Логарифмический потенциал гравитационного поля шварцшильдовской черной дыры

Шакура Н.И., Липунова Г.В.

Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 480, Issue 3, 1 November 2018, Pages 4273–4277

Ньютоновский потенциал и псевдо-ньютоновские гравитационные потенциалы:

$$\Phi = -\frac{GM}{R}$$

$$\Phi = -\frac{1}{2x}\,, \qquad x = R/R_{\rm g}\,, \qquad R_{\rm g} = \frac{2\,G\,M}{c^2}\,, \qquad c = 1$$

$$\Phi_{\rm PW} = -\frac{1}{2(x-1)}$$

- потенциал Пачинского-Виты

$$\Phi_{\rm PW} = -\frac{G\,M}{r - R_{\rm g}}$$

$$\Phi_{\rm NW} = -\frac{1}{2x}\left(1 - \frac{3}{2x} + \frac{3}{x^2}\right)$$

- потенциал Новака-Вагонера

и другие...

Почему полезны приближенные потенциалы

- 1. Можно не использовать релятивистские уравнения гидродинамики
- 2. Точное значение радиуса последней устойчивой орбиты. Энергия частицы с хорошей точностью равна значению, получающимся в OTO (PW)
- 3. Точное значение угловой скорости (NW)

Используются при расчетах:

- 1. радиальной структуры аккреционного диска и его спектров
- 2. структуры аккреционного потока вблизи ЧД при прохождении звуковой точки
- 3. различных видов осцилляций в дисках, проявляющихся в спектрах мощности рентгеновских кривых блеска аккрецирующих ЧД

Логарифмический потенциал

$$\Phi = \frac{c^2}{2} \ln\left(1 - \frac{R_g}{r}\right) = c^2 \ln\sqrt{1 - \frac{R_g}{r}}$$

- был использован для записи силы, действующей на частицу в поле Шварцшильдовской ЧД (Ландау-Лившиц «Теория поля», Торн 1986)

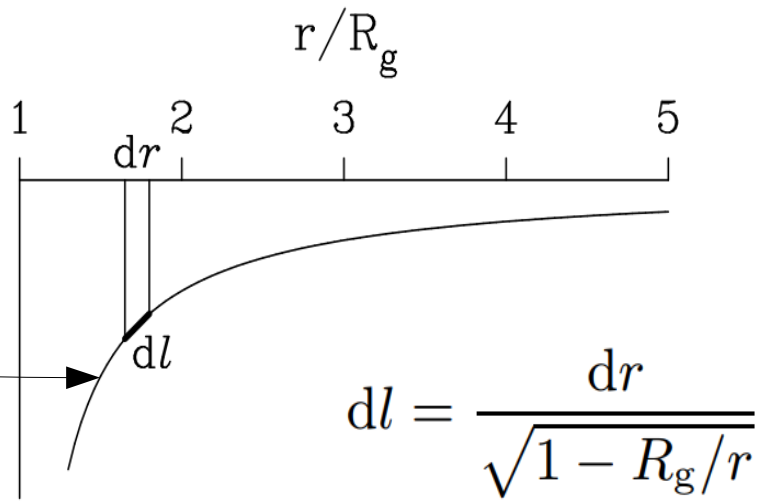
$$R_g = 2GM/c^2$$

Уравнение движения частиц в поле Шв.ЧД

$$\Phi = \frac{c^2}{2} \ln\left(1 - \frac{R_g}{r}\right)$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau_l} = -\frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \nabla\Phi$$

$$d\tau_l/dt = \sqrt{1 - R_g/r}$$



$$dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - R_g/r}}$$

τ_l - `локальное` время

Скалярное произведение на скорость уравнения движения дает **закон сохранения энергии** (метод классической механики)

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \sqrt{1 - \frac{R_g}{r}} = const$$

$$E = \frac{m_o\, c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \sqrt{1 - \frac{R_{\rm g}}{r}} = const$$

$v \ll c$:

$$E - m_o\, c^2 \equiv \mathscr{E}_{\rm N} = m_o\, v^2/2 - m_o\, G\, M/r$$

Анализ круговых орбит с учетом соотношения сохранения энергии

$$E = \frac{m_o\, c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \sqrt{1 - \frac{R_g}{r}} = const$$

дает выражение для угловой скорости и удельного момента импульса, которое совпадает со значением, получающимся в ОТО

$$\frac{v_\varphi}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_g}{r - R_g}}$$

