Н.В.Емельянов

ДИНАМИКА ЕСТЕСТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ НА ОСНОВЕ НАБЛЮДЕНИЙ

ГАИШ МГУ - 2019

Глава 4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКОВ. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Резюме

Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений являются альтернативой аналитическим теориям движения спутников больших планет. Эти методы достойны подробного описания в применении к построению моделей движения спутников на основе наблюдений. Именно этому посвящена данная глава.

Сначала рассматриваются общие вопросы, преимущества и недостатки методов численного интегрирования. Далее на простом примере метода «ломаных Эйлера» показываются особенности методов. Рассказывается, как на практике применять методы численного интегрирования. Кроме метода Рунге-Кутты, предлагаются еще два наиболее совершенных метода, широко применяемых в практической небесной механике: метод Эверхарта и метод Беликова. Прямо приводятся инструкции для составления соответствующих вычислительных программ решения дифференциальных уравнений движения спутников.

Рассматривается метод хранения результатов численного интегрирования уравнений движения в практических задачах путем составления отрезков рядов по полиномам Чебышева. Приводятся соответствующие формулы.

В конце главы дается краткий обзор задач и методов численного интегрирования.

4.1. Цели решения уравнений движения небесных тел

Методы численного интегрирования уравнений движения небесных тел разрабатываются и применяются для решения различных задач небесной механики. Совместно с аналитическими и качественными методами они являются процедурами, служащими целям практического познания природы.

Процесс изучения небесных тел состоит в построении модели их движения. Модель является ядром всех научных изысканий. Она постоянно уточняется на основе все новых наблюдений. К настоящему времени мы уже знаем достаточно много о телах Солнечной системы, планетах и спутниках. Открыты законы, согласно которым взаимодействуют планеты и спутники. Эти законы выражаются в форме дифференциальных уравнений относительно координат центров масс тел и относительно углов их вращения.

Использование модели заключается в предвычислении координат и угловых положений тел на любой заданный момент времени. Таким моментом может быть либо момент очередного наблюдения небесного тела, либо момент встречи космического аппарата с небесным телом, либо момент проведения наблюдений с искусственного космического объекта.

Предвычисление орбитального и вращательного движений небесных тел может делаться на основе аналитического решения дифференциальных уравнений движения, если такое решение имеется. Однако почти все практически значимые модели движения описываются уравнениями, точное решение которых неизвестно. Что касается приближенных аналитических решений, то очень часто случается, что погрешность приближенного решения оказывается недопустимой, либо при требуемой точности процедура построения решения оказывается чрезмерно трудоемкой даже для мощнейших современных компьютеров.

Предвычисление координат и углов вращения тела вокруг его центра масс на заданный момент времени может выполняться методами численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Преимущества численных методов по сравнению с аналитическими заключаются в относительной простоте их реализации в виде алгоритмов и вычислительных программ для компьютеров. Во многих случаях численные методы обладают большей точностью предвычисления координат небесных тел. Указанные преимущества обычно достигаются при высокой требуемой точности вычислений. Недостатками методов численного решения уравнений движения являются большие затраты вычислительного времени, быстрый рост погрешности решения с ростом интервала предвычисления движения и невозможность достоверной оценки точности решения. При заданных уравнениях движения, начальных значениях координат тел и заданном моменте предвычисления точность решения оказывается ограниченной, сколь совершенным бы ни был применяемый численный метод решения.

Численные методы незаменимы в задачах, для которых невозможно получить аналитическое решение. Методы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений служат также для проверки правильности и оценки точности найденного аналитического решения.

4.2. Общие свойства методов численного интегрирования уравнений движения

Постановка задачи о решении уравнений движения методами численного интегрирования распадается на два независимых этапа. Во-первых, составляются дифференциальные уравнения движения. Во-вторых, разрабатывается новый или выбирается один из известных методов их численного интегрирования. Чтобы связать эти два этапа, необходимо принять некоторый стандартный вид уравнений движения.

Рассматривается одно небесное тело или система тел при взаимном гравитационном взаимодействии. В уравнениях движения может учитываться влияние многих других факторов. В частности, в рассмотрение могут включаться притяжение других тел с известными законами движения, отличие гравитирующих тел от материальных точек, сопротивление среды, в которой происходит движение тел.

Уравнения движения представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого или второго порядка относительно координат небесного тела. Обычно употребляется прямоугольная система координат. Если составляется система уравнений второго порядка, ее всегда можно свести к системе уравнений первого порядка. Это приходится делать, в частности, если действующие силы непосредственно зависят от скорости движения небесного тела.

Итак, в задачах численного интегрирования уравнений движения небесных тел примем следующую наиболее общую форму дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t) \quad (i = 1, 2, 3, ..., n), \tag{4.1}$$

где $x_i(t)$ являются искомыми функциями времени. Обязательным условием является задание функций $f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ таким образом, чтобы их можно было вычислять при любых заданных значениях аргументов. Эти функции могут содержать также постоянные параметры, значения которых заданы.

К настоящему времени разработано множество методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Они различны по своей эффективности и области приложений. Хороший обзор методов численного интегрирования дифференциальных уравнений движения, применяемых в небесной механике, дан в работе (Бордовицына, 1984). Существует даже теория методов численного решения уравнений, обобщающая множество таких методов и дающая путь разработки наиболее оптимальных схем интегрирования (Butcher, 1963, 1964а, 1964б; Холл, Уатт, 1979).

Разнообразные методы численного интегрирования при их применении обладают некоторыми общими свойствами. Эти свойства необходимо знать при решении конкретных задач для достижения наилучшего результата и эффективности исследований.

