н. аэродинамический парадокс).

Ускорения ИСЗ, вызванные атмосферным торможением, имеют вид:

$$\ddot{r}_{drag} = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho v_r^2 \frac{\bar{v}_r}{v_r}, \quad (2.30)$$

где

C_D – аэродинамический коэффициент;

$\frac{A}{m}$ – отношение площади поперечного сечения ИСЗ (по отношению к направлению движения) к его массе;

ρ – плотность атмосферы в месте нахождения ИСЗ;

\bar{v}_r, v_r – компоненты вектора скорости ИСЗ относительно атмосферы и его модуль соответственно.

Коэффициент C_D безразмерный. Начальное значение обычно известно достаточно приблизительно. Для сферических спутников в качестве начального можно принять 2,0. Коэффициент C_D обычно включают в число неизвестных при обработке наблюдений и уточняют из решения. Величина $\frac{A}{m}$ в случае сферического ИСЗ постоянна.

В настоящее время наибольшее распространение получили три модели:

1. NRLMSISE-00 [106] – продолжение моделей серии MSISE;
2. JB2008 [39] – продолжении серии Jascchia, Jascchia-Bowman;
3. DTM-2013 [41] – продолжении серии моделей DTM.

Все эти модели основаны не только на исследовании орбит спутников (как первые модели Jascchia [73,74,75]), но также и на измерениях целого ряда параметров (температура, индекс солнечной активности F10.7, геомагнитный индекс AP и др.) и выведении аналитических зависимостей между плотностью атмосферы и этими параметрами.

Для определения наиболее подходящей модели (или моделей) при обработке лазерных наблюдений ИСЗ был выполнен ряд численных экспериментов, описание и результаты которых приводятся в главе 4.1.

Величина \bar{v}_r в выражении (2.30) – скорость ИСЗ относительно атмосферы. Если допустить, что атмосфера вращается вместе с Землей, то величина \bar{v}_r вычисляется по формуле:

$$\bar{v}_r = \bar{v} - \bar{\omega}_{\oplus} \times \bar{r}, \quad (2.31)$$

где

\bar{v} – скорость ИСЗ в инерциальной системе координат;

$\bar{\omega}_{\oplus}$ – вектор угловой скорости вращения Земли;

\bar{r} – вектор координат ИСЗ в инерциальной системе координат.

В качестве альтернативы для вычисления скорости атмосферных потоков можно воспользоваться моделью горизонтальных ветров HWM07 [58]. Данная модель общедоступна по

адресу в сети Интернет⁹. Выбору наиболее оптимальной модели определения скорости атмосферных потоков посвящена глава 4.1.

2.2.9 Световое давление

Возмущающие ускорения от светового давления в инерциальной системе координат имеют вид [10]:

$$\ddot{\vec{r}}_{Solar} = -\chi \frac{S_0}{c} \frac{A}{m} C_R r_S^2 \frac{\bar{\Delta}}{\Delta^3}, \quad (2.32)$$

где

χ – функция тени. Принимает значения от 0 до 1 ($\chi = 0$ – спутник находится в тени, $\chi = 1$ – спутник полностью освещается Солнцем, $\chi \in (0;1)$ – спутник освещаются частью поверхности Солнца);

$S_0 = 1367 \text{ Вт/м}^2$ – солнечная постоянная;

c – скорость света в вакууме;

C_R – коэффициент светового давления, описывающий взаимодействие световой энергии с поверхностью спутника;

r_S – геоцентрическое расстояние до Солнца;

$\bar{\Delta}, \Delta$ – вектор разности координат Солнца и спутника и его модуль.

Основным параметром, влияющим на величину эффекта, является отношение площади к массе $\frac{A}{m}$. Так, для ИСЗ БЛИЦ ($\frac{A}{m} \approx 0,003$, высота орбиты ~800км), смещение орбиты под влиянием светового давления на пятисуточной дуге составляет 20,5м [27].

Влияние полутени не рассматривается, так как изменения орбит рассматриваемых в рамках представленного исследования спутников, вызванные влиянием полутени, незначительны (не превосходят нескольких миллиметров на недельном интервале [15]. Это становится возможным благодаря малости величины $\frac{A}{m}$ для всех используемых ИСЗ (см. таблицу 1.2).

⁹ <ftp://nssdcftp.gsfc.nasa.gov/models/atmospheric/hwm07/>

2.2.10 Релятивистские возмущения

Релятивистские поправки в ускорения ИСЗ в инерциальной системе координат имеют вид [105]:

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\vec{r}} = & \frac{GM_{\oplus}}{c^2 r^3} \left\{ \left[\frac{4GM_{\oplus}}{r} - \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \right] \vec{r} + 4\dot{\vec{r}} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \right\} + \frac{2GM_{\oplus}}{c^2 r^3} \left[\frac{3}{r^2} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) (\vec{r} \cdot \vec{J}) + (\dot{\vec{r}} \times \vec{J}) \right] + \\ & + \left\{ 3 \left[\dot{\vec{R}} \times \left(\frac{-GM_S \vec{R}}{c^2 R^3} \right) \right] \times \dot{\vec{r}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Здесь

$\vec{R}, \dot{\vec{R}}$ – составляющие радиус-вектора положения и скорости Земли относительно Солнца;

$\vec{J} = 9,8 \cdot 10^8 \text{ м}^2/\text{с}$ – момент импульса Земли для единичной массы;

M_S – масса Солнца.

В выражении (2.33) первый член описывает метрику Шварцшильда, второй – эффект Лензе-Тирринга, а третий – геодезическую прецессию (прецессию де Ситтера). Порядок возмущающих ускорений для первого эффекта колеблется на уровне $10^{-10} \div 10^{-9} \text{ м/с}^2$ в зависимости от высоты орбиты, а для второго и третьего – $10^{-12} \div 10^{-11} \text{ м/с}^2$.

2.2.11 Переотражение и переизлучение Землей солнечной радиации

Помимо прямого светового давления (пункт 2.2.9) на спутник действует также та часть энергии Солнца, которая переотражается от поверхности Земли и переизлучается самой планетой. Причем эта сила действует в двух диапазонах: видимом (т.н. альbedo) и инфракрасном. В случае со спутником LAGEOS-1 суммарная величина влияния может достигать 10% от прямого солнечного давления [77].

Переотражение в видимом диапазоне действует аналогично световому давлению (только когда спутник находится над освещаемой Солнцем частью планеты). Инфракрасное излучение действует на спутник постоянно. Далее в работе оба указанных эффекта для краткости будем называть эффектом альbedo.

Составляющие возмущающего ускорения, вызванного действием рассматриваемого эффекта на ИСЗ, имеют следующий вид [95]:

$$\ddot{\vec{r}} = \sum_j C_R \left(v_j^a a_j \cos \theta_j^E + \frac{1}{4} v_j^e \varepsilon_j \right) \frac{S_0}{c} \frac{A}{m} \cos \theta_j^S \frac{dA_j}{\pi r_j^2} \vec{e}_j. \quad (2.34)$$

В выражении (2.34) используются обозначения:

v_j^a – функция тени для каждого освещаемого Солнцем элемента земной поверхности (1 – спутник в прямой видимости, 0 – спутник не наблюдается);

a_j – коэффициент отражения солнечной радиации (альбедо) j -ого элемента земной поверхности;

$\cos \theta_j^E$ – косинус угла между нормалью к элементу земной поверхности j и направлением на Солнце;

v_j^e – функция тени для каждого излучающего в видимом диапазоне элемента Земной поверхности (1 – спутник в прямой видимости, 0 – спутник не наблюдается);

ε_j – коэффициент переизлучения солнечной радиации j -ого элемента земной поверхности;

$\cos \theta_j^S$ – косинус угла между нормалью к j -ому элементу земной поверхности и направлением на спутник;

dA_j – площадь j -ого элемента земной поверхности;

r_j – расстояние между j -ым элементом земной поверхности и спутником;

\bar{e}_j – единичный вектор, направленный от j -ого элемента на спутник.

Коэффициенты a_j, ε_j зависят от свойств каждого элемента земной поверхности. Возможно несколько вариантов выбора значений для этих коэффициентов:

1. постоянные коэффициенты для любого элемента земной поверхности (0,34 для видимого диапазона и 0,68 для инфракрасного [95]);
2. использование широтно-зависимых коэффициентов, определяемых по моделям (например, с применением модели, разработанной в работе [77]);
3. измеренные значения коэффициентов.

На текущий момент измеренные значения коэффициентов a_j, ε_j доступны из результатов проекта CERES (*Clouds and the Earth's Radiant Energy System*) [132]. Данные представлены на сетке с шагом в $2,5^0$ по широте и по долготе с месячным интервалом. Эти данные доступны в

сети Интернет¹⁰. Поэтому наиболее целесообразным видится использование именно измеренных значений коэффициентов.

Исследованию влияния эффекта альbedo на орбиты спутников и геодинaмические параметры посвящен параграф 4.3.

2.2.12 Эмпирические ускорения

Несмотря на высокую точность применяемых моделей всегда имеют место некоторые погрешности моделирования возмущающих ускорений. Для учета таких погрешностей вводятся т.н. эмпирические ускорения в системе RTN :

$$\ddot{\vec{r}}_{emp} = \overline{RTN}^T (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \sin u + \bar{a}_2 \cos u), \quad (2.35)$$

где

\overline{RTN}^T – матрица преобразования из системы RTN в инерциальную (2.8);

\bar{a}_0 – вектор постоянных составляющих эмпирического ускорения;

\bar{a}_1, \bar{a}_2 – вектора периодических составляющих эмпирического ускорения: период действия – 1 цикл за оборот (1CPR);

u – аргумент широты орбиты ИСЗ.

Коэффициенты $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2$ обычно определяются из решения одновременно с другими параметрами. Методика показала свою эффективность для компенсации различных неучтенных малых возмущений и ошибок моделей [120]. Однако следует с осторожностью использовать периодические коэффициенты \bar{a}_1, \bar{a}_2 , если уточняются параметры гравитационного поля, так как данные величины нивелируют различные недостатки используемой модели ГПЗ [65].

2.3 Определение смещений пунктов наблюдения.

Координаты наземных пунктов наблюдения ИСЗ подвержены различного рода воздействиям, как периодическим, так и линейного характера. Для вычисления координат пункта на эпоху наблюдения необходимо, помимо линейных скоростей изменения координат (пункт 2.1.1), учитывать следующие эффекты:

¹⁰ https://eosweb.larc.nasa.gov/project/ceres/ceres_table

1. Приливная нагрузка, которая включает в себя эффекты твердых, океанических и океанических полюсных приливов.
2. Нагрузку от атмосферного давления.
3. Деформации, вызванные движением полюсов.
4. Эксцентриситеты станций.

Учет этих эффектов и соответствующая корректировка каталожных координат станций позволяют получить положение пункта на эпоху наблюдения. Рассмотрим более подробно каждый из упомянутых эффектов.

2.3.1 Нагрузка от твердых земных приливов

Смещение станций, вызванные твердыми приливами в теле Земли, характеризуются нагрузочными числами Лява и Шиды, которые в свою очередь зависят как от широты станций, так и от частот приливных волн. Поэтому вычисление поправок в координаты станций за нагрузку от твердых земных приливов, по аналогии с возмущениями от этого эффекта (пункт 2.2.2), делится на три этапа: вычисление частотно-независимой, частотно-зависимой частей и учет постоянного прилива. Вывод выражений, а также все необходимые для вычисления параметры, приводятся в работах [85,105]. Приведенные выражения позволяют учесть рассматриваемый эффект с точностью до 0,05мм в вертикальной составляющей.

2.3.2 Океаническая приливная нагрузка

Под термином «океаническая приливная нагрузка» подразумеваются деформации поверхности морского дна и континентальной суши в ответ на перераспределения больших масс воды, вызванные океанскими приливами. Величины таких деформаций достигают 100 мм, поэтому данный эффект необходимо учитывать при обработке высокоточных спутниковых наблюдений. Однако учет этого эффекта связан с определенными сложностями, так как ответ океанических масс на воздействие приливного потенциала сильно зависит, в отличие от твердых приливов, от условий в каждой конкретной точке, которые влияют на перемещения водных масс. Поэтому невозможно описать это взаимодействие конечными аналитическими выражениями. В этом случае применяются заранее рассчитанные по определенной модели на некоторой координатной сетке наборы амплитуд и фаз приливных волн.

Как правило, вектор смещения координат пунктов вычисляются по следующей методике. Пусть Δd_j обозначает одну из компонент вектора смещения (радиальную, западную или южную) станции j в некоторый момент времени t . Тогда [105]:

$$\Delta \vec{d}_j = \sum_i \vec{A}_{ij} \cos(\chi_i(t) - \vec{\phi}_{ij}) \quad (2.36)$$

Здесь $\vec{A}_{ij}, \vec{\phi}_{ij}$ – вектора амплитуд и фаз i -ой волны (радиальная, западная и южная составляющие) на станции j , а $\chi_i(t)$ – астрономический аргумент i -ой волны [114].

Обычно параметры только небольшого набора основных приливных волн задаются явно, параметры для других волн интерполируются. МСВЗ предоставляет стандартную программу вычисления океанической приливной нагрузки HARDISP.F¹¹. Данная программа разработана D. Agnew и реализует алгоритм (2.36) с учетом интерполяции (общее количество волн – 342).

В разработанном автором программном комплексе используются 11 волн: 3 долгопериодических (M_f, M_m, S_{sa}), 4 суточных (K_1, O_1, P_1, Q_1) и 4 полусуточных (M_2, S_2, N_2, K_2). Остальные волны получаются из интерполяции. Амплитуды и фазы для каждой из 11 волн для каждой станции были получены с помощью электронного сервиса Чалмерского института¹² в формате BLQ. В качестве аргументов для электронного сервиса служат координаты станций. Амплитуды и фазы рассчитываются по выбранной модели. На текущий момент для выбора доступно 24 модели. Как и в случае с возмущениями в орбите ИСЗ, для вычисления смещений станций под влиянием океанической приливной нагрузки использовалась модель FES2004.

2.3.3 Нагрузка, вызванная океаническими полюсными приливами

Данный эффект обусловлен влиянием центробежных эффектов, вызванных движением полюсов, на океанические массы. Используя самосогласованную модель [54], которая была использована в пункте (2.2.4), получим вектор нагрузки для любой точки земной поверхности j с координатами φ и λ , как функцию параметров m_1 и m_2 (пункт 2.2.4), в системе координат NEU [74]:

$$\begin{matrix} n_j(\varphi, \lambda) \\ e_j(\varphi, \lambda) \\ u_j(\varphi, \lambda) \end{matrix} = K \left\{ \begin{matrix} \left[n_j^R(\varphi, \lambda) \\ e_j^R(\varphi, \lambda) \\ u_j^R(\varphi, \lambda) \right] \\ + \left[n_j^I(\varphi, \lambda) \\ e_j^I(\varphi, \lambda) \\ u_j^I(\varphi, \lambda) \right] \end{matrix} \right\}, \quad (2.37)$$

где $K = \frac{4\pi G a_E \rho_w H_p}{3g_e}$, $H_p = \sqrt{\frac{8\pi}{15} \frac{\Omega^2 a_E^4}{GM_\oplus}}$.

Коэффициенты $n_j^R(\varphi, \lambda)$, $e_j^R(\varphi, \lambda)$, $u_j^R(\varphi, \lambda)$ – действительная составляющая коэффициентов модели, а $n_j^I(\varphi, \lambda)$, $e_j^I(\varphi, \lambda)$, $u_j^I(\varphi, \lambda)$ – мнимая. Данные коэффициенты представлены на сетке с шагом в $0,5^0$ по широте и долготе. Для получения коэффициентом для точки с координатами

¹¹ <ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter7/hardisp/>

¹² <http://holt.oso.chalmers.se/loading/>

φ, λ , не совпадающей с узлами сетки, применяется линейная интерполяция. Для получения вектора нагрузки в гринвичской прямоугольной системе координат необходимо применить преобразование (2.7).

2.3.4 Нагрузка от атмосферного давления

Атмосферная нагрузка подразделяется на два вида: приливная и неприливная. Первая составляющая вызвана периодическими колебаниями атмосферного давления, в то время как вторая – непериодическими колебаниями.

Атмосферная приливная нагрузка

Под влиянием энергии Солнца атмосфера Земли вызывает периодические колебания земной поверхности (приливные волны S_1, S_2). До недавнего времени этот эффект не учитывался. Однако, согласно проведенным исследованиям [105], в некоторых случаях величины вертикальных деформаций, являющиеся следствием влияния атмосферной приливной нагрузки, имеют тот же порядок, что и вертикальные деформации, вызванные океаническим полюсным приливом.

Учет атмосферной приливной нагрузки на пункты наблюдения выполняется с применением следующих выражений [105]:

$$\begin{aligned} d_{S_1} &= A_{d1} \cos(\omega_1 T) + B_{d1} \sin(\omega_1 T), \\ d_{S_2} &= A_{d2} \cos(\omega_2 T) + B_{d2} \sin(\omega_2 T). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Коэффициенты $A_{d1}, B_{d1}, A_{d2}, B_{d2}$ – коэффициенты нагрузочной деформации, T – время в сутках по шкале UT1, $\omega_1 = 1$ цикл/сутки, $\omega_2 = 2$ цикла/сутки – частоты волн S_1 и S_2 . В некоторые модели также включена волна S_3 ($\omega_3 = 3$ цикла/сутки). Коэффициенты деформаций вычисляются по данным различных центров прогнозов погоды. В настоящее время рассматриваемые коэффициенты вычисляются в трех центрах и представляются в виде сетки с некоторым шагом (Таблица 2.3). Результаты сравнения указанных трех моделей, полученные из обработки лазерных наблюдений, представлены в главе 4.5.

Атмосферная неприливная нагрузка

Исключая приливные волны S_1 и S_2 (в некоторых случаях и S_3) из метеорологических данных (ECMWF или NCEP) получается т.н. атмосферная неприливная нагрузка, которая оказывает гораздо большее влияние на смещение станции по сравнению с атмосферной приливной составляющей. Эти величины рассчитываются в тех же центрах, что и атмосферная приливная нагрузка (см. таблицу 2.3) на 4 момента времени в течение каждых суток (начиная с полуночи с шагом в 0,25 суток).

Таблица 2.3 – Центры расчета атмосферной нагрузки

Центр	Погодные данные	Набор гармоник в модели	Шаг сетки
Университет Люксембурга (GGFC) ¹³	ECMWF	S_1, S_2	$1^0 \times 1^0$
Венский Технологический Университет (VIENNA) ¹⁴	ECMWF	S_1, S_2, S_3	$1^0 \times 1^0$
Центр космических полетов им. Годдарда (GSFC) ¹⁵	NCEP	S_1, S_2	$1^0 \times 1^0$

На рисунке 2.1 отражена неприливающая составляющая в вертикальной компоненте в системе NEU (в мм) на момент полночи 1 января 2010 года. Для некоторых областей величина смещения под влиянием рассматриваемого эффекта достигает 12мм.

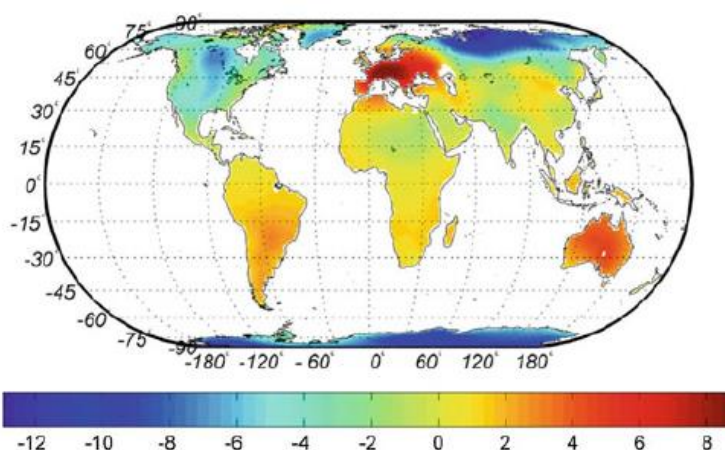


Рисунок 2.1– Смещение станций (в мм) для вертикальной составляющей в системе NEU под действием атмосферной неприливающей нагрузки на полночь 1 января 2010 года по шкале UTC [38]

Данные для учета неприливающей составляющей атмосферной нагрузки вырабатываются центрами анализа, приведенными в таблице 2.3 Исследованию влияния рассматриваемого эффекта на геодинамические параметры посвящен параграф 4.5.

¹³ <http://geophy.uni.lu/ggfc-atmosphere/tide-loading-calculator.html>

¹⁴ <http://ggosatm.hg.tuwien.ac.at/LOADING/VERSION4/TIDAL/>

¹⁵ <http://gemini.gsfc.nasa.gov/aplo/>

2.3.5 Деформации земной поверхности, вызванные движением полюсов

Деформации, вызванные движением полюсом, в системе NEU описываются следующими выражениями [74]:

$$\begin{aligned} n &= -0,009 \cos 2\theta (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda), \\ e &= 0,009 \cos \theta (m_1 \sin \lambda - m_2 \cos \lambda), \\ u &= -0,033 \sin 2\theta (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Для преобразования в систему, связанной с Землей, применяется преобразование (2.7).

2.3.6 Эксцентриситеты станций наблюдения

В большинстве случаев координаты станций, указанные в каталоге, относятся не к опорной точке инструмента (антенны, лазерного дальномера и т.д.), а к некоторому опорному пункту, к которому привязываются инструменты при помощи наземных высокоточных геодезических измерений. Эти смещения (эксцентриситеты) публикуются в каталогах в виде поправок к геоцентрическим прямоугольным координатам пункта XYZ¹⁶ или к координатам в системе NEU¹⁷, которые необходимо добавить к координатам станций.

2.4 Реализация метода наименьших квадратов

2.4.1 Уравнения поправок и система нормальных уравнений

В результате линеаризации уравнения (2.1) получим:

$$\Delta \bar{\rho} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{r}_i} \Delta \bar{r}_i - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{R}_j} \Delta \bar{R}_j. \quad (2.40)$$

Геоцентрический вектор ИСЗ в момент времени i \bar{r}_i есть сложная функция от начальных условий \bar{r}_0 , коэффициентов гравитационного поля $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ и других параметров возмущающих сил P_l (например, коэффициент светового давления, аэродинамический коэффициент или эмпирическое ускорение). Теперь для любого момента наблюдений можем записать:

$$\Delta \bar{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{r}_i} \left[\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \bar{r}_0} \Delta \bar{r}_0 + \sum_{n,m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial (\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})} \begin{pmatrix} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{pmatrix} + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial (P_1, P_2, \dots, P_l)} \begin{pmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \dots \\ \Delta P_l \end{pmatrix} \right] - \frac{\partial \rho}{\partial \bar{R}_j} \Delta \bar{R}_j. \quad (2.41)$$

¹⁶ ftp://cddis.gsfc.nasa.gov/slr/slocc/ecc_xyz.snz

¹⁷ ftp://cddis.gsfc.nasa.gov/slr/slocc/ecc_une.snz

В выражении (2.41):

$\bar{r}_i = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_i^T$ – координаты и скорости ИСЗ в момент времени i ;

$\bar{r}_0 = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_0^T$ – координаты и скорости ИСЗ в начальный момент времени (начальные условия интегрирования);

$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{r}_i}$ – производная от измеренной величины (расстояние пункт-спутник) по текущим координатам и скоростям ИСЗ;

$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \bar{r}_0}$ – матрица производных от текущих координат и скоростей ИСЗ по начальным (матрица изохронных производных или матрицант);

$\Delta \bar{r}_0 = (\Delta x_0 \ \Delta y_0 \ \Delta z_0 \ \Delta \dot{x}_0 \ \Delta \dot{y}_0 \ \Delta \dot{z}_0)^T$ – вектор поправок к начальным условиям интегрирования, получаемый из решения;

$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial (\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})}$ и $\begin{pmatrix} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{pmatrix}$ – матрица производных от текущих координат и скоростей ИСЗ по уточняемым (определяемым) коэффициентами гравитационного поля Земли и вектор поправок к ним;

$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial (P_1, P_2, \dots, P_l)}$ и $(\Delta P_1 \ \Delta P_2 \ \dots \ \Delta P_l)^T$ – матрица производных от текущих координат и скоростей ИСЗ по уточняемым параметрам возмущающих сил и вектор поправок к ним;

$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial R_j}$ – вектор производных от измеренной величины по координатам станции наблюдения;

$(\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z)_j^T$ – вектор поправок к координатам станции наблюдения j .

В случае уточнения координат полюса, вариаций продолжительности суток (ПВЗ) и систематических погрешностей лазерных дальномеров в уравнение (2.41) необходимо внести дополнительные члены. С учетом дополнительных неизвестных выражение (2.41) примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\rho} = & \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{r}_i} \left[\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial\bar{r}_0} \Delta\bar{r}_0 + \sum_{n,m} \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})} \begin{pmatrix} \Delta\bar{C}_{nm} \\ \Delta\bar{S}_{nm} \end{pmatrix} + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial(x_p, y_p, LOD)} \begin{pmatrix} \Delta x_p \\ \Delta y_p \\ \Delta LOD \end{pmatrix} \right] + \\ & + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial(P_1, P_2, \dots, P_l)} \begin{pmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \dots \\ \Delta P_l \end{pmatrix} - \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{R}_j} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_j - \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{R}_j} \frac{\partial\bar{R}_j}{\partial(x_p, y_p, LOD)} \begin{pmatrix} \Delta x_p \\ \Delta y_p \\ \Delta LOD \end{pmatrix} + \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\Delta_{RBj}} \Delta_{RBj}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где

$\frac{\partial\bar{R}_j}{\partial(x_p, y_p, \Delta LOD)}$ – производная от координат станции j по уточняемым ПВЗ;

$(\Delta x_p \quad \Delta y_p \quad \Delta LOD)^T$ – поправки к начальным значениям ПВЗ;

$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\Delta_{RBj}}$ – производная от измеренной величины по систематической погрешности лазерного

дальномера j -ой станции Δ_{RBj} (равно 0 в случае, если для j -ой станции эта величина не уточняется, и 1 – в случае уточнения);

Δ_{RBj} – поправка к начальному значению систематической погрешности.

Матрица $\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial\bar{r}_0} = \bar{\Phi}(t, t_0)$ – матрицант, или матрица изохронных производных – определяет

зависимость между текущими координатами и скоростями ИСЗ и их начальными значениями. В качестве начального значения служит единичная матрица.

Перейдем к уравнениям поправок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{r}_i} \left[\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial\bar{r}_0} \Delta\bar{r}_0 + \sum_{n,m} \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})} \begin{pmatrix} \Delta\bar{C}_{nm} \\ \Delta\bar{S}_{nm} \end{pmatrix} + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial(x_p, y_p, LOD)} \begin{pmatrix} \Delta x_p \\ \Delta y_p \\ \Delta LOD \end{pmatrix} + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial(P_1, P_2, \dots, P_l)} \begin{pmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \dots \\ \Delta P_l \end{pmatrix} \right] - \\ - \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{R}_j} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_j - \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{R}_j} \frac{\partial\bar{R}_j}{\partial(x_p, y_p, LOD)} \begin{pmatrix} \Delta x_p \\ \Delta y_p \\ \Delta LOD \end{pmatrix} + \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\Delta_{RBj}} \Delta_{RBj} + (\rho_i^{облч} - \rho_i^{изм}) = v_{\rho_i}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

где $\rho_i^{6ыч}$ и $\rho_i^{изм}$ – вычисленное и измеренное значения дальности в момент времени i , а v_{ρ_i} – вероятнейшая (в смысле метода наименьших квадратов) поправка к непосредственно измеренному значению $\rho_i^{изм}$.

Объединяя уравнения (2.43) для каждого момента наблюдений, получаем систему уравнений

$$A\delta X + l = v, \quad (2.44)$$

где

A – матрица коэффициентов уравнений поправок размерности $m \times n$, где m – число наблюдений, а n – число неизвестных;

δX – вектор определяемых параметров размерностью $n \times 1$ (начальные условия интегрирования уравнений движения ИСЗ, координаты пунктов, ПВЗ, коэффициенты ГПЗ, координаты геоцентра и параметры возмущающих ускорений);

l – вектор свободных членов размерностью $n \times 1$, получаемых как вычисленное расстояние минус измеренное.

Затем переходим к системе нормальных уравнений:

$$(A^T P A) \delta X = A^T P l, \quad (2.45)$$

где P – весовая матрица.

Искомые величины определяются из следующего выражения:

$$\delta X = -(A^T P A)^{-1} A^T P l = -N^{-1} b = -Q b. \quad (2.46)$$

Полученные поправки к уточняемым параметрам добавляются к их начальным значениям

$$X = X^0 + \delta X \quad (2.47)$$

и выполняют вторую итерацию (интегрирование уравнений движения, вычисления коэффициентов уравнений поправок и т.д.) при условии $X^0 = X$. Итерационный процесс выполняется до момента схождения величин δX к некоторому заданному значению (например, к нулю). Далее выполняется оценка точности:

$$v = A^T \delta X + l. \quad (2.48)$$

Далее вычисляется среднеквадратическая ошибка единицы веса (СКО):

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{m-n}}, \quad (2.49)$$

где m – число измерений, а n – общее количество определяемых параметров.

На завершающем этапе определяются среднеквадратические погрешности (СКП) для каждой из определяемых величин:

$$m_k = \sigma_0 \sqrt{Q_{kk}}. \quad (2.50)$$

Обращение матрицы нормальных уравнений в выражении (2.46) может быть выполнено разными методами. Однако любое обращение (особенно больших систем) ведет к накоплению погрешностей. Поэтому наиболее оптимальным вариантом решения уравнения (2.44) будет применение QR-факторизации, т.е. разложения матрицы \mathbf{A} на ортогональную и верхнетреугольную с применением определенных преобразований [95]. В разработанном программном комплексе реализован модифицированный алгоритм Грама-Шмидта [66], который заключается в последовательном преобразовании столбцов матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{l} . В результате преобразования все элементы матрицы \mathbf{A} обращаются в нуль за исключением верхнетреугольного сегмента, образованного первыми n строками и n столбцами (n – общее количество столбцов матрицы \mathbf{A}). Далее этот сегмент матрицы обращается с использованием метода обращения верхнетреугольной матрицы [8], позволяющего значительно упростить процесс. Решение системы получается путем перемножение обращенного сегмента на первые n членов вектора \mathbf{l} . Такой подход позволяет избежать потери точности, возникающей при реализации других методов решения системы (2.45) [66].

2.4.2 Решение вариационных уравнений

Вычисление матриц производных $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \bar{r}_0}$, $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial (\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})}$, $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial (x_p, y_p, \Delta LOD)}$, $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial (P_1, P_2 \dots P_l)}$

связано с определенными сложностями, так как нет явных аналитических выражений, определяющих зависимость между координатами и скоростями ИСЗ и искомыми параметрами. Поэтому применяются различные приближенные методы (например, метод Бойкова-Устинова метод конечных разностей [22]). Однако наиболее удобным и универсальным методом, позволяющим определить все указанные величины, является метод интегрирования вариационных уравнений. Данный метод заключается в интегрировании уравнений следующего вида [95]:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\Phi}_r \\ \ddot{S}_r \end{pmatrix}_{3 \times (6+n)} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \ddot{r}}{\partial \bar{r}} \right)_{3 \times 3} \cdot (\bar{\Phi}_r, \bar{S}_r)_{3 \times 6} & \left(\frac{\partial \ddot{r}}{\partial \dot{r}} \right)_{3 \times 3} \cdot (\bar{\Phi}_v, \bar{S}_v)_{3 \times 6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 6} & \left(\frac{\partial \ddot{r}}{\partial \bar{P}} \right)_{3 \times n} \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

В выражении (2.51) используются следующие обозначения:

$$\bar{\Phi}(t, t_0)_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} (\bar{\Phi}_r)_{3 \times 6} \\ (\bar{\Phi}_v)_{3 \times 6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{r}}{\partial (\bar{r}_0, \dot{r}_0)} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial (\bar{r}_0, \dot{r}_0)} \end{pmatrix}; \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{S}_r \\ \bar{S}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{P}} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial \bar{P}} \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

где \bar{S} – матрица, объединяющая в себе матрицы $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial (\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})}$, $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial (x_p, y_p, LOD)}$, $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial (P_1, P_2 \dots P_l)}$, а $\frac{\partial \ddot{r}}{\partial \bar{P}}$ – матрица производных от ускорений, вызванных различными возмущающими силами, по определяемым параметрам. При этом n обозначает количество уточняемых параметров (помимо начальных координат и скоростей ИСЗ).

Таким образом, решая задачу для одного спутника, имеем систему из $3 \times (6+n)$ дифференциальных уравнений второго порядка, которая интегрируется одновременно с уравнениями движения ИСЗ (2.2) тем же самым методом интегрирования. В качестве начальных значений для $\bar{\Phi}(t, t_0)$ принимается единичная матрица, а для \bar{S} – нулевая матрица.

2.5 Интегрирование уравнений движения

При решении задач небесной механики и космической геодезии орбитальным или динамическим методами требуется знать предвычисленные орбиты спутников для составления уравнений поправок. Эта задача решается интегрированием дифференциальных уравнений движения ИСЗ (2.2), численно или аналитически.

В настоящее время предъявляются высокие требования по точности к орбитам спутников, используемых для лазерной локации. Это обусловлено двумя факторами:

1. высокая точность наблюдений (например, точность единичных измерений наклонных дальностей до ИСЗ, получаемых из наблюдений отечественным лазерным дальномером «Сажень-ТМ», составляет 0,5-2см [42]);
2. разработка спутников, предназначенных для лазерной локации, с малой ошибкой цели (примером такого спутника является ИСЗ БЛИЦ [125] – ошибка цели для данного объекта находится на уровне 0,1 мм).

Таким образом, чтобы предвычисленные орбиты спутников соответствовали точности наблюдений и позволяли использовать преимущества спутников с малой ошибкой цели, в

дифференциальных уравнениях движения учитывают большое количество возмущений, действующих постоянно или периодически на спутники и изменяющих их орбиты. Вследствие этого использовать аналитические методы интегрирования нецелесообразно в виду громоздкости правых частей уравнений движения ИСЗ. В такой ситуации численные методы интегрирования становятся удобным инструментом определения орбит. Однако погрешность самого численного метода также имеет место. Величину этой погрешности необходимо знать и учитывать при вычислении орбит, а также подбирать метод интегрирования и его параметры таким образом, чтобы минимизировать влияние этого источника ошибок. К настоящему времени разработано большое количество высокоточных методов численного интегрирования. Наибольшее распространение получил метод Эверхарта [59].

В рамках диссертационной работы для интегрирования уравнений движения использовался метод численного интегрирования, основанный на аппроксимации правых частей уравнений (2.2) смещенными полиномами Чебышева первого порядка. Данный метод разработан в Институте теоретической астрономии АН СССР в 90х гг. XX века и показал свою надежность и преимущества по сравнению с методом Эверхарта в решении задач астрометрии, небесной механики, а именно вычисления орбит планет Солнечной системы и искусственных спутников Земли [2,26]. При сравнимой точности интегрирования данный метод обладает большей скоростью вычислений. Общее описание теории метода приводится в работах [2,21].

В процессе работы над диссертацией автором были разработаны алгоритмы и способы их реализации, на основе которых были выполнены сравнения с методом Эверхарта в части интегрирования орбит ИСЗ с различными параметрами. Результаты подробно описаны в работе [26]. На основании выполненных исследований был выбран алгоритм метода, основанный на построении интерполяционного полинома для уравнений движения (2.2) по узлам разбиения t_m шага интегрирования $H=[0,T]$:

$$\ddot{x}_m = \ddot{x}_0 + \sum_{n=1}^N A_n \left[T_n^* \left(\frac{t_m}{T} \right) - (-1)^n \right]. \quad (2.53)$$

Здесь через \ddot{x}_m и \ddot{x}_0 обозначены ускорения спутника (по любой из осей) на момент времени $t_m \in [0,T]$ и на начало шага интегрирования соответственно, $T_n^* \left(\frac{t_m}{T} \right)$ – смещенный полином Чебышева первого рода степени n для соответствующего аргумента $\left(\frac{t_m}{T} \right)$, а A_n – численные коэффициенты, алгоритм вычисления которых зависит от способа разбиения шага

интегрирования, а именно от фиксации граничных значений (начала и конца шага). В результате выполненных исследований было установлено, что при фиксации только левого узла достигается наивысшая точность метода интегрирования: накопленная величина ошибки на пятисуточном интервале времени не превышает 0,1мм [26]. В этом случае коэффициенты A_n и моменты времени t_m (в относительном выражении относительно начала каждого шага интегрирования) вычисляются с применением следующих выражений:

$$A_n = \frac{2(-1)^n \delta_n}{2N+1} \ddot{x}_0 + \frac{4\delta_n}{2N+1} \sum_{m=1}^N \ddot{x}_m T_n^* \left(\frac{t_m}{T} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (2.54)$$

$$\left. \begin{aligned} t_m &= \frac{T}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(2m-1)}{2N+1} \right) \right), \quad m = 1, 2, \dots, N, \\ t_0 &= 0; \end{aligned} \right\}, \quad (2.55)$$

Где $\delta_0 = \frac{1}{2}$, $\delta_n = 1$, $n > 0$, а N – порядок метода. В результате экспериментальных вычислений, установлено, что для достижения высоких точностей (не хуже 0,1мм) достаточно ограничиться порядком метода $N = 6 \div 8$ [26].

2.6 Выводы к главе 2

В главе 2 представлен обзор систем координат и шкал времени, возмущающих факторов и нагрузочных эффектов, рекомендованных действующими Соглашениями МСВЗ 2010 [105], а также необходимых для учета в специальных случаях (учет атмосферного торможения для низкоорбитальных ИСЗ). Кроме этого, описаны возмущения и нагрузочные эффекты, не рассмотренные в Соглашениях МСВЗ 2010 [105]: атмосферные приливы, эффект альбедо, неприливные перемещения масс в атмосфере и океанах, атмосферная неприливая нагрузка. С целью повышения точности и объективности оценки определяемых геодинимических параметров необходимо исследовать влияния указанных факторов на определяемые параметры (орбиты спутников, координаты станций, параметры вращения Земли и коэффициенты гравитационного поля).

Отдельно рассмотрен динамический метод определения параметров и алгоритмы его реализации. Представлены алгоритмы метода численного интегрирования, основанного на аппроксимации правых частей уравнений движения смещенными полиномами Чебышева первого рода, и результаты исследования данного метода.

3 Программный комплекс для обработки данных лазерной локации ИСЗ «ГеоИС (Геодинамические исследования)»

3.1 Описание программного комплекса «ГеоИС»

Обработка данных лазерной локации ИСЗ подразумевает наличие соответствующего программного комплекса. К настоящему моменту во всем мире разработано несколько таких программных комплексов, из которых наиболее известными являются:

1. GEODYN II, разработанный в Центре космических полетов им. Годдарда (НАСА, США) [80].
2. GIPSY-OASIS разработки Лаборатории реактивного движения (НАСА, США) [82].
3. Bernese GNSS Software (Астрономический институт Университета Берна, Швейцария) [52].
4. GRAPE (Институт прикладной астрономии РАН, г. Санкт-Петербург).
5. STARK (ИАЦ КВНО ГЛОНАСС, ЦНИИмаш, г.Королев).
6. Программный пакет «LENTA» (ГАИШ, МГУ, Чазов В.В.) [23].