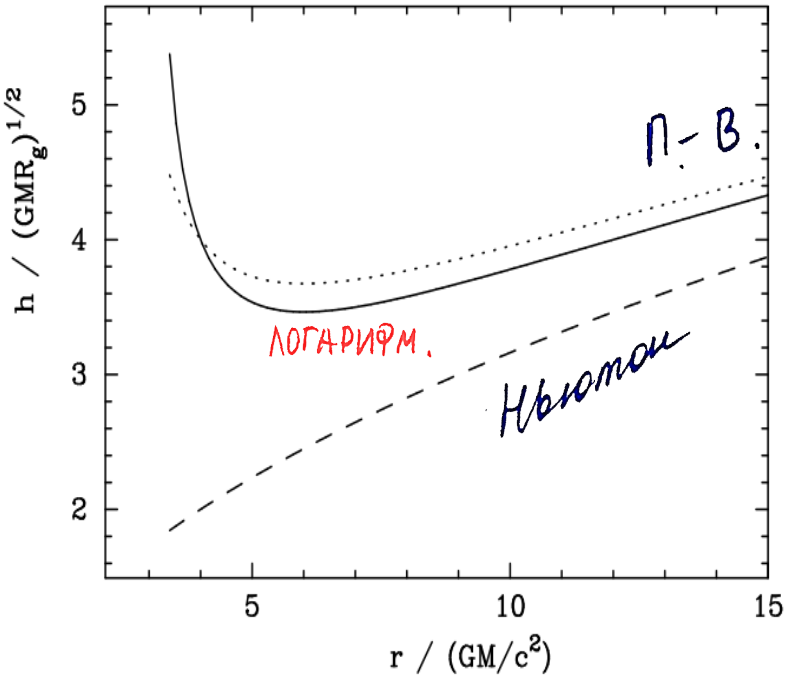


Figure 2. Specific angular momentum h of a test particle in the gravitational field of a black hole. The inner radius of the disc is $r_{in} = 3R_g = 6\,G\,M/c^2$. Solid lines show the dependence in the exact logarithmic potential (4), dotted lines show the same in the Paczynski–Wiita potential, dashed lines – in the Newtonian approximation.

Энергия связи на последней устойчивой орбите

Table 1. The normalized binding energy of a particle at the innermost stable circular orbit in different gravitational potentials

	$(m_0\,c^2 - E)/(m_0\,c^2)$
Newtonian potential	$1/12 = 0.08(3)$
Paczynski–Wiita potential	$1/16 = 0.0625$
Logarithmic potential as a pseudo-Newtonian potential	0.096
Logarithmic potential in Schwarzschild metric	$1 - 2\sqrt{2}/3 \approx 0.0572$

Уравнение изэнтропического стационарного движения невязкой жидкости в поле Шв.ЧД

$$\gamma\,(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{\nabla})(\gamma\,w\,\boldsymbol{v}) + c^2\,\boldsymbol{\nabla} w = -\gamma\,w\,\boldsymbol{\nabla}\Phi$$

$$\Phi = \frac{c^2}{2}\,\ln\left(1 - \frac{R_g}{r}\right)$$

где ω - безразмерная энтальпия в расчете на 1 частицу.

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

(При $v \ll c$: $w = 1 + \dfrac{n}{n+1}\dfrac{P}{\rho}$ и $\nabla\omega = \dfrac{1}{\rho}\nabla p$)

Получаем **релятивистское уравнение Бернулли** для движения жидкости в поле Шв. ЧД