Основную идею методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений легко объяснить на простейшем из них — методе ломаных линий Леонарда Эйлера (Leonhard Euler, 1707–1783). При этом можно ограничиться рассмотрением одного дифференциального уравнения общего вида.

Допустим, что мы имеет одно дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t),$$

в котором t есть независимая переменная — время. Требуется найти функцию $x(t)$, удовлетворяющую этому дифференциальному уравнению и начальному условию:

$$x(t_0) = x_0,$$

где t_0 — начальный момент времени, а x_0 — заданная константа.

Для начала важно понять то, что никакой метод численного интегрирования не позволит найти саму функцию $x(t)$, а только ряд ее значений на конечное число моментов времени. Рассмотрим некоторый момент времени t_1, недалеко отстоящий от момента t_0. Разность $t_1 - t_0$ обозначим через h, то есть

$$h = t_1 - t_0.$$

Точное значение $x(t_1)$ нам неизвестно, но если величина h достаточно мала, а функция $f(x,t)$ непрерывна, то приближенное значение x в момент времени t_1 можно определить по формуле

$$x_1 = x_0 + f(x_0, t_0)\, h.$$

Очевидно, что отличие x_1 от точного значения $x(t_1)$ будет тем меньше, чем меньше h . Погрешность обусловлена возможной нелинейностью функции $x(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$.

Далее мы можем определить приближенное значение функции $x(t)$ на момент времени $t_2 = t_1 + h$ по формуле

$$x_2 = x_1 + f(x_1, t_1)\, h.$$

Погрешность найденного значения искомой функции в момент t_2 будет складываться из погрешности x_1 и погрешности, вызванной нелинейностью функции $x(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$.

Теперь алгоритм определения значений искомой функции на последовательные моменты $t_i = t_{i-1} \;\; (i = 1, 2, ...)$ можно записать так:

$$x_i = x_{i-1} + f(x_{i-1}, t_{i-1})\, h. \tag{4.2}$$

В этом алгоритме величину h называют постоянным шагом численного интегрирования. Ошибка значения x_i будет содержать сумму ошибок, совершенных на всех предыдущих шагах интегрирования. Эти ошибки могут иметь различные величины и знаки, но при достаточно произвольной функции $f(x,t)$ суммарная ошибка, как правило, возрастает. Очевидно, что возрастание суммарной ошибки происходит с нарастанием числа выполненных шагов интегрирования. Чем больше шагов при постоянной величине шага, тем больше ошибка такого решения.

Любая задача численного интегрирования уравнений движения небесного тела обычно ставится так, что в конечном итоге требуется найти координаты тела на заданный конечный момент времени t_k. Если шаг интегрирования уже выбран, то можно подсчитать количество шагов k, необходимое для решения задачи. Очевидно, что

$$k = E\left(\frac{t_k - t_0}{h}\right) + 1,$$

где $E(...)$ означает целую часть.

Метод ломаных относится к группе так называемых одношаговых методов численного интегрирования. Кроме них существуют еще экстраполяционные и многошаговые методы (Бодовицына, 1984). Все эти методы имеют некоторые общие свойства. При их применении возникают общие проблемы. Одна из проблем — это выбор шага интегрирования. На первый взгляд ясно, что если шаг интегрирования уменьшить, то ошибка, допускаемая на каждом шаге, уменьшится, а следовательно повысится точность решения уравнений движения небесного тела. При заданном интервале времени предвычисления движения, то есть интервале интегрирования $t_k - t_0$, количество выполняемых шагов возрастет, что вызовет увеличение затрат вычислительного времени, то есть времени работы компьютера. В некоторых случаях максимальная точность решения определяется только допустимыми затратами времени вычислений.

На первый взгляд кажется, что если увеличение вычислительных затрат еще допустимо, то улучшения точности всегда можно достигнуть уменьшением шага интегрирования. Можно провести такой эксперимент. Задать конкретные уравнения движения, численное решение которых можно проверить. Это могут быть уравнения, имеющие точное аналитическое решение, или уравнения, допускающие известное частное решение. Далее можно задать интервал интегрирования $[t_0, t_k]$, взять какой-нибудь метод численного интегрирования и решать задачу многократно, уменьшая каждый раз шаг интегрирования. Изучая зависимость точности решения от шага интегрирования мы увидим, что сначала при уменьшении шага погрешность численного решения уменьшается. Но при некоторых весьма малых значениях шага интегрирования точность начнет ухудшаться, сколь бы мы ни уменьшали шаг. Что же происходит?

Дело в том, что все вычисления делаются всегда с фиксированной точностью выполнения простых арифметических операций. Ее можно улучшить с помощью специальных способов отображения чисел в памяти компьютера и применением соответствующих алгоритмов арифметических действий. Это приведет к еще большим вычислительным затратам. Важно то, что в любом компьютере с соответствующим программным обеспечением максимальная точность представления чисел и точность выполнения арифметических операций фиксирована. При каждой операции совершается некоторая ошибка. Ее называют ошибкой округления чисел. При последовательном выполнении арифметических действий ошибки округления накапливаются.

Чем меньше шаг интегрирования, тем меньше погрешность формулы (4.2), меньше ошибка, совершаемая на каждом шаге, и меньше ее накопление на конечный момент времени. С другой стороны, число шагов растет, и ошибки округления накапливаются. Таким образом, существует некоторый оптимальный шаг интегрирования, при котором погрешность вычисления значения искомой функции на конечный момент времени минимальна. Для выбранного метода интегрирования и заданной конкретной задачи точность, лучшая, чем при оптимальном шаге, недостижима. Путем совершенствования методов численного интегрирования можно добиться некоторого улучшения точности. Однако современные методы уже столь совершенны, что дальнейшее повышение точности почти не происходит. На практике вычисления с оптимальных шагом, как правило, не производят — слишком велики при этом вычислительные затраты.

