Н.В.Емельянов

ДИНАМИКА ЕСТЕСТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ НА ОСНОВЕ НАБЛЮДЕНИЙ

ГАИШ МГУ - 2019

Глава 6

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ НАБЛЮДЕНИЙ

Резюме

Эта глава представляет главную процедуру изучения динамики естественных спутников — построение модели движения на основе наблюдений. Исходными данными являются значения измеряемой величины, получаемые из наблюдений. Необходимо определить параметры движения: постоянные элементы орбиты или начальные условия интегрирования уравнений движения спутника.

В условиях наличия ошибок наблюдений и ошибок теории методы решения задачи основаны на теории вероятностей. Вся совокупность этих методов называется алгоритмами фильтрации. В данной главе подробно описан один из них — метод наименьших квадратов (МНК). За обоснованием МНК читателя отправляем к соответствующей литературе. Здесь же даем алгоритм его применения к поставленной задаче. В силу приближенности оценок, получаемых по МНК, определение параметров заключается в их последовательном дифференциальном уточнении.

Один из этапов решения — вычисление частных производных от измеряемых величин по уточняемым параметрам. В данной главе этому уделено много внимания, особенно для случаев, когда модель движения строится численным интегрированием дифференциальных уравнений движения спутника. В этих случаях искомые производные называются изохронными, поскольку вычисляются на моменты наблюдений.

В конце главы рассмотрены две очень трудные проблемы: назначение весов наблюдениям и отбраковка грубых наблюдений.

6.1. Метод дифференциального уточнения параметров движения небесных тел на основе наблюдений. Применение метода наименьших квадратов

В небесной механике существует ряд задач, различных по изучаемым объектам, но сходных по способу их решения. Эти задачи можно сформулировать как «Уточнение параметров движения небесных тел из наблюдений». Детальное объяснение того, что мы понимаем под параметрами и наблюдениями дано в предыдущих разделах. Здесь опишем эти понятия кратко.

Параметрами движения небесных тел называются величины, от которых зависит движение тел, и которые по крайней мере на некотором этапе изучения или на некотором интервале времени считаются постоянными. Мы рассматриваем три типа параметров. Первый тип — параметры, которые входят в уравнения движения. Они существуют еще до решения уравнений. Второй тип параметров появляется в процессе решения дифференциальных уравнений движения. Это либо произвольные постоянные в общем аналитическом решении уравнений, либо начальные условия численного интегрирования, то есть координаты и компоненты скорости тел в начальный момент времени. Параметры третьего типа входят в соотношения, связывающие результаты наблюдений и координаты небесного тела. Они не связаны с движением изучаемого объекта, но зависят от того, как мы наблюдаем, и называются параметрами условий наблюдений.

Примерами параметров первого, второго и третьего типов могут служить гравитационный параметр небесного тела, элементы его орбиты и геоцентрические координаты обсерватории, соответственно.

В процессе наблюдений измеряются какие-либо величины, зависящие от положения или скорости небесного тела. Они так и называются — **измеряемые величины**. Наблюдения дают нам значения измеряемых величин на моменты измерений. Одновременно могут измеряться несколько величин. Для простоты изложения без нарушения общности изложения будем полагать, что все величины измеряются независимо, каждая в один момент времени. Моменты измерений разных величин могут совпадать. Примерами измеряемых величин являются угловые топоцентрические экваториальные координаты небесного тела, топоцентрическая дальность небесного тела, разность угловых координат двух небесных тел. Измеряемая величина всегда является реальной физической величиной, получаемой с помощью измерительных приборов в определенный момент времени в определенном месте. Моменты измерений отсчитываются по часам, расположенным в пункте наблюдений. При этом должна быть известна связь шкалы времени наблюдений со шкалой времени, которое фигурирует в модели движения, то есть в дифференциальных уравнениях движения.

Задачу уточнения модели движения небесного тела сформулируем следующим образом: даны результаты наблюдений, требуется найти параметры движения.

Пусть ξ — одна из измеряемых величин, а $p_1, p_2, ..., p_n$ — истинные, но неизвестные значения параметров движения небесного тела. Измерение делается в некоторый момент времени t. Измерений обычно делается много, каждому приписывается номер i. В итоге мы имеем ряд значений измеряемых величин ξ_i на ряд моментов времени t_i, $i = 1, 2, ..., m$, где m — число измерений.

При построении модели или теории движения небесного тела неизбежно используются те или иные системы координат. Обычно это координаты, которые фигурируют в дифференциальных уравнениях движения. В отличие от измеряемых величин, которые всегда реальны, ибо они получаются из реальных измерительных приборов, координаты — это некоторые абстрактные понятия. В большинстве случаев их ничем невозможно измерить. Например, мы не можем непосредственно измерить прямоугольные геоцентрические координаты спутника Земли. Оси любой системы координат связывают с каким-либо реальным объектом. Например, оси земной системы координат связывают с положениями ряда опорных обсерваторий на поверхности Земли. Оси небесной системы координат связывают с положениями звезд или внегалактических радиоисточников. В любом случае строится некоторая модель системы координат. Эта модель может со временем изменяться, усовершенствоваться.

Теория движения небесного объекта дает нам модельные значения некоторых координат на заданный момент времени. Чаще всего предполагается, что оси системы координат невращающиеся, то есть всегда взаимно параллельны осям некоторой инерциальной системы координат. Относительно времени предполагается, что оно равномерное. Однако эти свойства координат и времени обеспечиваются только моделью связи с некоторыми реальными небесными телами или реальными периодическими процессами.