Разработанные в Институте астрономии РАН комплексы «Прогноз» [20] и «Астра» [1], успешно использовались до 1996г. В рамках диссертационной работы была поставлена задача создания нового программного комплекса «ГеоИС (Геодинамические исследования)» [28,29], реализующего самые современные и высокоточные алгоритмы и модели, описанные в главе 2. Программный комплекс реализован на языке программирования Fortran 90. Программный комплекс реализован на языке программирования Fortran 90. Программный комплекс содержит 177 подпрограмм. Объем исходного кода – 2242Кб, или 11500 строк.

Программный комплекс «ГеоИС» предназначен для обработки лазерных наблюдений искусственных спутников Земли и позволяет определять орбиты ИСЗ (как низких, так и высоких), уточнять координаты станций, параметры вращения Земли и коэффициенты гравитационного поля Земли, а также координаты геоцентра (если одновременно не определяются координаты станций, так как в этом случае движение геоцентра косвенным образом входит в координаты станций). Учитывается влияние гравитационного поля Земли, твердых земных, океанических и полюсных приливов, притяжения тел Солнечной системы, светового давления, атмосферного торможения, переотражения и переизлучения Землей солнечной радиации, перемещения неприливных масс в атмосфере и океанах, атмосферных приливов. Имеется возможность определять смещения станций под влиянием эффектов твердой приливной и океанической нагрузки, атмосферной нагрузки, деформаций, вызванных вращением Земли (Таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Модели и параметры, используемые в программном комплексе «ГеоИС (Геодинамические Исследования)».

	LAGEOS-1/LAGEOS-2	AJISAI/LARES/Starlette/Stella
Длина дуги	7 суток	2х3,5суток
Орбиты		
Гравитационное поле Земли	До степени и порядка 30	До степени и порядка 90
Приливные эффекты	Соглашения МСВЗ 2010 [105] Атмосферные приливы не используются в стандартном решении	
Учет неприливных перемещений масс в атмосфере и океанах*	Не используется в стандартном решении	
Притяжение тел Солнечной системы	Луна, Солнце, Венера, Юпитер [25]	
Атмосферное торможение	Не применяется	$C_D = 2,00$ Уточняется на каждых сутках для каждого спутника
Световое давление	$C_T = 1,13$; уточняет для каждого спутника	
Релятивистские поправки	Соглашения МСВЗ 2010 [105]	
Переотражение и переизлучение Землей солнечной радиации*	Не используется в стандартном решении	
Эмпирические ускорения	Постоянная составляющая в трансверсальном направлении	Не применяется
Нагрузочные эффекты		
Твердая приливная нагрузка	Соглашения МСВЗ 2010 [105]	
Океаническая приливная нагрузка	Соглашения МСВЗ 2010 [105]	
Нагрузка, вызванная океаническими полюсными приливами	Соглашения МСВЗ 2010 [105]	
Атмосферная нагрузка (приливная и неприливная)*	Не используется в стандартном решении	
Деформации, вызванные движением полюсов	Соглашения МСВЗ 2010 [105]	
Другие астрономические и геофизические модели и постоянные		
Прецессия/Нутация	IAU 2006/2000A [105]	
Движение полюса и вращение Земли	IERS C04 [35]	
Приливные эффекты в движении полюса и вращении Земли	Учет полусуточных, суточных и долгопериодических волн [105]	
Геоцентрическая гравитационная постоянная	$398600,4415 \text{ км}^3/\text{с}^2$ [105]	
Радиус Земли	6378136,3м [105]	
Скорость света в вакууме	299792458м/с [105]	

Целесообразность учета возмущений, отмеченных в таблице 3.1 знаком «*», исследована в главе 4 диссертационной работы по данным лазерных наблюдений низких и высоких спутников: для низких спутников интервал обработки составлял 1 год (2013г.), а для высоких – 4 года (2010-2013гг). Термин «стандартное решение» обозначает решение, относительно которого выполнялось сравнение полученных величин (орбитальных невязок, координат станций и др.) при исследовании возмущений и нагрузочных эффектов.

Блок-схема программного комплекса представлена на рисунке 3.1.

В качестве исходных данных для обработки служат нормальные точки, полученные по измерениям, выполненным на станциях ILRS. Данные берутся из обоих банков данных (см. параграф 1.1), и выполняется их сравнительный анализ с целью выявления повторных измерений или ошибок в файлах. Из этих же банков данных выбираются начальные условия для интегрирования орбит (из файлов с предсказанными орбитами, используемыми непосредственно на станциях для выполнения наблюдений). Для второго и последующих обрабатываемых интервалов начальные значения берутся из предыдущего решения. Такой подход позволяет существенно сэкономить время вычисления, так как исключается от 2 до 4 итераций. В представленном программном комплексе реализована поддержка всех существующих форматов распространения как результатов измерений (в том числе нормальных точек), так и предсказанных орбит, которые когда-либо использовались в международной кооперации в области лазерной локации. Более подробная информация о форматах доступна на интернет-сайте службы ILRS¹⁸.

В процессе предварительной обработки наблюдений оценивается число наблюдений для каждой станции по каждому спутнику в отдельности. В общее решение включаются только те станции, для которых количество нормальных точек по каждому спутнику на обрабатываемом интервале времени составляет не менее 10. Также выполняется отбраковка по углу возвышения над горизонтом. Как указано в пункте 1.2.1, используемая модель тропосферной поправки позволяет работать с углами возвышения от 3^0 и выше. Поэтому наблюдения с меньшими углами наклона исключались из решения.

¹⁸ http://ilrs.gsfc.nasa.gov/data_and_products/formats/index.html

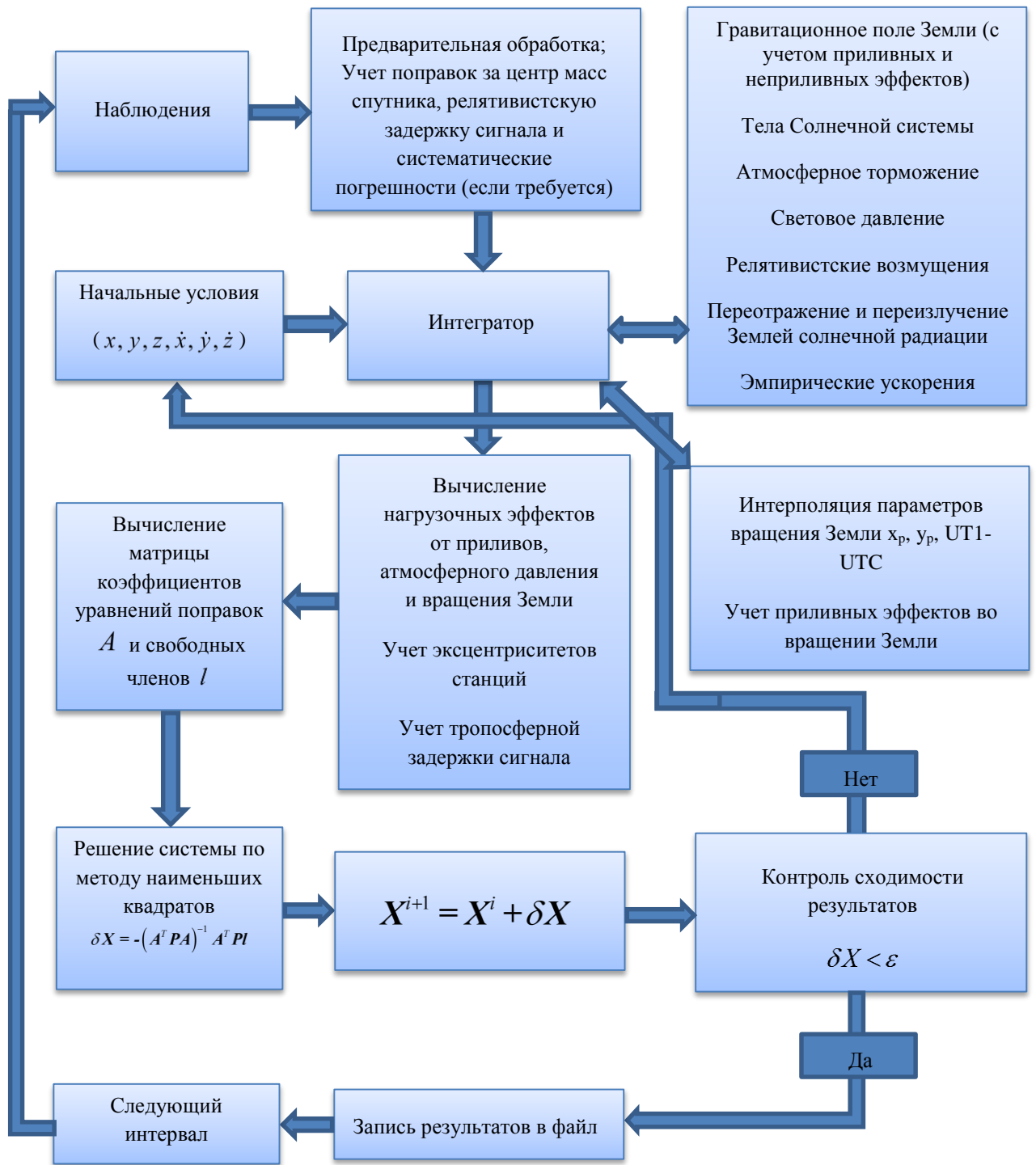


Рисунок 3.1 – Блок-схема программного комплекса «ГеоИС (Геодинамические Исследования)»

Реализация системы координат осуществляется по двенадцати основным станциям (*core stations*) глобальной сети IIRS, указанным в таблице 3.2. Другими словами, координаты этих станций являются фиксированными (с учетом линейных скоростей из каталога) в системе SLRF2008. Список основных станций IIRS больше в 2 раза [101]. Станции, указанные в таблице

3.2, действовали наиболее активно на том временном интервале, который обрабатывался в рамках диссертационной работы (2001-2013гг).

Таблица 3.2 – Станции, реализующие систему координат

ID	Название станции	DOMES	Год начала работы
7080	McDonald Observatory, США	40442M006	1988
7090	Yarragadee, Австралия	50107M001	1979
7105	Greenbelt, США	40451M105	1981
7110	Monument Peak, США	40497M001	1981
7501	Hartebeesthoek, ЮАР	30302M003	2000
7810	Zimmerwald, Швейцария	14001S007	1998
7825	Mt Stromlo, Австралия	50119S003	2004
7832	Riyadh, Саудовская Аравия	201001001	2001
7839	Graz, Австрия	11001S002	1996
7840	Herstmonceux, Великобритания	13212S001	1983
7941	Matera, Италия	12734S008	2001
8834	Wetzell, Германия	14201S018	1996

Для вычисления орбит спутников использовался разработанный алгоритм метода численного интегрирования, основанный на аппроксимации правых частей уравнений смещенными полиномами Чебышева первого порядка и описанный в параграфе 2.5. С целью определения оптимального шага интегрирования для вычисления орбит ИСЗ был выполнен ряд численных экспериментов [26], в результате которых было установлено, что для низкоорбитальных ИСЗ оптимальным шагом интегрирования является интервал 120с, а для высокоорбитальных LAGEOS-1/2 – 240с. При этом, модель движения ИСЗ реализована в прямоугольных координатах с учетом рассмотренных в параграфе 2.2 возмущающих эффектов. Интегрирование выполняется в инерциальной системе координат с преобразованием в земную при необходимости. При этом, для низкоорбитальных ИСЗ стандартная семисуточная дуга делится на 2 отрезка по 3,5 суток.

После вычисления орбит спутников на каждый момент наблюдений вычисляются поправки в координаты станций за влияние нагрузочных эффектов, описанных в параграфе 2.3, а также учитываются эксцентриситеты станций.

На следующем этапе выполняется формирование матрицы коэффициентов и вектора свободных членов, взвешивание для каждого спутника (см. параграф 5.1.1) и, непосредственно, само решение (см. параграф 2.4).

Параметры вращения Земли, необходимые для вычисления матриц преобразования из небесной системы координат в земную, интерполируются линейно по ряду IERS C04 [35] с учетом приливных эффектов [105]. Кроме того, при уточнении параметров вращения Земли одно значение $\Delta UT1$ фиксируется на середину каждого недельного интервала, так как лазерная локация ИСЗ не позволяет определять непосредственно величины $\Delta UT1$, а только лишь вариации продолжительности суток, которые после получения решения преобразуются в поправки к Всемирному времени. Поэтому в дальнейшем анализ полученных результатов будем выполнять именно относительно этих величин. Таким образом, для стандартного семисуточного интервала имеем по 8 значений координат полюса и 7 значений вариаций продолжительности суток.

3.2 Апробация программного комплекса «ГеоИС»

Апробация программного комплекса «ГеоИС» заключалась в экспериментальной обработке лазерных наблюдений спутников LAGEOS-1/2 на четырехлетнем временном интервале (с 2010 по 2013гг.) с одновременным определением разного набора геодинимических параметров.

В первом эксперименте определяемыми величинами (помимо начальных условий интегрирования и коэффициентов светового давления спутников) являлись коэффициенты гравитационного поля Земли $\bar{C}_{20}, \bar{C}_{21}, \bar{S}_{21}$. Полученные ряды коэффициентов представлены на рисунке 3.2. Для сравнения приведены аналогичные величины, полученные в Центре Космических Исследований в Техасе, США (*Center of Space Research/CSR*) [49]. В целом, полученные ряды значений коэффициентов хорошо согласуются друг с другом.

Некоторые различия могут быть обусловлены несколькими факторами:

1. Разный набор обрабатываемых спутников: в работе CSR использовались 8 спутников: помимо спутников LAGEOS-1/2 участвовали также Stella, Starlette, AJISAI, Эталон-1/2, BEACON-B, в представленном эксперименте – только LAGEOS-1/2.
2. Отличия в моделях сил, учитываемых при вычислении ускорений ИСЗ.
3. Обработка наблюдений в CSR выполнялась на месячных интервалах, поэтому соответствующие графики более гладкие.

В данном эксперименте средневзвешенные остаточные орбитальные невязки на временном интервале 4 года (2010-2013гг.), полученные из обработки наблюдений с применением комплекса «ГеоИС», составили 22,8мм и 21,1мм для ИСЗ LAGEOS-1 и LAGEOS-2 соответственно.

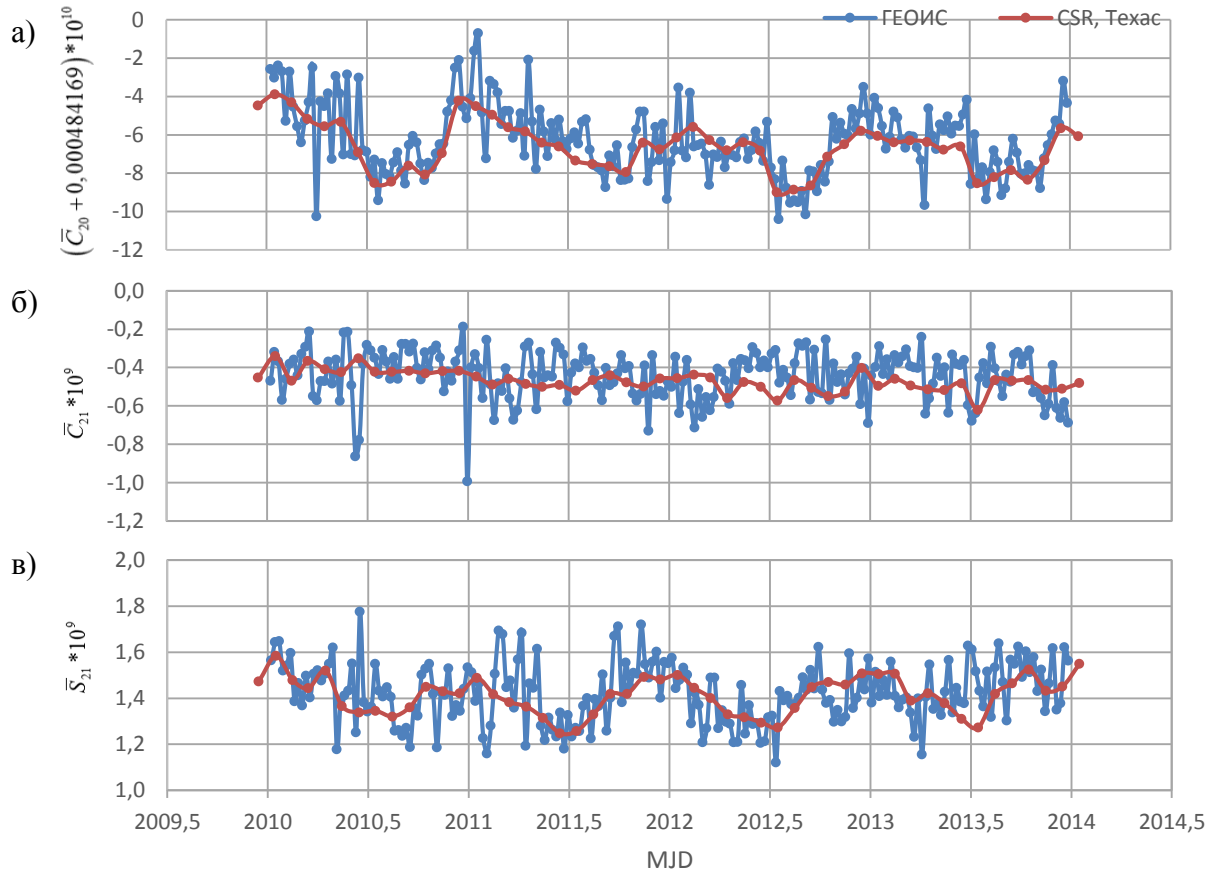


Рисунок 3.2 – Значения коэффициентов геопотенциала \bar{C}_{20} (а), \bar{C}_{21} (б) и \bar{S}_{21} (в), полученные из обработки спутников LAGEOS-1/2 с помощью программного комплекса «ГеоИС» (стандартное решение), в сравнении с аналогичными величинами, полученными в Центре Космических Исследований (Техас, США) [49]

Во втором эксперименте определяемыми величинами наряду с начальными условиями и коэффициентами светового давления являлись параметры вращения Земли и координаты станций. На рисунке 3.3 отражены разности между опорным рядом IERS C04 и аналогичными величинами, полученными с помощью комплекса «ГеоИС». Среднеквадратические отклонения от опорного ряда IERS C04 составили 0,64 и 0,61мс дуги (для координат полюса) и 1,003мс для поправки к Всемирному времени $\Delta UT1$. Такой уровень разностей вполне соответствует величинам, полученным с применением программного обеспечение, разработанного за рубежом (например, ПО Bernese GNSS Software [122]). Средневзвешенные погрешности определения ПВЗ составили 0,09мс дуги для координат полюса и 0,052мс для ΔLOD .

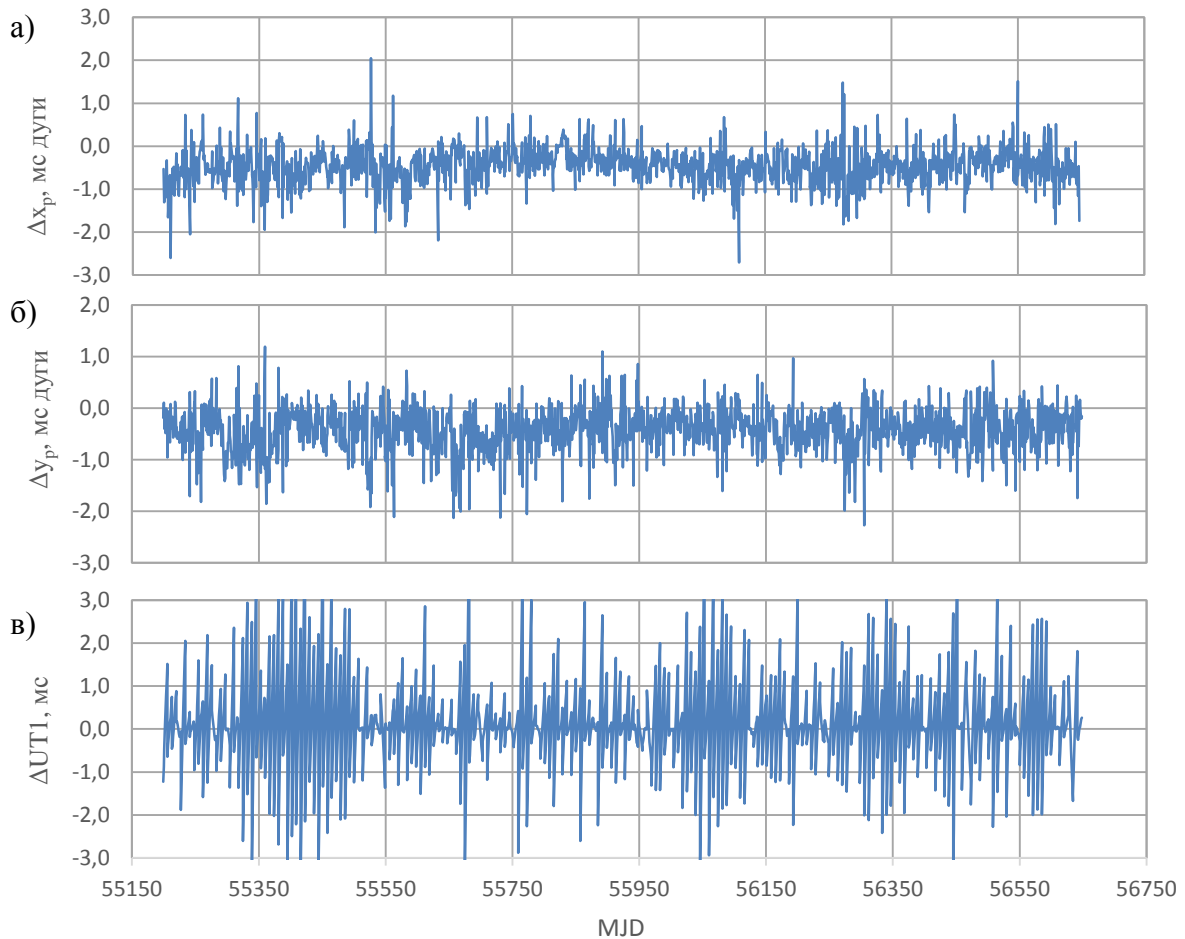


Рисунок 3.3 – Разности между опорным рядом ПВЗ IERS04 и рядом, полученным из обработки спутников LAGEOS-1/2 с помощью ПО «ГеоИС», для координат полюса x_p, y_p (а, б) и поправки $\Delta UT1$ (в)

Средневзвешенные погрешности определения координат станций в рассматриваемом эксперименте представлены в таблице 3.3. Средневзвешенные значения остаточных орбитальных невязок в данном эксперименте составили 17,0мм и 19,0мм для спутников LAGEOS-1 и LAGEOS-2 соответственно.

Таблица 3.3 – Средневзвешенные погрешности определения координат станций и количество обработанных недельных интервалов для каждой станции

Номер станции	План., мм	Высот., мм	Кол-во обработанных интервалов
1824	10,7	4,4	22
1868	16,2	24,2	33
1873	14,1	6,1	24
1886	8,0	3,7	41
1893	10,5	3,7	91
7119	6,1	3,1	162

7124	7,0	3,6	89
7237	6,3	2,7	175
7249	12,9	22,8	40
7308	7,2	11,7	62
7328	51,7	16,6	1
7358	9,8	4,7	15
7359	9,6	5,0	15
7403	8,7	15,5	79
7405	5,1	2,2	132
7406	6,1	8,8	143
7821	9,2	16,3	68
7822	7,4	3,4	12
7824	10,3	4,5	43
7838	5,1	2,2	153
7841	5,9	2,3	141
7845	4,5	6,9	172

3.3 Выводы к главе 3

Полученные результаты показывают, что разработанный программный комплекс «ГеоИС» позволяет определять орбиты спутников, координаты станций, ПВЗ и коэффициенты гравитационного поля с высокой точностью, на уровне зарубежных программных комплексов:

- полученные ряды коэффициентов гравитационного поля согласуются с результатами зарубежных центров, полученными из обработки лазерных наблюдений;
- полученные ряды параметров вращения Земли имеют отклонения от опорного ряда IERS C04, сопоставимые с результатами, полученными с применением других программных продуктов;
- суммарные ошибки в плане и по высоте определения координат станций не превосходят 7-10мм для большинства станций (важное значение имеет количество наблюдений).

4 Анализ влияния малых возмущающих факторов и нагрузочных эффектов на определяемые геодинимические параметры

Повышение точности вычисления орбит спутников и, как следствие, повышение точности определения исследуемых параметров достигается путем постоянного совершенствования моделей учитываемых сил, действующих на спутник. К настоящему моменту уже известны некоторые разработки в этом направлении, но еще не включенные в стандарты вычисления орбит (Соглашения МСВЗ 2010 [105]) или требующие дополнительных исследований:

- Атмосферные приливы.
- Переотражение и переизлучение Землей солнечной радиации.
- Перемещение неприливных масс в атмосфере и океанах (модель AOD1B).
- Атмосферная нагрузка на пункты (приливно-неприливно).

Результаты комплексной оценки влияния этих эффектов на орбиты геодезических ИСЗ, геодинимические параметры и точность их определения в литературе (как зарубежной, так и отечественной) отсутствуют. Поэтому было исследовано влияние на орбиты спутников и геодинимические параметры указанных выше эффектов. Кроме того, были выполнены сравнительные оценки моделей плотности атмосферы и способов вычисления скорости атмосферных потоков (данные величины необходимы при вычислении величин атмосферного торможения (2.30) при определении орбит низкоорбитальных ИСЗ).

Прежде, чем переходить к анализу полученных результатов, приведем некоторые необходимые методики.

При рассмотрении действия периодических эффектов определим некоторые периоды, характерные для орбит рассматриваемых спутников (периоды обращения восходящего узла орбит и аргумента перицентра, периоды действия приливных волн S_2 и S_1). Для определения периодов, относящихся к приливно-неприливно, воспользуемся методикой, разработанной в работе [71], которая позволяет по элементам орбиты спутника и с учетом числа Дудсона [56] для конкретной приливной волны и функций наклона и эксцентриситета [9] рассчитать период воздействия выбранной волны на конкретную спутниковую орбиту. При определении периодов обращения восходящего узла орбиты и аргумента перицентра учтем в уравнениях Лагранжа только вековое возмущение от второй зональной гармоники [7]. Результаты представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Периоды (в сутках) изменения долготы восходящего узла, аргумента перицентра и воздействия на орбиты спутников некоторых приливных волн [41] («минус» обозначает направление волны с востока на запад, «плюс» – с запада на восток)

	LAGEOS-1	LAGEOS-2	AJISAI	Stella	Starlette
T_{Ω}	1042	-543	-118	366	-91
T_{ω}	-1668	784	142	-123	109
S_1	-562	-218	-89	-83389	-73
S_2	-281	-109	-45	-41245	-37
S_a	366				
S_{sa}	182				

Для сравнения полученных СКП координат станций будем использовать средневзвешенное значение погрешности (*weighted root mean square*/WRMS):

$$m_{WRMS} = \frac{p_1 m_1 + p_2 m_2 + \dots + p_n m_n}{\sum_n p_n}, \quad (4.1)$$

где $m_1, m_2 \dots m_n$ – СКП определения координат (в плане или по высоте) станции на каждом временном интервале, а $p_1, p_2 \dots p_n$ – веса этих значений. Для назначения весов в данном случае будем использовать две величины – СКО единицы веса (2.49), и фактор снижения точности по местоположению (PDOP) для каждой i -ой станции:

$$PDOP_i = \sqrt{Q_{NN} + Q_{EE} + Q_{UU}}, \quad (4.2)$$

где Q_{NN}, Q_{EE}, Q_{UU} – соответствующие диагональный элементы ковариационной матрицы (2.46).

Вес для каждой станции вычисляется по следующей формуле:

$$p_i = \frac{1}{(\sigma_0 PDOP_i)^2}. \quad (4.3)$$

4.1 Сравнение моделей плотности атмосферы и способов вычисления скорости атмосферных потоков

С целью выбора наиболее оптимальной модели плотности атмосферы и способа вычисления скорости атмосферных потоков в выражении (2.30) для обработки лазерных наблюдений низкоорбитальных ИСЗ была выполнена экспериментальная обработка наблюдений четырех низкоорбитальных ИСЗ (AJISAI, Stralette, Stella, LARES) на интервале времени 51 неделя (с 3 января по 25 декабря 2013г.) с учетом трех моделей атмосферы и двух способов вычисления скорости атмосферных потоков. При этом определяемыми параметрами являлись только начальные условия интегрирования, коэффициент светового давления и аэродинамический коэффициент). Величины средневзвешенных остаточных орбитальных невязок, полученные с учетом трех моделей атмосферы и двух методов определения скорости атмосферных потоков, представлены в таблице 4.2. В данном случае символом « ω_{\oplus} » отмечено решение, в котором скорость атмосферных потоков определялась через скорость вращения Земли (выражение (2.31)), а «HWM07» – с помощью модели горизонтальных ветров.

Таблица 4.2 – Средневзвешенные остаточные орбитальные невязки (в мм), полученные с учетом разных моделей плотности атмосферы и способов вычисления скорости атмосферных потоков из обработки лазерных наблюдений спутников AJISAI, Starlette, Stella, LARES

ИСЗ	Модель плотности атмосферы и способ расчета скорости атмосферных потоков					
	NRLMSISE-00		JB2008		DTM2013	
	ω_{\oplus}	HWM07	ω_{\oplus}	HWM07	ω_{\oplus}	HWM07
AJISAI	50,9	50,9	50,9	50,9	50,8	50,9
Starlette	58,4	58,5	57,0	57,0	58,2	58,4
Stella	82,1	81,9	84,0	84,0	82,2	81,8
LARES	53,9	53,9	53,8	53,8	54,1	54,1

Для наглядной демонстрации на рисунке 4.1 приводятся величины остаточных орбитальных невязок для ИСЗ Starlette, полученные с учетом всех рассматриваемых моделей атмосферы и способов определения скорости атмосферных потоков.

Данные таблицы 4.2 и рисунка 4.1 позволяют заключить, что все модели показывают похожие результаты (для рассматриваемых орбит с высотами 800-1500км), поэтому нельзя выделить какую-то конкретную модель для дальнейших исследований. Однако необходимо отметить, что практическое использование модели DTM2013 показало существенное

(приблизительно в 3 раза) замедление процесса вычислений. Связано это, по всей видимости, со спецификой реализации модели на ЭВМ.

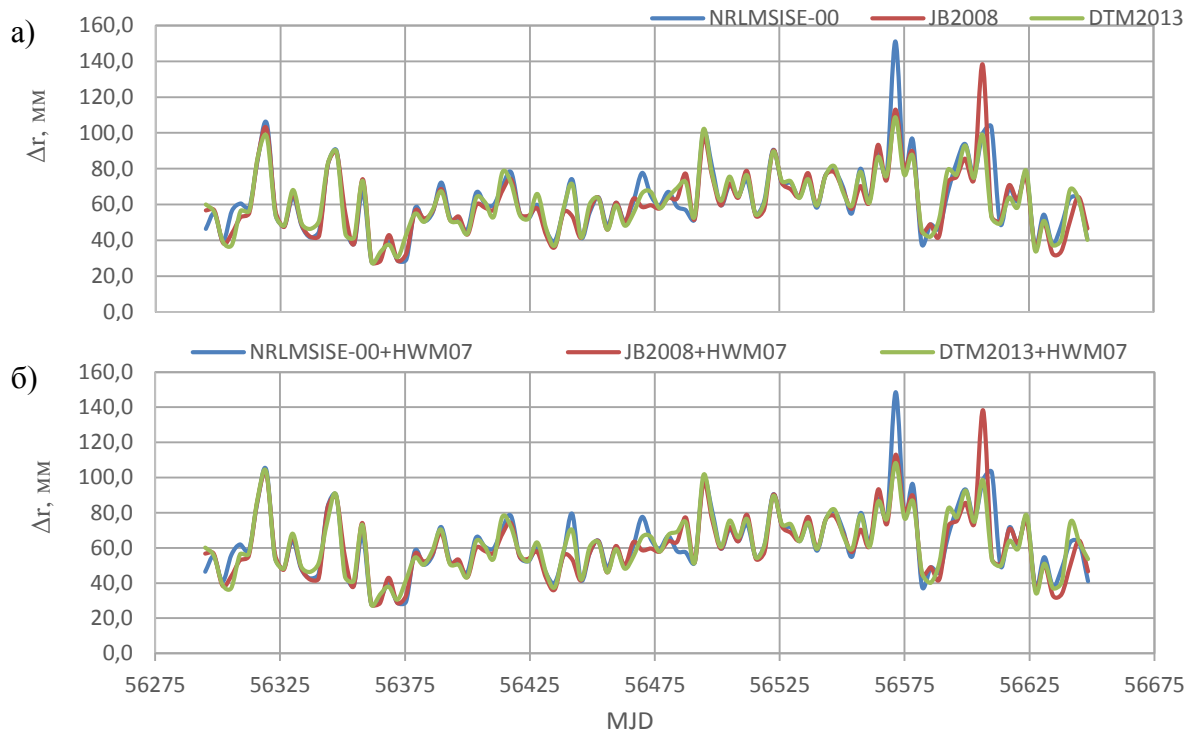


Рисунок 4.1 – Средневзвешенные остаточные орбитальные невязки для ИСЗ Starlette, полученные с применением трех моделей плотности атмосферы (а) и двух способов расчета скорости атмосферных потоков (б)

В связи с утерей спутника БЛИЦ в 2013г. и планируемым запуском ИСЗ БЛИЦ-М в 2016г. были выполнены исследования по определению оптимальной орбиты для ИСЗ БЛИЦ-М. Необходимость выбора другой орбиты (для первого ИСЗ БЛИЦ высота орбиты составляла ~800км) обусловлена тем фактором, что в силу большого значения $\frac{A}{m}$ для ИСЗ БЛИЦ (см. таблицу 1.2) и БЛИЦ-М (~0,002) на высоте ~800км велико влияние атмосферы. Так, для ИСЗ БЛИЦ игнорирование эффекта атмосферного торможения при вычислении орбиты ведет к погрешности порядка 222м на пятисуточной дуге [27]. Поэтому были исследованы две орбиты – с высотами 1500 и 2000км: в первом случае суммарное отклонение орбиты под действием атмосферного торможения составило 11,059м, а во втором – 3,421м. Таким образом, можно заключить, что с увеличением высоты орбиты до величины порядка 2000км достигается существенное уменьшение влияния атмосферного торможения на орбиту спутника БЛИЦ-М. При этом примерно на этих высотах находятся орбиты спутников AJISAI и LARES с углами наклона орбит 50° и $69,5^{\circ}$ соответственно. Поэтому наличие на этой высоте спутника с углом наклона орбиты порядка 98° (угол наклона орбиты ИСЗ БЛИЦ) может улучшить конфигурацию орбитальной группировки.

Выводы.

Исходя из представленных результатов в дальнейших исследованиях будем использовать модель NRLMSISE-00. Использование при вычислениях модели ветров HWM07 практически не сказывается на величинах среднеквадратических остаточных невязок (см. рисунок 4.1). Поэтому нет необходимости применения модели ветров HWM07 для расчета скорости атмосферных потоков в дальнейших вычислениях, достаточно ограничиться приближенным выражением (2.31).

4.2 Сравнение моделей атмосферных приливов и исследование их влияния на определяемые параметры

Наиболее современные модели атмосферных приливов – BB03 [33] и RP03 [108] – получены по одним и тем же данным (данные ECMWF) однако содержат различные приливные волны (см. таблицу 2.2). Для исследования влияния указанных моделей атмосферных приливов на орбиты геодезических ИСЗ и на определяемые параметры, а также для выбора оптимальной модели для обработки лазерных наблюдений спутников, был выполнен ряд экспериментов по обработке наблюдений спутников с разными высотами орбит с определением различных геодинамических параметров:

1. LAGEOS-1/2 на четырехлетнем интервале с определением трех коэффициентов геопотенциала – \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} .
2. LAGEOS-1/2 на четырехлетнем интервале с определением координат станций и параметров вращения Земли.
3. AJISAI/Starlette на годичном интервале с определением трех коэффициентов геопотенциала – \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} .

Здесь и далее четырехлетний интервал включал в себя промежуток времени с 2010 по 2013гг. Годичный интервал тот же, что и в предыдущем параграфе. Указанные эксперименты были выполнены для обеих рассмотренных моделей атмосферных приливов. Рассмотрим далее результаты каждого из экспериментов.

Представим полученные ряды коэффициентов ГПЗ в виде графиков (Рисунок 4.2). На рисунке 4.2 кривые **СТД**, **BB03** и **RP03** обозначают величины, полученные в стандартном решении (см. главу 3), и в решениях, полученных с учетом моделей атмосферных приливов BB03 или RP03, соответственно. При этом для удобства отображения здесь и далее коэффициент \bar{C}_{20} был преобразован следующим образом: к полученным значениям добавлена постоянная величина 0,000484169 (так как изменения в величинах коэффициента начинаются только в 10

знаке), а затем полученное значение умножено на 10^{10} . Для коэффициентов \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} множитель составил 10^9 . Сравнивая соответствующие графики, можно сделать вывод о том, что использование моделей атмосферных приливов при вычислении орбит спутников незначительно сказывается на величинах определяемых коэффициентов (здесь речь идет только о временной

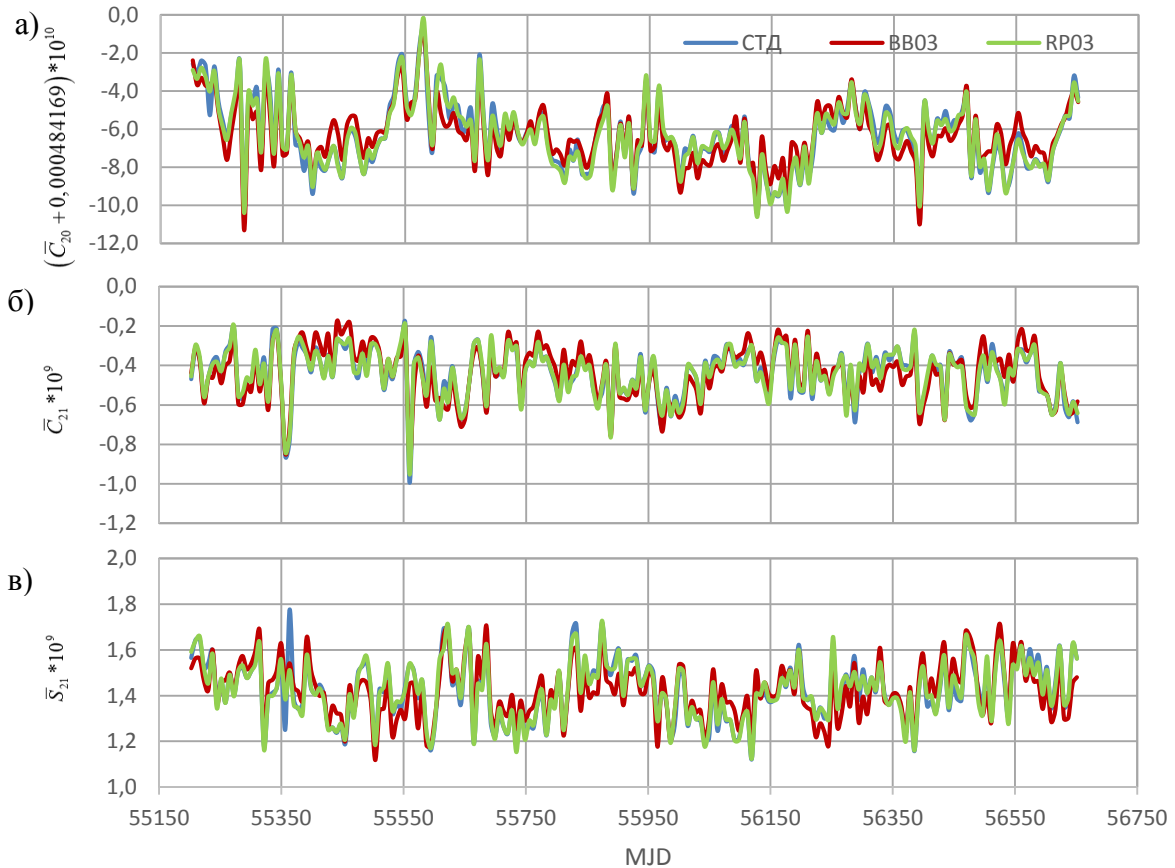


Рисунок 4.2 – Ряды коэффициентов \bar{C}_{20} (а), \bar{C}_{21} (б), \bar{S}_{21} (в), полученные с применением моделей атмосферных приливов (**BB03** и **RP03**), в сравнении со стандартным решением **СТД**

области): разности между значениями для соответствующих моментов времени не превышают величины $1,0E-10$ для коэффициента \bar{C}_{20} и $2,0E-10$ для коэффициентов \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} .