Следующую проблему вызывает тот факт, что степень нелинейности искомой функции может быть различна на разных участках интервала $[t_0, t_k]$. При заданном постоянном шаге интегрирования суммарная ошибка порождается, в основном, на тех участках, где нелинейность максимальна. Нет смысла выбирать такой же малый шаг на других участках и тратить напрасно время на вычисления с излишней точностью. Оптимально было бы выбирать на каждом участке свой шаг интегрирования в зависимости от степени нелинейности искомой функции. В совершенных методах численного интегрирования поведение решения анализируется на предыдущем шаге, чтобы экономно выбрать следующий шаг. Для этого, конечно, перед началом интегрирования задают некоторый параметр, контролирующий точность вычислений на каждом шаге. Этот параметр называют заданной точностью интегрирования, однако эта точность далеко не совпадает с точностью получения решения на конечный момент времени t_k. Эти две точности обычно пропорциональны при одной и той же формулировке задачи, то есть при заданных уравнениях движения, начальных условиях и конечном моменте времени. Для анализа поведения решения используют различные приемы и формулы. Один из них состоит в том, что каждый шаг делают дважды: сначала один шаг величиной h, затем два шага, величиной $h/2$. Разницу двух результатов сравнивают с заданной константой — точностью вычислений. Если разность оказывается больше, то шаг уменьшают вдвое. Если же эта разность в десять или более раз меньше, чем заданная точность, то шаг увеличивают. В наиболее совершенных алгоритмах численного интегрирования используют более сложные приемы. К сожалению, на практике не всегда автоматический выбор шага может быть эффективен. В некоторых случаях все же используют постоянный шаг интегрирования.

Наибольшую проблему в практике численного интегрирования уравнений движения небесных тел представляет оценка точности получаемого решения. Оказывается, не существует строгих формул или условий, позволяющих выполнить такие оценки. На деле используют некоторые приемы, которые все же нельзя считать вполне надежными. Один из них — это интегрирование «вперед-назад». То есть после получения значения искомой функции на конечный момент времени это значение принимают за исходное и выполняют интегрирование с отрицательным шагом до начального момента. В конце сравнивают полученный результат с начальным условием. Полученную разность значений и считают точностью выполненного интегрирования. Иногда такие оценки получаются удовлетворительными, но чаще всего реальная точность оказывается хуже. Существуют и другие методы оценки точности численного интегрирования, но все они, на самом деле, ненадежны.

4.3. Метод Рунге-Кутты интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод ломаных, изложенный в предыдущем разделе, почти не применяется на практике. Существуют более точные методы. Одним из них является метод Рунге-Кутты (Бордовицына, 1984; Дубошин, 1976). Этот метод далеко не самый совершенный, однако в свое время он широко применялся в астрономических задачах.

Формулы метода Рунге-Кутты достаточно просты (Дубошин, 1976). Их можно легко запрограммировать на любом подходящем языке программирования. В задачах, где не требуется получать предельно высокую точность численного решения уравнений движения, метод Рунге-Кутты может быть эффективно применен.

Опишем этот метод и формулы, по которым выполняются вычисления. Рассмотрим задачу численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (4.1). с начальными условиями $x_1 = x_1^{(0)},\ x_2 = x_2^{(0)}, ..., x_n = x_n^{(0)}$ при $t = t_0$. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ для удобства будем называть координатами, а независимую переменную t — временем.

Формулы Рунге-Кутты, приводимые ниже, позволяют определить координаты на момент времени $t_{k+1} = t_k + h$, если они известны на момент времени t_k. Формулы составлены на основе метода интерполяции полиномами относительно шага интегрирования h, в которых пренебрегают членами некоторого порядка малости относительно величины шага. В данном случае сохраняются все члены до 4-го порядка включительно. Формулы Рунге-Кутты имеют вид

$$x_i^{(k)} = x_i(t_k),$$

$$p_i^{(k)} = f_i\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}, t_k\right),$$

$$q_i^{(k)} = f_i\left(x_1^{(k)} + \frac{1}{2}hp_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \frac{1}{2}hp_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)} + \frac{1}{2}hp_n^{(k)}, t_k + \frac{1}{2}h\right),$$

$$r_i^{(k)} = f_i\left(x_1^{(k)} + \frac{1}{2}hq_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \frac{1}{2}hq_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)} + \frac{1}{2}hq_n^{(k)}, t_k + \frac{1}{2}h\right),$$

$$s_i^{(k)} = f_i\left(x_1^{(k)} + hr_1^{(k)}, x_2^{(k)} + hr_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)} + hr_n^{(k)}, t_k + h\right),$$

$$x_i^{k+1} = x_i^{(k)} + \frac{1}{6}h\left(p_i^{(k)} + 2q_i^{(k)} + 2r_i^{(k)} + s_i^{(k)}\right)$$

$$(i = 1, 2, 3, ..., n).$$

Из приведенных формул легко видеть схему алгоритма одношаговых методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений вида (4.1). Алгоритм состоит из двух относительно независимых блоков. В первом блоке производятся вычисления по формулам Рунге-Кутты. Входными данными для этого блока являются значения искомых функций на момент времени t_k.