Теория и модель движения дают нам на любой заданный момент времени t значения кординат, которые здесь для определенности будем считать декартовыми прямоугольными и обозначим их через x, y, z. Координаты зависят еще от параметров движения, которые обозначим здесь через $p_1, p_2, ..., p_j$. Здесь число параметров j для одного небесного тела может быть равно 6 или больше, в зависимости от используемой теории. Таким образом, из теории мы имеем параметрические функции времени

$$\begin{aligned} x &= x(t, p_1, p_2, ..., p_j), \\ y &= y(t, p_1, p_2, ..., p_j), \\ z &= z(t, p_1, p_2, ..., p_j), \end{aligned} \tag{6.1}$$

называемые законом движения.

При проведении наблюдений мы обязательно должны знать, как связана измеряемая величина ξ_i с координатами небесного тела. Эта связь задается некоторой моделью измерений. Модель может включать в себя некоторые параметры. Обозначим такие параметры через $p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n$. Модель наблюдений дает нам функцию

$$\xi = \xi(t, x, y, z, p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n). \tag{6.2}$$

Подставляя теперь функции (6.1) для координат в правую часть соотношения (6.2), получим модельное значение измеряемой величины ξ^c, как известную функцию времени t и параметров движения:

$$\xi^c = \xi(t, p_1, p_2, ..., p_n). \tag{6.3}$$

Любая модель содержит ошибки. Обозначим ошибку модели через δ_{th}. Тогда истинное значение измеряемой величины ξ определится путем исключения ошибки δ_{th} :

$$\xi = \xi(t, p_1, p_2, ..., p_n) - \delta_{th}.$$

В действительности измеряемые величины получаются из наблюдений и поэтому содержат ошибки наблюдений. Пусть ξ^o — наблюденное значение измеряемой величины, а δ_{obs} — ее ошибка. Вычитая ошибку наблюдения, снова получим истинное значение измеряемой величины

$$\xi = \xi^o - \delta_{obs}.$$

Приравнивая правые части последних равенств, получим

$$\xi^o = \xi(t, p_1, p_2, ..., p_n) + \delta_{obs} - \delta_{th}.$$

После выполнения измерений в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_m$ получим систему уравнений

$$\xi_i^o = \xi(t_i, p_1, p_2, ..., p_n) + \delta_{obs}^{(i)} - \delta_{th}^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3, ..., m) \tag{6.4}$$

относительно истинных значений искомых параметров $p_k \quad (k = 1, 2, ..., n)$. Величины

$$\delta_{sum}^{(i)} = \delta_{obs}^{(i)} - \delta_{th}^{(i)}$$

называют суммарными ошибками наблюдений и теории.

При решении такой задачи точные значения ошибок $\delta_{obs}^{(i)}$ и $\delta_{th}^{(i)} \ (i = 1, 2, 3, ..., m)$ остаются неизвестными. Их обычно рассматривают как случайные величины с заданными вероятностными характеристиками (законами распределения, моментами и т.п.).

Таким образом, мы имеем систему m уравнений относительно $m + n$ неизвестных

$$\delta_{sum}^{(i)} \ \ (i = 1, 2, ..., m), \ \ p_1, p_2, ..., p_n,$$

в которой число неизвестных больше числа уравнений.

В такой ситуации уравнения (6.4) заменяют так называемой системой *условных уравнений*

$$\xi_i^o = \xi(t_i, p_1, p_2, ..., p_n) \quad (i = 1, 2, 3, ..., m), \tag{6.5}$$

представляющей собой систему из m уравнений с n неизвестными $p_1, p_2, ..., p_n$. Система условных уравнений (6.5) несовместна, она не имеет решения, поскольку получена путем вычитания из правых частей точных уравнений (6.4) случайных независимых суммарных ошибок $\delta_{sum}^{(i)}$.

Можно пытаться найти некоторую приближенную оценку искомых параметров. При этом получаемые значения должны по возможности мало отличаться от истинных. Алгоритм нахождения приближенной оценки называют *алгоритмом фильтрации*. Основной задачей этого алгоритма является возможное уменьшение (фильтрация) влияния ошибок теории и ошибок наблюдений. Выбор алгоритма фильтрации неоднозначен, его структура зависит от имеющихся сведений о суммарной ошибке $\delta_{sum}^{(i)}$. На практике таких сведений очень мало или они вообще отсутствуют. Поэтому приходится довольствоваться теми или иными предположениями о свойствах суммарной ошибки и алгоритмом фильтрации, основанным на этих предположениях.

Соотношения (6.5) можно рассматривать как уравнения относительно искомых параметров $p_1, p_2, ..., p_n$. Решить эти уравнения непосредственно на практике не представляется возможным еще и по другой причине. Дело в том, что $\xi(t_i, p_1, p_2, ..., p_n)$ — сугубо нелинейная функция своих аргументов. Чаще всего ее бывает невозможно даже записать в явном виде. Тем более нельзя получить в явном виде решение уравнений (6.5).

Решение задачи будем выполнять по схеме, которая уже представлена в Главе 1.

Практически на любом этапе исследований бывают известны некоторые приближенные значения искомых параметров. Назовем эти значения предварительными и обозначим их через $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, ...,$ $p_n^{(0)}$.