Для оценки погрешностей определяемых величин вычислим средневзвешенные погрешности, используя в качестве веса величину, обратную квадрату СКО единицы веса (2.49) каждого из 208 семисуточных интервалов в решениях. Аналогичным образом оценим остаточные орбитальные невязки. Результаты представлены в таблице 4.3. Данные таблицы 4.3 позволяют заключить, что погрешности определения коэффициентов геопотенциала практически не отличаются во всех трех решениях. Величины средневзвешенных орбитальных невязок практически совпадают для двух моделей атмосферных приливов для обоих спутников (разница – 0,2мм). При этом удалось добиться незначительного уменьшения этих величин относительно стандартного решения (не более 0,5мм).

Таблица 4.3 – Средневзвешенные погрешности определения коэффициентов \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} для каждого типа решения и средневзвешенные остаточные орбитальные невязки

		Тип решения		
		СТД	ВВ03	RP03
Средневзвешенные СКП величин	\bar{C}_{20}	0,83E-11	0,81E-11	0,82E-11
	\bar{C}_{21}	2,30E-11	2,25E-11	2,26E-11
	\bar{S}_{21}	2,42E-11	2,37E-11	2,38E-11
Невязка, мм	LAGEOS-1	22,8	22,5	22,3
	LAGEOS-2	21,1	20,6	20,8

На рисунке 4.3 представлены результаты спектрального анализа (дискретное преобразование Фурье) для рядов коэффициентов \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , полученных как в стандартном решении, так и с использованием рассматриваемых моделей атмосферных приливов (показаны периоды более 2 месяцев).

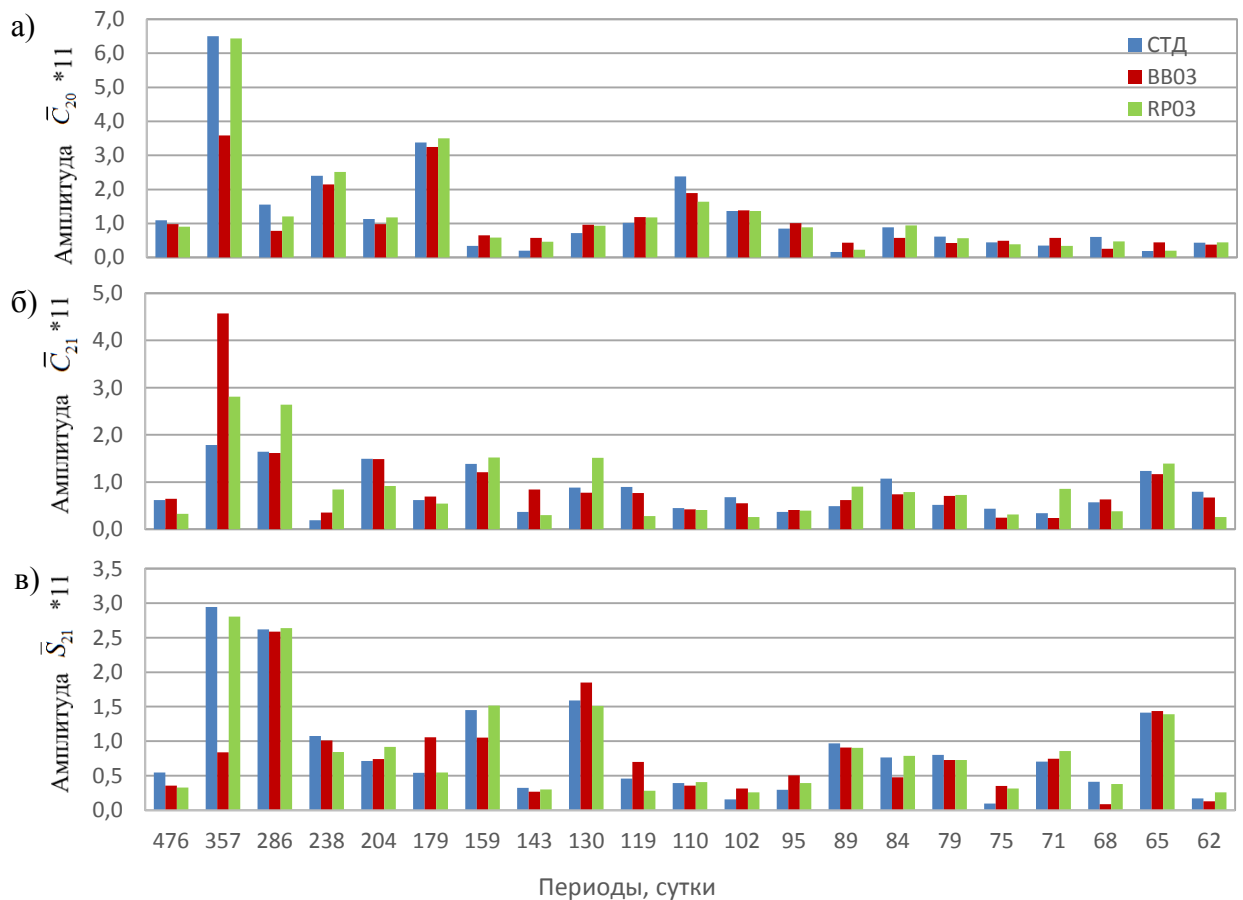


Рисунок 4.3 – Результаты спектрального анализа рядов коэффициентов \bar{C}_{20} (а), \bar{C}_{21} (б), \bar{S}_{21} (в), полученных с учетом двух моделей атмосферных приливов (ВВ03 и RP03), в сравнении со стандартным решением (СТД)

Полученные результаты позволяют заключить, что использование моделей атмосферных приливов при вычислении поправок в коэффициенты геопотенциала практически не сказывается на величинах амплитуд коэффициентов гравитационного поля Земли, за исключением годового сигнала, амплитуда которого для коэффициентов $\bar{C}_{20}, \bar{S}_{21}$ уменьшается в 2 и 3 раза соответственно, а для коэффициента \bar{C}_{21} амплитуда увеличивается в 2,5 раза в случае использования модели ВВ03, содержащей приливную волну S_a , период действия которой на орбиты обоих спутников составляет приблизительно 366 суток (см. таблицу 4.1) [30]. Такого явного проявления для волны S_{sa} для модели ВВ03 (как и для других волн используемых моделей, в том числе S_1 и S_2) не прослеживается.

Рассмотрим влияние моделей атмосферных приливов на координаты станций и параметры вращения Земли (второй эксперимент). Ряды координат станций совпадают для всех трех решений (стандартного и полученных с учетом моделей атмосферных приливов). В качестве иллюстрации на рисунках 4.4-4.5 приводятся полученные значения координат в системе NEU для двух станций – 7845 (Грасс, Франция) и 7237 (Чаньчунь, Китай). Дрейф станций относительно опорного каталога SLRF2008 вызван способом реализации системы координат (см. главу 3).

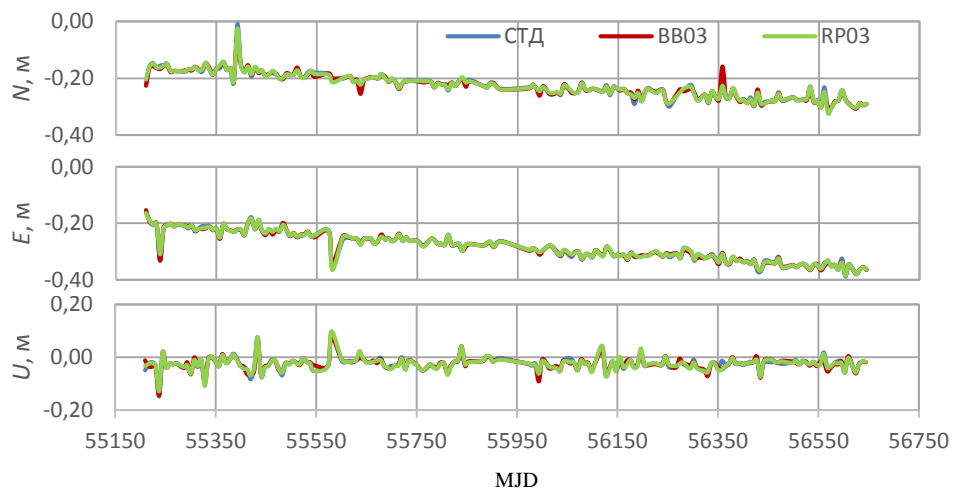


Рисунок 4.4 – Результаты определения координат станции 7845 (Грасс, Франция) в системе NEU относительно позиции в системе SLRF2008

Величины средневзвешенных погрешностей, вычисленные с использованием представленной выше методики, в плановой ($\sqrt{N^2 + E^2}$) и высотной составляющих (U) для всех станций, координаты которых определялись на экспериментальном временном интервале, а также изменения относительно стандартного решения приводятся в таблице 4.4. Величины погрешностей в случае применения модели ВВ03 оказываются на 1-2% (в большинстве случаев) ниже аналогичных значений, полученных для модели RP03. Кроме того, достигается снижение погрешностей относительно стандартного решения на 1-13% (в среднем на 4%) [30].

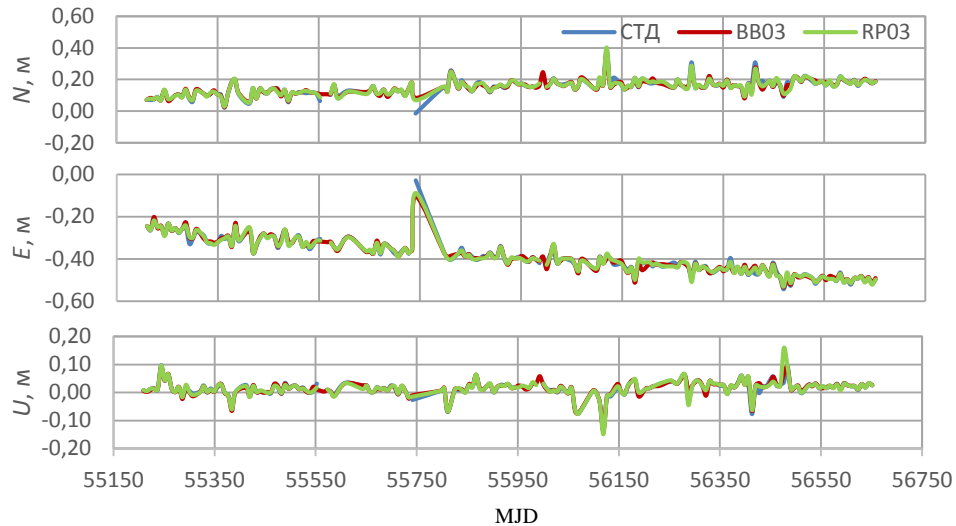


Рисунок 4.5 – Результаты определения координат станции 7237 (Чаньчунь, Китай) в системе NEU относительно позиции в системе SLRF2008

Таблица 4.4 – Средневзвешенные погрешности определения координат станций для плановой и высотной составляющих при использовании моделей атмосферных приливов в сравнении со стандартным решением STD

Номер станции	Тип решения									
	STD		BB03				RP03			
	План., мм	Вертик., мм	План., мм	BB03 /STD, %	Вертик., мм	BB03 /STD, %	План., мм	RP03/STD, %	Вертик., мм	RP03/STD, %
1824	10,7	4,4	11,0	2	4,5	2	10,7	0	4,4	0
1873	14,1	6,1	13,5	-5	5,8	-5	14,0	-1	6,1	0
1886	8,0	3,7	7,5	-7	3,5	-6	7,9	-1	3,7	-1
1893	10,5	3,7	10,4	-1	3,6	-4	10,6	1	3,6	-2
7119	6,1	3,1	5,9	-2	3,0	-2	6,0	-2	3,0	-1
7124	7,0	3,6	6,9	-2	3,5	-2	6,9	-2	3,5	-2
7237	6,3	2,7	6,2	-2	2,7	-2	6,2	-2	2,7	-2
7249	12,9	22,8	12,4	-4	21,8	-4	12,4	-4	21,9	-4
7308	7,2	11,7	7,0	-4	11,4	-3	6,9	-5	11,2	-5
7358	9,8	4,7	9,1	-8	4,3	-9	9,5	-3	4,5	-4
7359	9,6	5,0	9,4	-3	4,9	-3	9,5	-1	5,0	-1
7403	8,7	15,5	8,3	-4	14,9	-4	8,5	-2	15,3	-2
7405	5,1	2,2	5,0	-3	2,2	-3	4,9	-4	2,2	-4
7406	6,1	8,8	5,9	-4	8,4	-4	6,0	-3	8,5	-3
7821	9,2	16,3	8,8	-4	15,8	-4	9,0	-2	16,1	-2
7822	7,4	3,4	7,3	-1	3,4	0	7,7	4	3,5	4
7824	10,3	4,5	10,0	-3	4,3	-3	10,1	-2	4,4	-2
7838	5,1	2,2	4,9	-3	2,1	-3	5,0	-2	2,2	-2
7841	5,9	2,3	5,7	-3	2,2	-3	5,7	-3	2,2	-3
7845	4,5	6,9	4,5	-1	6,9	0	4,4	-3	6,8	-1

Рассмотрим результаты определения параметров вращения Земли. В таблице 4.5 представлены СКП параметров (средневзвешенные), а также среднеквадратические отклонения от опорного ряда IERS C04. Величины СКП и отклонений от опорного ряда IERS C04 совпадают в рассматриваемых решениях.

Таблица 4.5 – СКП ПВЗ и среднеквадратические отклонения от ряда IERS C04, полученные в разных решениях

Тип решения	Среднеквадратические погрешности			Среднеквадратические отклонения от опорного ряда IERS C04		
	x_p , мс дуги	y_p , мс дуги	$\Delta UT1$, мс	x_p , мс дуги	y_p , мс дуги	$\Delta UT1$, мс
СТД	0,09	0,09	0,052	0,64	0,61	1,003
ВВ03	0,08	0,09	0,052	0,61	0,58	1,003
RP03	0,08	0,09	0,052	0,61	0,59	1,002

Учет атмосферных приливов в данном эксперименте позволяет незначительно снизить остаточные орбитальные невязки (Таблица 4.6). Наибольший эффект заметен в случае использования модели ВВ03 для орбиты ИСЗ LAGEOS-2 (снижение на 0,5мм).

Таблица 4.6 – Средневзвешенные остаточные орбитальные невязки, полученные в каждом решении при определении координат станций и параметров вращения Земли

		Тип решения		
		СТД	ВВ03	RP03
Невязка, мм	LAGEOS-1	17,0	16,8	16,5
	LAGEOS-2	19,0	18,5	19,0

Результаты третьего эксперимента (Таблица 4.7) позволяют сделать вывод, что использование моделей атмосферных приливов практически не сказывается на погрешностях определения коэффициентов геопотенциала по наблюдениям низкоорбитальных ИСЗ. При этом удается добиться снижения остаточных орбитальных невязок на 2-3мм.

Таблица 4.7 – Средневзвешенные погрешности определения коэффициентов ГПЗ по наблюдениям низкоорбитальных ИСЗ в рассматриваемых решениях и их остаточные невязки

		Тип решения		
		СТД	ВВ03	RP03
Средневзвешенные СКП величин	\bar{C}_{20}	0,36E-11	0,34E-11	0,34E-11
	\bar{C}_{21}	0,62E-11	0,59E-11	0,59E-11
	\bar{S}_{21}	0,56E-11	0,55E-11	0,55E-11
Невязка, мм	AJISAI	41,0	39,2	38,9
	Starlette	40,6	38,0	37,2

Выводы.

В целом, результаты применения обеих рассмотренных моделей атмосферных приливов похожи. Использование этих моделей позволяет незначительно снизить погрешности определения коэффициентов гравитационного поля Земли, на 1-12% снизить погрешности определения координат станций, а также уменьшает остаточные невязки спутниковых орбит (на 0,5-3,0мм в зависимости от высоты орбиты спутника). Кроме того, применение модели ВВ03 позволяет существенно снизить амплитуды годового сигнала в рядах коэффициентов \bar{C}_{20} , \bar{S}_{21} (в 2 и 3 раза соответственно (за счет наличия в модели приливной волны S_a). При этом амплитуда годового сигнала в ряде значений коэффициента \bar{C}_{21} , наоборот, возрастает в 2,5 раза. В последующих вычислениях будет использоваться модель ВВ03.

4.3 Исследование влияния эффекта переотражения и переизлучения Землей солнечной радиации

Для исследования влияния эффекта альбедо на элементы орбит геодезических ИСЗ и на определяемые геодинимические параметры были выполнены экспериментальные вычисления, аналогичные рассмотренным в предыдущем параграфе.

Рассмотрим результаты определения координат станций и ПВЗ из обработки наблюдений спутников LAGEOS-1/2. В таблице 4.8 приводятся величины погрешностей определения координат станций с учетом результатов проекта CERES [132] в сравнении со стандартным решением. Исходя из представленных результатов, можно сделать вывод, что учет рассматриваемого эффекта при определении орбит спутников не сказывается непосредственно на величинах СКП определения координат станций ни в плановой составляющей, ни в высотной: в редких случаях величины отличаются на 1%.

Таблица 4.8 – Средневзвешенные погрешности определения координат станций с учетом эффекта переотражения и переизлучения Землей солнечной радиации в сравнении со стандартным решением СТД

Номер станции	СТД		CERES			
	План., мм	Высот., мм	План., мм	CERES/СТД, %	Высот., мм	CERES/СТД, %
1824	10,6	4,3	10,6	0	4,4	1
1873	14,0	6,1	14,1	0	6,1	0
1886	8,1	3,8	8,1	0	3,8	0
1893	10,5	3,7	10,5	0	3,7	0
7119	6,1	3,1	6,1	0	3,1	0
7124	7,0	3,6	7,1	0	3,6	0
7237	6,3	2,7	6,3	0	2,7	0
7249	13,0	22,9	13,0	0	23,0	0
7308	7,2	11,7	7,3	0	11,8	0
7358	9,8	4,7	9,8	0	4,7	0
7359	9,6	5,0	9,6	0	5,0	0
7403	8,7	15,5	8,7	0	15,5	0
7405	5,1	2,2	5,2	0	2,3	0
7406	6,2	8,8	6,2	0	8,9	1
7821	9,2	16,4	9,2	0	16,4	0
7822	7,4	3,4	7,4	0	3,4	0
7824	10,3	4,5	10,4	1	4,5	1
7838	5,1	2,2	5,1	0	2,2	0
7841	5,9	2,3	5,9	0	2,3	0
7845	4,5	6,9	4,5	0	6,9	0

Если рассматривать полученные с учетом исследуемого эффекта изменения координат станций в системе NEU относительно стандартного решения (см. главу 3), наблюдаются систематические отрицательные изменения компоненты U (отрицательные тренды) практически для всех станций: высота уменьшается от 0,1мм до 11,1 мм (Таблица 4.9). Необходимо заметить, что в таблице 4.9 представлены станции, координаты для которых получены на не менее, чем на 60 недельных интервалах (из 208). Для плановой составляющей таких особенностей не наблюдается. Таким образом, можно говорить о систематическом влиянии эффекта альбеда на высотную составляющую координат определяемых пунктов.

Таблица 4.9 – Систематические изменения координат станций под влиянием земного альбедо в системе NEU относительно стандартного решения СТД (в мм)

Номер станции	Количество интервалов	N, мм	E, мм	U, мм
7237	175	0,4	0,4	-0,2
7845	172	0,1	-0,4	-0,9
7119	163	-0,2	1,0	-0,9
7838	154	0,0	-0,9	0,1
7406	144	3,9	2,1	2,2
7841	141	0,1	0,6	-0,2
7405	132	-0,6	0,4	-0,3
1893	94	-0,4	0,1	-0,2
7124	89	-0,2	0,0	-0,1
7403	79	0,2	-0,8	-0,6
7821	68	-2,9	-1,9	-11,1
7308	62	0,0	-0,9	0,4

Каких-либо изменений в параметрах вращения Земли не отмечается (Таблица 4.10): практически не изменяются ни СКП определения параметров, ни среднеквадратические отклонения от опорного ряда IERS C04. Так, СКП составили 0,09мс дуги и 0,09мс дуги для координат полюса в стандартном решении против 0,08мс дуги и 0,09мс дуги в решении с учетом эффекта альбедо, а среднеквадратические отклонения соответствующих величин уменьшились на 0,03мс в решении с учетом эффекта альбедо. На погрешностях определения $\Delta UT1$ и на среднеквадратических отклонениях от эталонного ряда рассматриваемый эффект не сказывается.

Таблица 4.10 – СКП ПВЗ и среднеквадратические отклонения ПВЗ от опорного ряда IERS C04 для решения с учетом эффекта альбедо в сравнении со стандартным решением СТД

Тип решения	Среднеквадратические погрешности			Среднеквадратические отклонения от опорного ряда IERS C04		
	x_p , мс дуги	y_p , мс дуги	$\Delta UT1$, мс	x_p , мс дуги	y_p , мс дуги	$\Delta UT1$, мс
СТД	0,09	0,09	0,052	0,64	0,61	1,003
CERES	0,08	0,09	0,052	0,61	0,58	1,003

Учет эффекта альbedo не сказывается на величинах остаточных орбитальных невязок для спутников LAGEOS-1/2: величины не изменились и составили 17,0мм и 19,0мм соответственно.

Эффект альbedo оказывает незначительное влияние и на определяемые коэффициенты гравитационного поля: отличия от стандартного решения не превышают $2,5 \cdot 10^{-11}$ для коэффициентов $\bar{C}_{20}, \bar{C}_{21}, \bar{S}_{21}$ (Приложение Б). Кроме этого, учет эффекта альbedo не оказывает влияния на остаточные орбитальные невязки и погрешности определения коэффициентов ГПЗ (см. Приложение Б).

При этом эффект альbedo оказывает систематическое влияние на элементы орбит спутников, а именно на величину большой полуоси. В случае учета рассматриваемого эффекта при вычислении орбит величина большой полуоси орбит спутников LAGEOS-1/2 оказывается меньше на 0,4-0,8мм по сравнению с аналогичными значениями, полученными в стандартном решении (Рисунок 4.6).

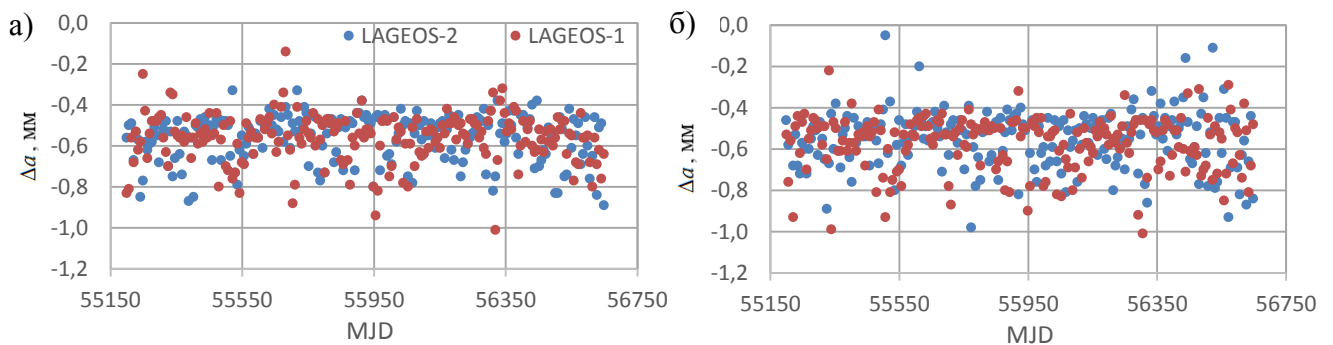


Рисунок 4.6 – Величины изменения большой полуоси орбит спутников LAGEOS-1/2 под влиянием эффекта альbedo при определении коэффициентов гравитационного поля (а) и при определении координат станций и ПВЗ (б)

Исследуемый эффект оказывает несколько большее воздействие на элементы орбит низкоорбитальных ИСЗ (Рисунок 4.7). Наибольшее изменение большой полуоси орбиты наблюдается для спутника AJISAI (высота орбиты ~ 1500 км) – значения большой полуоси, полученные с учетом эффекта альbedo, оказываются на 2-4мм меньше в сравнении со стандартным решением. При этом, для спутника Starlette (высота орбиты ~ 800 км) разница не превосходит 1мм. Таким образом, несмотря на обратную зависимость от расстояния между элементами земной поверхности и спутником в выражении (2.34), важное значение имеет также и количество этих элементов, видимых со спутника (т.е. площадь земной поверхности). Для ИСЗ AJISAI это количество больше в силу большей высоты орбиты над поверхностью Земли.

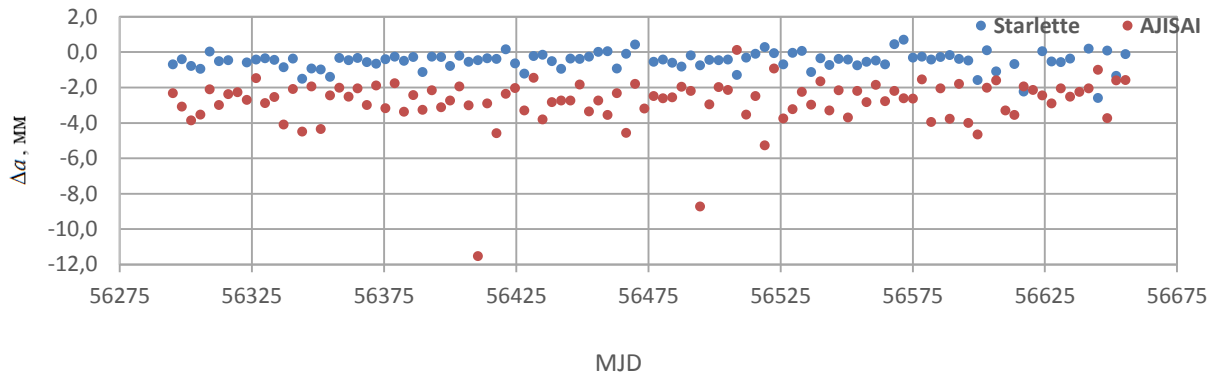


Рисунок 4.7 – Величины изменения большой полуоси орбит спутников Starlette и AJISAI под влиянием эффекта альbedo

Выводы.

Исходя из представленных результатов можно судить о систематическом влиянии эффекта альbedo на определяемые координаты станций в высотной составляющей (отрицательные тренды изменения координат от 0,1 до 11,1мм) и на большие полуоси орбит спутников (уменьшение большой полуоси на 0,4-0,8мм для спутников LAGEOS-1/2, на 0,1-1мм для ИСЗ Starlette и на 2-4мм для ИСЗ AJISAI). Кроме этого, незначительно снижаются среднеквадратические отклонения координат полюса от опорного ряда IERS C04 (на 0,03мс дуги). При этом на поправку к Всемирному времени рассматриваемый эффект не оказывает значительного влияния. Для определяемых в данном эксперименте коэффициентов гравитационного поля разности не превышают $2,5E-11$. С учетом вышеизложенного можно сделать вывод, что для достижения высоких точностей при определении орбит и геодинимических параметров необходимо учитывать эффект альbedo.

4.4 Исследования влияния перемещения неприливых масс в атмосфере и океанах (модель AOD1B)

Перемещения неприливых масс в атмосфере и океанах оказывают влияние непосредственно на орбиты спутников и учитываются через вычисление поправок к коэффициентам геопотенциала на этапе вычисления орбит (см. пункт 2.2.6). В связи с этим необходимо исследовать не только влияние рассматриваемого эффекта на орбиты спутников и определяемые коэффициенты геопотенциала, но и на координаты станций и параметры вращения Земли (так как в спутниковых задачах спутник является носителем системы координат).

Рассмотрим результаты эксперимента по определению коэффициентов гравитационного поля. На рисунке 4.8 представлены ряды коэффициентов геопотенциала \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , полученные как в стандартном решении, так и с учетом модели AOD1B из обработки лазерных наблюдений спутников LAGEOS-1/2. Стоит отметить существенные различия величин коэффициента \bar{C}_{20} в двух решениях: в случае использования модели AOD1B происходит существенное снижение амплитуды долгопериодических колебаний [30]. Аналогичным образом учет эффекта сказывается на ряде значений коэффициента \bar{S}_{21} . Для ряда значений коэффициента \bar{C}_{21} невозможно выделить каких-либо существенных изменений: полученные графики практически совпадают.

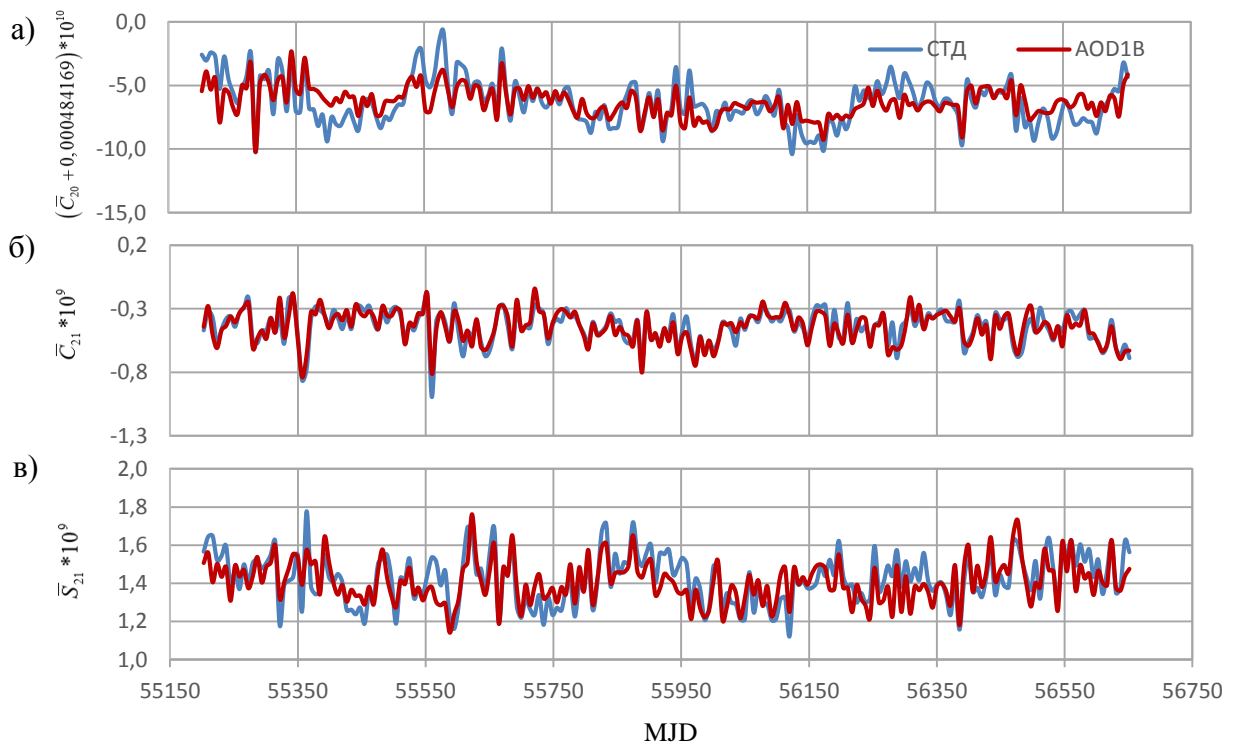


Рисунок 4.8 – Ряды коэффициентов геопотенциала \bar{C}_{20} (а), \bar{C}_{21} (б), \bar{S}_{21} (в), полученные в стандартном решении СТД и с учетом модели неприливных перемещения масс AOD1B

В таблице 4.11 приводятся средневзвешенные погрешности определения коэффициентов ГПЗ в обоих решениях и средневзвешенные остаточные орбитальные невязки для обоих используемых спутников. Исходя из представленных результатов можно заключить, что применение модели AOD1B позволяет незначительно снизить погрешности определения коэффициентов ГПЗ (в 13 знаке) и незначительно снизить остаточные орбитальные невязки (в представленном примере – на 0,4-0,6мм).

Таблица 4.11 – Средневзвешенные СКП определения коэффициентов геопотенциала \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} и остаточные орбитальные невязки для спутников LAGEOS-1/2, полученные с учетом модели AOD1B, в сравнении со стандартным решением СТД

	СТД	AOD1B	
Средневзвешенные СКП определения величин	\bar{C}_{20}	0,83E-11	0,82E-11
	\bar{C}_{21}	2,30E-11	2,24E-11
	\bar{S}_{21}	2,42E-11	2,37E-11
Невязка, мм	LAGEOS-1	22,8	22,4
	LAGEOS-2	21,1	20,5

Результаты спектрального анализа полученных рядов коэффициентов представлены на рисунке 4.9. Наиболее заметны изменения в сигналах с периодами 1 год, 238, 180 и 110 суток. Амплитуды снижаются для коэффициентов \bar{C}_{20} и \bar{S}_{21} , а для коэффициента \bar{C}_{21} , наоборот, возрастают. При этом, амплитуда годового сигнала снизилась в 3 раза для \bar{C}_{20} , в 2 раза для \bar{S}_{21} и выросла на 30% для \bar{C}_{21} .

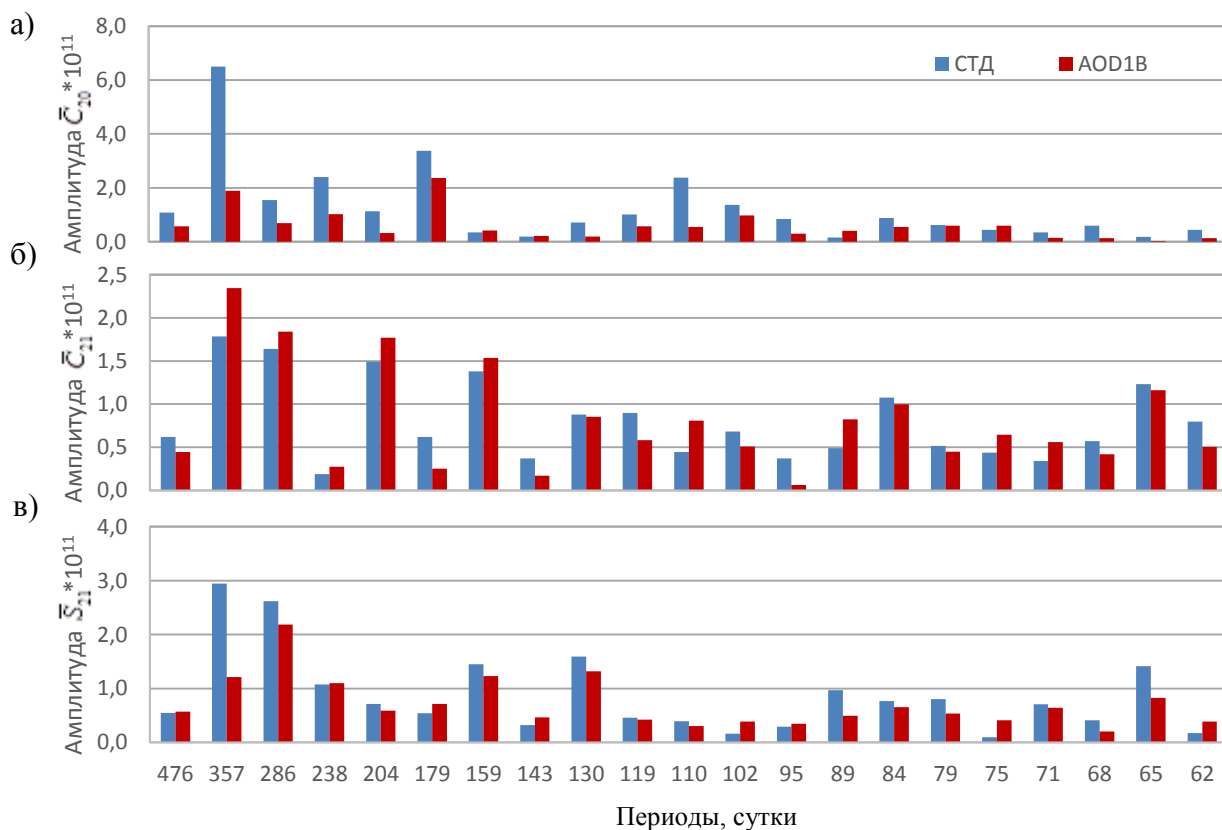


Рисунок 4.9 – Результаты спектрального анализа рядов коэффициентов \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , полученных с учетом модели AOD1B, в сравнении со стандартным решением СТД

Применение модели AOD1B практически не сказывается на величинах координат станций (второй эксперимент). На рисунках 4.10-4.11 приводятся полученные координаты станций 7845 (Грасс, Франция) и 7237 (Чаньчунь, Китай) в системе NEU относительно каталожных координат SLRF2008. Полученные ряды значений координат практически совпадают. Однако необходимо отметить, что использование исследуемой модели помогает в некоторых случаях снизить величины выбросов в результатах (отмечены красными стрелками) [133].