Результат работы блока — значения искомых функций на момент времени t_{k+1}. Разумеется, исходными параметрами являются сами моменты t_k и t_{k+1}, а также шаг интегрирования h. Реализация этого блока не зависит от конкретной задачи небесной механики. Второй блок — вычисления правых частей уравнений (4.1) при любых заданных аргументах $x_1, x_2, ..., x_n, t$. Этот блок полностью определяется постановкой задачи о движении или вращении небесных тел и не зависит от метода интегрирования.

4.4. Алгоритм решения задач о движении небесного тела методами численного интегрирования

Рассмотрим следующий класс задач о движении системы небесных тел. Пусть даны дифференциальные уравнения относительно координат тел. Координатами могут быть как прямоугольные координаты центров масс каждого тела, так и углы поворота каждого тела относительно его центра масс в некоторой заданной системе координат. Уравнения должны быть выражены в форме (4.1), а их правые части заданы так, что известны правила, по которым их можно вычислять для любых заданных значений искомых координат и, возможно, времени. Кроме того, должны быть заданы значения координат на некоторый начальный момент времени t_0. Обозначим эти начальные значения через $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$. Требуется определить значения координат на некоторый также заданный другой момент времени t_k. Практические цели решения задачи о движении тел системы диктуют небходимость последовательного вычисления координат также и на другие заданные моменты t_2, t_3, ... , t_k. Чаще всего моменты времени выбираются равноотстоящими так, что

$$t_i = t_{i-1} + H \quad (i = 1, 2, ..., k), \tag{4.3}$$

где H — заданный шаг по времени (но не шаг интегрирования). Таким образом, результатом решения задачи будут значения искомых функций на моменты t_1, t_2, ... , t_n, то есть $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, ..., x_n^{(i)} \quad (i = 1, 2, ..., k)$. Поставленная задача является типичной не только в практической небесной механике, но также при различных исследованиях теоретического характера.

Соответственно сформулированной постановке задачи можно составить алгоритм ее решения. Он будет состоять из следующих блоков:

- (1) задание начального момента времени, начальных значений координат и шага следования моментов H;
- (2) задание следующего момента времени;
- (3) выполнение численного интегрирования уравнений и получение значений искомых функций на следующий момент времени;
- (4) запоминание полученных значений в файле для последующего использования;
- (5) проверка достижения последнего заданного момента времени и переход к пункту (2), если последний момент еще не достигнут;
- (6) прекращение работы алгоритма.

Пункт (1) выполняется путем ввода чисел из файла исходных данных или заданием значений прямо в тексте вычислительной программы.

Пункт (2) выполняется по формуле (4.3).

Реализация пункта (3) в вычислительной программе должна быть независима от поставленной задачи, чтобы любую конкретную задачу можно было решать любым методом численного интегрирования. Поэтому сам метод интегрирования как правило оформляют в виде отдельной процедуры на выбранном языке программирования. Эту процедуру обычно составляют специалисты по методам численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Для использования процедуры в конкретной задаче нужно знать только форму обращения к этой процедуре и способы обмена данными с ней. Необходимая информация обычно содержится в инструкции, которой снабжается процедура при ее передаче или публикации. Пункт (3) алгоритма реализуется согласно инструкции к процедуре. Пример такой инструкции приводится в следующем разделе.

На первый взгляд в описанном выше алгоритме совершенно отсутствует блок вычисления правых частей решаемых уравнений. На самом деле этот блок включен в пункт (3), но реализуется он в виде независимой процедуры, которую составляет специалист, поставивший и решающий задачу. Эта процедура используется в процессе численного интегрирования, который не зависит от вида правых частей уравнений. Чтобы организовать составление алгоритма и программы, устанавливаются некоторые правила, по которым происходит обращение к процедуре вычисления правых частей уравнений движения. Эти правила также являются частью инструкции к процедуре интегрирования. Алгоритм вычисления правых частей уравнений не зависит от метода интегрирования, однако заголовок этой процедуры должен быть согласован с инструкцией к программе.

Пункты (4), (5) и (6) алгоритма достаточно просты для программирования. Заметим только, что пункт (4) может быть реализован более замысловатым способом. Например, можно запрограммировать построение графических изображений на экране компьютера в зависимости от полученных значений искомых функций. В итоге, последовательная смена картинок в процессе решения задачи даст наглядное представление о движении системы тел.

Заметим также, что при использовании некоторых программ численного интегрирования необходимо задать определенные параметры работы. Это могут быть, например, параметры, задающие точность интегрирования. В то же время результатом выполнения процедуры могут быть различные вспомогательные данные, которые также можно использовать в программе решения задачи.

4.5. Инструкция к вычислительной программе численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эверхарта

В практической небесной механике применяются много различных методов численного интегрирования уравнений движения. Эта наука дает стимул для развития и совершенствования таких методов. В то же время задачи небесной механики являются своеобразным полигоном для испытания новых разработок в этой области. Одним из наиболее применяемых в последнее время в небесной механике методов численного интегрирования является метод Эверхарта (Everhart, 1974). Показательно, что его автором является специалист в области небесной механики. Метод еще подробно описан в книге (Бордовицына, 1984).

Первоначально процедура интегрирования была составлена на языке программирования Фортран самим Эверхартом, поэтому ее так и называют процедурой Эверхарта. Эта версия программы была затем адаптирована для компьютеров, в памяти которых числа с плавающей запятой занимают 8 байт памяти. Программа свободно передается между исследователями разных научных институтов. Она имеется также и в ГАИШ МГУ, где программа была переписана на язык программирования Си. При этом в форме обращения к ней сохранились свойства параметров, характерные для языка программирования Фортран.