Пусть точные значения параметров $p_1, p_2, ..., p_n$ отличаются от предварительных приближенных на величины поправок

$$\Delta p_1 = p_1 - p_1^{(0)}, \quad \Delta p_2 = p_2 - p_2^{(0)}, \ \dots\ , \ \Delta p_n = p_n - p_n^{(0)}.$$

Тогда (6.5) можно записать в виде

$$\xi_i^o = \xi(t_i, p_1^{(0)} + \Delta p_1, p_2^{(0)} + \Delta p_2, \dots, p_n^{(0)} + \Delta p_n). \tag{6.6}$$

Для большинства небесных тел модели движения постоянно развиваются. Поэтому на очередном этапе уточнения предварительные значения параметров уже достаточно близки к истинным. Это позволяет считать поправки $\Delta p_1, \Delta p_2, \ \dots\ , \ \Delta p_n$ малыми и разложить правую часть соотношения (6.6) в ряд Тейлора по степеням поправок:

$$\xi_i^o = \xi(t_i, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \xi}{\partial p_k} \right)_i \Delta p_k + \ \dots\ . \tag{6.7}$$

Производные в правых частях вычисляются при значениях

$$t = t_i, \ \ p_1 = p_1^{(0)}, \ \dots\ , \ p_n = p_n^{(0)}.$$

Ограничимся величинами первого порядка малости относительно поправок Δp_k и введем обозначения

$$\xi_i^{c(0)} = \xi(t_i, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}) \ , \tag{6.8}$$

$$a_k^{(i)} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial p_k}\right)_i , \tag{6.9}$$

$$\Delta \xi_i = \xi_i^o - \xi_i^{c(0)}. \tag{6.10}$$

В результате получим

$$\Delta \xi_i = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots \ , \ m). \tag{6.11}$$

Приближенные соотношения (6.11) называются *условными уравнениями* для определения поправок к уточняемым параметрам. Они являются линейными неоднородными алгебраическими уравнениями относительно искомых поправок $\Delta p_k, \quad (k = 1, 2, \ \dots \ , \ n)$.

Условные уравнения являются приближенными по двум причинам. Во-первых, в левых частях отброшены ошибки наблюдений и ошибки теории. Во-вторых, в правых частях отброшены все члены порядка квадратов поправок и выше. Уравнения (6.11) иногда называют линеаризованными по отношению к условным уравнениям (6.5).

Принимая те или иные допущения относительно ошибок теории и ошибок наблюдений, можно выбрать один из разработанных алгоритмов фильтрации и найти приближенное решение условных уравнений (6.11). Существующие методы позволяют также оценить погрешность решения.

После того, как поправки найдены, прибавляем их к предварительным значениям параметров и получаем новые и, как мы надеемся, более точные их значения. Такой метод определения параметров движения небесных тел называется **дифференциальным уточнением** параметров.

В силу приближенности условных уравнений и приближенности их решения новые значения параметров будут недостаточно точными. Однако уточнение можно провести повторно несколько раз. Если процесс уточнения сходится, то есть поправки от шага к шагу убывают, то вычисления можно прекратить, когда поправки станут существенно меньше их погрешностей. В этом случае мы получим значения параметров движения небесного тела $\overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_n$, соответствующие всем используемым при этом наблюдениям. Это соответствие однозначно определяется заданной моделью движения (6.3) и выбранным алгоритмом фильтрации.

Теоретически сходимость дифференциального уточнения почти не исследована. Можно привести примеры, в которых процесс не сходится или сходится к ложным значениям искомых параметров. При использовании метода дифференциального уточнения параметров следует учитывать, что с некоторого шага уточнения поправки начинают колебаться из-за неизбежных ошибок вычислений. После появления таких колебаний дальнейшие попытки уточнения параметров становятся бесполезными.

С другой стороны, когда описанный процесс хорошо сходится, не возникает необходимости в точном вычислении производных $\left(\frac{\partial \xi}{\partial p_k}\right)_i$, так как в процессе уточнения они используются для определения все уменьшающихся поправок $\Delta p_1, \Delta p_2,\ \dots\ ,\ \Delta p_n$. В этих условиях лежащие в разумных пределах погрешности вычисления указанных производных могут лишь несколько увеличить число шагов уточнения, практически не отражаясь на точности окончательного результата.

На первом и последующих шагах уточнения после вычисления поправок $\Delta p_1, \Delta p_2,\ \dots\ ,\ \Delta p_n$ можно найти так называемые невязки условных уравнений

$$\delta_i = \Delta \xi_i - \sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} \Delta p_k, \quad (i = 1, 2,\ \dots\ ,\ m). \tag{6.12}$$

После того, как процесс уточнения завершен, и поправки к параметрам стали пренебрежимо малыми, невязки условных уравнений станут окончательными рассогласованиями или невязками уточненной теории с наблюдениями

$$\delta_i = \xi_i^o - \xi(t_i, \overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_n) \quad (i = 1, 2,\ \dots\ ,\ m). \tag{6.13}$$

В литературе и на практике эти рассогласования символически обозначают как O–C (observatum minus calculatum, лат.).

Совокупность невязок часто используют для оценки качества полученного решения. Однако для установления близости решения к истинному этого оказывается недостаточно.

Из всех имеющихся алгоритмов фильтрации в практической небесной механике чаще всего применяется *метод наименьших квадратов* (МНК). Этот метод обладает рядом преимуществ по сравнению с другими алгоритмами фильтрации. Основное преимущество заключается в его простоте.

Для краткости описания метода наименьших квадратов введем матричные обозначения

$$\mathbf{\Delta}p = \begin{pmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ . \\ . \\ . \\ \Delta p_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Delta}\xi = \begin{pmatrix} \Delta \xi_1 \\ \Delta \xi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \Delta \xi_m \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \delta_m \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A_p} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & ... & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & ... & a_n^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^{(m)} & a_2^{(m)} & ... & a_n^{(m)} \end{pmatrix}, \quad \delta_{\mathbf{sum}} = \begin{pmatrix} \delta_{sum}^{(1)} \\ \delta_{sum}^{(2)} \\ . \\ . \\ . \\ \delta_{sum}^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Тогда систему условных уравнений (6.11) и их невязки (6.12) можно записать в виде

$$\mathbf{\Delta}\xi = \mathbf{A_p}\,\mathbf{\Delta}p\,, \tag{6.14}$$

$$\delta = \mathbf{\Delta}\xi - \mathbf{A_p}\,\mathbf{\Delta}p\,. \tag{6.15}$$

Здесь элемены матрицы $\mathbf{A_p}$ вычисляются по формулам (6.9).