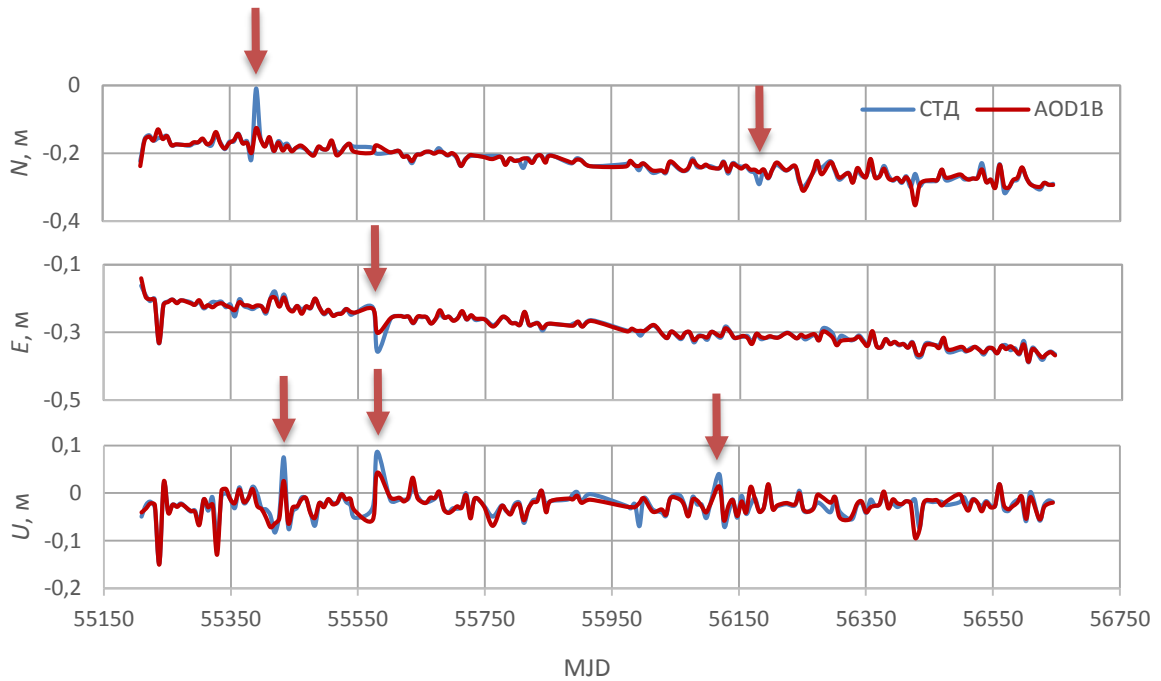


Рисунок 4.10 – Результаты определения координат станции 7845 (Грасс, Франция) в системе NEU относительно позиции в системе SLRF2008

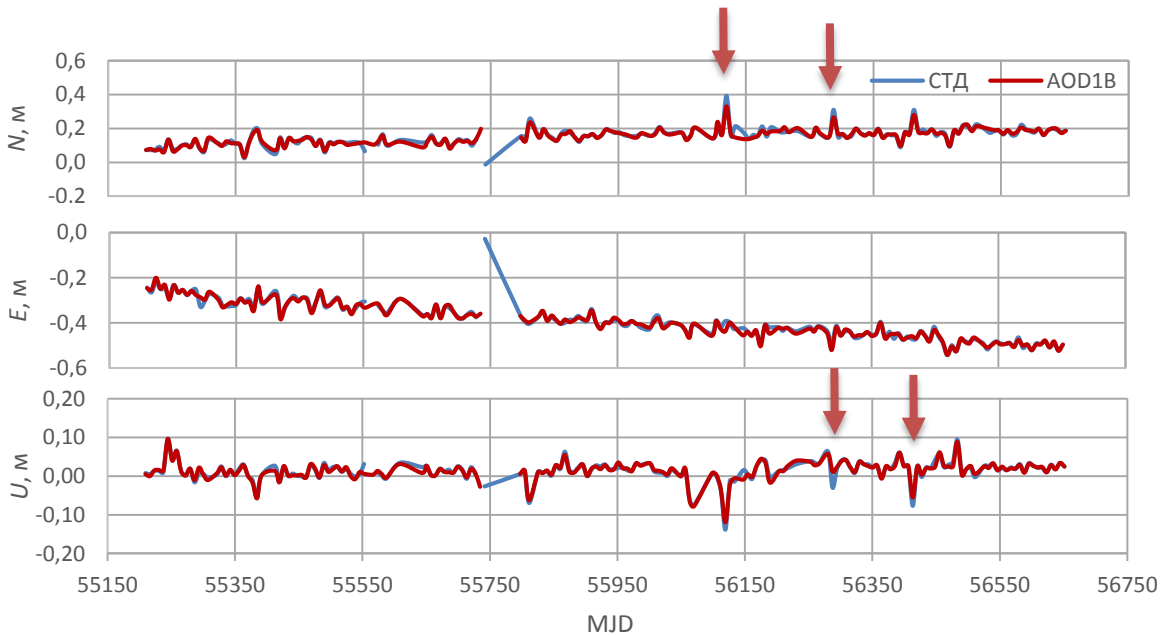


Рисунок 4.11 – Результаты определения координат станции 7237 (Чаньчунь, Китай) в системе NEU относительно позиции в системе SLRF2008

Заметное влияние учет модели AOD1B оказывает на величины СКП определяемых координат станций. В таблице 4.12 представлены средневзвешенные величины погрешностей для решения, учитывающего исследуемую модель, в сравнении с аналогичными величинами, полученными из стандартного решения. На основании представленных результатов можно сделать вывод, что СКП снижается для большинства станций на 6-8% в плановой и высотной составляющих в случае применения модели AOD1B.

Таблица 4.12 – Средневзвешенные погрешности определения координат станций для плановой и высотной составляющих в случае использования модели AOD1B в сравнении со стандартным решением СТД

Номер станции	Тип решения					
	СТД		AOD1B			
	План., мм	Высот., мм	План., мм	AOD1B/СТД	Высот., мм	AOD1B/СТД
1824	10,7	4,4	10,7	0	4,4	0
1873	13,8	6,1	13,1	-6	5,7	-7
1886	8,0	3,8	7,6	-6	3,6	-6
1893	10,4	3,7	10,2	-2	3,5	-6
7119	6,1	3,1	6,0	-2	3,0	-1
7124	7,0	3,6	6,7	-5	3,4	-4
7237	6,3	2,7	6,3	0	2,7	0
7249	12,9	22,6	12,2	-6	21,3	-6
7308	7,2	11,7	7,6	4	12,3	4
7358	9,8	4,7	9,5	-3	4,5	-3
7359	9,6	5,0	9,2	-4	4,7	-6
7403	8,7	15,5	8,0	-8	14,3	-8
7405	5,1	2,2	5,1	-1	2,2	-1
7406	6,1	8,8	5,9	-5	8,4	-4
7821	9,2	16,3	8,9	-3	15,7	-4
7822	7,3	3,4	6,8	-7	3,2	-6
7824	10,3	4,5	9,9	-4	4,3	-5
7838	5,1	2,2	5,1	0	2,2	0
7841	5,9	2,3	5,8	-2	2,2	-2
7845	4,5	6,9	4,5	0	7,0	2

Другими определяемыми величинами в данном эксперименте являются параметры вращения Земли. Учет модели AOD1B позволяет незначительно снизить величины среднеквадратических отклонений от опорного ряда IERS C04 для координат полюса: 0,61мс дуги и 0,60мс дуги для решения AOD1B против 0,64мс дуги и 0,61мс дуги для стандартного решения. При этом величины погрешностей определения соответствующих параметров не изменяются (Таблица 4.13).

Таблица 4.13 – СКП ПВЗ и среднеквадратические отклонения относительно ряда IERS C04, полученные в стандартном решении STD и решении, учитывающем модель AOD1B

Тип решения	Среднеквадратические погрешности			Среднеквадратические отклонения от опорного ряда IERS C04		
	x_p , мс дуги	y_p , мс дуги	$\Delta UT1$, мс	x_p , мс дуги	y_p , мс дуги	$\Delta UT1$, мс
STD	0,09	0,09	0,052	0,64	0,61	1,003
AOD1B	0,08	0,09	0,052	0,61	0,60	1,002

Остаточные орбитальные невязки в данном эксперименте уменьшились по сравнению со стандартным решением и составили 16,6мм против 17,0мм для ИСЗ LAGEOS-1 (на 0,4мм) и 18,1мм против 19,0мм для ИСЗ LAGEOS-2 (на 0,9мм).

Учет модели AOD1B позволяет снизить остаточные орбитальные невязки для низкоорбитальных ИСЗ (Таблица 4.14). Эти величины снизились на 1,2 и 1,8мм для спутников AJISAI и Starlette соответственно по сравнению со стандартным решением. При этом снижение погрешностей определения коэффициентов ГПЗ имеет тот же порядок, что и для спутников LAGEOS-1/2 (10^{-13}).

Таблица 4.14– Средневзвешенные погрешности определения коэффициентов ГПЗ по наблюдениям низкоорбитальных ИСЗ в рассматриваемых решениях и их остаточные невязки

		Тип решения	
		STD	AOD1B
Средневзвешенные СКП определения величин	\bar{C}_{20}	0,36E-11	0,35E-11
	\bar{C}_{21}	0,62E-11	0,60E-11
	\bar{S}_{21}	0,57E-11	0,55E-11
Невязка, мм	AJISAI	41,0	39,8
	Starlette	40,6	38,8

Выводы.

В целом, можно заключить, что учет эффекта перемещения неприливных масс в атмосфере и океанах при применении модели AOD1B на этапе вычисления орбит позволяет снизить остаточные орбитальные невязки для орбит с различными параметрами (высотами) на величину до 1,8мм, а также позволяет снизить погрешности определения координат станций (до 8%). При этом в некоторых случаях достигается снижение грубых выбросов в рядах координат станций. При определении коэффициентов гравитационного поля учет модели позволяет значительно снизить амплитуды годовых сигналов (до трех раз) для некоторых коэффициентов ($\bar{C}_{20}, \bar{S}_{21}$).

4.5 Исследования влияния атмосферной нагрузки

В пункте 2.3.4 диссертационной работы отмечено, что существует три центра, вырабатывающие данные по атмосферной нагрузке (по обеим составляющим). Поэтому на первом этапе необходимо сравнить данные всех трех центров друг с другом с целью выбора оптимальной модели для дальнейших исследований. Так как учет нагрузки производится через вычисление поправок к координатам станций, для оценки влияния рассматриваемого эффекта была выполнена экспериментальная обработка лазерных наблюдений спутников LAGEOS-1/2 на том же интервале времени, что и в предыдущих экспериментах, с определением координат станций и ПВЗ с применением данных атмосферной нагрузки, предоставляемыми тремя центрами.

На рисунках 4.12-4.13 в качестве примера приводятся полученные ряды значений координат для станций 7845 (Грасс, Франция) и 7237 (Чаньчунь, Китай) в системе NEU. Графики

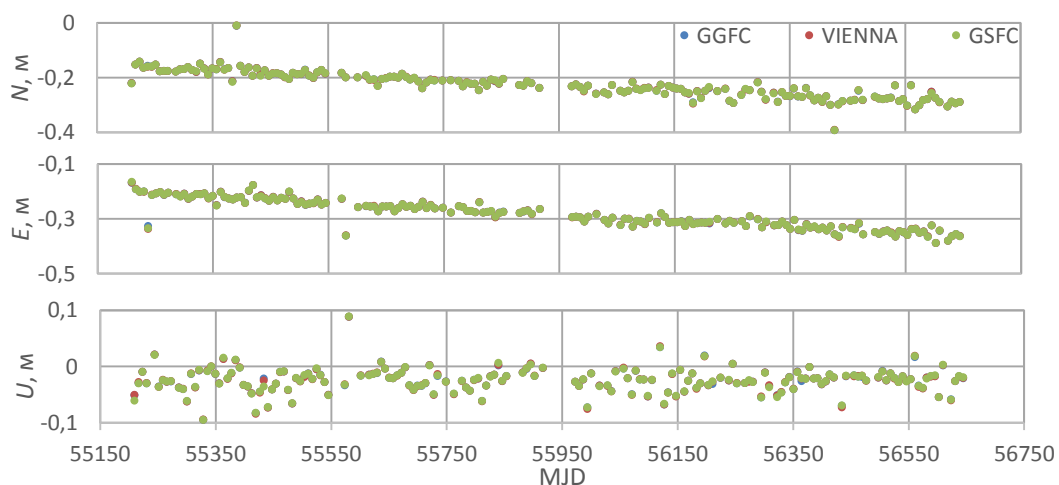


Рисунок 4.12 – Ряды координаты станции 7845 (Грасс, Франция) в системе NEU, полученные с применением разных моделей атмосферной нагрузки, относительно позиции в системе SLRF2008

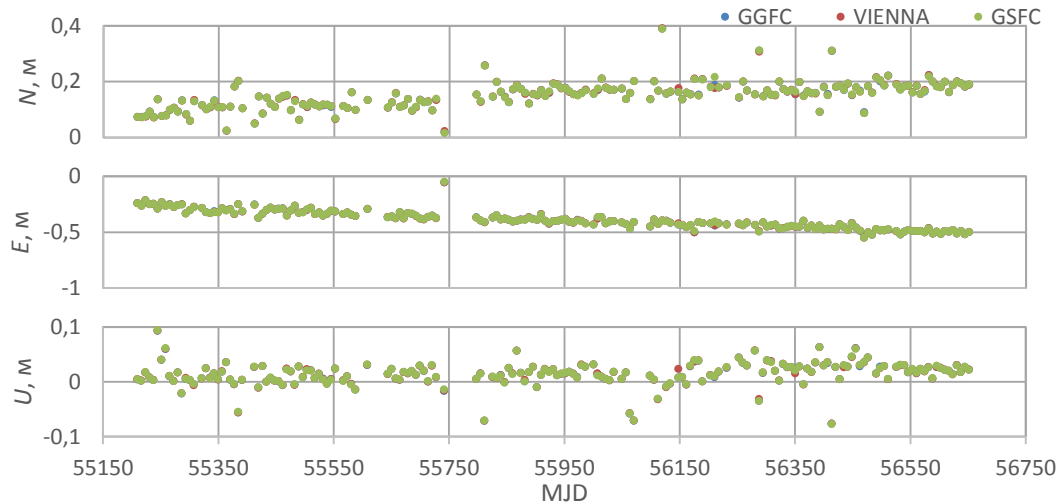


Рисунок 4.13 – Ряды координаты станции 7237 (Чаньчунь, Китай) в системе NEU, полученные с применением разных моделей атмосферной нагрузки, относительно позиции в системе SLRF2008

координат, полученных с помощью комплекса «ГеоИС» с использованием моделей атмосферной нагрузки трех указанных центров (см. таблицу 2.3), полностью совпадают.

В приложении В приведены СКП определения координат станций (средневзвешенные), полученные с применением всех трех рассматриваемых моделей атмосферной нагрузки в сравнении со стандартным решением. Величины СКП определения координат станций отличаются не более, чем на 2% между решениями. Опираясь на полученные результаты, можно сделать вывод, что данные любого из трех существующих центров анализа могут быть использованы для обработки лазерных наблюдений. В дальнейшем будем использовать модель Венского Технологического Университета (VIENNA). Помимо этого, можно заключить, что применение атмосферной нагрузки не оказывает значительного влияния непосредственно на величины СКП определения координат станций.

Рассмотрим влияние атмосферной нагрузки на амплитуды годовых составляющих в рядах координат станций. Выделим годовую составляющую для станций, для которых получено не менее 120 обработанных недельных интервалов на экспериментальном четырехлетнем отрезке (Таблица 4.15). В данной таблице для сравнения также приводится анализ решения, выполненного без учета океанической приливной нагрузки. В таблице 4.15 термином «Без ОТЛ» обозначено решение, полученное без учета океанической приливной нагрузки, термином «ATL» – решение, полученное с учетом атмосферной приливной нагрузки, термином «ATL+ANTL» – решение, учитывающее обе составляющие атмосферной нагрузки. Решение «СТД», как отмечено в главе 3, получено с учетом океанической приливной нагрузки.

Как и ожидалось, наиболее заметны изменения в высотной составляющей координат, которые рассмотрим далее. Влияние океанической приливной наиболее заметно для станций, находящихся на побережье: например, для станции 7119 (Халеакала, Таити) амплитуда годового сигнала в высотной составляющей снизилась более, чем в два раза (на 7мм). В то же время этот эффект сказывается (пусть и незначительно) на всех остальных станциях (изменение годовой амплитуды от 0,6 до 3мм; в процентном соотношении изменение достигает 15%).

Таблица 4.15 – Амплитуды годовых сигналов в полученных рядах координат станций с учетом различных нагрузочных эффектов (в мм)

	<i>N</i>				<i>E</i>				<i>U</i>			
	Без OTL	СТД	ATL	ATL + ANTL	Без OTL	СТД	ATL	ATL + ANTL	Без OTL	СТД	ATL	ATL + ANTL
1879	9,6	6,0	5,6	9,0	5,2	4,7	5,1	5,8	18,9	21,1	20,9	14,2
1893	4,8	3,2	3,3	3,9	26,0	16,7	16,9	14,7	5,9	5,3	5,3	3,7
7119	8,9	11,0	10,7	10,2	1,3	1,9	1,9	1,1	12,7	5,8	5,9	4,1
7237	6,1	6,6	6,5	7,7	20,6	22,1	22,5	22,3	9,5	8,0	7,9	4,9
7405	29,5	33,9	33,6	32,5	83,8	89,4	89,0	89,3	12,3	15,8	15,8	14,9
7406	8,9	9,0	9,1	8,5	4,4	4,5	4,5	5,0	9,9	7,8	8,2	10,0
7838	1,5	1,8	1,2	0,4	37,5	36,2	35,0	37,7	22,4	21,3	22,4	21,6
7841	27,9	27,7	27,6	27,7	12,5	12,6	12,5	13,2	9,0	8,3	8,3	7,5
7845	1,9	1,8	1,8	1,4	3,8	3,1	3,2	2,7	2,5	1,0	1,3	1,3

Учет атмосферной приливной нагрузки практически не сказывается на амплитудах годового сигнала – изменения амплитуд не превосходят 2мм. Гораздо большее влияние на амплитуды имеет неприливая составляющая атмосферной нагрузки. В целом, амплитуды уменьшаются для всех станций, участвующих в эксперименте, за исключением станции 7406 (Сан Хуан, Аргентина). Наибольшее влияние неприливая составляющая атмосферной нагрузки оказывает на материковые станции, находящиеся вдали от побережья. В представленном эксперименте это станции 1879 (Алтай, Россия) и 7237 (Чаньчунь, Китай). Для станции 1879 уменьшение амплитуды годового сигнала в сравнении со стандартным решением составило 7мм (на 30%), а для станции 7237 – 3,1мм (на 40%). Для других станций из списка изменение амплитуды не превышает 2мм. Таким образом, можно заключить, что влияние неприливной составляющей атмосферной нагрузки незначительно для станций, находящиеся в непосредственной близости от побережья, и максимально для материковых станций. Влияние эффекта атмосферной нагрузки невелико для координат в плановой составляющей (*N* и *E*) и не носит систематического характера.

Учет атмосферной нагрузки не сказывается ни на самих величинах определяемых параметров вращения Земли, ни на погрешностях их определения (Таблица 4.16).

Таблица 4.16 – СКП ПВЗ и среднеквадратические отклонения от опорного ряда IERS C04 для решения с учетом атмосферной нагрузки в сравнении со стандартным решением СТД

Тип решения	Среднеквадратические погрешности			Среднеквадратические отклонения от опорного ряда IERS C04		
	x_p , мс дуги	y_p , мс дуги	$\Delta UT1$, мс	x_p , мс дуги	y_p , мс дуги	$\Delta UT1$, мс
СТД	0,09	0,09	0,052	0,64	0,61	1,003
GGFC	0,09	0,09	0,052	0,63	0,62	1,003
VIENNA	0,09	0,09	0,052	0,63	0,62	1,003
GSFC	0,09	0,09	0,052	0,63	0,62	1,003

В таблице 4.17 приводятся величины средневзвешенных остаточных невязок, полученных в экспериментальных вычислениях для спутников LAGEOS-1/2 с применением разных моделей атмосферной нагрузки. Учет рассматриваемого эффекта не оказывает влияния на остаточные орбитальные невязки.

Таблица 4.17 – Остаточные орбитальные невязки, полученные с учетом атмосферной нагрузки на пункты, в сравнении со стандартным решением

		Тип решения			
		СТД	GGFC	VIENNA	GSFC
Невязка, мм	LAGEOS-1	17,0	17,1	17,2	17,1
	LAGEOS-2	19,0	19,0	19,0	19,1

Выводы.

Основываясь на представленных результатах экспериментов можно заключить, что нет существенной разницы между существующими моделями атмосферной нагрузки, рассмотренными в пункте 2.3.4 диссертационной работы. При этом учет непривливающей составляющей рассматриваемого эффекта заметно сказывается на амплитудах годовой составляющей в рядах координат станций: наибольшее влияние наблюдается на материковых

станциях. В то же время этот геофизический эффект не сказывается на величинах остаточных орбитальных невязок, параметрах вращения Земли и погрешностях их определения.

4.6 Выводы к главе 4

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод о том, что исследованные эффекты в разной степени влияют как на элементы орбит спутников, так и непосредственно на сами определяемые геодинамические параметры.

Все три исследованные модели плотности атмосферы (NRLMSISE-00, JB2008, DTM2013) показали практически одинаковые результаты при определении орбит низкоорбитальный ИСЗ. Поэтому в дальнейших работах может быть использована любая из них (в представленной работе далее используется модель NRLMSISE-00). В то же время, способ вычисления скорости атмосферных потоков с применением модели ветров HWM07 не способствует повышению точности определения орбит, поэтому нет необходимости в ее дальнейшем использовании. Для расчета скорости атмосферных потоков может быть использовано упрощенное выражение (2.31).

В связи с утерей спутника БЛИЦ в 2013 году и планируемым запуском ИСЗ БЛИЦ-М в 2016 году в процессе работы над диссертацией были выполнены исследования по определению оптимальной орбиты для ИСЗ БЛИЦ-М. Были исследованы две орбиты – с высотами 1500 и 2000км: в первом случае суммарное отклонение орбиты под действием атмосферного торможения составило 11,059м, а во втором – 3,421м.

Учет атмосферных приливов по двум рассмотренным моделям (BB03 и RP03) во многом дает похожие результаты как для орбит, так и для определяемых геодинамических параметров. Однако основное отличие заключается в том, что, применение модели BB03 приводит к изменению амплитуды годового сигнала в рядах коэффициентов гравитационного поля: для коэффициентов $\bar{C}_{20}, \bar{S}_{21}$ амплитуда годового сигнала уменьшается в 2 и 3 раза, а для коэффициента \bar{C}_{21} – увеличивается в 2,5 раза. При определении координат станций и параметров вращения Земли происходит снижение среднеквадратических погрешностей определения координат на 1-12% в сравнении с решением, не учитывающим данный эффект. Погрешности определения ПВЗ и отклонения их значений от опорного ряда IERS C04 практически не изменяются с добавлением к модели возмущающих сил любой модели атмосферных приливов. При этом среднеквадратические остаточные орбитальные невязки снижаются (на 0,5-3мм в зависимости от высоты орбиты спутника).

Учет эффекта альbedo приводит к систематическим изменениям в значениях больших полуосей орбит спутников: для спутников LAGEOS-1/2 большая полуось уменьшается на 0,4-

0,8мм, для ИСЗ Starlette – на величину не более 1мм, для ИСЗ AJISAI – от 2 до 4мм. Также систематический характер носят изменения в высотных составляющих координат станций: тенденция к уменьшению на величину от 0,1мм до 11,1мм в сравнении со стандартным решением. При этом эффект альbedo оказывает несущественное влияние на определяемые параметры вращения Земли и коэффициенты гравитационного поля. Остаточные орбитальные невязки также практически не изменяются.

Наиболее заметный вклад учет эффекта перемещения неприливых масс в атмосфере и океанах вносит в определяемые коэффициенты гравитационного поля: в 3 и в 2 раза снижается амплитуда годового сигнала для коэффициентов \bar{C}_{20} , \bar{S}_{21} . Если определяемыми параметрами являются координаты станций и ПВЗ, то учет данного эффекта снижает среднеквадратические погрешности координат станций на величину до 8% относительно стандартного решения. Также повышается стабильность определяемых координат (количество выбросов в рядах координат снижается). Для параметров вращения Земли существенных изменений не отмечено. Среднеквадратические остаточные орбитальные невязки снижаются на величину до 1,8мм в зависимости от высоты орбиты.

Рассмотренные модели атмосферной нагрузки, несмотря на разные исходные данные, использованные для их разработки, показывают практически идентичные результаты. В связи с этим в дальнейших вычислениях будет использоваться модель атмосферной нагрузки Венского Технологического Университета. Установлено, что неприливая составляющая вносит наибольший вклад в смещения пунктов, вызванных атмосферной нагрузкой. Атмосферная нагрузка оказывает заметное влияние на амплитуды годового сигнала в рядах координат станций. При этом наибольшее влияние испытывают станции, находящиеся вдали от океанов. Каких-либо существенных изменений в остаточных орбитальных невязках, среднеквадратических отклонениях рядов ПВЗ относительно этаулонного ряда IERS C04 и среднеквадратических погрешностях их определения не выявлено.

Резюмируя все вышесказанное, можно сделать вывод о необходимости учета рассмотренных эффектов, а именно атмосферных приливов, альbedo Земли, неприливых перемещений масс в атмосфере и океанах и атмосферной нагрузки, при обработке высокоточных лазерных наблюдений спутников.

5 Комбинирование измерений лазерных дальностей спутников с разными параметрами орбит с целью совместного определения геодинамических параметров. Экспериментальные вычисления

5.1 Методы комбинирования, применяемые при обработке наблюдений околоземных ИСЗ

В настоящее время в ведущих аналитических центрах МСВЗ используются два метода комбинирования:

1. на уровне наблюдений;
2. на уровне нормальных уравнений.

Оба метода были реализованы в программном комплексе «ГеоИС» [29].

Рассмотрим подробнее каждый из методов и особенности их реализации.

5.1.1 Комбинирование на уровне наблюдений

Для реализации метода комбинирования на уровне наблюдений необходимо наличие на одном временном интервале (например, недельный интервал) наблюдений разных спутников. В процессе обработки эти наблюдения объединяются в одну систему уравнений поправок (2.44) с последующим решением. Такой метод применяется, например, при постоянной рутинной обработке лазерных наблюдений спутников центрами анализа ILRS для получения решений на недельных интервалах.

Обработка наблюдений нескольких спутников подразумевает объединение неоднородных измерений в одну систему уравнений поправок (2.44). Поэтому первостепенная задача – назначение соответствующих весов каждому измерению в общей системе. Одним из способов взвешивания является метод, основанный на назначении весов в зависимости от величин СКО единицы веса (2.49), полученных для каждого из участвующих в решении спутников в отдельности, (т.н. *variance component estimation (VCE)* метод) [131]. Далее веса вычисляются как $1/\sigma_0^2$. Именно этот метод был реализован в программном комплексе «ГеоИС».

Как будет показано в дальнейшем, определение всего набора параметров (координаты станций + ПВЗ + коэффициенты ГПЗ) по наблюдениям 1-2 спутников невозможно. При этом снижается не только точность определения самих параметров в силу ослабления системы нормальных уравнений, но и возникают корреляции между определяемыми параметрами. Так, например, при уточнении коэффициента C_{20} и вариации продолжительности суток одновременно с уточнением орбиты спутника возникает сильная корреляция между этими двумя

параметрами и долготой восходящего узла орбиты спутника Ω в силу того, что эти величины связаны следующими соотношениями [36]:

$$\begin{aligned} \Delta LOD &= \frac{(\dot{\Omega} + \dot{i} \cos i)}{1.0027379}; \\ \dot{\Omega}_{\text{век}} &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a_e^2}} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{C_{20}}{(1-e^2)^2} \cos i. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь

$\dot{\Omega}, \dot{\Omega}_{\text{век}}$ – скорость изменения долготы восходящего узла и ее вековая составляющая;

$\dot{i} = \dot{\omega} + \dot{M}$ – скорость изменения аргумента широты, складывающаяся из скоростей изменения аргумента перицентра и средней аномалии;

\dot{i} – скорость изменения угла наклона орбиты.

Как показано в работе [36], при обработке лазерных наблюдений спутников LAGEOS-1 или LAGEOS-2 и уточнении указанных параметров (одновременно с другими элементами орбит) на семисуточной дуге коэффициент корреляции между долготой восходящего узла орбиты спутника и коэффициентом \bar{C}_{20} близок к единице. При этом, если в решении участвуют одновременно оба спутника, то коэффициенты корреляции существенно снижаются (до уровня 0,5). Такой эффект достигается за счет определенной конфигурации орбит спутников – т.н. конфигурации «бабочка» (Рисунок 5.1).

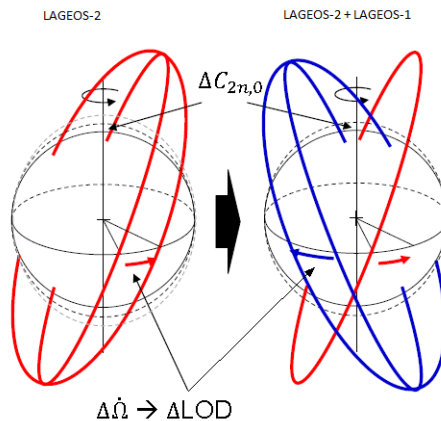


Рисунок 5.1 – Конфигурация «бабочка» орбит спутников LAGEOS-1 и LAGOES-2 [36]

При такой конфигурации соблюдается следующее условие:

$$i_1 - 90^\circ \approx 90^\circ - i_2 . \quad (5.2)$$

При этом восходящие узлы орбит прецессируют навстречу друг другу с одинаковой скоростью (см. рисунок 5.1). В работе [50], где рассматриваются теоретические аспекты изучения эффекта Линзе-Тирринга по высокоточным лазерным наблюдениям ИСЗ, показано, что разделение эффектов изменения коэффициента \bar{C}_{20} и Линзе-Тирринга возможно только при дополнении конфигурации «бабочка» орбит LAGEOS-1/2 третьим спутником LARES [100]. Однако это частный случай.

Как уже обозначено ранее, определение всего набора параметров из обработки наблюдений только спутников LAGEOS-1/2 связано с определенными сложностями в силу значительных корреляционных зависимостей между ними. На рисунке 5.2 представлена полная корреляционная матрица решения с уточнением координат станций, ПВЗ и коэффициентов ГПЗ до 4 степени и порядка (помимо начальных условий интегрирования), выполненного по наблюдениям спутников LAGEOS-1/2 на недельном интервале (суммарное количество наблюдений – порядка 3000). Представленная схема прекрасно иллюстрирует описанную ранее ситуацию: сильная корреляционная зависимость между долготой восходящего узла орбит Ω , вариациями продолжительности суток ΔLOD и зональными гармониками (в данном случае – $\bar{C}_{20}, \bar{C}_{30}, \bar{C}_{40}$). Так, корреляция между долготой восходящего угла орбит спутников LAGEOS-1/2 и коэффициентами \bar{C}_{20} и \bar{C}_{40} составляет 1,0. Корреляция между коэффициентом \bar{C}_{30} и коэффициентами \bar{C}_{20} и \bar{C}_{40} несколько меньше – 0,7. Между вариациями продолжительности суток и коэффициентами \bar{C}_{20} и \bar{C}_{40} корреляция составляет порядка 0,7-0,8, между вариациями продолжительности суток и коэффициентом \bar{C}_{30} корреляция несколько меньше – 0,6. Высокая корреляция существует непосредственно между вариациями продолжительности суток (0,6 и больше). Необходимо также отметить, что существует значительная корреляция (от 0,4 до 0,6) между коэффициентами гравитационного поля $\bar{C}_{21}, \bar{C}_{41}$ и координатой полюса x_p , а также непосредственно между коэффициентами \bar{S}_{21} и \bar{S}_{41} (на уровне 0,8).

В то же время, нельзя выделить существенных корреляций между координатами станций и другими определяемыми параметрами, за исключением *range bias*. В этом случае корреляция возникает только для тех станций, для которых определяется и величина *range bias*.

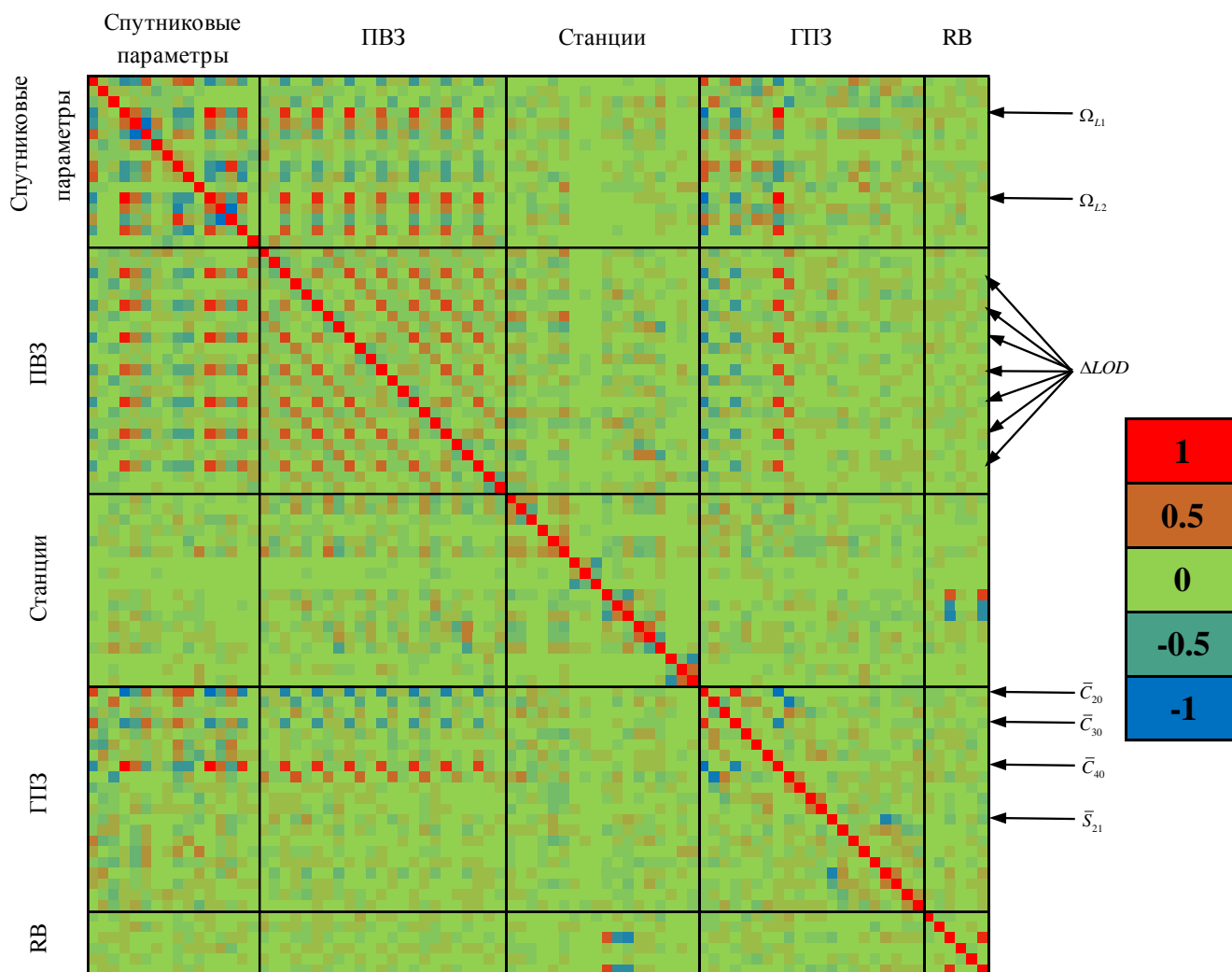


Рисунок 5.2– Корреляционная матрица решения, полученного по наблюдениям ИСЗ LAGEOS-1/2

Таким образом, в силу сильных корреляционных зависимостей между многими параметрами (параметрами орбит спутников, ПВЗ и коэффициентами гравитационного поля), данное решение нельзя считать надежным и стабильным [31].

Рассмотрим корреляционную матрицу решения, в которое помимо спутников LAGEOS-1/2 дополнительно включены ИСЗ AJISAI, Stella, Starlette. Как указывалось ранее, для низкоорбитальных ИСЗ стандартная 7-суточная дуга составляется из двух дуг продолжительностью по 3,5 суток. Поэтому в матрице присутствует два набора спутниковых параметров для каждого низкоорбитального ИСЗ. Количество нормальных точек увеличилось до 7800. Корреляционная матрица полученного решения представлена на рисунке 5.3.

В таком решении существенно снижается корреляция между элементами орбит (долгота восходящего узла орбит), вариациями продолжительности суток и зональными гармониками [31]. Так, корреляция между долготой восходящего узла орбит и коэффициентами

\bar{C}_{20} и \bar{C}_{40} снизилась до 0,6-0,8 (и даже меньше в некоторых случаях), а для коэффициента \bar{C}_{30} – значительно уменьшилась (менее 0,2). Корреляция между вариациями продолжительности суток и зональными коэффициентами также значительно снизилась (не превосходит 0,4). Корреляция между долготой восходящего узла орбит Ω и вариациями продолжительности суток ΔLOD существенно снизилась практически для всех величин, за исключением третьего значения ΔLOD на интервале. По всей видимости, это связано с тем, что четвертое значение поправки к Всемирному времени $\Delta UT1$ фиксировалось. Взаимная корреляция между величинами ΔLOD также близка к нулю, за исключением зависимостей между соседними значениями (0,4-0,7), что является следствием фиксации только одного значения поправки ко Всемирному времени $\Delta UT1$ и невозможности непосредственного определения величин $\Delta UT1$ из спутниковых наблюдений. Кроме этого, непосредственно между коэффициентами гравитационного поля \bar{C}_{20} и \bar{C}_{40} , \bar{C}_{21} и \bar{C}_{31} , \bar{S}_{21} и \bar{S}_{41} корреляция не превышает 0,2.