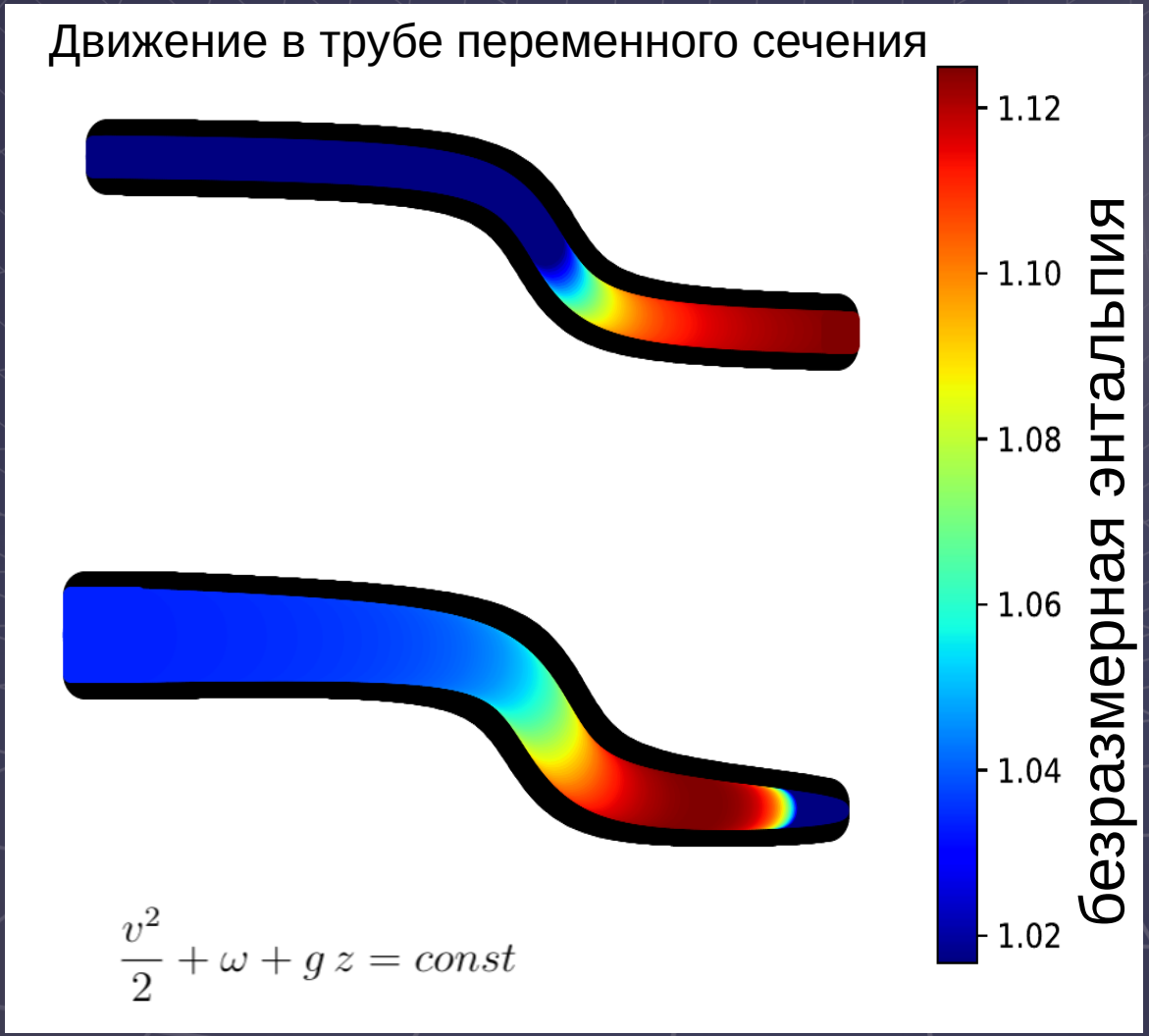
$$m_o\,c^2\,w\,\frac{\left(1 - \frac{R_g}{r}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = const$$

$v \ll c$

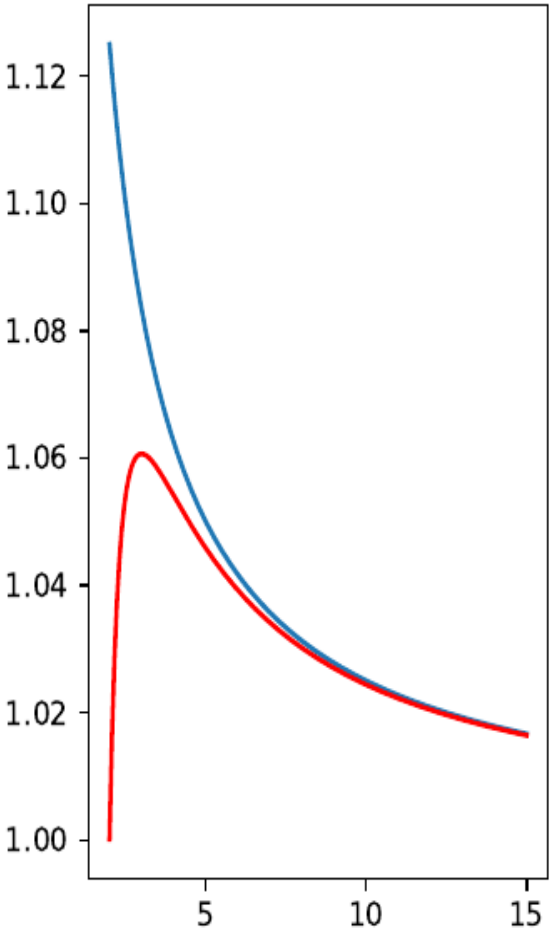
Классическое уравнение Бернулли в однородном поле тяжести