Метод наименьших квадратов основан на выводах теории вероятностей. Он оправдан при соблюдении следующих условий (Эльясберг, 1976).

1. Задана модель движения (6.3).
2. Вектор ошибок $\delta_{\mathbf{sum}}$ является случайным.
3. Ковариационная матрица ошибок является невырожденной, т.е. определитель этой матрицы не равен нулю.
4. Математическое ожидание $\mathbf{E}(\delta_{\mathbf{sum}})$ суммарной ошибки равно нулю, т.е.

$$\mathbf{E}(\delta_{\mathbf{sum}}) = 0\,.$$

5. Ковариационная матрица $\mathbf{D}(\delta_{\mathbf{sum}})$ задана с точностью до некоторого произвольного множителя, т.е.

$$\mathbf{D}(\delta_{\mathbf{sum}}) = \sigma^2\ \mathbf{K}\ .$$

Произвольный множитель σ^2 уточняется в процессе применения метода наименьших квадратов.

При сделанных допущениях алгоритм фильтрации по методу наименьших квадратов сводится к отысканию вектора $\boldsymbol{\Delta} p$ из условия абсолютного минимума квадратичной формы

$$S(\boldsymbol{\Delta} p) = \delta^T\ \mathbf{K}^{-1}\delta = [\boldsymbol{\Delta}\xi - \mathbf{A_p}\ \boldsymbol{\Delta} p]^T \mathbf{K}^{-1}[\boldsymbol{\Delta}\xi - \mathbf{A_p}\ \boldsymbol{\Delta} p]. \qquad (6.16)$$

Заметим, что на практике проверка соблюдения данных условий оказывается невозможной. В частности, ковариационная матрица $\mathbf{K}$ почти всегда неизвестна.

Свойство случайности вектора ошибок и понятие его ковариационной матрицы следует пояснить для лучшего понимания последующего изложения. В теории вероятности рассматривается понятие «испытания». Это одна из реализаций случайной величины. Если, например, под случайной величиной рассматривать результат бросания монетки, то каждое такое бросание является испытанием, а результат — «орел» или «решка» — реализацией случайной величины. В методе наименьших квадратов набор произведенных наблюдений является одним единственным «испытанием» случайных ошибок наблюдений. И других испытаний этой случайной величины у нас нет и быть не может. Поэтому ковариационная матрица ошибок $\mathbf{D}(\delta_{\mathbf{sum}})$ нам недоступна. Однако, рассматривая набор ошибок как случайную величину, мы подразумеваем существование ковариационной матрицы и принимаем по отношения к ней ту или иную гипотезу. Чаще всего принимается, что ковариационная матрица ошибок диагональна, значит ошибки между собой не коррелированы, т.е. взаимно независимы.

Широкое распространение и известность метода наименьших квадратов часто приводят к некритическому отношению к получаемым по этому методу результатам. Во многих случаях из результатов делаются неверные выводы. Причиной этого является обычно несоответствие реальных условий, в которых решается данная практическая задача, условиям, принятым при обосновании метода. Однако нередко МНК приводит к удовлетворительным результатам даже при невыполнении указанных условий.

На практике ковариационная матрица ошибок неизвестна. В большинстве задач и механических моделей можно принять, что ошибки наблюдений некоррелированы. Тогда матрица **K** оказывается диагональной. Если имеется какая-то информация о точности одних наблюдений по отношению к точности других, то матрицу **K** можно сделать единичной. Для этого каждому наблюдению присваивается некоторый вес $w_i \quad (i = 1, 2, ..., m)$. Каждое условное уравнение умножают почленно на установленный вес. При этом ошибки также оказываются умноженными на этот вес. Подбирая соответствующим образом веса наблюдений, можно привести наблюдения к равноточным. Тогда матрица **K** становится единичной. Как на практике подбирать веса наблюдений рассмотрено ниже. В случае единичной матрицы **K** соотношение (6.16) принимает вид

$$S(\mathbf{\Delta}p) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\Delta\xi_i - \sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} \Delta p_k \right)^2 . \tag{6.17}$$

Отыскание минимума функции $S(\mathbf{\Delta}p)$ сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial S(\mathbf{\Delta}p)}{\partial \Delta p_k} = 0 \quad (k = 1, 2, ..., n). \tag{6.18}$$

Как видно из (6.17), уравнения (6.18) содержат только нулевые и первые степени искомых поправок $\Delta p_k \quad (k = 1, 2, ..., n)$. Поэтому система (6.18) оказывается системой линейных неоднородных уравнений. Эту систему принято называть *системой нормальных уравнений.*

После выполнения дифференцирования в (6.18) систему нормальных уравнений можно записать в виде

$$\mathbf{L}\, \mathbf{\Delta}p = \mathbf{d}\ ,$$

где **L** и **d** суть квадратная матрица и матрица-столбец

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & ... & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & ... & l_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{pmatrix}, \tag{6.19}$$

элементы которых вычисляются по формулам

$$l_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)} a_j^{(i)} \quad (k, j = 1, 2, \ \dots\ , \ n), \tag{6.20}$$

$$d_k = \sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)} \Delta\xi_i \quad (k = 1, 2, \ \dots\ , \ n). \tag{6.21}$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится еще величина:

$$d_0 = \sum_{i=1}^{m} (\Delta\xi_i)^2. \tag{6.22}$$

Рассмотрим матрицу коэффициентов нормальных уравнений $\mathbf{L}$. Как видно из (6.20), матрица $\mathbf{L}$ — симметричная, с положительными диагональными элементами. Найдем одним из известных способов матрицу $\mathbf{L}^{-1}$, обратную матрице $\mathbf{L}$. Тогда решение системы нормальных уравнений получим из матричного соотношения

$$\boldsymbol{\Delta} p = \mathbf{L}^{-1} \ \mathbf{d} \ . \tag{6.23}$$

Для того, чтобы существовало решение системы нормальных уравнений и его можно было найти, матрица $\mathbf{L}$ должна удовлетворять определенным условиям. В частности, ее ранг должен быть равен n . На практике часто оказывается, что определитель матрицы нормальных уравнений близок к нулю, и вычислить обратную матрицу $\mathbf{L}^{-1}$ можно с весьма ограниченной точностью.