Основным достоинством метода Эверхарта является высокая достижимая точность интегрирования. Платой за точность оказываются большие затраты «машинного» времени вычислений. Процедура интегрирования по методу Эверхарта составлена так, что с помощью двух параметров может быть задана необходимая точность вычислений. В зависимости от заданной точности изменяются необходимые затраты времени вычислений. При низкой требуемой точности вычислительные затраты будут небольшими, однако наилучшее соотношение точности вычислений и затрат времени достигается именно при высокой заданной точности. Основной параметр ε, определяющий точность вычислений на каждом шаге, выражают в виде

$$\varepsilon = 10^{-l}, \tag{4.4}$$

где l — некоторое заданное целое число.

В методе Эверхарта используются специальные аппроксимирующие полиномы по степеням шага интегрирования. Степень этих полиномов N_{order} может быть выбрана из следующего списка целых чисел: 7, 11, 15, 19, 23, 27. В процедуре можно взять любое из этих значений. Однако при невысокой заданной точности интегрирования бесполезно задавать высокую степень полиномов. Это может привести лишь к неоправданным затратам времени вычислений. Поэтому N_{order} выбирают в зависимости от заданной точности вычислений в пределах

$$\frac{3}{4}l \le N_{order} \le 2l, \tag{4.5}$$

где l — целое число, фигурирующее в формуле (4.4).

Процедура Эверхарта позволяет решать дифференциальные уравнения движения как в режиме автоматического выбора шага интегрирования, так и при постоянном заданном шаге. Поскольку в небесной механике большинство задач описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, то для удобства программирования задачи процедура Эверхарта позволяет решать сразу уравнения второго порядка, не разлагая их на удвоенное число уравнений первого порядка вида (4.1).

Наибольшую часть времени интегрирования занимают вычисления правых частей уравнений. Поэтому эффективность программы характеризуется количеством производимых обращений к процедуре вычисления правых частей уравнений в процессе вычислений в конкретной задаче. Для оценки эффективности процедуры оказывается интересным также количество выполненных шагов интегрирования в случае автоматического выборе шага. Обе количественные характеристики выдаются процедурой через ее выходные параметры.

Метод Эверхарта содержит процесс итераций при построении полиномов по степеням шага интегрирования на первом шаге. Обычно оказывается достаточным выполнить две итерации, но в некоторых задачах увеличение числа итераций на этом этапе алгоритма может привести к небольшому повышению эффективности процедуры без существенного увеличения затрат времени вычислений. Поэтому входным параметром процедуры является указанное число итераций, с помощью которого можно управлять эффективностью в некоторых небольших пределах. На начальной стадии решения конкретной задачи мало что известно о свойствах уравнений с точки зрения применения процедуры Эверхарта. Поэтому без сомнений можно задать число итераций равным 2.

В зависимости от того, уравнения какого вида нужно решать методом Эверхарта, задают класс уравнений. Уравнения разделяются на три класса.

Уравнения первого класса имеют вид (1). Ко второму классу относятся системы уравнений второго порядка вида

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, ..., \frac{dx_n}{dt}, t) \quad (i = 1, 2, 3, ..., n). \quad (4.6)$$

Уравнения третьего класса отличаются от уравнений (4.6) только тем, что правые части не зависят от компонент скорости, то есть от первых производных по времени от искомых функций. Это наиболее встречаемые в небесной механике уравнения. Класс таких уравнений по странной традиции обозначается как -2. Уравнения класса минус 2 имеют вид

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t) \quad (i = 1, 2, 3, ..., n). \tag{4.7}$$

После описания всех особенностей процедуры Эверхарта приведем здесь инструкцию для ее использования. Инструкция, конечно, зависит от используемого языка программирования. Обычно это один из языков процедурного типа, например, Фортран, Паскаль или Си. Формы вызова процедуры на разных языках весьма похожи. Предположим, что программа вычислений составляется на языке программирования Си. Описание некоторых параметров сохраняет свойства, характерные для старых версий языка Фортран. В частности, индексирование переменных в массивах начинается с единицы.

Приведем здесь сначала описание параметров процедуры, а затем сам вызов процедуры. Необходимо описать в программе используемые переменные и задать их значения. Соответствующие фрагменты программы пользователя имеют вид

```
...
#define NV 3
...
double X[NV+1],V[NV+1];
double TI,TF,XL;
int LL, NI, NF,NS, NCLASS, NOR;
...
Rada27(X, V, TI, TF, XL, LL, NV,
                                NI, &NF, &NS, NCLASS, NOR);
```

Опишем тип и смысл каждого параметра. Удобно начать с входного параметра NV. Это параметр типа **int**. Он вызывается процедурой по значению, то есть при обращении к процедуре на месте этого параметра может стоять любое выражение типа **int**. Параметр NV задает число искомых функций n. В приведенном выше фрагменте программы пользователя этот параметр задан символьной константой NV.

Следует учитывать тот важный факт, что внутри текста процедуры Rada27 имеются описания внутренних массивов (индексированных переменных) заданной длины. Эта длина зависит от числа переменных NV. Следует проверять, достаточно ли зарезервировано места для этих внутренних массивов при заданном NV.

Параметр NCLASS задает класс решаемых уравнений. Он может иметь значения 1, 2 или -2 соответственно описанной выше классификации уравнений. Параметр NCLASS типа **int**. Он вызывается процедурой по значению.