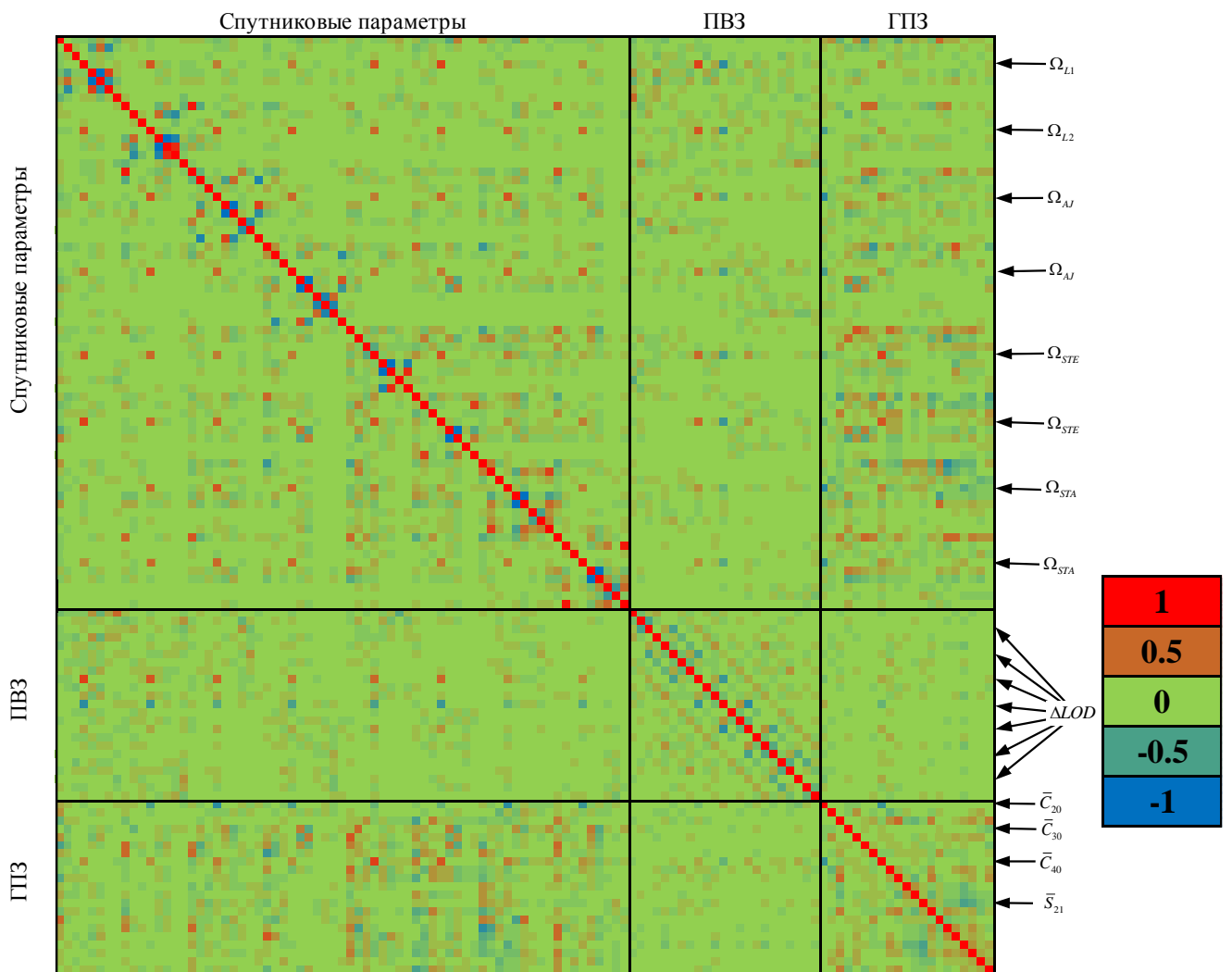


Рисунок 5.3 – Корреляционная матрица решения, полученного по наблюдениям ИСЗ LAGEOS-1/2, AJISAI, Stella и Starlette

Коэффициенты корреляции – не единственный источник информации о надежности и качестве решения. Рассмотрим среднеквадратические погрешности (СКП) определения параметров. В таблице 5.1 приведены погрешности определения коэффициентов ГПЗ. Представленные результаты показывают, что из решения только по спутникам LAGEOS-1/2 при заданном наборе определяемых параметров уверенно определяется только коэффициент \bar{C}_{33} .

Таблица 5.1 – Среднеквадратические погрешности определения коэффициентов гравитационного поля Земли и СКО единицы веса σ_0 , полученные в каждом решении

		$m_{\bar{C}_{nm}}$					$m_{\bar{S}_{nm}}$				
		n									
		4	3	2	1	0	1	2	3	4	
m	LAGEOS-1/LAGEOS-2 $\sigma_0=0,0134$ см	2			3.32E-11	2.69E-11	5.51E-11	1.17E-10	9.02E-11		
		3		6.96E-12	3.92E-11	2.53E-11	2.54E-11	2.33E-10	6.58E-11	1.30E-10	
		4	9.91E-11	1.00E-10	1.23E-10	3.72E-11	8.74E-11	6.83E-11	9.37E-11	6.80E-11	6.97E-11
	LAGEOS-1/LAGEOS-2/AJISAI $\sigma_0=0,0153$ см	2			7.59E-12	7.84E-12	6.84E-12	5.37E-11	2.38E-11		2.0E-10
		3		2.81E-12	1.79E-11	2.39E-11	2.43E-11	4.18E-11	2.03E-11	3.21E-11	7.0E-11
		4	2.81E-11	3.57E-11	5.03E-11	1.80E-11	3.75E-11	4.51E-11	2.31E-11	2.13E-11	4.66E-11
	LAGEOS-1/LAGEOS-2/AJISAI/Stella/Starlette $\sigma_0=0,0189$ см	2			5.65E-12	6.29E-12	3.29E-12	3.50E-11	1.12E-11		2.0E-11
		3		2.12E-12	1.37E-11	1.34E-11	1.16E-11	6.45E-12	1.48E-11	1.31E-11	7.0E-12
		4	1.27E-11	2.75E-11	3.17E-11	1.35E-11	2.69E-11	2.20E-11	1.19E-11	1.52E-11	2.21E-11

Включение в обработку дополнительного низкоорбитального ИСЗ AJISAI способствует существенному снижению погрешностей определения коэффициентов второй, третьей и частично четвертой степени. Для коэффициентов \bar{C}_{2m} ошибка снизилась на порядок. Дополнение набора обрабатываемых спутников ещё двумя низкоорбитальными ИСЗ (Stella и Starlette) приводит к снижению погрешности определения практически всех коэффициентов до уровня $5 \cdot 10^{-12} \div 2 \cdot 10^{-11}$, за исключением некоторых коэффициентов четвертой степени ($\bar{C}_{41}, \bar{C}_{42}, \bar{C}_{44}$) и \bar{S}_{21} , для которых ошибка находится на уровне $2,5 \cdot 10^{-11} \div 3,5 \cdot 10^{-11}$.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что включение в обработку дополнительных низкоорбитальных ИСЗ ведет не только к существенному снижению корреляционных зависимостей, но и к повышению точности определения коэффициентов геопотенциала при их совместном определении с параметрами вращения Земли и координатами станций [31].

Сравним полученные в комбинированном решении погрешности для ПВЗ и координат станций с аналогичными величинами, полученными из обработки наблюдений только спутников LAGEOS-1/2 с учетом периодических параметров эмпирических возмущающих ускорений (2.35) (т.е. применена стандартная методика определения координат станций и ПВЗ, применяемая в центрах анализа IIRS). Осредненные на недельном интервале среднеквадратические погрешности определения ПВЗ в двух решениях составили:

- 0,08 и 0,10 мс дуги и 0,048 мс для решения по LAGEOS-1/2;
- 0,09 и 0,11 мс дуги и 0,011 мс для комбинированного решения по спутникам LAGEOS-1/2, AJISAI, Stella, Starlette.

Таким образом, погрешности определения координат полюса для комбинированного решения оказались примерно на 10% выше по сравнению с аналогичными величинами, полученными из решения по спутникам LAGEOS-1/2. В то же время, в 4 раза снизилась ошибка определения поправки $\Delta UT1$.

Рассмотрим ситуацию с координатами станций, определяемыми в двух решениях. В таблице 5.2 представлены фактор снижения точности по местоположению (PDOP) и величины СКП в плановой и высотной составляющих для некоторых станций. В каждой ячейке представлены два числа: верхнее – для решения по спутникам LAGEOS-1/2, нижнее – для решения по всем рассматриваемым спутникам. Необходимо отметить незначительное увеличение СКП для некоторых станций в комбинированном решении (LAGEOS+LEO). Для большинства станций ухудшение не превышает 1,2 мм в плане и 0,6 мм по высоте. Несмотря на этот негативный фактор, улучшается показатель PDOP (благодаря большему количеству используемых наблюдений, представленных на рисунке 5.4 для спутников LAGEOS-1/2 и низкоорбитальных ИСЗ Stella, Starlette, AJISAI).

Таблица 5.2 – Точности координат станций для двух типов решения

Параметры	Тип решения	Станции						
		7119	7841	7406	7237	7405	7821	7824
Количество наблюдений	LL	109	72	184	162	197	29	58
		208	131	470	559	458	148	283
PDOP	LL	0,44	0,49	0,51	0,34	0,34	2,12	0,59
		0,31	0,33	0,37	0,21	0,23	1,07	0,52
$\sqrt{m_N^2 + m_E^2}$, мм	LLASS	4,0	4,7	3,3	2,5	2,7	8,9	5,7
		5,2	5,9	4,0	3,7	4,0	8,7	5,2
m_U , мм	LLASS	2,1	1,7	4,1	4,1	1,2	20,0	2,2
		2,7	2,3	5,7	1,6	1,7	18,2	2,6

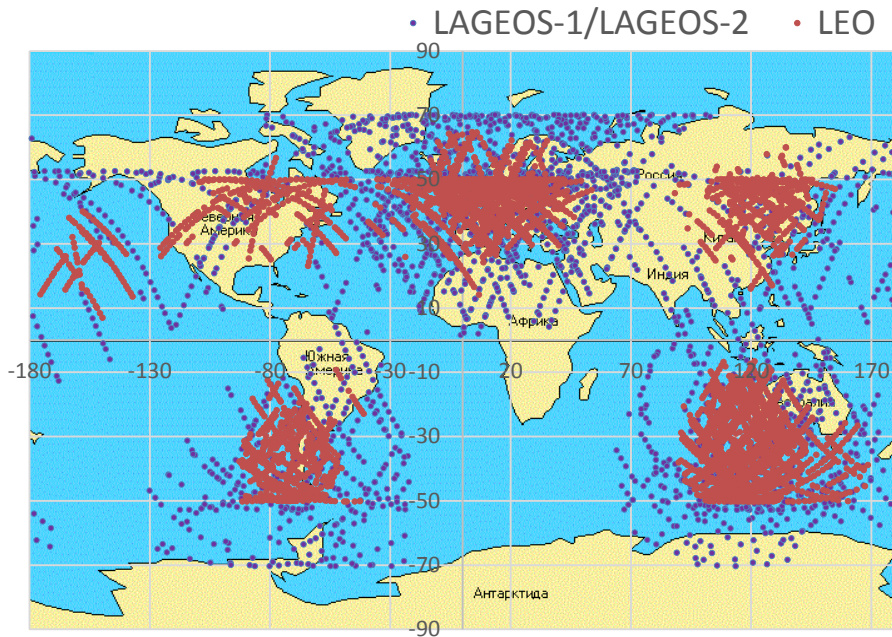


Рисунок 5.4 – Пространственное распределение нормальных точек для спутников LAGEOS-1/2 и низкоорбитальных ИСЗ для выбранного недельного интервала

5.1.2 Комбинирование на уровне нормальных уравнений

Для определения параметров на продолжительном интервале времени (например, на интервале 4 недели) по решениям, полученным на коротких (в нашем случае недельных) интервалах, применяется комбинирование на уровне нормальных уравнений. Суть этого метода описывается следующими выражениями [122]:

$$\begin{aligned} N_c &= N_1 + N_2, \\ b_c &= b_1 + b_2, \\ N_c x_c &= b_c. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Данная процедура носит название стекирования (объединения) систем нормальных уравнений (*stacking of normal equations*). Здесь N_1, N_2, b_1, b_2 матрицы и векторы нормальных уравнений решений, участвующих в комбинировании (двух и более решений), а N_c, b_c, x_c – матрица и вектор нормальных уравнений комбинированного решения и вектор уточняемых параметров. При этом, величина $v^T P v$, необходимая для оценки точности полученных параметров, определяется по формуле:

$$v^T P v = (l_1^T P l_1 + l_2^T P l_2) - x_c^T (A_1^T P l_1 + A_2^T P l_2). \quad (5.4)$$

Использование выражений (5.3)-(5.4) требует выполнения некоторых преобразований.

Во-первых, поскольку в процессе обработки определяются не только интересующие нас величины (например, коэффициенты гравитационного поля), но и другие сопутствующие параметры (такие, как начальные условия интегрирования и коэффициенты возмущающих ускорений), то для использования в выражениях (5.3)-(5.4) только необходимой информации необходимо выбрать из матрицы N и вектора b соответствующие элементы. Просто «вырезать» элементы нельзя, так как будет утеряна информация о связи искомых параметров с другими. Поэтому матрицу и вектор нормальных уравнений преобразуют определенным образом:

$$\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{21} \\ \tilde{b} &= b_1 - N_{12}N_{22}^{-1}b_2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Величина $v^T P v$ для полученной усеченной системы вычисляется по формуле:

$$v^T P v = l^T P l - x_1^T \tilde{b} - b_2^T N_{22}^{-1} b_2. \quad (5.6)$$

Здесь N_{11}, b_1, x_1 – информация, относящаяся к интересующим нас параметрам, а все остальные элементы матрицы и векторов – исключаемая информация. В зарубежной литературе такая операция носит название предварительного исключения параметров (*parameters pre-eliminating*). Полученная по этой методике система нормальных уравнений в явном виде не содержит величины, входящие в вектор x_2 , но вся информация касательно влияния x_2 на x_1 уже учтена при преобразованиях и не будет потеряна в процессе решения.

Второй необходимый этап – выбор системы нормальных уравнений, относительно которой будет выполняться комбинирование (референсное решение).

Затем требуется выполнить масштабирование систем нормальных уравнений поскольку каждая система, участвующая в комбинировании, получена при уникальных условиях. Для масштабирования используется информация, содержащаяся в величине СКО единицы веса (2.49) каждой системы:

$$mN_i, mb_i, m l^T P l_i, \quad (5.7)$$

$$m = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.8)$$

где σ_0 – СКО единицы веса системы уравнений, относительно которой выполняется комбинирование, а σ_i – СКО единицы веса других систем уравнений, участвующих в комбинировании.

Кроме того, необходимо отметить, что каждое решение относится к своему набору априорных значений определяемых величин. Поэтому перед объединением в общую систему нормальных уравнений требуется каждое из решений привести к априорным значениям референцной системы. В рассматриваемом случае изменения коснутся только вектора системы нормальных уравнений b и вектора свободных членов l системы уравнений поправок:

$$\begin{aligned} b' &= b - N y_0 - x_0 ; \\ l' &= l - A y_0 - x_0 . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь b', l' – вектора, приведенные к новой системе априорных значений y_0 , а b, l, N, A – вектора и матрицы, относящиеся к старой системе априорных значений x_0 .

После выполнения описанных преобразований можно выполнять комбинирование на уровне нормальных уравнений с применением выражений (5.3)-(5.4).

Такая методика позволяет получить величины и погрешности, аналогичные тем, которые бы получились при выполнении решения на одном суммарном временном интервале [40], т.е., например, величины, полученные из решения, выполненного на одном месячном интервале, аналогичны результатам комбинирования нормальных уравнений четырех недельных интервалов. Подобная методика используется обычно при обработке результатов разных центров (например, при выводе системы ITRF, объединяются решения, полученные по разным методам наблюдений).

Кроме этого, погрешности параметров, определенных на длительных временных интервалах, оказываются меньше тех, которые получены на коротких интервалах. Поэтому в некоторых случаях целесообразно объединение коротких интервалов в более продолжительные для повышения точности определения параметров.

5.2 Результаты определения геодинамических параметров из комбинированной обработки лазерных наблюдений ИСЗ

Поскольку нельзя делать окончательных выводов, основываясь на результатах обработки только одного недельного интервала, была выполнена комбинированная обработка продолжительного ряда лазерных наблюдений спутников с разными параметрами орбит с целью

подтверждения возможности совместного определения координат станций, параметров вращения Земли и коэффициентов ее гравитационного поля. Интервал обработки составил 13 лет (с 2001 по 2013гг), общее количество недельных интервалов – 676. Этот интервал выбран по той причине, что для него имеются данные измерений альbedo Земли (проект CERES [132]) и перемещений неприливных масс в атмосфере и океанах (модель AOD1B RL05[64]). Для обработки были выбраны те спутники, которые наблюдались в течение всего интервала. Помимо спутников LAGEOS-1/2 в решение были включены спутники AJISAI, Stella и Starlette. Спутник LARES не был включен, так как он запущен только в 2012 году. Определяемыми параметрами, помимо спутниковых, являются координаты станций, параметры вращения Земли и коэффициенты гравитационного поля. Как показали экспериментальные вычисления, для выбранной орбитальной группировки наиболее оптимальным является определение коэффициентов ГПЗ до четвертой степени и порядка.

Помимо описанного варианта решения, для сравнения было выполнено решение только по спутникам LAGEOS-1/2 с уточнением координат станций и параметров вращения Земли. Кроме того, в этом решении определялись также параметры периодических эмпирических ускорений. Таким образом, было получено стандартное решение IIRS, которое используется, в том числе, при выводе общеземной системы координат ITRF. Отличие заключалась только в способе реализации системы координат: в представленных результатах, как и указывалось ранее (см. главу 3), фиксировались координаты двенадцати станций в системе SLRF2008, а в решении IIRS выполняется свободное уравнивание с введением ограничений для координат станций и ПВЗ величиной 1м.

Общее количество нормальных точек, использованных и отбракованных в каждом решении, приводится в таблице 5.3. Включение низкоорбитальных спутников дает практически трехкратное увеличение обрабатываемой измерительной информации. При этом процент отбракованных нормальных точек одинаков для обоих решений – порядка 18%.

Таблица 5.3 – Количество нормальных точек, использованных в решениях

	Тип решения			
	LAGEOS	LAGEOS+LEO		
		LAGEOS	LEO	Суммарное
Общее кол-во норм. точек	2146304	2144716	3957257	6101973
Кол-во использованных в решении норм. точек	1761214	1782137	3222439	5004576
Процент отбракованных	17.9%	16.9%	18.6%	18.0%

Распределение измерительной информации по годам приводится на рисунке 5.5.



Рисунок 5.5 – Распределение нормальных точек для спутников LAGEOS-1/2 и низкоорбитальных ИСЗ (LEO) по годам

Как можно заметить, с 2005 года произошло увеличение измерительной информации примерно на 25% для обоих классов спутников.

Общее число станций, наблюдения с которых были использованы, и число определяемых станций в обоих решениях отображено на рисунке 5.6. В среднем, в комбинированном решении использовалось на 2-3 станции больше, чем в решении только по спутникам LAGEOS-1/2.

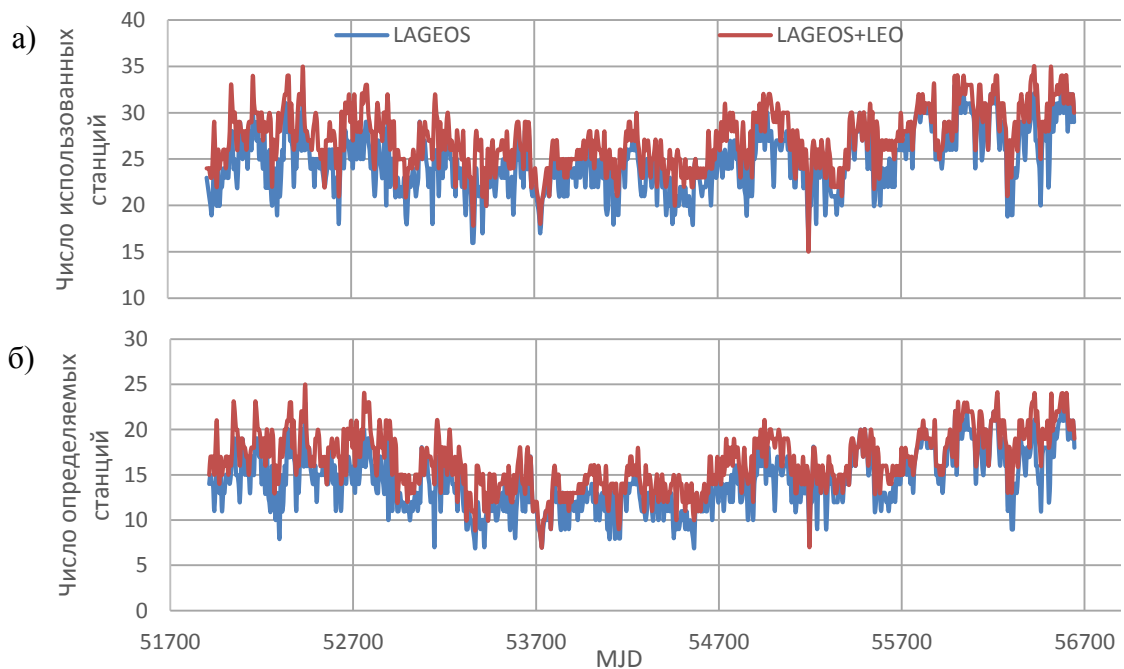


Рисунок 5.6 – Количество станций, участвующих в решениях (а), и количество определяемых станций (б)

Таким образом, в комбинированном решении увеличилось как количество измерительной информации (в 3 раза), так и число станций (в среднем на 2-3 станции больше).

Перейдем к анализу результатов обработки лазерных наблюдений спутников.

Сначала рассмотрим результаты определения параметров вращения Земли. Сравнение, как и раньше, выполнялось с опорным рядом IERS C04. Здесь и далее ряды, полученные из обработки спутников LAGEOS-1/2, на графиках будем обозначать **LAGEOS**, а из комбинированного решения – **LAGEOS+LEO**. На рисунке 5.7 представлены разности между рядом IERS C04 и полученными рядами ПВЗ из обработки спутников LAGEOS-1/2 и комбинированной обработки наблюдений спутников LAGEOS-1/2, AJISAI, Stella и Starlette.

Если разности для координат полюса находятся примерно на одном уровне в обоих решениях, то разности поправок к Всемирному времени (вариаций продолжительности суток) демонстрируют значительное улучшение в комбинированном решении, полученном по спутникам с различными параметрами орбит: для координат полюса среднеквадратические разности равны 0,73 и 0,71 мс дуги в первом решении и 0,81 и 0,74 мс дуги в комбинированном решении, а для поправок к Всемирному времени – 1,074 и 0,194 мс соответственно, т.е. наблюдается более, чем пятикратное снижение разностей для величины $\Delta UT1$ при

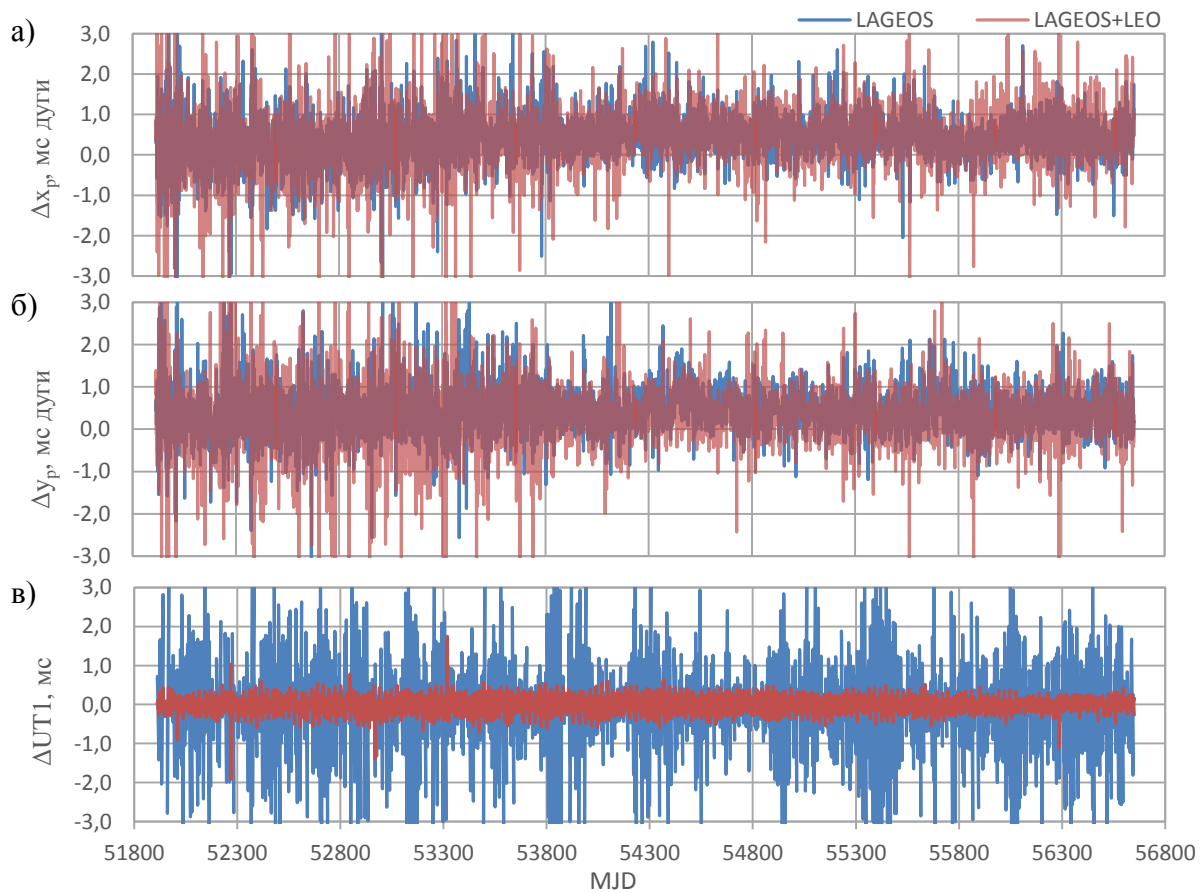


Рисунок 5.7 – Разности между опорным рядом ПВЗ IERS C04 и рядами, полученными из обработки только спутников LAGEOS-1/2 (**LAGEOS**) и совместной обработки LAGEOS-1/2, AJISAI, Stella, Starlette (**LAGEOS+LEO**), для координат полюса x_p , y_p (а, б) и поправки $\Delta UT1$ (в)

незначительном увеличении разностей для координат полюса. Такое же поведение прослеживается и для СКП определяемых ПВЗ (Рисунок 5.8): значения для координат полюса не изменяются (средневзвешенные величины СКП равны 0,11 и 0,11мс дуги в первом решении против 0,11 и 0,11мс дуги в комбинированном решении соответственно), а для величины $\Delta UT1$ – существенное снижение погрешностей в 4,5 раза (0,058мс против 0,013мс).

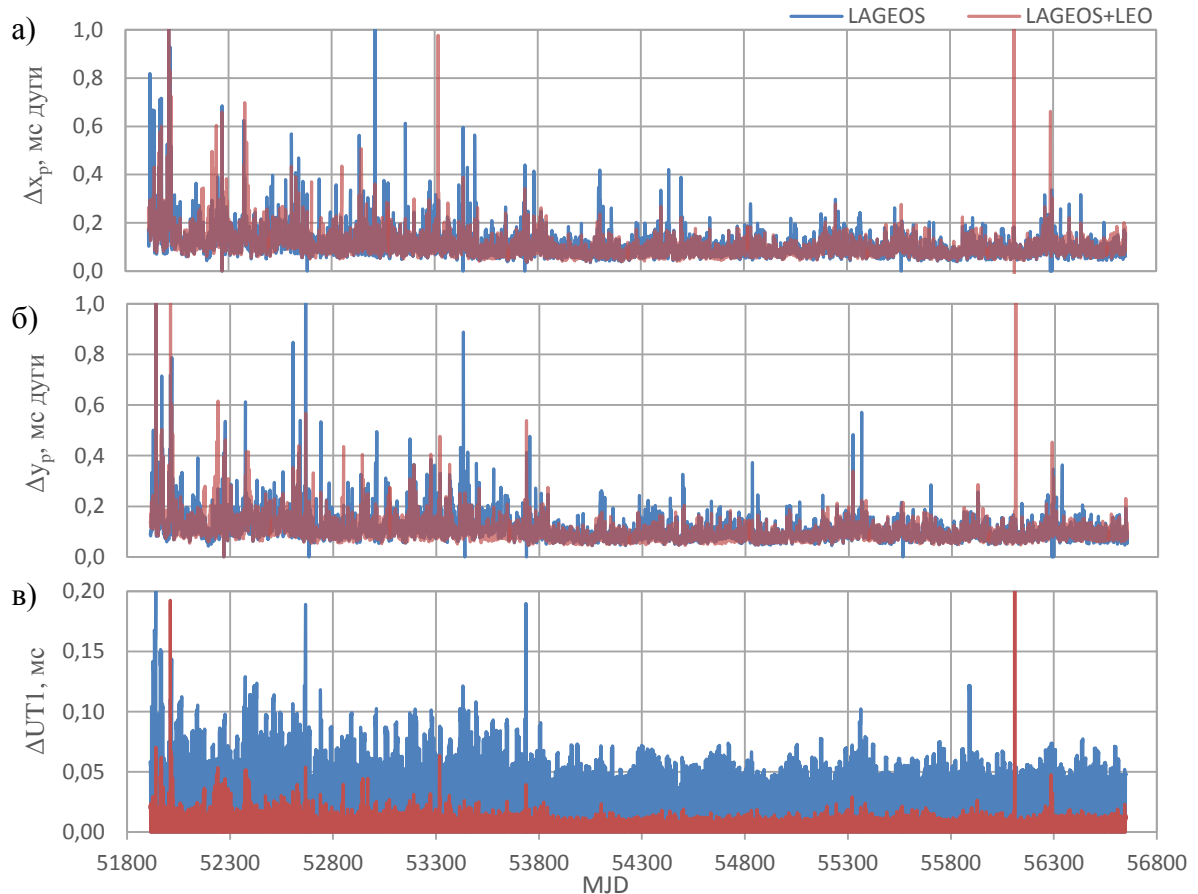


Рисунок 5.8 – СКП определения координат полюса x_p, y_p (а, б) и поправки $\Delta UT1$ (в), полученные из обработки только спутников LAGEOS-1/2 (LAGEOS) и совместной обработки LAGEOS-1/2, AJISAI, Stella, Starlette (LAGEOS+LEO)

Сравним полученные в двух решениях координаты станций и погрешности их определения. В таблице 5.4 представлены СКП определения координат станций (плановая и высотная составляющие), а также количество интервалов, на которых получены координаты каждой из указанных станций (приводятся данные для станций, количество обработанных интервалов для которых составило не менее 60 за весь период обработки). Исходя из данных этой таблицы, можно заключить, что включение в число определяемых параметров коэффициентов гравитационного поля с одновременным расширением орбитальной группировки (включение в обработку трех низкоорбитальных ИСЗ) практически не сказывается на величинах погрешностей определения координат станций: в среднем, погрешности увеличиваются не более, чем на 1,6мм

как в плане, так и по высоте. При этом, можно судить о значительном увеличении количества обработанных интервалов практически для всех станций за счет включения в обработку низкоорбитальных ИСЗ: в среднем, количество интервалов для каждой станции увеличилось в 1,4 раза.

Таблица 5.4 – Сравнение средневзвешенных СКП определения координат станций и количества обработанных интервалов в двух решениях: **LAGEOS** и **LAGEOS+LEO**

№ станции	СКП в плане, мм	СКП по высоте, мм	Количество интервалов
1824	9,8 / 10,2	4,1 / 5,4	84 / 252
1831	10,6 / 10,8	3,5 / 4,9	46 / 112
1864	8,9 / 11,0	8,5 / 18,3	186 / 205
1868	13,7 / 19,7	20,3 / 28,3	107 / 104
1873	10,8 / 10,2	4,4 / 5,0	141 / 270
1879	7,5 / 10,9	3,7 / 5,5	138 / 139
1884	7,8 / 7,7	2,7 / 4,3	298 / 425
1886	7,3 / 8,0	2,8 / 4,3	73 / 81
1887	4,9 / 7,0	2,2 / 3,2	77 / 82
1889	7,8 / 10,3	2,5 / 3,5	51 / 65
1890	6,9 / 8,6	2,9 / 4,0	60 / 86
1893	7,4 / 6,2	2,6 / 2,8	305 / 428
7119	4,0 / 4,1	2,1 / 2,2	317 / 332
7124	5,4 / 5,9	2,7 / 3,2	260 / 334
7237	4,6 / 4,4	1,9 / 2,0	587 / 635
7249	6,2 / 5,8	10,4 / 9,4	281 / 400
7308	5,0 / 5,6	7,7 / 9,4	218 / 283
7358	7,4 / 7,8	3,3 / 4,1	99 / 164
7403	6,2 / 4,9	10,8 / 8,7	238 / 402
7405	3,2 / 3,6	1,4 / 1,7	413 / 450
7406	3,4 / 3,3	4,5 / 4,5	351 / 361
7806	8,9 / 9,3	3,3 / 5,7	61 / 105
7821	6,6 / 6,2	11,8 / 11,1	195 / 297
7824	6,0 / 4,4	2,7 / 2,6	411 / 570
7838	3,8 / 4,1	1,6 / 2,0	477 / 521
7841	4,3 / 4,0	1,6 / 1,9	411 / 440
7845	3,7 / 5,0	5,3 / 7,4	375 / 375

Полученные в двух решениях ряды координат станций совпадают. В качестве примера были выбраны станции, для которых увеличение числа обработанных интервалов было одним из наибольших: 7403 (Арекипа, Перу) и 1884 (Рига, Латвия). Ряды координат для указанных станций приводятся на рисунках 5.9-5.10. Исходя из представленных результатов, можно заключить, что ряды координат, полученные из комбинированного решения, более стабильны по сравнению с решением, полученным только по спутникам LAGEOS-1/2: при сохранении общей тенденции изменения составляющих уменьшаются величины выбросов и их количество (особенно заметно для составляющих N и E станции 1884, рисунок 5.10).

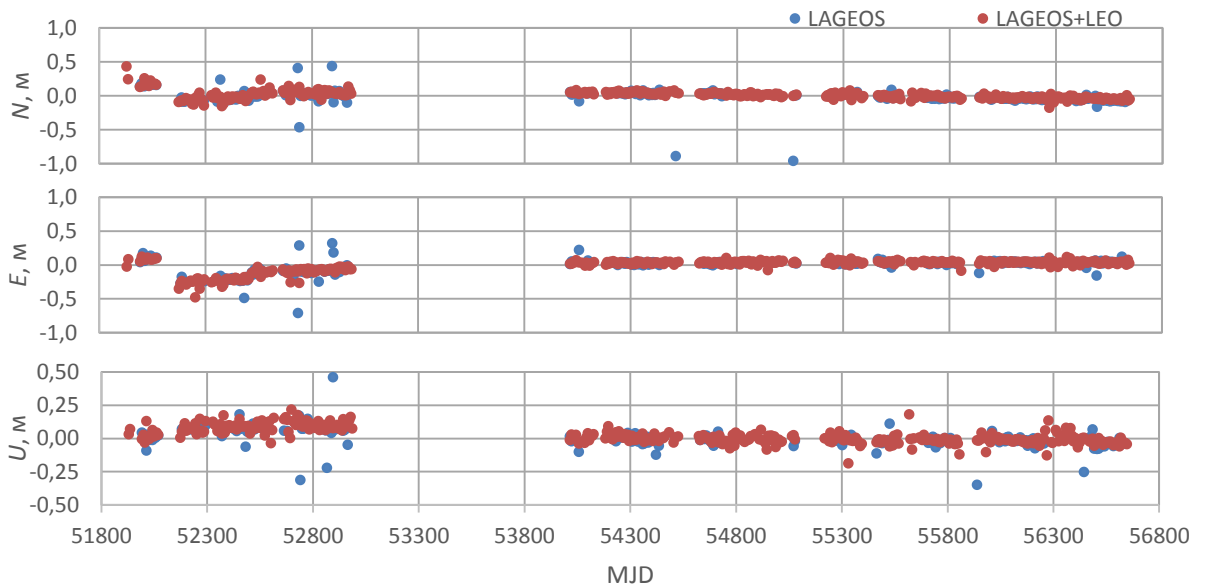


Рисунок 5.9 – Координаты станции 7403 (Арекипа, Перу) в системе NEU, полученные в двух решениях, относительно положения в системе SLRF2008

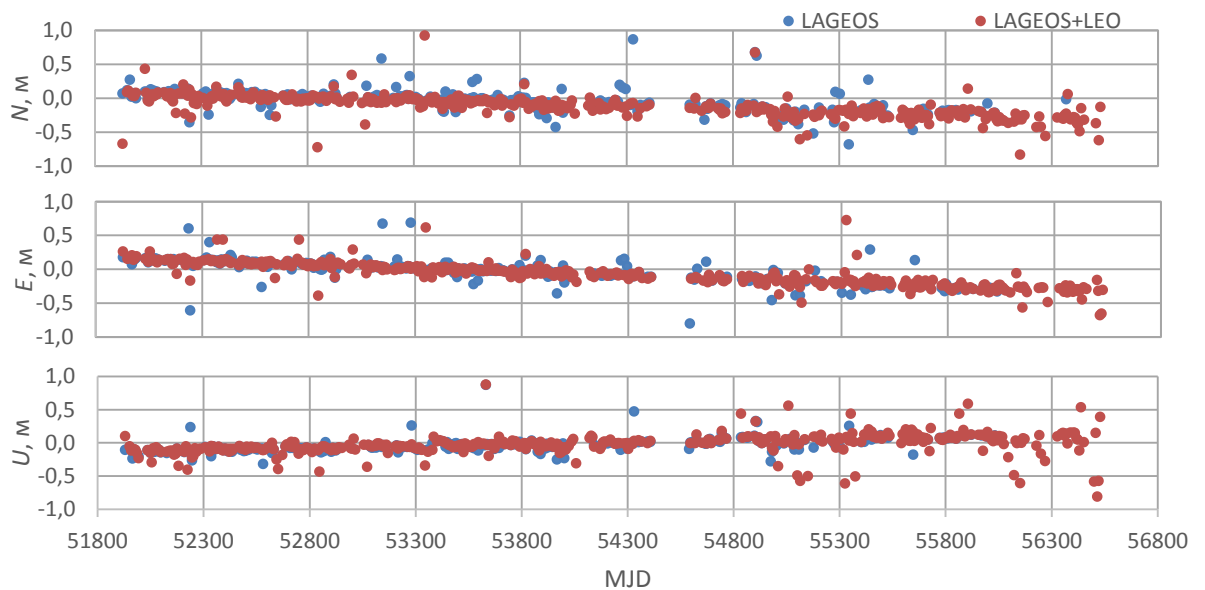


Рисунок 5.10 – Координаты станции 1884 (Рига, Латвия) в системе NEU, полученные в двух решениях, относительно положения в системе SLRF2008

Таким образом, показано, что переход от определения только координат станций и параметров вращения Земли по наблюдениям спутников LAGEOS-1/2 к совместному определению координат станций, ПВЗ и коэффициентов гравитационного поля до 4 степени и порядка по наблюдениям спутников LAGEOS-1/2 и низкоорбитальных ИСЗ (AJISAI, Stella, Starlette) не ведет к ухудшению решения (увеличение погрешностей, как правило, несущественно и зависит от количества наблюдений). Расширение орбитальной группировки способствует получению более стабильного ряда значений координат станций (увеличение количества интервалов практически для всех станций, на которых определяются координаты, и уменьшение выбросов), значительно повышается точность определения поправок к Всемирному времени $\Delta UT1$.