Если поправки все же найдены, можно определить среднеквадратичные ошибки искомых поправок следующим образом. Сначала вычислим так называемую среднеквадратичную ошибку на единицу веса σ_0 по формуле

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{m-n} \left[d_0 - (\mathbf{d} \boldsymbol{\Delta} p) \right], \tag{6.24}$$

где $\boldsymbol{\Delta} p$ найденный вектор поправок. Умножим теперь все элементы матрицы $\mathbf{L}^{-1}$ на σ_0^2. Полученная таким образом матрица

$$\mathbf{D} = \sigma_0^2 \mathbf{L}^{-1} \tag{6.25}$$

называется ковариационной матрицей ошибок поправок, которую часто называют просто ковариационной матрицей параметров. Запишем ее в виде

$$\mathbf{D} = \left(\begin{array}{cccc} D_{11} & D_{12} & ... & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & ... & D_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ D_{n1} & D_{n2} & ... & D_{nn} \end{array} \right).$$

Согласно методу наименьших квадратов любой диагональный элемент матрицы $\mathbf{D}$ с номером k равен квадрату среднеквадратичной ошибки σ_k поправки Δp_k, то есть

$$\sigma_k = \sqrt{D_{kk}}. \tag{6.26}$$

Из (6.24), (6.25), (6.26) видно, что ошибки поправок уточняемых параметров убывают с ростом числа наблюдений m. Приближенно они пропорциональны $\frac{1}{\sqrt{m}}$, так как на практике число наблюдений намного больше числа уточняемых параметров.

Следствием метода наименьших квадратов является стремление к нулю среднеквадратичной ошибки решения с увеличением числа наблюдений.

Сделанные здесь выводы справедливы при определенных условиях, налагаемых не только на ошибки теории и наблюдений, но также на принятую модель движения небесного тела. Подробнее эти условия рассмотрены в книге (Эльясберг, 1976).

Величины r_{kj}, определенные соотношением

$$r_{kj} = \frac{D_{kj}}{\sigma_k \sigma_j},$$

называются коэффициентами корреляции между ошибками поправок, а матрица

$$\mathbf{R} = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & r_{12} & r_{13} & ... & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & ... & r_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & ... & 1 \end{array} \right)$$

называется корреляционной матрицей.

После нескольких шагов уточнения, когда поправки становятся достаточно малыми, ошибки поправок характеризуют ошибки улучшенных значений параметров, обусловленные как ошибками теории, так и ошибками наблюдений.

Качество согласования теории с наблюдениями после уточнения параметров движения небесного тела будет характеризоваться величиной

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{d_0}{m}} \ , \tag{6.27}$$

которая после успешного уточнения параметров является среднеквадратичной величиной невязок δ_i (6.13).

Более подробно и вместе с обоснованием МНК изложен в монографии (Эльясберг, 1976), В ней также подробно исследована зависимость обусловленности в МНК от состава наблюдений. Метод дифференциального уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений с вопросами его практического применения рассмотрен в книге (Емельянов, 1983). Упрощенное описание МНК дано в учебном пособии (Щиголев, 1969).

Существенной частью алгоритма уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений является вычисление значений измеряемой величины на заданные моменты времени, а также ее производных по улучшаемым параметрам. Для этой цели можно применять как формулы аналитической теории движения небесного тела, так и методы численного интегрирования уравнений его движения. При этом количество вычислительных операций может сильно различаться. При использовании аналитической теории время вычислений будет пропорционально количеству используемых наблюдений. Оно в этом случае не зависит от интервала времени, на котором велись наблюдения. При численном интегрировании наоборот: затраты времени на вычисления пропорциональны интервалу времени наблюдений и не зависят от числа наблюдений. Порядок всех таких вычислений объяснен в следующих разделах.

6.2. Плохая обусловленность и неоднозначность решения

Определение параметров движения на основе наблюдений получается просто и точно только в простых показательных примерах. В практических задачах с использованием реальных наблюдений, как правило, возникают трудности, а определение параметров оказывается неточным. Рассмотрим здесь наиболее часто встречающиеся проблемы.

Применение МНК на практике часто приводит к неожиданным проблемам. Дело в том, что в условиях исследований на основе реальных наблюдений небесных тел с использованием ограниченных по точности теорий не всегда строго выполняются те допущения, при которых правомерно применение МНК.

Если ошибки теории превалируют над ошибками наблюдений, то суммарная ошибка не будет случайной величиной. Это приведет к тому, что с увеличением числа наблюдений точность результата не будет улучшаться, а решение в свою очередь приобретет зависимость от состава измерений, то есть от того, в какие моменты делались измерения. Наличие такой зависимости делает результат не вполне достоверным.

В конкретных задачах по уточнению параметров движения небесных тел часто оказывается, что определитель матрицы **L** близок к нулю. В этих случаях мы имеем дело с так называемыми плохо обусловленными системами нормальных уравнений. При решении таких систем поправки к параметрам могут получаться столь грубыми, что процесс уточнения не будет сходиться. Причина плохой обусловленности заключается не в самом методе наименьших квадратов, а в свойствах применяемой механической модели.