Параметры X, V — одномерные массивы (индексированные переменные), в которых индексы используются, начиная с единицы. Эти массивы используются для хранения и передачи значений искомых функций. В массиве X задаются координаты, а в массиве V — компоненты скорости. Перед обращением к процедуре в этих массивах должны содержаться начальные значения на момент t_0. После обращения массивы X, V будут содержать значения искомых функций на конечный момент t_k.

Массив V используется только для уравнений классов 2 и -2 для хранения и передачи значений первых производных от искомых функций по времени.

Параметры TI и TF — простые переменные типа **double** задают начальный и конечный моменты времени t_0 и t_k, соответственно. Эти параметры передаются по значению.

Параметр LL типа **int** задает точность вычислений. Он соответствует величине l в формуле (4.4). Этот параметр передается по значению. Автоматический выбор шага интегрирования делается в случае, если значение параметра LL задано положительным. Для включения режима постоянного шага интегрирования следует задать значение LL равным любому отрицательному числу. В этом режиме для задания величины постоянного шага интегрирования используется параметр XL типа **double**. Этот входной параметр передается по значению. При автоматическом выборе шага интегрирования параметр XL не используется.

Для задания степени аппроксимирующих полиномов N_{order} служит входной параметр NOR типа **int**. Он передается в процедуру по значению. Для выбора значения этого параметра следует использовать неравенства (4.5).

Параметр NI типа **int** задает число итераций при определении аппроксимирующего полинома. Это входной параметр, он передается в процедуру по значению. Как уже указано выше, значение этого параметра может быть выбрано равным 2, если наиболее оптимальное значение этого параметра неизвестно.

После вычислений выходные параметры NF и NS типа **int** передают в программу пользователя количество сделанных обращений к вычислению правых частей уравнений и количество выполненных шагов интегрирования, соответственно. Эти параметры передаются в процедуру по наименованию (адресу).

Теперь рассмотрим, как процедура численного интегрирования Эверхарта взаимодействует с процедурой вычисления правых частей уравнений, которую должен составлять пользователь. В соответствии с формой обращения к этой процедуре внутри процедуры Эверхарта ее описание (прототип) в программе пользователя должен иметь вид

void FORCE(**double** *Xc, *Vc, **double** TM, **double** *Fc);

Массивы Xc и Vc при входе в процедуру содержат значения аргументов функций, определяющих правые части решаемых уравнений. В массиве Xc хранятся значения координат, а в массиве Vc — значения производных от координат по времени. Аргументы располагаются в массивах согласно их номерам, при этом элементы массивов Xc[0] и Vc[0] никогда не используются. Кроме того, параметр Vc используется только тогда, когда решаются уравнения класса 2.

Входной параметр TM типа **double** задает текущий момент времени — аргумент правых частей уравнений. Он передается в процедуру по значению. Если правые части не зависят от времени, то параметр TM не используется.

Результат вычислений правых частей уравнений пользователь должен поместить в элементах выходного массива Fc. Для этого последовательно используются элементы этого массива, начиная с первого. Нулевой элемент массива Fc не используется.

При составлении вычислительной программы численного решения дифференциальных уравнений движения небесных тел могут проявляться некоторые особенности, связанные с применяемым языком программирования и другими средствами программирования, например, компилятором. В частности, необходимо знать, что процедура Эверхарта, записанная на языке программирования Паскаль, использует для своей работы несколько рабочих массивов, которые должны быть описаны вне тела процедуры как глобальные переменные с фиксированными именами. Длина этих рабочих массивов зависит от количества искомых функций, то есть от значения n в формулах (4.1), (4.6) и (4.7). Проще всего зарезервировать некоторую длину этих массивов и помнить максимальное допустимое число искомых функций, которое нельзя превышать.

При программировании процедуры FORCE вычисления правых частей уравнений могут потребоваться параметры, которые вводятся или задаются в основной программе. Передачу значений этих параметров можно сделать только через глобальные переменные, объявленные в одном из модулей программы и связанные через интерфейсы модулей.

4.6. Программа М.В. Беликова численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

Другая весьма эффективная вычислительная программа численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений была разработана М.В. Беликовым (Belikov, 1993). Метод интегрирования основан на аппроксимации решения на каждом шаге интегрирования отрезками рядов по полиномам Чебышева, близкими к наилучшей равномерной полиномиальной аппроксимации. Используется квадратурная формула Радо-Эрмита наивысшего класса точности при вычислении коэффициентов рядов по смещенным полиномам Чебышева.

Реализация примененного метода в виде вычислительной программы была передана в 90-е годы Институтом теоретической астрономии (С.-Петербург) в ГАИШ МГУ. Процедура, составленная первоначально М.В. Беликовым на языке программирования Фортран, была впоследствии адаптирована Н.В. Емельяновым (ГАИШ МГУ) для языка программирования Си. На языках программирования процедура имеет имя DINCH.

Значительным достоинством программы М.В. Беликова является то, что она включает в себя процедуру аппроксимации результатов численного интегрирования отрезками рядов по полиномам Чебышева. После однократного интегрирования уравнений движения в специальном файле накапливаются коэффициенты разложения координат тела по полиномам Чебышева. С использованием этого файла с помощью простой программы можно получать координаты и скорость небесного тела на любые заданные моменты времени. Подробнее этот прием описан ниже в специальном разделе.

Не вдаваясь в подробности метода, рассмотрим некоторые аспекты использования этой вычислительной программы. Идентификаторы параметров здесь те, которые используются в тексте передаваемой процедуры.