Перейдем теперь к рассмотрению полученных рядов коэффициентов гравитационного поля. Одной из целей представленной работы является определение коэффициентов гравитационного поля до 4 степени и порядка (всего 21 коэффициент) на недельных интервалах времени. В связи с тем, что большинство решений, получаемых по наблюдениям космических комплексов CHAMP и GRACE, получено на месячных интервалах, то для проведения сравнительного анализа полученных в представленном решении результатов, недельные решения (676 недельных интервалов) были объединены в четырехнедельные (169 интервалов) по методике комбинирования на уровне нормальных уравнений, описанной в пункте 5.1.2. При этом комбинирование затронуло только коэффициенты гравитационного поля. Координаты станций и параметры вращения Земли по-прежнему определены на недельных интервалах. Полученные таким образом значения коэффициентов характеризуются существенно меньшей ошибкой. В качестве иллюстрации на рисунке 5.11 приводятся оба ряда для коэффициента \bar{C}_{20} и их погрешности: значения, полученные на недельных интервалах, и значения, полученные из комбинирования на уровне нормальных уравнений на четырех последовательных недельных интервалах. Здесь и далее коэффициенты ГПЗ для наглядности и удобства отображения на графиках были преобразованы: для каждого коэффициента по всем рассматриваемым решениям определена некоторая постоянная составляющая, которая исключается из каждого значения в рядах, и полученная разность затем приводится к величине первого порядка умножением на 10 в некоторой степени (обычно от 9 до 10). Величины, применяемые в преобразованиях, приводятся в Приложении Г. Полученный из комбинирования ряд становится более гладким (Рисунок 5.11а). Погрешности определения коэффициента в комбинированном решении приблизительно в 2-2,5 раза меньше в сравнении с результатами, полученными на недельных интервалах [31]. При этом можно заметить, что в некоторых случаях погрешности достаточно высоки для недельных интервалов (Рисунок 5.11б). По всей видимости, это вызвано тем фактом, что на данном

временном отрезке на некоторых недельных интервалах имелось крайне малое количество наблюдений – менее 4000 по всем спутникам (Рисунок 5.12). Комбинирование на четырехнедельных интервалах позволяет существенно компенсировать этот недостаток.

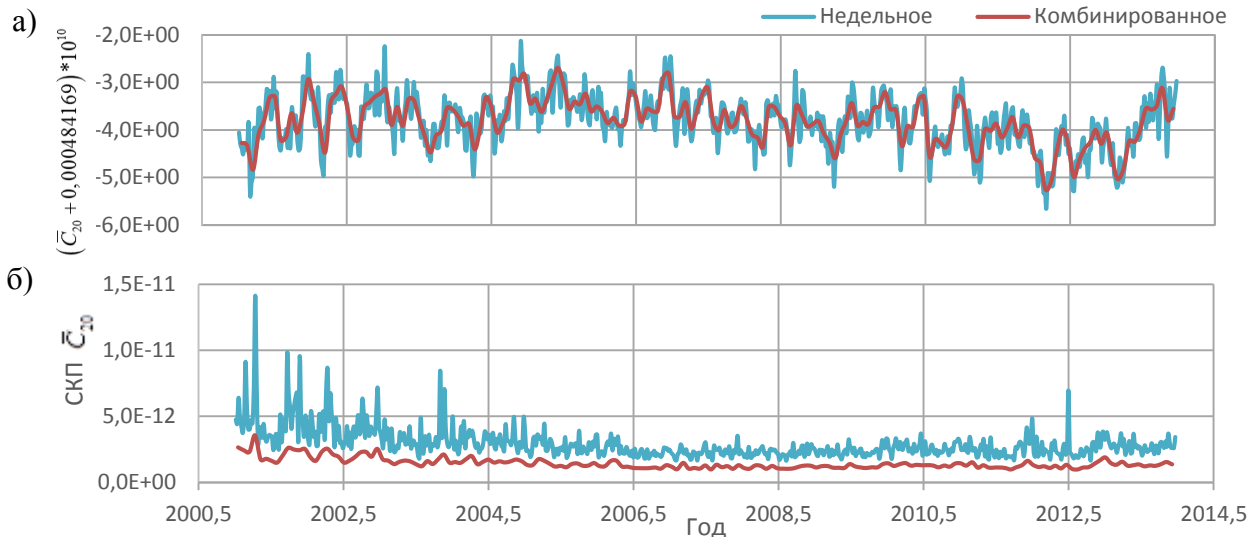


Рисунок 5.11 – Ряды коэффициента \bar{C}_{20} (а), полученные на недельных интервалах (Недельное) и из комбинирования на четырехнедельных интервалах (Комбинированное), и погрешности их определения (б)

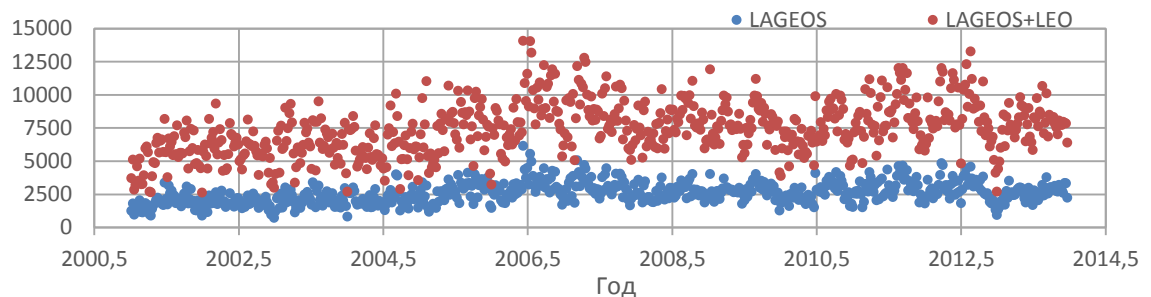


Рисунок 5.12 – Количество использованных наблюдений (нормальных точек) на недельных интервалах в двух решениях

Для сравнения полученных рядов коэффициентов гравитационного поля были выбраны решения, полученные по наблюдениям космических комплексов CHAMP и GRACE:

- Модель гравитационного поля до степени и порядка 60, полученная из анализа орбит спутника CHAMP (орбиты получены из обработки GPS-измерений), с месячным разрешением [130] в Университете Люксембурга (LUX); доступна в сети Интернет¹⁹;
- Две модели, полученные из обработки наблюдений и анализа орбит спутников комплекса GRACE, разработанные в двух центрах анализа – Лаборатория Реактивного Движения

¹⁹ <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/shms/monthly/ulux/>

НАСА (до степени и порядка 90)²⁰ и Астрономический Институт Бернского Университета (AIUB) [93] (до степени и порядка 60)²¹.

Выбор двух GRACE-моделей обусловлен тем фактом, что стандарты определения орбит двух центров различаются как друг с другом, так и с текущими стандартами вычисления орбит, установленными Соглашениями МСВЗ 2010 [105] (Таблица 5.5). За основу в обоих центрах взяты Соглашения МСВЗ 2003 [90]. Основные различия между центрами заключаются в использовании разных моделей океанических приливов. Основное отличие от текущих Соглашений МСВЗ 2010 [105] состоит в том, что влияние океанических полюсных приливов не учитывается, что может сказаться на определяемых коэффициентах \bar{C}_{21} и \bar{S}_{21} .

Таблица 5.5 – Стандарты определения орбит при обработке наблюдений комплекса GRACE в центрах анализа AIUB и JPL

	AIUB [93]	JPL [129]
Модель ГПЗ	AIUB-GRACE03S	GIF48
Твердые земные приливы	IERS2003	IERS2003
Океанические приливы	EOT08a + волны M_f, M_m, M_{tm} из модели FES2004	GOT4.7
Полюсные приливы	IERS2003	IERS2003
Модель перемещения неприливных масс в атмосфере и океанах	AOD1B RL04	AOD1B RL05
Модель атмосферных приливов	-	-

Рассмотрим сначала полученные ряды зональных коэффициентов. В связи с тем, что скорости вековых изменений зональных коэффициентов второй, третьей и четвертой степеней были учтены в процессе обработки лазерных наблюдений (при вычислении орбит спутников, см. пункт 2.2.1), для корректного сравнения с выбранными решениями по проектам CHAMP и GRACE эти величины необходимо учесть в рядах коэффициентов, полученных в представленной работе (т.е. добавить к полученным значениям поправки, учитывающие вековые изменения коэффициентов во времени).

²⁰ <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/shms/monthly/jpl-rl05/>

²¹ <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/shms/monthly/aiub-rl02/>

На рисунке 5.13 представлены ряды значений коэффициента \bar{C}_{20} и результаты их спектрального анализа. Необходимо отметить существенные различия между рядами значений как в сравнении с результатами по GRACE, так и по CHAMP. Спектральный анализ показывает значительные амплитуды шумовых сигналов с периодами около 162 и 320 суток в результатах комплекса GRACE – периоды влияния приливных волн S_2 и S_1 на орбиты спутников комплекса. Вследствие применения фильтра Калмана для CHAMP-коэффициентов рассматриваемой модели из спектрального анализа выделяется только годовой сигнал [130]. Кроме того, как указано в работе [107], непосредственно сами значения коэффициентов, полученных для комплекса CHAMP, могут быть недооценены в силу значительных погрешностей определения орбит по GPS-наблюдениям, а амплитуды временных вариаций могут быть ошибочными в силу того, что изначально проект CHAMP не был предназначен для изучения временных вариаций. Поэтому в дальнейшем результаты по CHAMP подробно рассматривать не будем.

Отметим, что годовой сигнал в ряде LAGEOS+LEO практически не прослеживается. Во многом, это обусловлено учетом эффектов от неприливных перемещений в атмосфере и океанах и атмосферных приливов. Единственный ярко выраженный сигнал в ряде LAGEOS+LEO – полугодовой (амплитуда порядка $2E-11$). Амплитуды других сигналов не превышают $5E-12$.

Исходя из данных рисунка 5.13 можно также заключить, что имеется тенденция уменьшения величины рассматриваемого коэффициента. Одна из возможных причин такого эффекта – таяние и уменьшение массы льдов в Антарктиде и Гренландии [86,87].

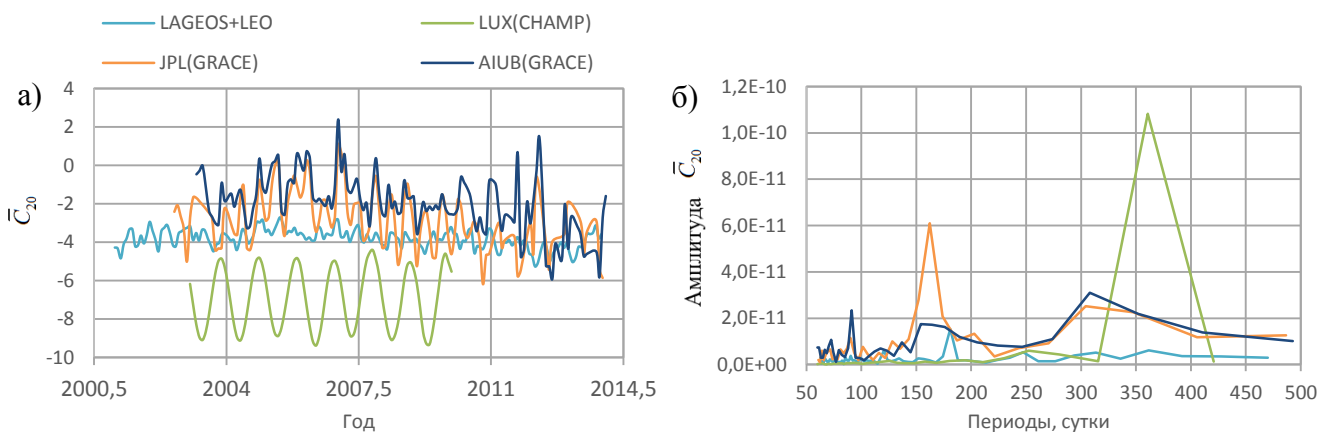


Рисунок 5.13 – Результаты определения коэффициента \bar{C}_{20} (а) и результаты спектрального анализа рядов коэффициента \bar{C}_{20} (б)

Ряды коэффициента \bar{C}_{30} практически совпадают по всем решениям, за исключением сдвига по фазе для ряда LAGEOS+LEO (Рисунок 5.14а). При этом спектральный анализ (Рисунок 5.14б) показывает, что ряд LAGEOS+LEO имеет ярко выраженные годовую и полугодовую

составляющую амплитуды ($6,5E-11$ и $3E-11$ соответственно). Для GRACE-решений наиболее выраженный сигнал – годовой. Причем амплитуда совпадает для обоих решений (порядка $4E-11$).

Как можно заметить, в ряде LAGEOS+LEO дополнительно прослеживается сигнал с периодом 120 суток, который может быть соотнесен с периодом обращения восходящего узла орбиты ИСЗ AJISAI, периодом обращения аргумента перицентра ИСЗ Stella (см. таблицу 4.1), т.е. имеют место шумовые составляющие, которые могут быть вызваны погрешностями при вычислении возмущающих ускорений.

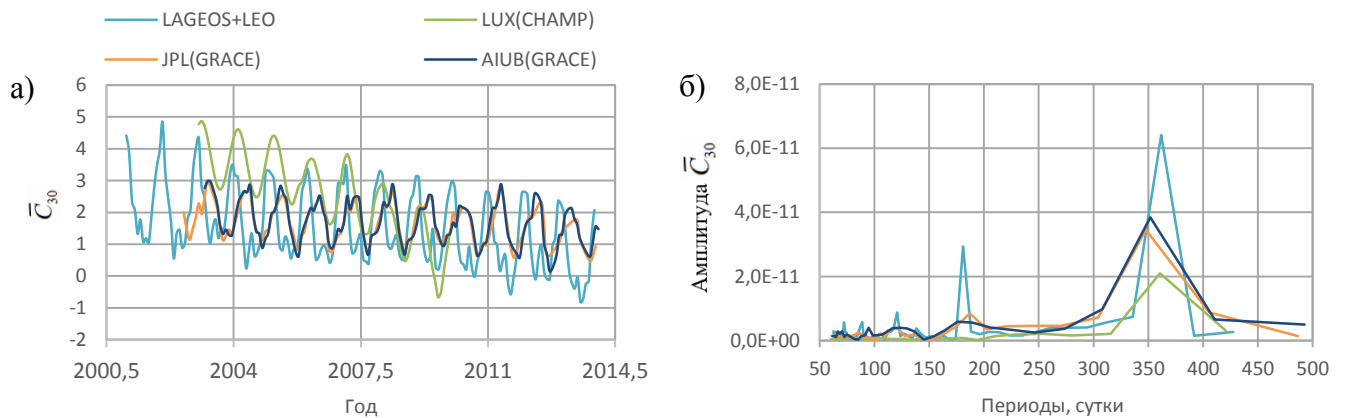


Рисунок 5.14 – Результаты определения коэффициента \bar{C}_{30} (а) и результаты спектрального анализа рядов коэффициента \bar{C}_{30} (б)

Полученный в решении LAGEOS+LEO ряд \bar{C}_{40} существенно отличается от решений, выполненных по наблюдениям GRACE (Рисунок 5.15): помимо смещения относительно других решений значительно отличается также спектрограмма. В GRACE-решениях амплитуды всех сигналов не превосходят величины $5E-12$. При этом доминирующим сигналом является сигнал,

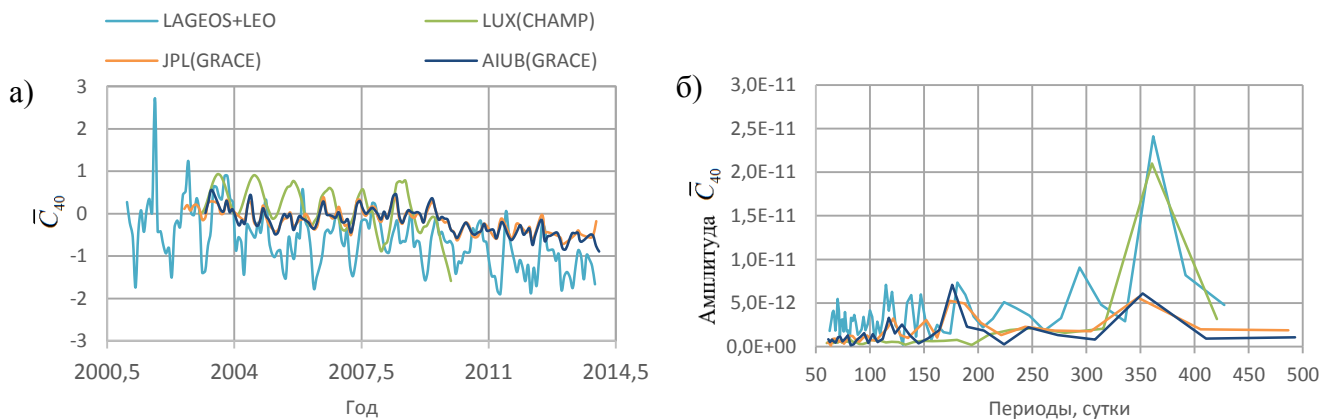


Рисунок 5.15 – Результаты определения коэффициента \bar{C}_{40} (а) и результаты спектрального анализа рядов коэффициента \bar{C}_{40} (б)

период которого (175 суток) близок к периоду влияния волны S_2 на орбиты GRACE, поэтому можно предположить, что коэффициент \bar{C}_{40} так же неуверенно определяется из наблюдений GRACE в рассматриваемых решениях. Для решения LAGEOS+LEO ярко выражен годовой сигнал (амплитуда около $2,5E-11$) и сигнал с периодом 293 дня ($1,0E-11$). При этом, если в полученном решении LAGEOS+LEO отчетливо прослеживаются периодические изменения, то по результатам GRACE невозможно определить временные вариации рассматриваемого коэффициента.

Ряды коэффициентов второй степени первого порядка во многом совпадают во временной области за исключением решения CHAMP (Рисунки 5.16). При этом существенно различаются амплитуды годовых сигналов: амплитуды в рядах, полученных по лазерным наблюдениям, составляют $3,8E-11$ и $3E-11$ для коэффициентов \bar{C}_{21} и \bar{S}_{21} , в то время как по решениям GRACE они не превосходят $1E-11$, т.е. в представленных результатах комплекса GRACE не выделяется каких-либо существенных периодических сигналов. Одной из причин такого эффекта является использование Соглашений MCB3 2003 [90], в которых не учитывалось влияние океанических полюсных приливов, что влечет за собой соответствующие погрешности при определении

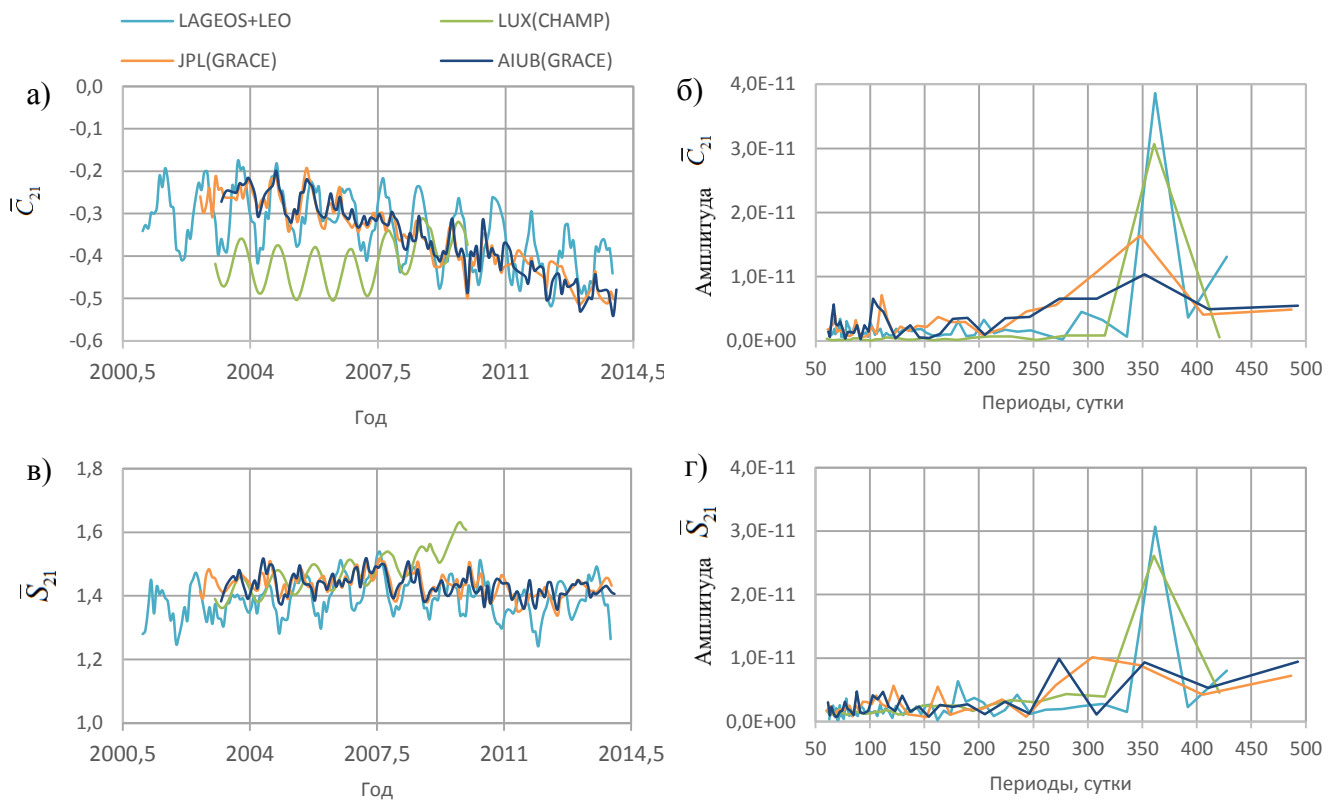


Рисунок 5.16 – Результаты определения коэффициента \bar{C}_{21} (а), \bar{S}_{21} (в) и результаты спектрального анализа рядов коэффициента \bar{C}_{21} (б), \bar{S}_{21} (г)

коэффициентов \bar{C}_{21} и \bar{S}_{21} , т.к. именно эти коэффициенты наиболее подвержены влиянию указанного возмущающего фактора (см. пункт 2.2.4).

Годовая составляющая является доминирующей в рядах LAGEOS+LEO (амплитуды 4,0E-11 и 3,0E-11, соответственно).

Вариации коэффициентов \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , \bar{C}_{20} могут быть вычислены через координаты полюса и вариации продолжительности суток. Для этого сначала необходимо вычислить наблюдаемые возбуждающие функции χ_1^{obs} , χ_2^{obs} , χ_3^{obs} [32]:

$$\chi_1^{obs} = x_p + \frac{\dot{y}_p}{\gamma_e \left(1 - \frac{k_2 \xi}{\gamma_e}\right) \omega}; \quad \chi_2^{obs} = -y_p + \frac{\dot{x}_p}{\gamma_e \left(1 - \frac{k_2 \xi}{\gamma_e}\right) \omega}; \quad \chi_3^{obs} = \Delta LOD. \quad (5.10)$$

Здесь $\gamma_e = 1/305,45$ – динамическое сжатие Земли, $k_2 = 0,3$ – номинальное значение числа Лява второй степени, $\xi = \frac{\omega^2 a_e^3}{GM_\oplus}$, $\omega_\oplus = 7,292115E-5$ – угловая скорость вращения Земли. При этом, долгопериодические приливные эффекты должны быть исключены из рядов ПВЗ, например, по методике, приведенной в Соглашениях МСВЗ 2010 [105].

Затем необходимо вычесть вклад атмосферы и океана χ_i^{atm} , χ_i^{oc} , определяемый из соответствующих моментов инерции [44,45]:

$$\chi_i^{matter} = \chi_i^{obs} - \chi_i^{atm} - \chi_i^{oc}. \quad (5.11)$$

Для определения величин χ_i^{atm} , χ_i^{oc} использовались данные Специального Бюро по Атмосфере МСВЗ²².

На следующем этапе полученные значения χ_i^{matter} преобразуются в вариации коэффициентов гравитационного поля:

²² <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/analysis/excitactive.html>

$$\begin{aligned}\Delta C_{21} &= -(1+k'_2 + \Delta k'_{an}) \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{C-A}{1,098a_e^2 M} \chi_1^{mass}; \\ \Delta S_{21} &= -(1+k'_2 + \Delta k'_{an}) \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{C-A}{1,098a_e^2 M} \chi_2^{mass}; \\ \Delta C_{20} &= -(1+k'_2 + \Delta k'_{an}) \frac{3}{2\sqrt{5}} \frac{C_m}{0,753a_e^2 M} \chi_3^{mass}.\end{aligned}\quad (5.12)$$

В отличие от работ [44,45] в выражениях (5.12) добавлен член $\Delta k'_{an} = -0,021$, учитывающий неэластичность мантии. В выражениях (5.12) $k'_2 = -0,3075$ – нагрузочное число Лява второй степени; $C-A = 2,61E+35 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ – разность полярного и экваториального моментов инерции Земли; $M = 5,9737E+24 \text{ кг}$ – масса Земли; $C_m = 7,1236E+37 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ – момент инерции мантии Земли.

Результаты, полученные с применением приведенной методики (использовались значения ПВЗ из эталонного ряда IERS C04), в сравнении с коэффициентами \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , полученными из комбинированной обработки лазерных наблюдений и из решения JPL(GRACE), приводятся на рисунке 5.17 (величины коэффициентов, полученных из обработки наблюдений GRACE, предварительно исправлены за влияние океанических полюсных приливов). Для непосредственного сравнения полученных из решения рядов коэффициентов ГПЗ необходимо добавить к коэффициентам учтенные на этапе вычисления орбит поправки за атмосферные

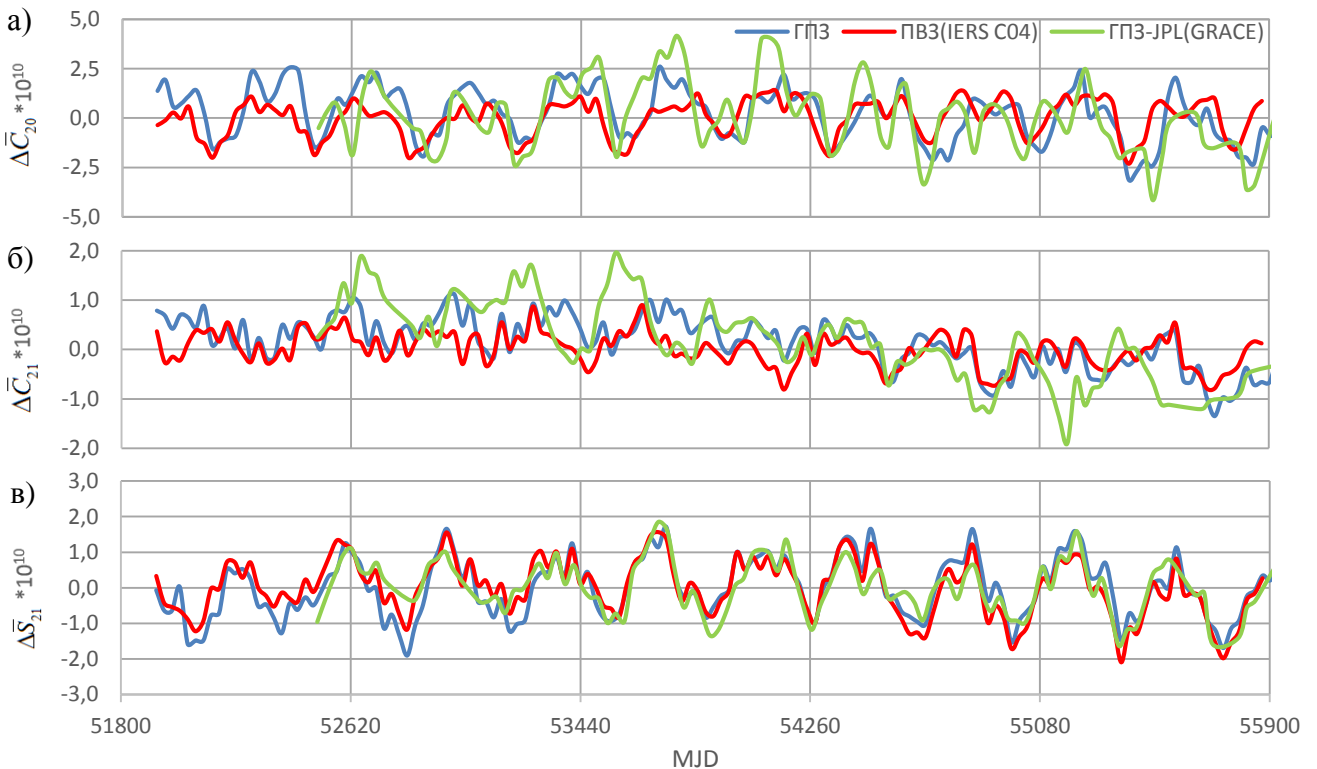


Рисунок 5.17 – Вариации коэффициентов гравитационного поля \bar{C}_{20} (а), \bar{C}_{21} (б), \bar{S}_{21} (в), полученные из обработки лазерных наблюдений (ГПЗ), преобразованные из ПВЗ ряда IERS C04 (ПВЗ(IERS C04)) и полученные из наблюдений GRACE-JPL (ГПЗ-JPL(GRACE))

приливы и неприливные перемещения масс в атмосфере и океанах и затем совместить соответствующие ряды вычитанием из каждого ряда его среднего значения. Представленные результаты позволяют судить о корректном определении вариаций как коэффициентов \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , так и \bar{C}_{20} из обработки лазерных наблюдений.

На рисунке 5.18 представлены ряды коэффициентов \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , полученные в комбинированном решении LAGEOS+LEO, в сравнении с результатами решения RL05 Центра Космических Исследований Техасского Университета (Техас, США), характеристики которого приведены в параграфе 3.2 (на рисунке обозначено как «CSR»). Основное отличие заключается в том, что в решении CSR определялись только коэффициенты гравитационного поля до пятой степени и порядка [49]. Из результатов CSR предварительно были вычтены поправки за атмосферные приливы (по модели BB03) и за перемещения неприливных масс (модель AOD1B), так как эти эффекты не учитывались в данном решении. Разность двух рядов коэффициента \bar{C}_{20} находится в пределах $0,5E-10 \div 1,0E-10$, что может быть обусловлено разными моделями сил при вычислении орбит спутников (в частности, в решении CSR не использовались долгопериодические волны из модели океанических приливов FES2004 [49]). Исходя из представленных результатов можно судить о корректности определения коэффициентов

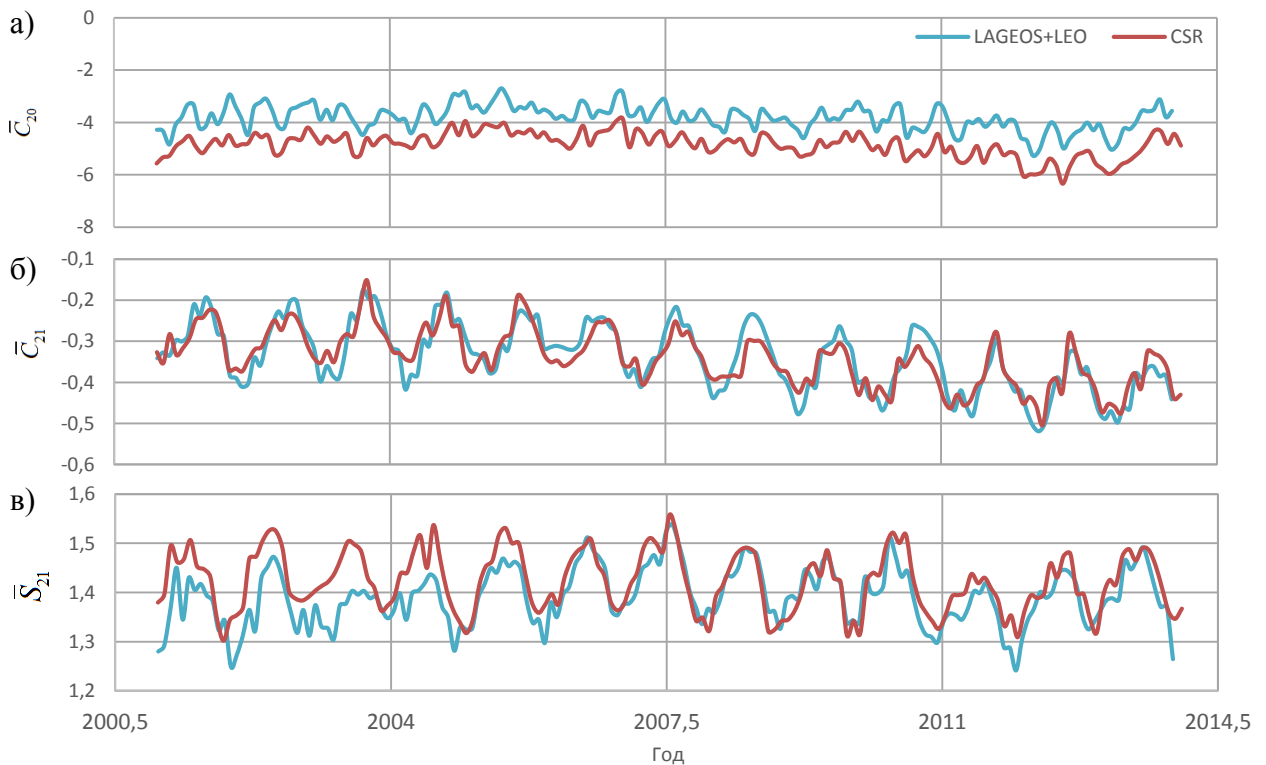


Рисунок 5.18 – Результаты определения коэффициентов \bar{C}_{20} (а), \bar{C}_{21} (б), \bar{S}_{21} (в) в комбинированном решении LAGEOS+LEO в сравнении с результатами CSR

гравитационного поля при совместном определении всего набора геодинимических параметров с привлечением наблюдений низкоорбитальных спутников.

Ряды коэффициентов \bar{C}_{22} и \bar{S}_{22} , полученные различными измерительными средствами, согласуются во временной области друг с другом гораздо лучше, чем \bar{C}_{21} и \bar{S}_{21} (Рисунки 5.19а, 5.19в). Однако в спектральной области для рядов коэффициента \bar{C}_{22} (Рисунок 5.19б), полученных по наблюдениям GRACE, также не выявляется каких-либо явных периодичностей (амплитуды всех сигналов не превосходят $1,0E-11$), в то время как для ряда LAGEOS+LEO доминирующим является годовой сигнал с амплитудой $3,3E-11$. Для рядов коэффициента \bar{S}_{22} амплитуда доминирующего годового сигнала совпадает для всех трех решений ($2,4E-11$). В решении LAGEOS+LEO можно выделить пики с периодами 73, 84, 106 суток для ряда \bar{C}_{22} и 75, 94, 146 суток для ряда \bar{S}_{22} . Данные периоды могут быть соотнесены с периодами обращения восходящего узла и аргумента перицентра орбит соответствующих ИСЗ (см. таблицу 4.1). Таким образом, можно судить о возрастающем влиянии погрешностей вычисления орбит на определяемые коэффициенты гравитационного поля.

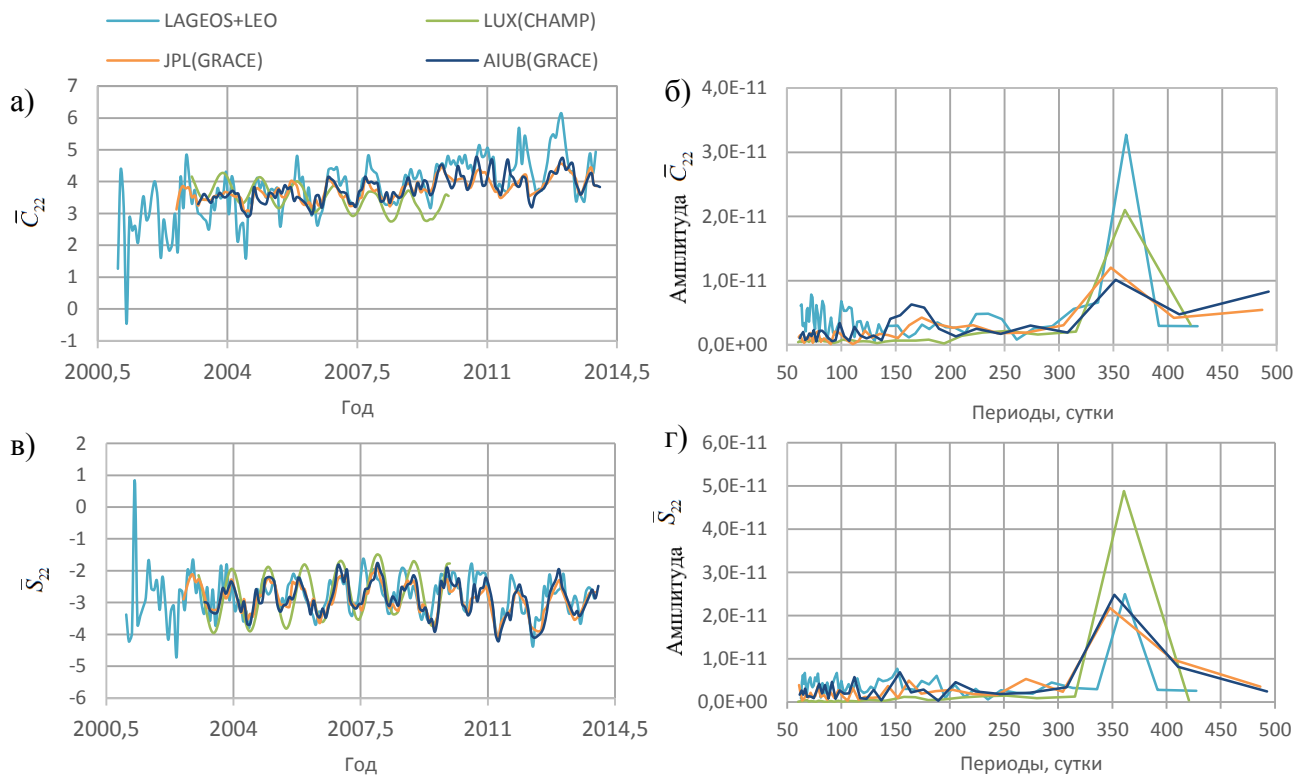


Рисунок 5.19 – Результаты определения коэффициентов \bar{C}_{22} (а), \bar{S}_{22} (в) и результаты спектрального анализа рядов коэффициентов \bar{C}_{22} (б), \bar{S}_{22} (г)

Рассмотрение оставшихся коэффициентов объединим, так как, за некоторым исключением, все эти коэффициенты имеют похожие особенности определения по лазерным наблюдениям указанного набора геодезических ИСЗ. При этом сразу стоит отметить, что в целом согласуются результаты, полученные разными измерительными средствами, для следующих коэффициентов: \bar{C}_{44} , \bar{S}_{32} , \bar{S}_{33} , \bar{S}_{42} , \bar{S}_{43} , \bar{S}_{44} (приведены в Приложении Д).