Примером случая с плохой обусловленностью является процесс уточнения долготы восходящего узла кеплеровской орбиты небесного тела при очень малом ее наклоне. Другой пример — совместное уточнение долготы перицентра орбиты и средней аномалии в эпоху при малых эксцентриситетах орбиты. Показателем плохой обусловленности может служить близость к единице модуля одного или нескольких коэффициентов корреляции. От плохой обусловленности избавиться нельзя, поскольку ее причина лежит в условиях задачи. Можно только заменить задачу на другую. Чтобы уменьшить плохую обусловленность, можно исключить из списка уточняемых параметров тот из них, который дает сильную корреляцию, фиксируя его предварительное значение. Это фиксированное значение можно выбрать приближенно. Как правило, измеряемая величина слабо зависит от параметра, дающего сильную корреляцию. Поэтому приближенность зафиксированного параметра может не сказываться на измеряемой величине.

Успех уточнения параметров движения из наблюдений существенно зависит от состава наблюдений. В частности, если наблюдения покрывают лишь незначительную часть орбиты небесного тела, то возникает плохая обусловленность системы нормальных уравнений, а определение параметров может стать невозможным.

Плохая обусловленность из-за состава наблюдений может возникать, например, при определении углового расстояния перицентра от узла ω для кеплеровской орбиты небесного тела. Если все наблюдения сосредоточены в перицентре и апоцентре орбиты, то возникает неопределенность в определении ω. Можно изменять ω, то есть поворачивать орбиту вокруг притягивающего центра, при постоянном значении долготы небесного тела, при этом смещения положений точек на орбите вблизи перицентра и вблизи апоцентра будут незначительными. Это и даст слабую зависимость измеряемых величин от угла ω при постоянной долготе. При фиксации ω на некотором приближенном значении, эта приближенность мало повлияет на различия вычисленных и наблюденных положений небесного тела вблизи перицентра и вблизи апоцентра орбиты.

Подробнее зависимость точности найденных значений параметров от состава наблюдений описана в книге (Эльясберг, 1976).

Рассмотрим другую проблему, возникающую при некоторых составах наблюдений.

Функцию $S(\mathbf{\Delta}p)$ (6.17) иногда называют целевой функцией. Для получения оценки параметров ищут ее минимум. Выше целевая функция была построена для линеаризованных условных уравнений (6.11). Однако ее можно построить и для уравнений (6.5). В этом, более общем случае, целевая функция запишется в виде

$$S(p_1, p_2, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{m} \left[\xi_i^o - \xi(t_i, p_1, p_2, ..., p_n)\right]^2 , \qquad (6.28)$$

и задача состоит в нахождении минимума этой функции на множестве значений параметров $p_1, p_2, ..., p_n$. В реальных задачах функция $\xi(t_i, p_1, p_2, ..., p_n)$ нелинейна по отношению к своим аргументам. Тогда целевая функция $S(p_1, p_2, ..., p_n)$ может иметь несколько минимумов. Если мы найдем все минимумы, то выберем наименьший из них и будем надеяться, что получили самую точную оценку. Однако такой формальный выбор может вызвать сомнения. Может оказаться, что ошибки наблюдений распределились таким образом, что точная оценка соответствует не наименьшему из упомянутых минимумов. С другой стороны, решая линеаризованные условные уравнения (6.11), можно попасть на такое начальное приближение параметров $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, ..., p_n^{(0)}$, которое приведет последовательные приближения к неверному результату.

В работе (Авдюшев, Баньщикова, 2008) показано, что проблема неоднозначного определения орбит может иметь место в задачах динамики близких спутников планет при малочисленном составе наблюдений, рассредоточенных в нескольких группах на достаточно большом интервале времени. Проблема множества решений подробно рассмотрена в книге (Авдюшев, 2015). Показано, что график функции (6.28) может иметь «овражную» структуру, так что целое семейство значений искомых параметров может давать одинаково малые значения функции. В других случаях функция (6.28) может иметь несколько изолированных минимумов. Тогда задача определения параметров может оказаться неоднозначной.

Проблема неоднозначного определения орбит может также возникать и в иных случаях, а именно, когда наблюдения сгруппированы на малом временном интервале и покрывают короткую орбитальную дугу. Очевидно, что такой состав наблюдений имеют почти все новые открываемые спутники. Впрочем, возникновение этой проблемы возможно лишь при определенных условиях наблюдения, что хотя и сужает класс проблемных объектов, их, тем не менее, остается еще достаточно много и большая часть из них — это новые далекие спутники больших планет. Именно эти случаи рассмотрены в работе (Авдюшев, Баньщикова, 2009). Для разрешения этой проблемы, очевидно, нужны дополнительные наблюдения.

6.3. Обзор сведений об алгоритмах фильтрации

Прежде, чем говорить о других алгоритмах фильтрации, уточним некоторые понятия.

Прежде всего напомним, что поставленная задача состоит в поисках значений искомых параметров на основе имеющихся измерений. При этом получаемые значения должны по возможности мало отличаться от истинных. На практике оказывается, что точное значение искомых параметров найти невозможно. Поэтому мы говорим о приближенной *оценке параметров*. Алгоритм нахождения приближенной оценки называют *алгоритмом фильтрации*. Основной задачей этого алгоритма является возможное уменьшение (фильтрация) влияния ошибок теории и ошибок наблюдений.

Одной из характеристик оценки, получаемой алгоритмом фильтрации, является *состоятельность оценки*, под которой понимается сходимость оценки к истинным значениям при стремлении числа измерений к бесконечности.

Обширная и детальная информацию об алгоритмах фильтрации в настоящее время содержится в книгах (Эльясберг, 1976) и (Авдюшев, 2015).