Форма вызова процедуры численнjго интегрирования DINCH схожа с вызовом процедуры Эверхарта (см. выше). Используется такая же терминология класса уравнений. Начальные значения координат и компонент скорости, а также их результирующие значения, размещаются в индексированных переменных также, как и в процедуре Эверхарта. Задается параметр (NORD), определяющий степень полиномов аппроксимации на шаге интегрирования. Управление точностью интегрирования производится специальным параметром, аналогично процедуре Эверхарта. Имеется возможность интегрирования с постоянным заданным шагом (XL).

Дополнительно задаются некоторые параметры, управляющие процессом интегрирования. Смысл этих параметров можно выяснить в описании метода (Belikov, 1993). В частности, задается некоторый параметр NNN, управляющий выбором величины шага интегрирования. При NNN=0 осуществляется выбор переменного шага по абсолютной величине последнего коэффициента в разложении правых частей уравнений. При NNN=1 используется относительный критерий — последний к нулевому и первому. В общем случае, когда нет информации о том, как выбрать этот параментр, можно положить NNN=1. Задаются параметры выбора числа итераций для определения коэффициентов ряда по смещенным полиномам Чебышева: ITS — на стартовом шаге, ITC — на последующих. При отсутствии дополнительной информации рекомендуется выбрать ITS = 6, ITC = 2.

Форма обращения к процедуре FORCE вычисления правых частей уравнений точно такая же, как и для процедуры Эверхарта.

Важно учесть, что в тексте программы имеются описания массивов (индексированных переменных), длина которых зависит от числа искомых функций. Следует согласовать эти описания с программой пользователя.

Некоторые необходимые детали процедуры М. В. Беликова можно выяснить при передаче программы пользователю.

В заключение отметим, что программа численного интегрирования, разработанная М. В. Беликовым, успешно применялась автором настоящей книги и показала высокую эффективность.

4.7. Проверка и сравнение некоторых процедур численного интегрирования

При моделировании движения небесных тел методами численного интегрирования дифференциальных уравнений движения возникает актуальный вопрос о выборе той или иной процедуры интегрирования. Обычно делается поиск наиболее эффективного метода. Понятие эффективности должно быть сформулировано строго и однозначно. Эффективность характеризуют два фактора: точность решения и вычислительные затраты (время вычислений). Правильное сравнение двух методов и выяснение эффективности делается так: определяются вычислительные затраты при равной точности, либо оценивается достигнутая точность при равных вычислительных затратах. В некоторых случаях трудно подобрать параметры интегрирования так, чтобы приравнять один из показателей в двух методах. Это можно сделать лишь приближенно.

Как уже было отмечено выше в специальном разделе, точность решения дифференциальных уравнений движения небесного тела принципиально зависит от следующих обстоятельств:
— числа искомых переменных,
— вида правых частей уравнений,
— начальных условий решения,
— интервала времени между начальным и конечным моментами.

Разумеется, сравнение методов следует делать при равных условиях. При этом нужно задавать такие управляющие параметры процедур, которые обеспечивают максимальную точность. Однако в некоторых случаях невозможно реализовать максимально достижимую точность решения из-за недопустимо большого времени вычислений.

4.8. Аппроксимация прямоугольных координат планет и спутников отрезками рядов по полиномам Чебышева

В процессе численного интегрирования дифференциальных уравнений движения небесного тела вычисляются прямоугольные координаты на ряд моментов времени, разделенных шагом численного интегрирования. Возникает проблема хранения и последующего использования полученных результатов. Поскольку шаг численного интегрирования бывает весьма малым, то запоминать получаемые координаты на каждом шаге оказывается сложным делом и нецелесообразно. В практических задачах применяют приближенное представление результатов численного интегрирования с помощью отрезков рядов по полиномам Чебышева $T_j(\tau)$. В принципе, для этого подошли бы любые ортогональные функции, например, степенные функции. Однако, преимущество разложения функции по полиномам Чебышева состоит в том, что при таком разложении абсолютная ошибка вычислений знакопеременна и распределена более или менее равномерно по всему интервалу [-1,1] аргумента полиномов Чебышева.

Любую функцию времени на конечном интервале можно представить отрезком ряда по полиномам Чебышева длиной в N слагаемых так, что в N моментов времени на этом интервале такое приближенное представление будет точно совпадать со значением функции. При этом в промежуточные моменты времени значение отрезка ряда будет отличаться от самой функции. Отличия зависят от свойств функции и от максимальной степени полиномов $N-1$.

Весь интервал времени, для которого выполняется численное интегрирование уравнений движения, делится на равные подынтервалы некоторой длины $\Delta t = t_2 - t_1$, где t_1 и t_2 — моменты начала и конца одного такого подынтервала. На каждом таком подынтервале отдельно строится представление для каждой из координат, например, для координаты x. Задается новая переменная τ по формуле

$$\tau = \frac{2t - t_2 - t_1}{t_2 - t_1}, \tag{4.8}$$

которая будет аргументом полиномов Чебышева. Ясно, что при $t = t_1$ имеем $\tau = -1$, а при $t = t_2$ будет $\tau = 1$. Таким образом, на подынтервале времени (t_1, t_2) аргумент τ изменяется в пределах $[-1, 1]$.

Функцию $x(t)$ можно приблизить формулой

$$x(t) \approx \sum_{j=0}^{N-1} C_j T_j(\tau) - \frac{1}{2} C_0,$$

в которой зависимость τ от времени задана формулой (4.8), а коэффициенты C_j вычисляются из соотношения

$$C_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(\tau_k) T_j(\tau_k) \quad (j = 0, 1, 2, N-1),$$

в котором значения аргумента τ_k определяются по формуле

$$\tau_k = \cos\left(\frac{\pi(k + \frac{1}{2})}{N}\right) \quad (k = 0, 1, 2, N-1).$$

Такое представление будет точно совпадать с самой функцией для значений аргумента τ, равных корням полинома $T_N(\tau)$, которыми и являются числа τ_k.