$$\frac{v^2}{2} + \omega + g\,z = const$$

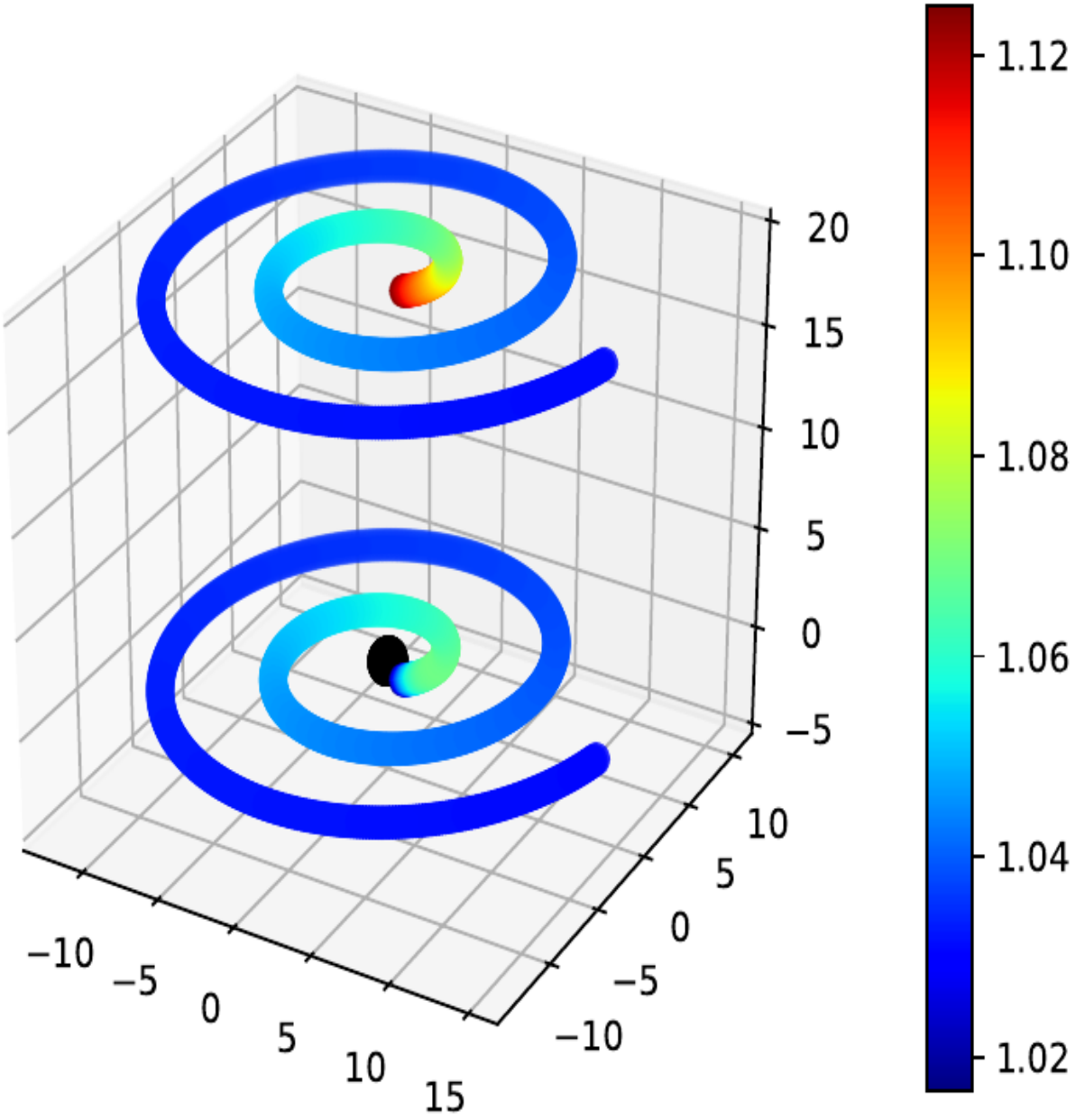
Классическое уравнение Бернулли в однородном поле тяжести



Безразмерная энтальпия в поле ЧД



$x=R/R_g$



Мы рассмотрели логарифмический потенциал и предложили метод его использования, дающий точное решение уравнения движения частиц. Получено релятивистское уравнение движения Бернулли для движения жидкости в поле Шварцшильдовской ЧД. Оно работает и для ЧД Керра, но только в экваториальной плоскости.

СПАСИБО