Под наблюдениями в практической небесной механике подразумевают измерения. Книга Эльясберга (1976) так и называется «Определение движения по результатам измерений», В книге рассматриваются различные традиционные и нетрадиционные подходы к оцениванию параметров, в частности, гарантированный подход, когда находятся пределы возможных значений искомых параметров при заданных наборах измерений. Ценность книги Эльясберга (1976) заключается в сочетании ее направленности на практическое решение задач с математическими обоснованиями используемых методов. Рассматриваются примеры решения задач. Удобно то, что первая глава содержит необходимые сведения по теории вероятности. Далее рассматриваются характеристики ошибок измерений. Большая часть книги посвящена математическому обоснованию применения МНК. Даются и условия его применимости.

В книге Эльясберга (1976) рассматривается ряд известных алгоритмов фильтрации: метод максимального правдоподобия, метод наименьших модулей, метод максимума апостерирорной вероятности, фильтры Калмана (дискретный и непрерывный).

В некоторых практических ситуациях бывает возможность выбирать состав проводимых измерений или выбрать какой-то их набор из имеющихся данных. Здесь возникает задача поиска оптимального состава измерений. Этой задаче уделено много внимания в книге Эльясберга (1976). В частности, указано, что в реальных условиях увеличение числа измерений может оказаться бесполезным, а в некоторых случаях даже ведет к ухудшению точности получаемых результатов.

Другая книга, монография Авдюшева (2015) — хороший источник сведений об алгоритмах фильтрации. Две главы этой книги посвящены определению орбит из наблюдений и оценке точности определяемых параметров.

Кроме МНК рассматриваются следующие методы: метод Ньютона, метод Гаусса – Ньютона, метод Левенберга – Марквардта, овражные методы. Также дается сравнительный анализ эффективности методов.

Стоит отметить оригинальный подход к алгоритмам фильтрации, принятый в работе (Бахшиян, Назиров и др., 1980). В ней рассматривается определение движения и управление им при дискретном характере измерительной информации и корректирующих воздействий. Особое внимание обращается на оценку точности получаемых результатов и оптимизацию стратегии решения рассматриваемых задач. При этом используется подход, гарантирующий достижение требуемой точности и надежности получаемых решений при условии, что функции распределения ошибок исходных данных точно не известны, а заданы лишь некоторые множества, которым могут принадлежать эти функции. Этим обеспечивается устойчивость получаемых результатов. Описывается аппарат математического программирования, используемый при решении рассматриваемых задач оптимизации.

Для знакомства с некоторыми обобщениями МНК можно обратиться к книге (Губанов, 1997). Она содержит систематическое изложение основ теории МНК и его обобщений — средней квадратичной коллокации и фильтрации Калмана. Рассмотрены основные типы параметрических и стохастических моделей данных измерений. Даны примеры применения обобщенной теории МНК к обработке радиоинтерферометрических наблюдений со сверхдлинными базами, к анализу вращательного движения Земли и др.

6.4. Вычисление измеряемых величин и частных производных от измеряемых величин по уточняемым параметрам

6.4.1. Общий порядок вычислений

В процессе дифференциального уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений требуется вычислять значения измеряемых величин и частных производных от измеряемых величин по уточняемым параметрам на моменты наблюдений. Эти вычисления делаются на основе принятого закона движения небесных тел. Закон движения описывается в какой-либо системе координат. Чаще всего это декартовы прямоугольные координаты x, y, z. Закон движения задается функциями

$$x = x(t, p_1, p_2, ..., p_j), \quad y = y(t, p_1, p_2, ..., p_j), \quad z = z(t, p_1, p_2, ..., p_j). \tag{6.29}$$

В предыдущем разделе введено понятие измеряемой величины. Наблюдения дают нам значения измеряемых величин на моменты измерений. Пусть ξ — одна из измеряемых величин.

Измеряемая величина связана с координатами небесного тела. Эта связь задается некоторой моделью измерений. Модель может включать в себя и некоторые другие параметры, обозначаемые через $p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n$. Модель наблюдений дает нам функцию

$$\xi = \xi(t, x, y, z, p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n). \tag{6.30}$$

Таким образом, в методе дифференциального уточнения параметров движения измеряемая величина ξ, как функция уточняемых параметров $p_1, p_2, ..., p_n$, является сложной функцией. Первоначально она задается как функция от прямоугольных координат небесного тела, которые в свою очередь в силу закона движения являются функциями времени t и параметров движения. Зависимость $\xi(t, x, y, z, ...)$ не связана с законом движения небесного тела, однако она включает в себя время t и параметры, которые также могут рассматриваться как уточняемые. В отличие от параметров движения небесного их называют параметрами условий наблюдений. Функция $\xi(t, x, y, z, ...)$ определяется только выбором измеряемой величины. В астрономической практике используется большое множество величин, измеряемых в процессе наблюдений. В настоящем разделе рассматриваются некоторые из них, и даются явные выражения для функции $\xi(t, x, y, z, p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n)$.

Далее рассматриваются зависимости измеряемых величин как от параметров условий наблюдений, так и от параметров движения. В итоге эти зависимости отображаются функцией времени t и всех уточняемых параметров

$$\xi = \xi(t, p_1, p_2, ..., p_n). \tag{6.31}$$

Именно эта функция используется для составления условных уравнений при уточнении параметров методом наименьших квадратов.

Для применения метода дифференциального уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений необходимо, кроме самих измеряемых величин, вычислять также частные производные от измеряемых величин по уточняемым параметрам. Порядок этих вычислений существенно зависит от того, как получается закон движения.