Из приведенных выше соотношений видно, что нам нужно знать значения координат на ряд определенных моментов времени

$$t_k = \frac{t_2 + t_1 + \tau_k(t_2 - t_1)}{2}$$

внутри интервала (t_1, t_2).

На практике процесс вычислений программируется следующим образом. В памяти заводится массив коэффициентов C_j $(j = 0, 1, 2, N-1)$. Перед входом численного интегрирования в интервал (t_1, t_2) всем элементам этого массива присваиваются нули. Производится численное интегрирование последовательно до каждого момента t_k. При достижении момента t_k мы имеем значения τ_k и $x(\tau_k)$. Здесь осуществляется проход цикла по номеру коэффициента C_j. Каждому коэффициенту C_j дается приращение $(2/N)x(\tau_k)T_j(\tau_k)$. В этом цикле значения $T_j(\tau_k)$ вычисляются с помощью рекуррентного соотношения для полиномов Чебышева

$$T_{j+1}(\tau_k) = 2\tau_k T_j(\tau_k) - T_{j-1}(\tau_k). \tag{4.9}$$

Для начальных значений индекса имеем

$$T_0(\tau) = 1, \quad T_1(\tau) = \tau.$$

Одновременно вычисления выполняются для трех координат x, y, z. При этом для каждой координаты небесного тела вычисляется свой массив коэффициентов C_j. После выхода численного интегрирования из интервала (t_1, t_2) полученные для каждой координаты коэффициенты запоминаются в файле. На каждом следующем подынтервале для коэффициентов C_j используется один и тот же массив памяти. В итоге, если весь интервал интегрирования был разделен на K равных подынтервалов, то результирующий файл будет содержать $3KN$ чисел.

Если результирующий файл имеется в распоряжении пользователя, то вычисление прямоугольных координат планеты или спутника на заданный момент времени t можно сделать по следующей процедуре. Находим тот подынтервал времени, которому принадлежит заданный момент t. Считываем из файла для каждой координаты массив значений коэффициентов C_j $(j = 0, 1, 2, N - 1)$. Вычисляем координаты по формуле

$$x = \sum_{j=0}^{N-1} C_j T_j(\tau) - \frac{1}{2} C_0.$$

Здесь аргумент τ находится из соотношения (4.8), а полиномы Чебышева вычисляются с помощью рекуррентных соотношений (4.9).

4.9. Обзор задач и методов численного интегрирования. Книга В.А.Авдюшева

Обширная информация о методах численного интегрирования дифференциальных уравнений движения небесных тел содержится в монографии (Авдюшев, 2015). В этой книге дается много сведений, необходимых для моделирования движения небесных тел. Приведем здесь краткий реферат этой монографии.

Рассматриваемой областью занимается множество исследователей в мире. Для хорошего взаимопонимания между ними необходима общая терминология. Монография (Авдюшев, 2015) начинается именно с уточнения терминологических моментов.

Важный начальный этап моделирования движения — это составление дифференциальных уравнений движения небесных тел. Трудности получения решения, в частности, в случаях тесных сближений тел, привели к необходимости преобразовывать уравнения. В монографии (Авдюшев, 2015) дается обширный ряд вариантов дифференциальных уравнений движения, позволяющих преодолеть возникающие проблемы. Рассматриваются так называемые методы стабилизации системы уравнений движения. Приводится сравнительный анализ эффективности различных уравнений.

Далее в монографии (Авдюшев, 2015) дается изложение различных методов численного интегрирования. Кроме одношаговых методов рассмотрены экстраполяционные методы, многошаговые методы, симплектические методы. В итоге дается сравнительный анализ эффективности различных методов.

Третья часть монографии (Авдюшев, 2015) посвящена обратной задаче орбитальной динамики — определению орбит из наблюдений. Кроме уточнения параметров движения с использованием метода наименьших квадратов, рассмотрен ряд других методов решения задачи. Важным достоинством этого материала является то, что все методы изложены так, как это нужно для их практического применения. В монографии (Авдюшев, 2015) дается сравнительный анализ и оценена эффективность разных методов.

Фактически монография (Авдюшев, 2015) восполняет те важные аспекты, которые были опущены в Главах 4 и 6 настоящей книги из-за ограничения объема.

Литература к Главе 4

Авдюшев В.А., Баньщикова М.А. Определение орбит близких спутников Юпитера. Астрономический вестник. 2008. Т. 42. № 4. С. 317–340.

Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит небесных тел. Томск: Издательский дом Томского государственного университета, 2015.

Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. М.: Мир, 1979.

Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н.Дубошина. М.: Наука, 1976.

Belikov M. V. Methods of numerical integration with uniform and mean square approximation for solving problems of ephemeris astronomy and satellite geodesy. Manuscripta Geodaetica. 1993. V. 18. P. 182–200.

Butcher J.C. Coefficients for the Study of Runge-Kutta Integration

Processes. Journal of the Australian Mathematical Society. 1963. V. 3. P. 185–201.

Butcher J.C. On the Runge-Kutta Processes of High Order. J. Journal of the Australian Mathematical Society. 1964a. V.4. P. 179–195.

Butcher J.C. Implicit Runge-Kutta Processes. Mathematics of Computation. American Mathematical Society. 1964б. V.18. P. 50–64.

Everhart E. Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits. Celestial Mechanics. 1974. V. 10. Issue 1. P. 35–55.