Для коэффициентов \bar{C}_{31} , \bar{S}_{31} , \bar{C}_{33} , \bar{S}_{41} имеет место систематический сдвиг относительно решений, полученных по GRACE и CHAMP (Рисунки 5.20-5.21). При этом характер изменения самих величин похож для всех рассматриваемых методов наблюдений. По всей видимости, такие особенности связаны с выбранной орбитальной группировкой или особенностями реализации системы координат (фиксация определенного набора станций). Спектрограмма рядов рассматриваемых коэффициентов показывает незначительные амплитуды сигналов, ассоциированные с различными орбитальными периодами (см. таблицу 4.1). При этом, по наблюдениям GRACE и CHAMP невозможно определить временные вариации в коэффициенте \bar{C}_{31} : спектральный анализ не выявил каких-либо существенных амплитуд. В решении LAGEOS+LEO для данного коэффициента единственным ярко выраженным сигналом является

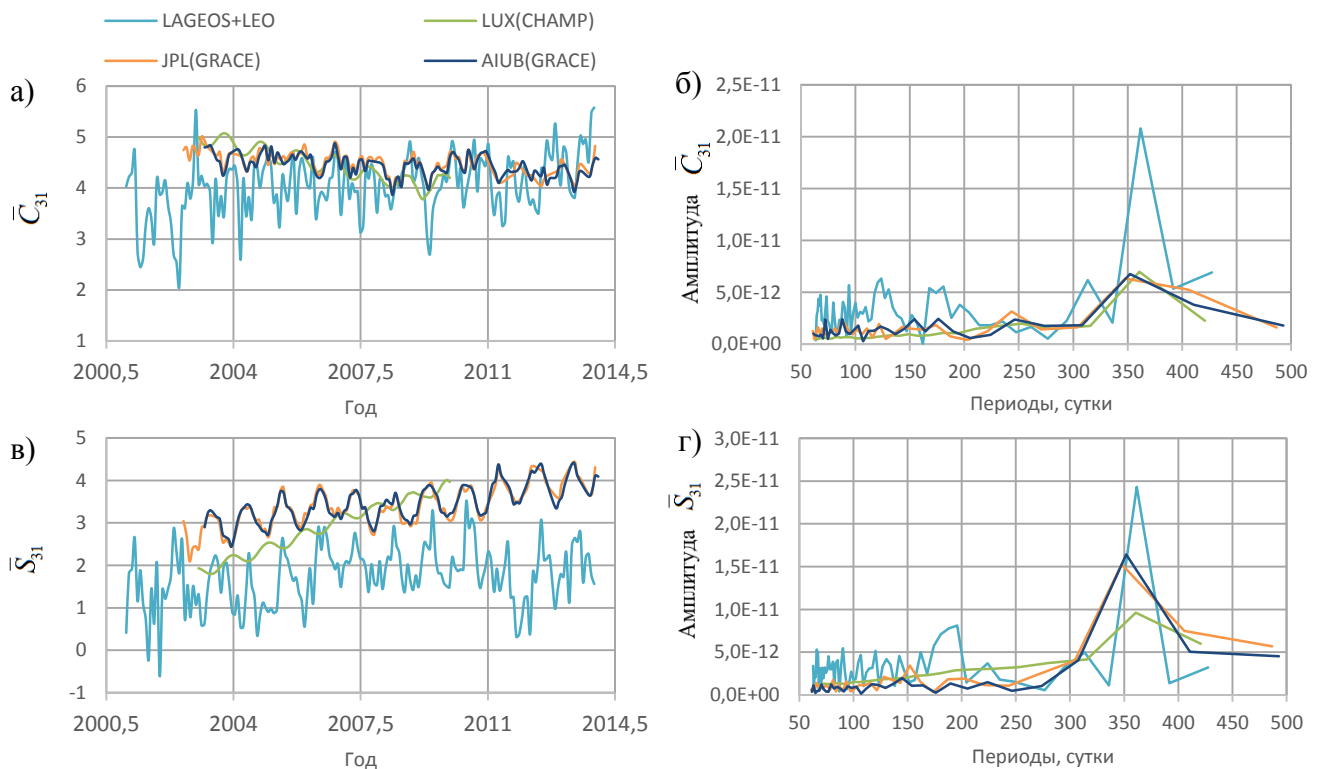


Рисунок 5.20 – Результаты определения коэффициентов \bar{C}_{31} (а), \bar{S}_{31} (в) и результаты спектрального анализа рядов коэффициентов \bar{C}_{31} (б), \bar{S}_{31} (г)

годовой (амплитуда порядка $2E-11$). Результаты спектрального анализа для трех других указанных коэффициентов для решения LAGEOS+LEO и GRACE совпадают.

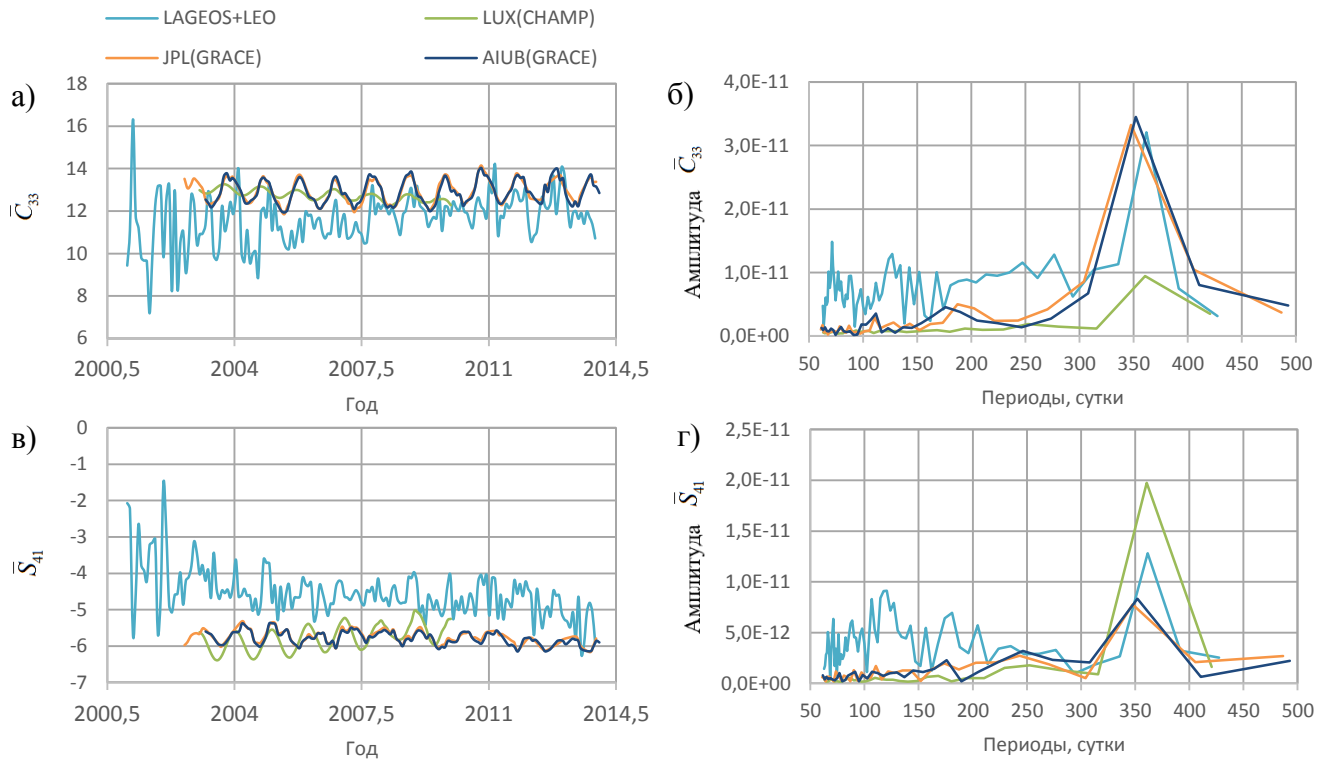


Рисунок 5.21 – Результаты определения коэффициентов \bar{C}_{33} (а), \bar{S}_{41} (в) и результаты спектрального анализа рядов коэффициентов \bar{C}_{33} (б), \bar{S}_{41} (г)

Определение оставшихся коэффициентов ($\bar{C}_{32}, \bar{C}_{41}, \bar{C}_{42}, \bar{C}_{43}$) из обработки лазерных наблюдений выбранного набора спутников имеет свои особенности и сопряжено с определенными трудностями. Спектральный анализ (Рисунки 5.22в, 5.22г, 5.23в, 5.23г) показывает наличие значительных амплитуд составляющих, которые могут быть вызваны как особенностями выбранной орбитальной группировки, так и погрешностями/неточностями при определении орбит выбранных спутников (см. таблицу 4.1). При этом, величины амплитуд для таких сигналов соизмеримы с амплитудами других сигналов. В то же время, характер изменения величин коэффициентов похож для всех решений – отсутствие ярко выраженных временных вариаций (за исключением коэффициента \bar{C}_{41}).

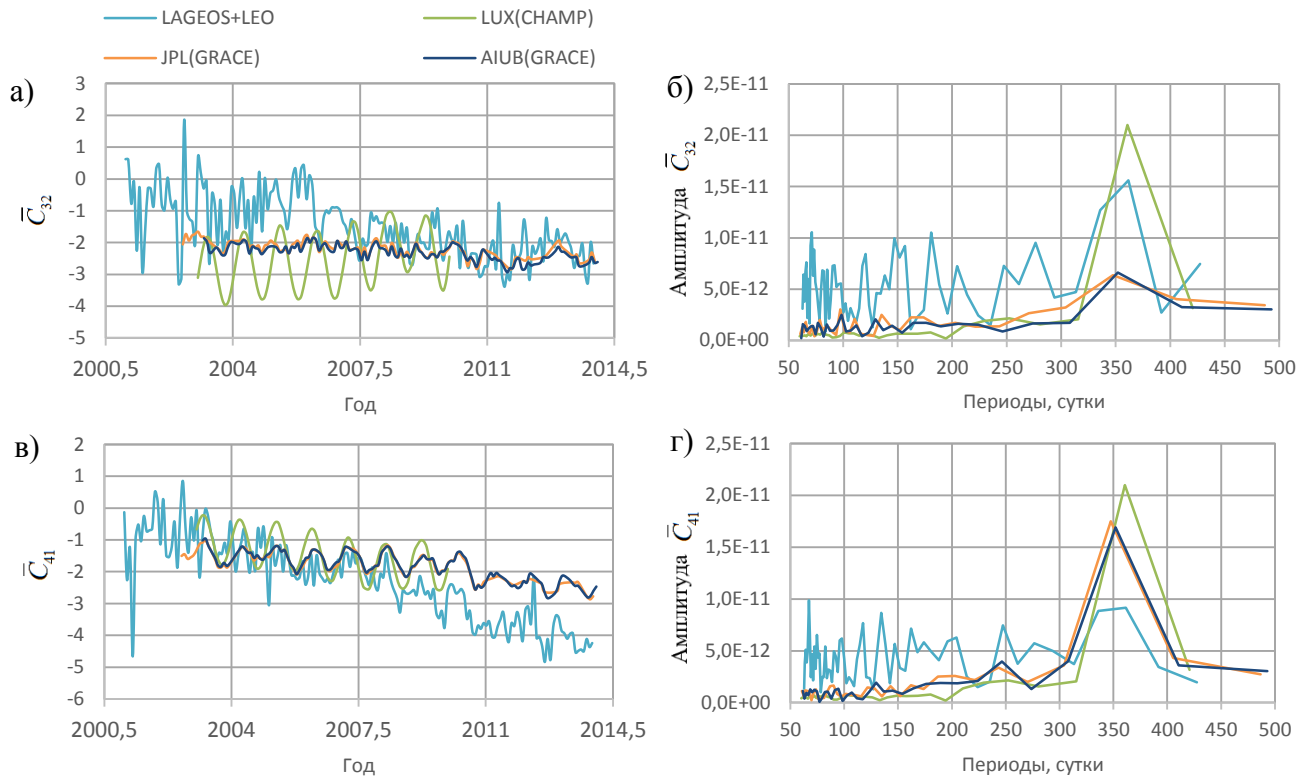


Рисунок 5.22 – Результаты определения коэффициентов \bar{C}_{32} (а), \bar{C}_{41} (в) и результаты спектрального анализа рядов коэффициентов \bar{C}_{32} (б), \bar{C}_{41} (г)

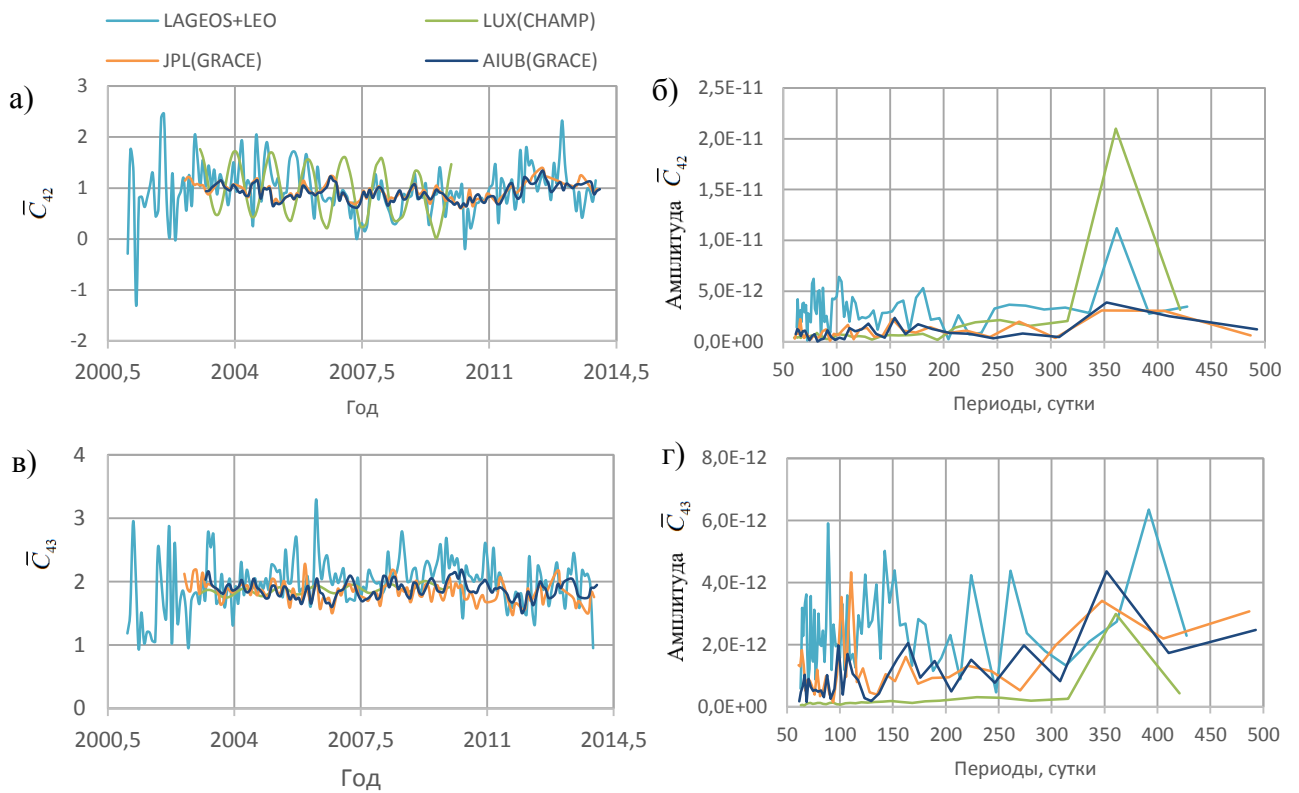


Рисунок 5.23 – Результаты определения коэффициентов \bar{C}_{42} (а), \bar{C}_{43} (в) и результаты спектрального анализа рядов коэффициентов \bar{C}_{42} (б), \bar{C}_{43} (г)

В завершение приведем погрешности определения рассмотренных коэффициентов гравитационного поля Земли. В таблице 5.6 даны апостериорные погрешности определения коэффициентов для всех рассмотренных ранее решений. При этом, для полученного решения LAGEOS+LEO знаком «*» отмечены коэффициенты, уверенно определяемые из обработки лазерных наблюдений выбранной орбитальной группировки.

Таблица 5.6 – Апостериорные погрешности определения коэффициентов ГПЗ из обработки наблюдений CHAMP, GRACE в сравнении с результатами LAGEOS+LEO (единицы 10^{-11})

	CHAMP(LUX)	GRACE(AIUB)	GRACE(JPL)	LAGEOS+LEO
\bar{C}_{20}	1,03	0,84	0,25	0,15*
\bar{C}_{21}	0,90	0,22	0,09	0,28*
\bar{S}_{21}	0,92	0,22	0,09	0,26*
\bar{C}_{22}	1,04	0,33	0,10	0,57*
\bar{S}_{22}	1,09	0,33	0,09	0,52*
\bar{C}_{30}	0,85	0,08	0,06	0,11*
\bar{C}_{31}	0,75	0,08	0,07	0,65*
\bar{S}_{31}	0,75	0,08	0,07	0,60*
\bar{C}_{32}	0,68	0,36	0,11	1,10
\bar{S}_{32}	0,72	0,12	0,11	1,05*
\bar{C}_{33}	0,84	0,25	0,15	1,54*
\bar{S}_{33}	0,84	0,25	0,15	1,48*
\bar{C}_{40}	0,83	0,04	0,05	0,38*
\bar{C}_{41}	0,77	0,04	0,06	0,63
\bar{S}_{41}	0,78	0,04	0,06	0,59*
\bar{C}_{42}	0,67	0,06	0,07	0,50
\bar{S}_{42}	0,69	0,06	0,07	0,47*
\bar{C}_{43}	0,60	0,14	0,11	0,62
\bar{S}_{43}	0,61	0,14	0,11	0,62*
\bar{C}_{44}	0,68	0,31	0,10	0,95*
\bar{S}_{44}	0,68	0,31	0,10	0,97*

Как можно заметить, погрешности для всех рассматриваемых решений хорошо соотносятся между собой. Решения GRACE характеризуются малыми величинами погрешностей, однако при этом некоторые коэффициенты, как показано ранее, невозможно уверенно определить из этих наблюдений (\bar{C}_{20} , \bar{C}_{40}) в виду значительных шумовых составляющих, вызванных действиями приливных волн S_2 и S_I на орбиты спутников GRACE.

Кроме этого, не для всех коэффициентов возможно определить временные вариации из представленных результатов комплекса GRACE (например, \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , \bar{C}_{22} , \bar{C}_{31}). Погрешности определения коэффициентов в решении LAGEOS+LEO находятся на сопоставимом уровне с решениями GRACE. При этом 17 коэффициентов из 21 и их временные вариации определяются уверенно из обработки лазерных наблюдений рассматриваемой орбитальной группировки (для коэффициентов \bar{C}_{31} , \bar{S}_{31} , \bar{C}_{33} , \bar{S}_{41} имеет место систематический сдвиг относительно других рассмотренных решений). Определение ещё 4 коэффициентов (\bar{C}_{32} , \bar{C}_{41} , \bar{C}_{42} , \bar{C}_{43}) из обработки лазерных наблюдений рассматриваемой орбитальной группировки проблематично и связано с определенными трудностями (наличие значительных шумовых составляющих с периодами, равными орбитальным периодам, указанным в таблице 4.3).

5.3 Выводы к главе 5

Комбинирование лазерных наблюдений высоко- и низкоорбитальных спутников, а именно LAGEOS-1/2, AJISAI, Stella, Starlette, позволяет одновременно определять координаты станций, параметры вращения Земли и коэффициенты гравитационного поля (вплоть до четвертой степени и порядка) и повысить точность определения некоторых параметров.

Несмотря на незначительное увеличение погрешностей определения координат станций, существенно повышается стабильность решения (во многом, за счет существенного увеличения числа наблюдений и улучшения геометрии задачи). При этом, для некоторых станций, на которых количество наблюдений спутников LAGEOS-1/2 по техническим причинам невелико, общее количество наблюдений увеличивается в несколько раз, что делает возможным надежное определение их координат.

Комбинированное решение практически не затрагивает координаты полюса (незначительно увеличиваются погрешности определения и отклонения от опорного ряда IERS C04). При этом значительно повышается точность определения вариаций продолжительности суток: достигается снижение среднеквадратических погрешностей и отклонений от эталонного ряда IERS C04 в 5 раз в сравнении со стандартным решением по спутникам LAGEOS-1/2 (в котором определяются только координаты станций и параметры вращения Земли).

Объединение в одном решении лазерных наблюдений выбранных спутников позволяет определять 17 коэффициентов гравитационного поля (из 21 рассмотренных) и их временные вариации. Точность определения этих коэффициентов соотносится с точностью космических комплексов CHAMP и GRACE. При этом, лазерная локация обладает существенным преимуществом при определении коэффициентов \bar{C}_{20} , \bar{C}_{40} в сравнении с проектом GRACE:

отсутствуют шумовые составляющие, вызванные влиянием приливных волн S_2 и S_1 , поэтому данный метод измерений является лучшим средством для определения указанных коэффициентов и изучения их временных вариаций. Полученные в комбинированном решении величины вариаций коэффициентов \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , \bar{C}_{20} совпадают со значениями, вычисленными через координаты полюса и вариации продолжительности суток (через возбуждающие функции). Непосредственно ряды этих коэффициентов совпадают с результатами определения коэффициентов гравитационного поля в Центре Космических Исследований/CSR, полученными из обработки лазерных наблюдений спутников LAGEOS-1/2, Эталон-1/2, AJISAI, Stella, Starlette, BEACON-B (в данном решении определялись только коэффициенты гравитационного поля на месячных интервалах).

В комбинированном решении получены следующие среднеквадратические погрешности определения параметров:

- Трехмерные среднеквадратические погрешности определения координат станций не превосходят 1,5см для большинства станций;
- Средневзвешенные погрешности определения координат полюса составили 0,11мс;
- Существенно повысилась точность определения вариаций продолжительности суток ΔLOD в сравнении с решением только по спутникам LAGEOS-1/2 – с 0,058мс до 0,013мс;
- Средневзвешенные погрешности определения коэффициентов гравитационного поля не превосходят $1,0E-11$.

Необходимо отметить, что для некоторых коэффициентов, определенных из комбинированной обработки лазерных наблюдений, имеют место шумовые составляющие, превосходящие по величине другие сигналы, полученные из спектрального анализа. Периоды этих шумовых составляющих соотносятся с периодами изменения долготы восходящего узла, аргумента перигентра орбит спутников и периодами действия на орбиты некоторых приливных волны (например, S_2 и S_1), что может быть вызвано несколькими причинами:

1. Неточностями моделирования негравитационных эффектов (эффекты, связанные с прямым или косвенным действием солнечного света) и погрешностями используемых моделей гравитационных сил (например, океанических и атмосферных приливов – FES2004 и VB03 соответственно).
2. Неравномерным распределением станций лазерной локации (особенно актуально для южного полушария, где количество станций крайне мало).

3. Особенности выбранной орбитальной группировки. Необходимость и возможность ее дополнения другими спутниками будет исследована.

На основе анализа полученных результатов можно сделать вывод, о возможности совместного определения координат станций, параметров вращения Земли и коэффициентов гравитационного поля из математической обработки лазерных наблюдений спутников LAGEOS-1/2 с привлечением наблюдений низкоорбитальных ИСЗ, а именно AJISAI, Stella, Starlette. При этом определение коэффициентов гравитационного поля возможно до четвертой степени и порядка.

Такой метод определения геодинимических параметров соответствует концепции проекта GGOS о единой планетарной системе и тесной связи между геометрией, вращением Земли и гравитационным полем [104]. Дополнительными преимуществами такого комбинированного решения является существенное повышение точности (примерно в 5 раз) определения вариаций продолжительности суток (преобразуются в поправки к Всемирному времени $\Delta UT1$) и повышение стабильности определения координат станций, особенно актуально в том случае, когда количество наблюдений спутников LAGEOS-1/2 по техническим причинам невелико.

Заключение

В диссертационной работе получены следующие **результаты**:

1. Разработана методика совместного определения орбит геодезических спутников и геодинамических параметров путем комбинирования данных лазерной локации спутников с разными высотами и элементами орбит.
2. Разработаны алгоритмы и программно-вычислительный комплекс для интегрирования орбит ИСЗ (в соответствии с современными стандартами [105]) и определения геодинамических параметров путем математической обработки лазерных наблюдений спутников с разными параметрами орбит.
3. С помощью разработанного программно-вычислительного комплекса исследовано влияние малых возмущающих факторов и нагрузочных эффектов, таких как атмосферные приливы, перемещения неприливных масс в атмосфере и океанах, альbedo Земли, атмосферная неприливая нагрузка, не описанных в действующих Соглашениях МСВЗ 2010 [105], на определяемые геодинамические параметры и орбиты спутников.
4. Выполнено моделирование оптимальной орбиты спутника БЛИЦ-М с целью минимизации влияния атмосферного торможения. Рекомендована орбита с высотой около 2000км.
5. С помощью разработанного программного комплекса получены ряды параметров вращения Земли (с суточным разрешением), координаты 25 станций глобальной сети, в том числе 9 российских лазерных станций, и коэффициентов гравитационного поля до четвертой степени и порядка на 7-суточных интервалах из комбинированной обработки 13-летнего ряда лазерных наблюдений высокоорбитальных (LAGEOS-1/2) и низкоорбитальных ИСЗ (AJISAI, Stella, Starlette). При этом количество нормальных точек в комбинированном решении увеличилось в три раза по сравнению с решением только по спутникам LAGEOS-1/2 (6101973 против 2146304). Сравнительный анализ полученных результатов с результатами международных центров обработки и с классическими решениями, применяемыми при выводе системы координат ITRF, подтвердил достоверность и высокую точность полученных результатов. Погрешности определения координат станций находятся в пределах 1см, погрешность определения координат полюса составила 0,11мс дуги для обоих компонент, погрешность определения поправки к Всемирному времени в комбинированном решении составила 0,013мс, погрешность определения коэффициентов гравитационного поля не превосходит величину $1,0E-11$.

На основе полученных результатов можно сделать следующие **выводы**:

1. Показана возможность совместного высокоточного определения координат станций, параметров вращения Земли и коэффициентов гравитационного поля из комбинированной обработки лазерных наблюдений спутников LAGEOS-1/2 с привлечением лазерных наблюдений низкоорбитальных ИСЗ (AJISAI, Stella, Starlette). Такой подход к определению геодинамических параметров соответствует концепции проекта GGOS о единой планетарной системе и тесной связи между геометрией, вращением Земли и гравитационным полем [104].
2. Применение разработанной методики совместного определения параметров из комбинированной обработки лазерных наблюдений разноорбитальных ИСЗ позволяет существенно, примерно в 5 раз, повысить точность определения поправки к Всемирному времени, а именно, если в комбинированном решении с привлечением наблюдений низкоорбитальных ИСЗ точность составила 0,013мс, то из обработки только спутников LAGEOS-1/2 величина значительно выше – 0,058мс, для среднеквадратических отклонений от эталонного ряда IERS C04 величины составили 0,194 и 1,074мс, соответственно.
3. Привлечение наблюдений низкоорбитальных ИСЗ позволяет повысить стабильность определения координат станций, для которых количество наблюдений спутников LAGEOS-1/2, по техническим причинам, невелико.
4. Показана необходимость привлечения данных лазерной локации низкоорбитальных ИСЗ для определения низкочастотной составляющей гравитационного поля Земли и временных вариаций коэффициентов гравитационного поля в дополнение к результатам таких проектов, как CHAMP, GRACE, GOCE.

Перспективы дальнейшего развития разработанной методики неразрывно связаны с решением следующих задач:

1. Рассмотренную в диссертации методику и созданный программно-вычислительный комплекс «ГеоИС» предполагается в дальнейшем развивать в сторону расширения набора определяемых параметров и повышения точности их определения путем привлечения наблюдений большего числа ИСЗ.
2. Предполагается продолжить работы по спектральному анализу полученных в представленной работе значений коэффициентов гравитационного поля (до 4-ой степени и порядка) с целью выявления их взаимосвязи с вариациями движения геоцентра, уровня Мирового океана, объема ледниковых масс и другими сигналами глобальных изменений.

3. Провести дополнительные исследования с целью повышение точности учета влияния гравитационных (океанические и атмосферные приливы) и негравитационных (эффекты, связанные с прямым и косвенным действием солнечного света) возмущений, а также нагрузочных эффектов (например, учет океанической неприливной нагрузки), на движение ИСЗ с разными параметрами орбит.

Список литературы

1. Баяк О.А. Определение параметров вращения Земли по лазерным наблюдениям ИСЗ ЛАГЕОС-1,2 // Космическая геодезия и современная геодинамика / ред. Масевич А.Г. М.: Издательство МИД РФ. 1996. С. 233-244.
2. Беликов М.В. Метод численного интегрирования с чебышевской аппроксимацией для решения задач эфемеридной астрономии // Препринт ИТА АН СССР. 1990. Т. 4. 36с.
3. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. – М.: Наука, 1984. – 136 с.
4. Гаязов И.С. Определение вариаций положения оси фигуры и центра масс Земли по лазерным наблюдениям спутников ЛАГЕОС // Труды Института прикладной астрономии РАН. 2005. Т. 13. С. 238-249.
5. Гаязов И.С. Использование высокоточных наблюдений геодезических и навигационных ИСЗ для решения задач геодинамики: дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.03.01. – СПб., 2006. – 217 с.
6. Гусев И.В. Разработка методики учета эффектов от приливов в движении ИСЗ: дис. кандидата технических наук: 25.00.32. – М., 2013. – 197 с.
7. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М: Физматлит, 1968. – 799 с.
8. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Часть 5. Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1972. – 413 с.
9. Каула У. Спутниковая геодезия / пер. с англ. П.П. Медведева под ред. Н.П. Грушинского – М.: Мир, 1970. – 172 с.
10. Крылов В.И. Космическая геодезия: учебное пособие. – М.: Репрография МИИГАиК, 2002. – 168 с.
11. Кудрявцев С.М. Высокоточные разложения важнейших функций небесной механики в аналитические ряды и их приложения: дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.03.01. – М., 2006. – 141 с.
12. Масевич А.Г., Татевян С.К. Некоторые результаты советско-французского сотрудничества по космической геодезии // Научные информации, 1977. № 35. С. 5-15.
13. Михайлович Е.В. Методика учёта возмущающих сил и преобразования координат в динамическом методе космической геодезии: дис. кандидата технических наук: 25.00.32. – Новосибирск. 2010. – 133 с.
14. Назаренко А.И. Моделирование космического мусора. – М.: ИКИ РАН, 2013. – 216 с.

15. Сорокин Н.А. Некоторые вопросы исследования возмущенного движения искусственных спутников Земли // *Космическая геодезия и современная геодинамика* / ред. Масевич А.Г. М.: Издательство МИД РФ, 1996. – С. 134-169.
16. Сорокин Н.А. Возмущения от планет Солнечной системы в движении искусственных спутников Земли // *Известия ВУЗов: геодезия и аэрофотосъемка*, 1998. № 2. С. 80-91.
17. Сорокин Н.А. Вычисление полиномов Каннингэма при численном интегрировании уравнений движения ИСЗ // *Изв. ВУЗов: Геодезия и Аэрофотосъемка*, 1998. № 4-5. С. 73-90.
18. Сорокин Н.А. Применение уточненных численных методов при интегрировании уравнений движения ИСЗ // *Изв. ВУЗов: Геодезия и Аэрофотосъемка*, 1998. № 4-5. С. 1-16.
19. Татевян С.К. Эксперимент ISAGEX. Предварительные результаты // *Научные информации*, 1972. № 25. С. 74-81.
20. Татевян С.К., Сорокин Н.А., Самусь Е.А. Вычислительный комплекс программ "Прогноз", его реализация и первые результаты // *Наблюдения ИСЗ*, 1984. № 23. С. 379-397.
21. Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // *Вычислительные методы и программирование*, 2002. № 3. С. 52-81.
22. Урмаев М.С. Орбитальные методы космической геодезии. – М.: Недра, 1981. – 256 с.
23. Чазов ВВ. Разработка и применение алгоритмов численно-аналитического метода вычисления положений искусственных спутников Земли: дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.03.01. – М., 2012. – 210 с.
24. Шуйгина Н.А. Использование VLBI и SLR наблюдений для определения ПВЗ, координат станций и взаимной ориентации систем отсчета: дис. кандидата физ.-мат. наук: 01.03.01. – СПб, 2004. – 113 с.
25. Эбауэр К.В., Сорокин Н.А. Особенности учета гравитационных возмущений от Луны, Солнца и планет Солнечной системы при определении орбит геодезических ИСЗ // *Изв. ВУЗов: Геодезия и Аэрофотосъемка*, 2013. № 1. С. 14-19.
26. Эбауэр К.В., Сорокин Н.А. Высокоточные методы численного интегрирования уравнений движения ИСЗ с чебышевской аппроксимацией для обработки лазерных наблюдений ИСЗ // *Известия ВУЗов: Геодезия и Аэрофотосъемка*. 2013. № 3. С. 3-8.
27. Эбауэр К.В. Исследование возмущенного движения ИСЗ БЛИЦ // *Изв. ВУЗов: Геодезия и Аэрофотосъемка*. 2013. № 5. С. 22-28.

28. Эбауэр К.В. Разработка программного комплекса для обработки высокоточных лазерных наблюдений искусственных спутников Земли (первые результаты) // Труды ИПА РАН. 2013. Т. 27. С. 558-561.
29. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014663125. ГеоИС (Геодинамические Исследования) / Эбауэр К.В.
30. Эбауэр К.В. Исследование влияния периодических эффектов в атмосфере и океанах на геодинамические параметры, определяемые из обработки лазерных наблюдений ИСЗ // Геодезия и Картография. 2015. № 4.
31. Эбауэр К.В. Совместное определение координат станций, параметров вращения Земли и коэффициентов гравитационного поля из комбинированной обработки лазерных наблюдений ИСЗ. Теоретические и практические аспекты // Геодезия и Картография. 2015. № 6 (в печати).
32. Beutler G. *Methods of Celestial Mechanics*. Vol. II. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2005. – pp. 448.
33. Biancale R., Bode A. Mean Annual and Seasonal Atmospheric Tide Models Based on 3-hourly and 6-hourly ECMWF Surface Pressure Data / IERS Workshop on Conventions: 20-21 September 2007. – Paris, 2003.
34. Biancale R and Bode A. Mean Annual and Seasonal Atmospheric Tide Models Based on 3-hourly and 6-hourly ECMWF Surface Pressure Data. Scientific Technical Report STR06/01, GeoForschungsZentrum, Potsdam, 2006. – pp. 33.
35. Bizouard C., Gambis D. The combined solution C04 for Earth Orientation Parameters consistent with International Terrestrial Reference Frame 2008. – Paris: Observatoire de Paris, 2008.
36. Blossfeld M., Muller H., and Angermann D. Adjustment of EOP and gravity field parameters from SLR observations // The 17th ILRS Workshop proceedings. Bad Kotzling, Germany, 2011. – pp. 292-296.
37. Blossfeld M. Satellite Laser Ranging – a tool to realize GGOS? / IAG Scientific Assembly 2013. Potsdam, Germany, 2013.
38. Böhm J., Schuh H. *Atmospheric Effects in Space Geodesy*. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2013. – pp. 234.
39. Bowman B.R., Tobishka W.K., Markos F.A., Huang C.Y., Lin C.S., and Burke W.J. A New Empirical Thermospheric Density Model JB2008 Using New Solar and Geomagnetic Indices / AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Honolulu, 2008.
40. Brockmann E. *Combination of Solution for Geodetic and Geodynamic Applications of the Global Positioning System (GPS)*. – Zurich: Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, 1997. – pp. 213.

41. Bruinsma S.L., Sanchez-Ortiz N., Olmedo E., and Guizarro N. Evaluation of the DTM-2009 thermospheric model for benchmarking purposes // *J. Space Weather Space Clim.*, 2012. Vol. 2. P. A04.
42. Burmistrov V., Vasiliev V., Parkhomenko N., Shargorodskiy V. New Russian Systems for SLR, Angular Measurements and Photometry // *The 15th ILRS Workshop proceedings*. Canberra, Australia. 2006. – pp. 365-369.
43. Carrere L., Lyard F. Modeling the barotropic response of the global ocean to atmospheric wind and pressure forcing - comparison with observations // *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 6, No. 1275, 2003. P. 30.
44. Chen J., Wilson C. Low degree gravitational changes from Earth rotation and geophysical models // *J. Geophys. Res.*, 2003. Vol. 30, No. 24. P. 2257.
45. Chen J., Wilson C. Low degree gravity changes from GRACE, Earth rotation, geophysical models, and satellite laser ranging // *J. Geophys. Res.*, 2008. Vol. 113, No. B06402
46. Chen J., Wilson C., and Seo K.W. S2 tide aliasing in GRACE time-variable gravity solutions // *J. Geod.*, 2009. Vol. 83. pp. 679-687.
47. Cheng M.K., Shum C.K., Eanes R.J., Schutz B.E., and Tapley B.D. Observed temporal variations in the Earth's gravity field from 16-years of Starlette orbit analysis // *From Mars to Greenland: Charting Gravity With Space and Airborne Instruments*. IAG Symp, 1992. Vol. 110. pp. 88-91.
48. Cheng M.K., Shum C.K., and Tapley B.D. Determination of long-term changes in the Earth's gravity field from satellite laser ranging observations // *J. Geophys. Res.*, 1997. Vol. 102, No. B10. pp. 22377-22390.
49. Cheng M., Ries J.C., and Tapley B.D. Variations of the Earth's figure axis from satellite laser ranging and GRACE // *J. Geophys. Res.*, 2011. Vol. 116, No. B01409.
50. Ciufolini I., Paolozzi A., Pavlis E.C., Ries J.C., Koenig R., Matzner R.A., Sindoni G., and Neumayer H. Towards a One Percent Measurement of Frame Dragging by Spin with Satellite Laser Ranging to LAGEOS, LAGEOS 2 and LARES and GRACE Gravity Models // *Space Science Reviews*, 2009. Vol. 148, No. 1-4. pp. 71-104.
51. Cunningham L.E. On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed During the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite // *Celestial Mechanics*, 1970. Vol. 2. pp. 207-216.
52. Dach R., Bock H., Jaggi A., Lutz S., Meindl M., Meyer U., Orliac E., Ostini L., Prange L., Schaer S., et al. Support from the Bernese Software for the EUREF–Reprocessing / *7th EUREF Local Analysis Centres Workshop*, Warsaw, Poland, 2010.
53. Degnan J. Millimeter Accuracy Satellite Laser Ranging: A review // *Contributions of Space Geodesy to Geodynamics* / Smith D.E., Turcotte D.L. (eds.). 1993. Vol. 25. pp. 133-162.

54. Desai S.D. Observing the Pole tide with Satellite Altimetry // *J. Geophys. Res.*, 2002. Vol. 107, No. C11. pp. 7-1-7-13.
55. Ditmar P., Teixeira da Encarnacao J., and Farahani H. Understanding data noise in gravity field recovery on the basis of inter-satellite ranging measurements acquired by the satellite gravimetry mission GRACE // *Journal of Geodesy*, 2012. Vol. 86, No. 6. pp. 441-465.
56. Doodson A.T. The Harmonic Development of the Tide-Generating Potential // *Proceedings of the Royal Society*, 1922. A, Vol. 100. pp. 305-329.
57. Dow J.M., Duque P., and Merino M.R. Global geodynamics from Lageos and Starlette combination solutions // *Adv. Space Res.*, 1991. Vol. 11, No. 6. pp. (6)119-6(124).
58. Drob. D.P., Emmert J.T., Crowley G., Picone J.M., Shepherd G.G., Skinner W., Niciejewski M.J., Niciejewski R.J., Larsen M., She C.Y., et al. An Empirical Model of the Earth's Horizontal Wind Field: HWM07 // *J. Geophys. Res.*, 2008. Vol. 113, No. A12304.
59. Everhart E. Implicit Single Sequence-Methods for Integrating Orbits // *Celestial Mechanics*, 1974. Vol. 10. pp. 35-55.
60. Farahani H. Modelling the Earth's static and time-varying gravity field using a combination of GRACE and GOCE data. M.S. thesis. Technische Universiteit of Delft, 2013. – pp. 197.
61. Fehringer M., Andre G., Lamarre D., and Maeusli D. A Jewel in ESA's Crown: GOCE and its Gravity Measurements Systems // *ESA bulletin*, 2008. Vol. B133. pp. 14-23.
62. Fey A. L., Gordon D., Jacobs C. S. The Second Realization of the International Celestial Reference Frame by Very Long Baseline Interferometry / *IERS Technical Note 35*. – Frankfurt am Main, 2009.
63. Flechtner F., Thomas M., Konig R. A long-term model for non-tidal atmospheric and oceanic mass redistributions and its implications on LAGEOS-derived solutions of Earth oblateness. *Scientific Technical Report 08/12*, Potsdam, 2008. – pp. 25.
64. Flechtner F., Dobslaw H., Fagiolini E.. AOD1B Product description Document for Product Release 05. Potsdam, 2014.
65. Folkner W. M., Williams J. G., Boggs D. H. The Planetary and Lunar Ephemeris DE 421 // *The Interplanetary Network Progress Report*, 2009. Vol. 42-178. pp. 1-34.
66. Fu L., Cazenave A. *Satellite altimetry and earth sciences: a handbook of techniques and applications*. – Academic Press, 2000. – pp. 463.
67. Gibbs B.P. *Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling*. – New Jersey: Wiley, 2011. – pp. 632.

68. Groten E. The motion of the Earth // Landolt-Börnstein - Group V Geophysics, 1984. Vol. 2, No. a. pp. 9-46.
69. Han S.C., Jekeli C., and Shum C.K. Time-variable aliasing effects of ocean tides, atmosphere and continental water mass on monthly mean GRACE gravity field // J. Geophys. Res., 2004. Vol. 109, No. B04403. pp. 1-10.
70. Heiskanen W., Moritz H. Physical geodesy. – San Francisco: Freeman and Company, 1967. – pp. 364.
71. Resolutions of the XVIII General Assembly of the International Association of Geodesy, Hamburg, Germany, August 15-27, 1983 // J. Geod., 1984. Vol. 58, No. 3. pp. 309-323.
72. Iorio L. Satellite laser ranging and general relativity: Ph.D. thesis. 2001.
73. Jacchia L.G. Static Diffusion Models of the Upper Atmosphere with Empirical Temperature Profiles // Smithson. Astrophys. Obs. Spec. Rept. No. 170, 1964.
74. Jacchia L.G. Revised Static Models of the Thermosphere and Exosphere with Empirical Temperature Profiles // Smithson. Astrophys. Obs. Spec. Rept. No. 332, 1971.
75. Jacchia L.G. Thermospheric Temperature, Density, and Composition: New Models // Smithson. Astrophys. Obs. Spec. Rept. No. 375, 1977.
76. Jaggi A., Sosnica K., Thaller D., and Beutler G. Validation and estimation of low-degree gravity field coefficients using LAGEOS // The 17th ILRS Workshop proceedings. Bad Kötzing, Germany, 2011. pp. 302-305.
77. Knocke P., Ries J.C., and Tapley B.D. Earth radiation pressure effects on satellites / AIAA/AAS Astrodynamics Conference, 1988.
78. Lambeck K. Determination of the Earth's Pole of Rotation from Laser Ranging Observations to Satellites // Bull. Geod., 1971. Vol. 101. pp. 263-281.
79. Lemoine F., Klosko S., Cox C., and Johnson T. Time-variable gravity field from SLR and DORIS tracking // The 15th ILRS Workshop proceedings. Canberra, Australia, 2006. – pp. 48-54.
80. Lemoine F., Rowlands D., Pavlis D., Luthcke S., McCarthy J., Zelensky N., Chinn D., Macmillan D., and Le Bail K. GEODYN & Multitechnique Processing for the Reference Frame / Combination at the Observation Level, IERS Working Group. Warsaw, Poland, 2009.
81. Lerch F.J., Klosko S.M., Patel G.B., and Wagner C.A. A Gravity Model for Crustal Dynamics (GEM-L2) // J. Geophys. Res., 1985. Vol. 90, No. B11. pp. 9301-9311.
82. Lichten S.M. A High Precision GPS Data Processing System and General Satellite Orbit. Chicago, Illinois, 1999.

83. Lyard F., Lefevre F., Letellier T., and Francis O. Modeling the Global Ocean Tides: Modern Insights from FES2004 // *Ocean Dynamics*, 2006. Vol. 56. pp. 394-415.
84. Marini J.W. and Murray C.W. Correction of laser range tracking data for atmospheric refraction at elevations above 10 degrees. Greenbelt, 1973.
85. Mathews P.M., Dehant V., and Gipson J.M. Tidal station displacement // *J. Geophys. Res.*, 1997. Vol. 102. No. B9. pp. 20469-20477.
86. Matsuo K., Chao B., Otsubo T., and Heki K. Accelerated ice mass depletion revealed by low-degree gravity field from satellite laser ranging: Greenland, 1991-2011 // *Geophys. Res. Lett.*, 2013. Vol. 40.
87. Matsuo K., Otsubo T. Temporal variations in the Earth's gravity field from multiple SLR satellites: Toward the investigation of polar ice sheet mass balance // *The 18th ILRS Workshop proceedings*. Fujiyoshida, Japan, 2013.
88. Mayer-Gurr T. ITG-Grace03s: The latest GRACE gravity field solution computed in Bohn. / *Joint International GSTM and DFG SPP Symposium*. Potsdam, 2007.
89. McCarthy D.D. (ed.). *IERS Technical Note 21*, 1996. – pp. 96.
90. McCarthy D.D., Petit G. (eds.). *IERS Conventions 2003*. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2004. – pp. 127.
91. Mendes V.B., Prates G., Pavlis E.C., Pavlis D.E., and Langley R.B. Improved Mapping Functions for Atmospheric Refraction Correction in SLR // *Geophys. Res. Lett.*, 2002. Vol. 29(10), No. 1444.
92. Mendes V.B., Pavlis E.C. High-accuracy zenith delay prediction at optical wavelength // *Geophysical Research Letters*, 2004. Vol. 31, No. L14602.
93. Meyer U., Jaggi A., and Beutler G. Monthly gravity field solutions based on GRACE observations generated with the CElestial Mechanics Approach. // *Earth and Planetary Science Letters*, 2012. Vol. 345, No. 72.
94. Mironov N.A., Zaharov A., and Tchebotarev V. ETALON-1, -2 Center of Mass Correction and Array Reflectivity // *The 8th ILRS Workshop proceedings*. Annapolis, USA, 1993.
95. Montenbruck O., Gill G. *Satellite Orbits: Models, Methods and Applications*. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. – pp. 370.
96. Moyer T.D. *Formulation for Observed and Computed Values of Deep Space Network Data Types for Navigation*. Wiley-Interscience, 2003. – pp. 576.

97. Nerem R.S., Chao B.F., Au A.Y., Chan J.C., Klosko S.M., Pavlis N.K., and Williamson R.G. Temporal variations of the Earth's gravitational field from satellite laser ranging to Lageos // *Geophys. Res. Lett.*, 1993. Vol. 20, No. 7. pp. 595-598.
98. Otsubo T., Appleby G.M. System-dependent center-of-mass correction for spherical geodetic satellites // *J. Geophys. Res.*, 2003. Vol. 108, No. B4.
99. Otsubo T., Kubo-oka T., Gotoh T., and Ichikawa R. Atmospheric "Blue sky" eddects on SLR station coordinates // *The 14th ILRS Workshop proceedings*. San Fernando, Spain, 2004.
100. Pavlis E., Ciufolini I., and Paolozzi A. LARES: A new ASI mission to improve the measurement of Lense-thirring effect with satellite laser ranging. // *Proceedings of the Journees 2011 Systemes de reference spatio-temporels*. Vienna, 2011. – pp. 252-255.
101. Pavlis E., Luceri V., Sciarretta C., and Kelm R. The ILRS contribution to ITRF2008 // *Analysis and results of ITRF2008*. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts fur Kartographie und Geodasie, 2012.
102. Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., and Factor J.K. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. // *Geophysical Research Abstracts*, 2008. Vol. 10, No. EGU2008-A-01891.
103. Pearlman M.R., Degnan J.J., and Bosworth J.M. The International Laser Ranging Service // *Advances in Space Research*, 2002. Vol. 30, No. 2. pp. 135-143.
104. Pearlman M., Plag H. *Global Geodetic Observing System: Meeting the requirements of a Global Society on a Changing Planet in 2020*. Berlin: Springer, 2009. – pp. 291.
105. Petit G., Luzum B. (eds.). *IERS Conventions 2010*. – Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts fur Kartographie und Geodasie, 2010. – pp. 180.
106. Picone J.M., Hedin A.E., and Drob D.P. NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: Statistical comparisons and scientific issues // *J. Geophys. Res.*, 2002. Vol. 107, No. A12. pp. 15-1-15-16.
107. Prange L. *Global Gravity Field Determination Using the GPS Measurements Made Onboard the Low Earth Orbiting Satellite CHAMP*. – Zurich: Swiss Geodetic Commission, 2011. – Vol. 81. – pp. 214.
108. Ray R.D., Ponte R.M. Barometric Tides from ECMWF Operational Analyses // *Annales Geophysicae*, 2003. Vol. 21. pp. 1897-1910.
109. Reigber C., Schwintzer P., and Luhr P. The CHAMP geopotential mission // *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, 199. Vol. 40, No. 3-4. pp. 285-289.
110. Rodriguez Solano C.J. *Impact of albedo modelling on GPS orbits: master thesis*. Munich, 2009.

111. Rothacer M. The Special Role of SLR for Inter-Technique Combinations // ILRS Workshop 2003. Bad Koetzting, Germany, 2003.
112. Saastamoinen J. Contributions to the theory of atmospheric refraction, part II. Refraction corrections in satellite geodesy // *Bull. Geod.*, 1973. Vol. 107. pp. 13-24.
113. Schutz B.E., Cheng M.K., Shum C.K., Eanes R.J., and Tapley B.D. Analysis of earth rotation solutions from Starette // *J. Geophys. Res.*, 1989. Vol. 94, No. B8. pp. 10167-74.
114. Schwiderski E.W. Ocean tides, part I: Global ocean tidal equations // *Marine Geodesy*, 1980. Vol. 3, No. 1. pp. 161-217.
115. Seeber G. *Satellite Geodesy*. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2003. – pp. 593.
116. Seo K.W., Wilson C.R., Han S.C., and Walisher D.E. Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) alias error from ocean tides // *J. Geophys. Res.*, 2008. Vol. 113, No. B03405. pp. 1-10.
117. Shapiro I.I. Fourth Test of General Relativity // *Physical Review Letters*, 1964. Vol. 13. pp. 789-791.
118. Sideris GM (ed.). *Observing our Changing Earth*. Vol 133. – Springer, 2009. – pp. 864.
119. Tapley B.D., Eanes R.J., and Schutz B.E. UT/CSR analysis of Earth rotation from Lageos SLR data // *Proceedings of the International Conference on Earth rotation and the terrestrial reference frame*. Columbus, USA, 1985. pp. 111-125.
120. Tapley B.D., Ries J.C., Davis G.W., Schutz R.G., Eanes R.J., Shum C.K., and Watkins M.M. Precision Orbit Determination for TOPEX/POSEIDON // *J. Geophys. Res.*, 1994. Vol. 99, No. C12. pp. 24383-24404.
121. Tapley B.D., Bettadpur S., Watkins M., and Reiber C. The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results // *Geophysical Research Letters*, 2004. Vol. 31, No. L09607.
122. Thaller D. Inter-technique combination based on homogeneous normal equation systems including station coordinates, Earth orientation and troposphere parameters. Scientific Technical Report STR08/15, 2008. – pp. 136.
123. Thaller D., Dach R., Seitz M., Beutler G., Mareyen M., and Richter B. Combination of GNSS and SLR observations using satellite co-locations // *J. Geod.*, 2011. Vol. 85. pp. 257-272.
124. van Dam T.M., Blewitt G., and Heflin M.B. Atmospheric pressure loading effects on Global Positioning System coordinate determinations // *J. Geophys. Res.*, 1994. Vol. 99, No. B12.

125. Vasiliev V., Shargorodsky V., and Parkhomenko N. BLITS: The first autonomous zero-signature satellite in orbit // The 17th ILRS Workshop proceedings. Bad Kötzing, Germany, 2011. – pp. 188-190.
126. Wahr J. The Earth's C21 and S21 gravity coefficients and the rotation of the core // J. Roy. astr. Soc., 1987. Vol. 88. pp. 265-276.
127. Wahr J. Corrections and update to "The Earth's C21 and S21 gravity coefficients and the rotation of the core" // Geophys. J. Int., 1990. Vol. 101. pp. 709-711.
128. Watkins M., Gross M., Tapley B., Bettadpur S., Flechtner F., Doll B., Munder J., Reigber C., and Raimondo J.C. GRACE Follow-On Mission Status / AIAA Space 2010 Conference & Exposition: 'Future Earth Science Missions and Enabling Activities. Anaheim CA, USA, 2010.
129. Watkins M., Yuan D.H. GRACE. JPL Level-2 Processing Standards Document. For Level-2 Product Release 05, Pasadena, USA, 2012.
130. Weigelt M., van Dam T., Jaggi A., Prange L., Tourian M., Keller W., and Sneeuw N. Time-variable gravity signal in Greenland revealed by high-low satellite-to-satellite tracking. // J. Geophys. Res., 2013. Vol. 118. pp. 3848-3859.
131. Wermuth MK. Gravity Field Analysis from the Satellite Missions CHAMP and GOCE. Ph.D. thesis, 2008.
132. Wielicki B., Barkstrom B., Harrison E., Lee R., Smith G., and Cooper J. Clouds and the Earth's Radiant Energy System (CERES): an Earth observing system experiment. // Bulletin of the American Meteorological Society, 1996. Vol. 77, No. 5. pp. 853-868.
133. Williamson R.G. Starlette Geodynamics: The Earth's Tidal Response // J. Geophys. Res., 1985. Vol. 90, No. B11. pp. 9346-9352.
134. Xu G. Sciences of Geodesy-I. – London, New York: Springer, 2010. – pp. 487.
135. Yi W., Murbock M., Rummel R., and Gruber T. Performance analysis of GOCE gradiometer measurements // Proceedings of the ESA Living Planet Symposium. Bergen, Norway. 2010. Vol. SP-686.
136. Yu J., Wan X. The frequency analysis of gravity gradientz and the methods of filtering processing // Proceedings of 4th International GOCE User Workshop. Munich, Germany, 2011.

Приложение А

Таблица ПА.1 – Главные и дополнительные приливные волны модели океанических приливов FES2004 [105]. Жирным шрифтом отмечены главные волны, по которым выполняется интерполяция по формуле (2.21).

Номер волны (по Дудсону)	Амплитуда H_f , м	Главная волна 1	Главная волна 2	Частота $\dot{\theta}$, °/час
56.554	-0,00492			0,04106668
57.555	-0,03100			0,08213728
58.554	-0,00181	57.555	65.455	0,12320396
63.655	-0,00673	57.555	65.455	0,47152105
65.445	0,00231	57.555	65.455	0,54216830
65.455	-0,03518			0,54437471
65.465	0,00229	65.455	75.555	0,54658111
65.555	-0,00375	65.455	75.555	0,54901652
65.655	0,00188	65.455	75.555	0,55365833
73.555	-0,00583	65.455	75.555	1,01589576
75.355	-0,00288	65.455	75.555	1,08874941
75.555	-0,06663			1,09803304
75.565	-0,02762	75.555	85.455	1,10023945
75.575	-0,00258	75.555	85.455	1,10244585
83.655	-0,00242	75.555	85.455	1,56955409
83.665	-0,00100	75.555	85.455	1,57176050
85.455	-0,01276			1,64240775
85.465	-0,00529	85.455	93.555	1,64461415
93.555	-0,00204			2,11392880
95.355	-0,00169	85.455	93.555	2,18678245
117.655	-0,00194	135.455	145.555	12,38276513
125.755	-0,00664	135.655	145.555	12,85428619
127.555	-0,00802	135.655	145.555	12,92713984
135.645	-0,00947	135.655	145.555	13,39645449
135.655	-0,05020			13,39866089
137.445	-0,00180	135.655	145.555	13,46930814

Продолжение таблицы ПА.1

137.455	-0,00954	135.655	145.555	13,47151455
145.545	-0,04946	135.655	145.555	13,94082919
145.555	-0,26221			13,9430356
145.755	0,00170	145.555	165.555	13,95231923
147.555	0,00343	145.555	165.555	14,02517288
153.655	0,00194	145.555	165.555	14,41455665
155.455	0,00741	145.555	165.555	14,48741031
155.555	-0,00399	145.555	165.555	14,49205212
155.655	0,02062	145.555	165.555	14,49669393
155.665	0,00414	145.555	165.555	14,49890034
157.455	0,00394	145.555	165.555	14,56954759
162.556	-0,00714	145.555	165.555	14,91786468
163.555	-0,12203			14,95893136
165.545	-0,00730	145.555	165.555	15,03886223
165.555	0,36878			15,04106864
165.565	0,05001	145.555	165.555	15,04327505
166.554	0,00293	145.555	165.555	15,08213532
167.555	0,00525	145.555	165.555	15,12320592
173.655	0,00395	145.555	165.555	15,51258969
175.455	0,02062	145.555	165.555	15,58544335
175.465	0,00409	145.555	165.555	15,58764975
183.555	0,00342	145.555	165.555	16,0569644
185.355	0,00169	145.555	165.555	16,12981805
185.555	0,01129	145.555	165.555	16,13910168
185.565	0,00723	145.555	165.555	16,14130809
195.455	0,00216	145.555	165.555	16,68347639
225.855	0,00180	235.755	245.655	27,35098012
227.655	0,00467	235.755	245.655	27,42383377
235.755	0,01601			27,89535483
237.555	0,01932	235.755	245.655	27,96820848
245.555	-0,00389	237.755	245.655	28,43508772
245.645	-0,00451	237.755	245.655	28,43752313
245.655	0,12099			28,43972953

Продолжение таблицы ПА.1

247.455	0,02298	245.655	255.555	28,51258319
253.755	-0,00190	245.655	255.555	28,91125059
254.556	-0,00218	245.655	255.555	28,94303756
255.545	-0,02358	245.655	255.555	28,98189783
255.555	0,63192			28,98410424
256.554	0,00192	255.555	275.555	29,02517092
263.655	-0,00466	255.555	275.555	29,45562529
265.455	-0,01786	255.555	275.555	29,52847895
265.555	0,00359	255.555	275.555	29,53312076
265.655	0,00447	255.555	275.555	29,53776257
265.665	0,00197	255.555	275.555	29,53996898
272.556	0,01720	255.555	275.555	29,95893332
273.555	0,29400			30,00000000
274.554	-0,00246	255.555	275.555	30,04106668
275.555	0,07996			30,08213728
275.565	0,02383	255.555	275.555	30,08434369
275.575	0,00259	255.555	275.555	30,08655009
285.455	0,00447	255.555	275.555	30,62651199
285.465	0,00195	255.555	275.555	30,62871839

Приложение Б

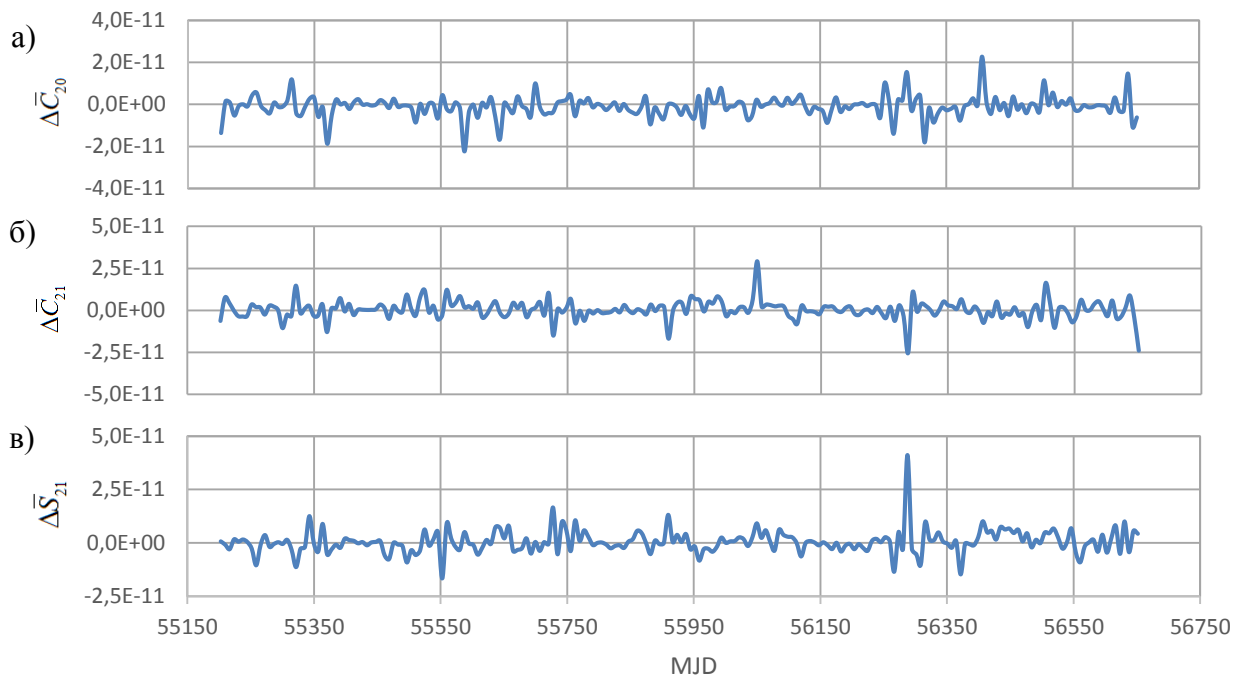


Рисунок ПБ.1 – Влияние эффекта альbedo на величины коэффициентов геопотенциала \bar{C}_{20} (а), \bar{C}_{21} (б), \bar{S}_{21} (в) (разности между решением, полученным с учетом эффекта альbedo, и стандартным решением)

Таблица ПБ.1 – Средневзвешенные СКП определения коэффициентов геопотенциала \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} и остаточные орбитальные невязки для спутников LAGEOS-1/2, полученные с учетом эффекта альbedo, в сравнении со стандартным решением STD

		STD	CERES
Средневзвешенные СКП величин	\bar{C}_{20}	0,83E-11	0,83E-11
	\bar{C}_{21}	2,30E-11	2,20E-11
	\bar{S}_{21}	2,42E-11	2,41E-11
Невязка, мм	LAGEOS-1	22,8	22,7
	LAGEOS-2	21,1	21,1

Приложение В

Таблица ПВ.1 – СКП определения координат станций (горизонтальная и вертикальная составляющие) с учетом разных моделей атмосферной нагрузки в сравнении со стандартным решением СТД (в мм)

Номер станции	Тип решения													
	СТД		GGFC				VIENNA				GSFC			
	H	V	H	GGFC/СТД	V	GGFC/СТД	H	VIENNA/СТД	V	VIENNA/СТД	H	GSFC/СТД	V	GSFC/СТД
1824	10,5	4,3	10,6	1	4,4	2	10,6	1	4,4	1	10,5	1	4,4	1
1873	14,0	6,1	14,1	1	6,1	0	14,1	1	6,1	0	14,1	0	6,1	0
1886	8,1	3,8	8,1	1	3,8	0	8,2	1	3,8	1	8,1	1	3,8	0
1893	10,5	3,7	10,8	3	3,7	-1	10,5	0	3,7	0	10,8	3	3,7	-1
7119	6,1	3,1	6,1	0	3,1	1	6,1	0	3,1	1	6,1	0	3,1	1
7124	7,0	3,6	7,1	2	3,6	2	7,1	1	3,6	1	7,1	2	3,6	1
7237	6,3	2,7	6,4	1	2,7	1	6,4	1	2,8	1	6,3	0	2,7	0
7249	13,0	22,9	12,9	0	22,9	0	12,9	0	22,9	0	12,8	-1	22,8	-1
7308	7,2	11,7	7,3	1	11,8	0	7,3	1	11,8	0	7,3	0	11,7	0
7358	9,8	4,7	9,7	-1	4,6	-1	9,7	-1	4,6	-1	9,5	-3	4,5	-3
7359	9,6	5,0	9,6	0	5,0	0	9,6	0	5,0	0	9,7	1	5,0	1
7403	8,7	15,5	8,7	0	15,6	0	8,7	0	15,6	0	8,7	0	15,6	0
7405	5,1	2,2	5,2	1	2,3	0	5,2	1	2,3	1	5,2	1	2,3	0
7406	6,1	8,8	6,1	0	8,8	0	6,2	0	8,8	0	6,1	0	8,8	0
7821	9,2	16,4	9,3	0	16,5	0	9,2	0	16,5	0	9,2	0	16,4	0
7822	7,4	3,4	7,3	-1	3,3	-1	7,3	-1	3,3	-1	7,3	-1	3,3	-1
7824	10,3	4,5	10,4	1	4,5	1	10,4	1	4,5	1	10,4	0	4,5	0
7838	5,1	2,2	5,1	1	2,2	0	5,2	1	2,2	1	5,1	0	2,2	0
7841	5,9	2,3	6,0	2	2,3	1	5,9	1	2,3	1	6,0	1	2,3	1
7845	4,5	6,9	4,5	0	7,0	1	4,5	1	6,9	1	4,5	0	7,0	1

Приложение Г

Таблица ПГ.1 – Правила преобразований коэффициентов гравитационного поля, применяемые в главе 5.

Коэффициент	Правило преобразования
\bar{C}_{20}	$(\bar{C}_{20} + 0,000484169)*10^{10}$
\bar{C}_{21}	$\bar{C}_{21} * 10^9$
\bar{S}_{21}	$\bar{S}_{21} * 10^9$
\bar{C}_{22}	$(\bar{C}_{22} - 0,000002439)*10^{10}$
\bar{S}_{22}	$(\bar{S}_{22} + 0,000000188)*10^{10}$
\bar{C}_{30}	$(\bar{C}_{30} - 0,000000957)*10^{10}$
\bar{C}_{31}	$(\bar{C}_{31} - 0,00000203)*10^{10}$
\bar{S}_{31}	$(\bar{S}_{31} - 0,0000002479)*10^{10}$
\bar{C}_{32}	$(\bar{C}_{32} - 0,000000905)*10^{10}$
\bar{S}_{32}	$(\bar{S}_{32} + 0,000000619)*10^{10}$
\bar{C}_{33}	$(\bar{C}_{33} - 0,00000072)*10^{10}$
\bar{S}_{33}	$(\bar{S}_{33} - 0,000001414)*10^{10}$
\bar{C}_{40}	$(\bar{C}_{40} - 0,00000054)*10^{10}$
\bar{C}_{41}	$(\bar{C}_{41} + 0,000000536)*10^{10}$
\bar{S}_{41}	$(\bar{S}_{41} + 0,000000473)*10^{10}$
\bar{C}_{42}	$(\bar{C}_{42} + 0,0000003504)*10^{10}$
\bar{S}_{42}	$(\bar{S}_{42} - 0,000000662)*10^{10}$
\bar{C}_{43}	$(\bar{C}_{43} - 0,00000099067)*10^{10}$
\bar{S}_{43}	$(\bar{S}_{43} + 0,0000002009)*10^{10}$
\bar{C}_{44}	$(\bar{C}_{44} + 0,000000188)*10^{10}$
\bar{S}_{44}	$(\bar{S}_{44} - 0,000000308)*10^{10}$

Приложение Д

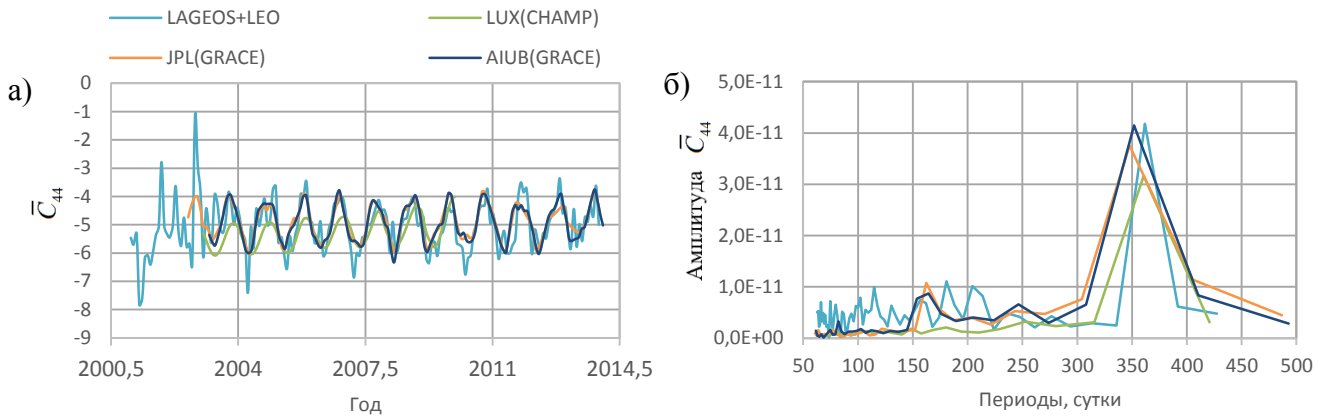


Рисунок ПД.1 – Результаты определения коэффициента \bar{C}_{44} (а) и результаты спектрального анализа рядов коэффициента \bar{C}_{44} (б)

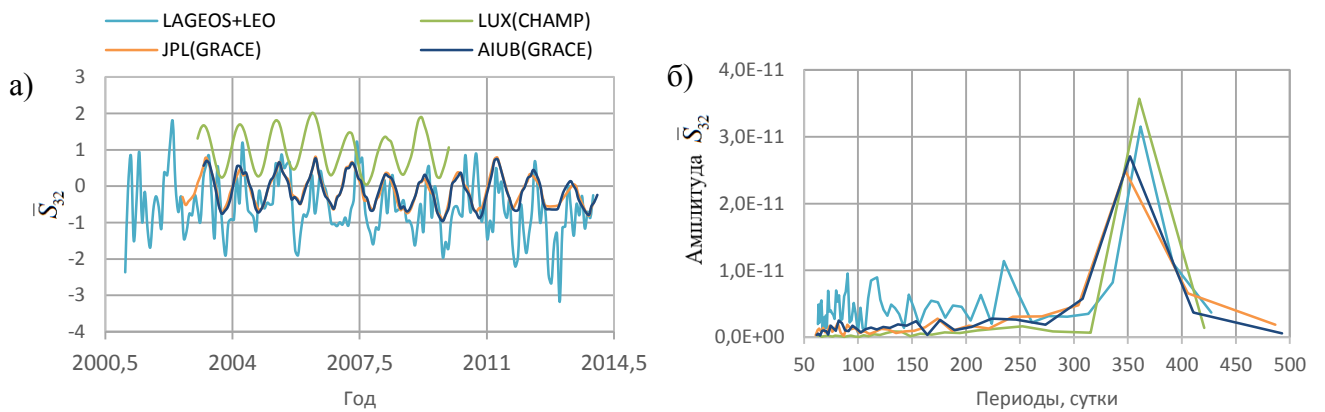


Рисунок ПД.2 – Результаты определения коэффициента \bar{S}_{32} (а) и результаты спектрального анализа рядов коэффициента \bar{S}_{32} (б)

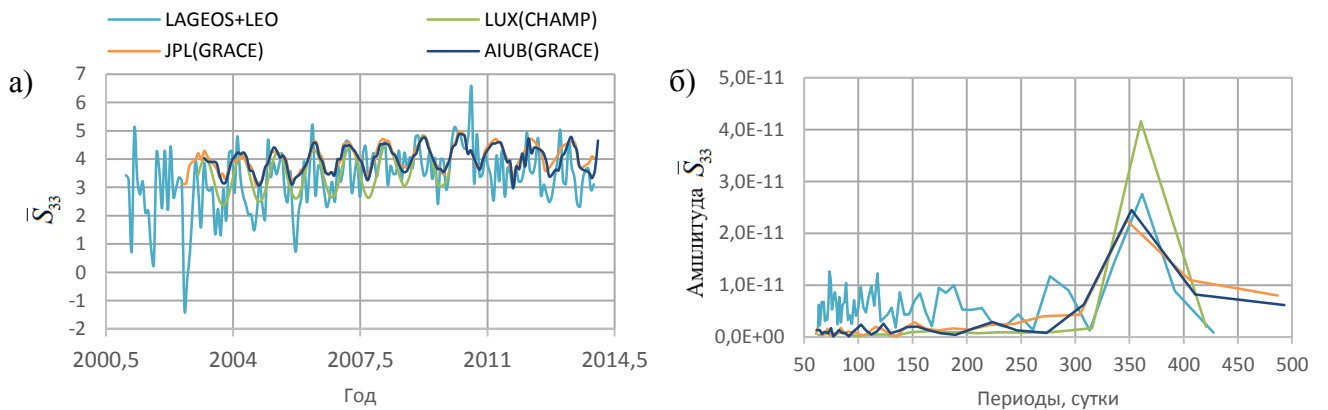


Рисунок ПД.3 – Результаты определения коэффициента \bar{S}_{33} (а) и результаты спектрального анализа рядов коэффициента \bar{S}_{33} (б)

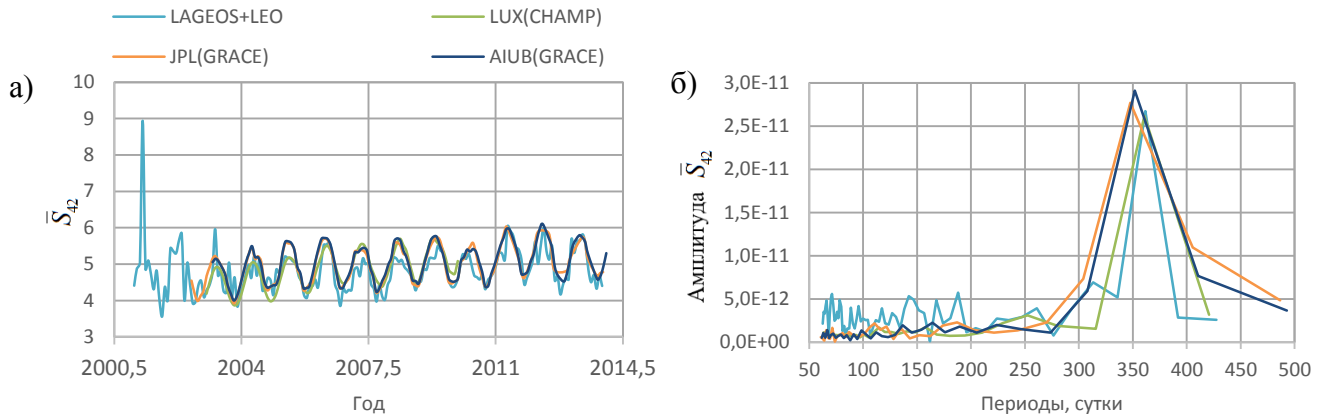


Рисунок ПД.4 – Результаты определения коэффициента \bar{S}_{42} (а) и результаты спектрального анализа рядов коэффициента \bar{S}_{42} (б)

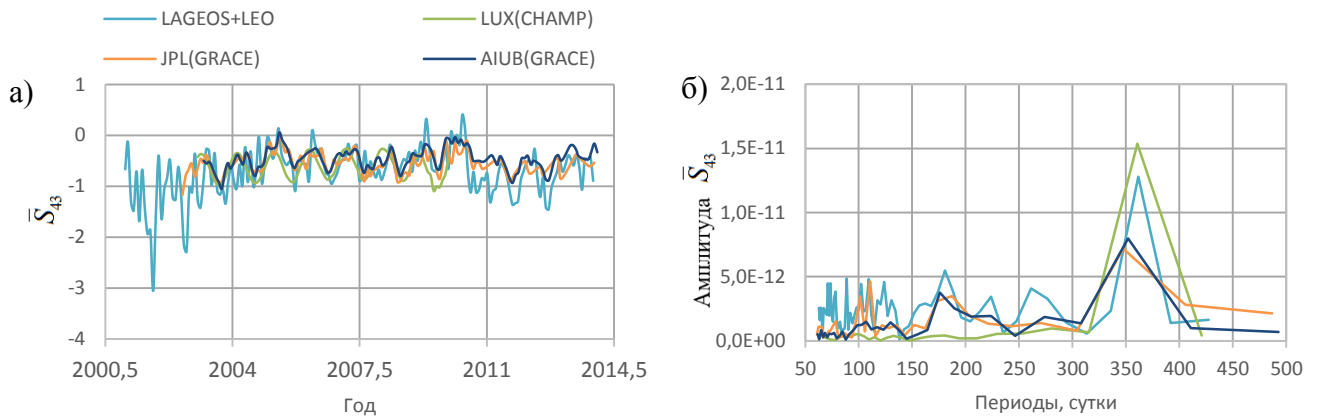


Рисунок ПД.5 – Результаты определения коэффициента \bar{S}_{43} (а) и результаты спектрального анализа рядов коэффициента \bar{S}_{43} (б)

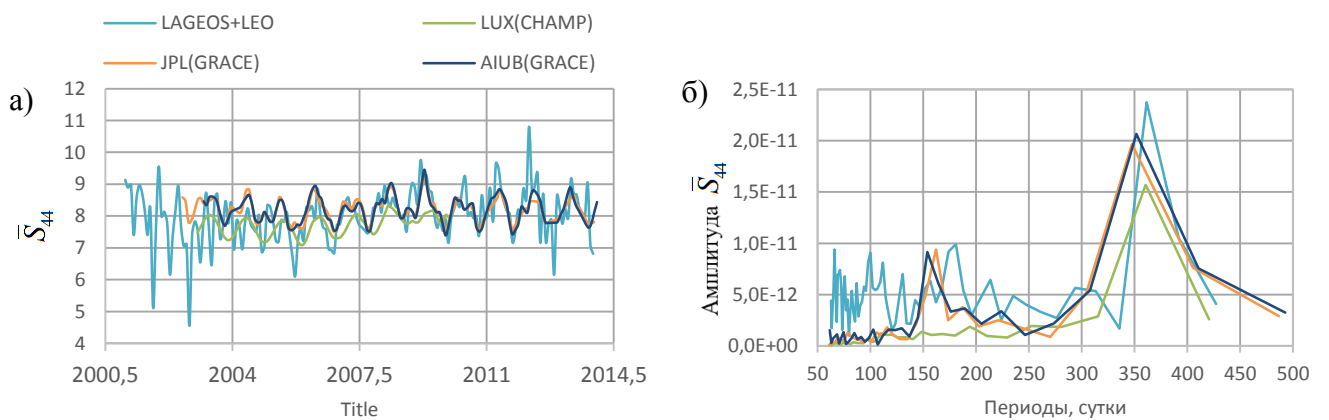


Рисунок ПД.6 – Результаты определения коэффициента \bar{S}_{44} (а) и результаты спектрального анализа рядов коэффициента \bar{S}_{44} (б)