Вычисление координат небесного тела x, y, z делается либо по формулам построенной заранее аналитической теории движения, либо на основе численного интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Частные производные от измеряемых величин по уточняемым параметрам на моменты наблюдений вычисляются на основе рассмотренных выше зависимостей. Так как промежуточными величинами являются координаты небесного тела x, y, z, то для искомых производных можно записать следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial p_1} \\ \frac{\partial\xi}{\partial p_2} \\ \dots \\ \frac{\partial\xi}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p_1} & \frac{\partial y}{\partial p_1} & \frac{\partial z}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x}{\partial p_2} & \frac{\partial y}{\partial p_2} & \frac{\partial z}{\partial p_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x}{\partial p_n} & \frac{\partial y}{\partial p_n} & \frac{\partial z}{\partial p_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} \\ \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\xi}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{6.32}$$

Как видно из этих соотношений, вычислительная задача разделяется на две независимые части. В первой из них находятся значения частных прозводных от прямоугольных координат по параметрам движения небесного тела, т.е. матрица **A**. Во второй — производные от измеряемой величины по прямоугольным координатам небесного тела, матрица-столбец **B**.

Вектор **B** вычисляется по формулам, получаемым дифференцированием явного выражения для $\xi(x, y, z)$. Вычисление матрицы параметров **A** может выполняться для каждого момента наблюдений как по формулам, следующим из аналитической теории движения, так и в процессе численного интегрирования дифференциальных уравнений, специально построенных для частных производных от координат по параметрам движения. В последнем случае элементы матрицы **A** называют изохронными производными, поскольку их значения нам нужны на те же моменты времени, что и сами координаты. Дифференциальные уравнения для изохронных производных (они иногда называются уравнениями в вариациях) интегрируются совместно с уравнениями движения.

Заметим, что в вышеизложенных выкладках молчаливо предполагается, что измеряемая величина зависит только от координат небесного тела. Однако в практике уточнения параметров из наблюдений используются также измеряемые величины, зависящие от компонент вектора скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Примером может служить уточнение параметров движения искусственного спутника Земли на основе наземных радиотехнических доплеровских измерений. В этом случае измеряется лучевая скорость, т.е. скорость изменения топоцентрического расстояния спутника. В этом случае вектор-столбец **B** приобретет еще три элемента

$$\frac{\partial \xi}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \dot{z}},$$

а матрица **A** еще три соответствующих дополнительных столбца. Все дальнейшие рассуждения и выкладки будут аналогичны тому, что получается в случае зависимости измеряемой величины только от координат. Поскольку в практике наземных наблюдений спутников планет доплеровские наблюдения проводятся только в исключительных случаях, мы ограничимся далее рассмотрением зависимости измеряемой величины ξ лишь от декартовых прямоугольных координат спутника.

При изучении динамики естественных спутников планет в некоторых работах строятся и применяются аналитические теории движения. Закон движения находится как общее решение дифференциальных уравнений движения. Тогда координаты небесного тела представлены аналитическими функциями времени и параметров движения. В аналитических теориях параметры движения часто называют элементами орбиты, поскольку они связаны с моделью кеплеровского движения и кеплеровскими элементами. Элементы матрицы **A** в таких задачах получаются аналитическим дифференцированием прямоугольных координат по элементам орбиты. Формулы для этих производных обычно приводятся вместе с формулами для координат и компонент скорости небесного тела. Именно так сделано в настояшей книге. Выражения для указанных производных в случае эллиптического кеплеровского движения даны в разделе 3.2.4 Главы 3.

В следующих разделах сначала рассматриваются формулы для вычисления элементов матрицы **A** в различных конкретных задачах. Затем приводятся формулы для вычисления измеряемых величин ξ и частных производных от них по прямоугольным координатам и параметрам условий наблюдений для различных типов наблюдений. Даются некоторые рекомендации относительно составления условных уравнений.

6.4.2. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче трех тел. Уточнение начальных условий уравнений движения

Рассмотрим процедуру дифференциального уточнения параметров движения в случае задачи трех тел. Поскольку точного аналитического решения задачи трех тел до сих пор не найдено, уравнения движения в этой задаче решаются методами численного интегрирования.

В качестве параметров движения в этом случае чаще всего рассматривают начальные условия, то есть значения координат на некоторый начальный момент времени t_0. Уточняемыми параметрами могут быть также постоянные, которые входят в дифференциальные уравнения движения.

В рассматриваемой задаче определяются параметры движения второго тела относительно первого, которое считается главным, будучи наиболее массивным. Движение происходит под возмущающим действием третьего тела, движение которого задано координатами, как известными функциями времени.

В общем случае могут определяться из наблюдений параметры движения второго и третьего тела в едином процессе дифференциального уточнения. Тогда уравнения движения, а также уравнения для изменения изохронных производных второго и третьего тел интегрируются совместно.

Тела будем считать материальными точками. Начало системы невращающихся прямоугольных координат поместим в первое из тел. Координаты второго тела, движение которого изучается, в отличие от обычных обозначений, обозначим теперь через x_1, x_2, x_3. Координаты третьего, возмущающего тела обозначим через x'_1, x'_2, x'_3 .

Уравнения движения второго тела в принятых обозначениях запишутся в виде

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -Gm\frac{x_i}{r^3} - Gm'\left(\frac{x_i - x'_i}{\Delta^3} + \frac{x'_i}{r'^3}\right) = F_i \quad (i = 1, 2, 3)\ , \quad (6.33)$$

где G — универсальная гравитационная постоянная, m — масса первого тела, m' — масса возмущающего тела. Кроме того, мы используем следующие обозначения:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad r' = \sqrt{{x'_1}^2 + {x'_2}^2 + {x'_3}^2},$$

$$\Delta = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)}.$$

Уравнения движения третьего небесного тела могут быть записаны аналогично.

На практике вместо масс небесных тел рассматривают их гравитационные параметры $\mu = Gm$, $\mu' = Gm'$.

Заметим, что приводимые ниже формулы будут пригодны и для более общего случая, когда координаты возмущающего тела вычисляются на основе более сложной модели, учитывающей влияние других тел.

Параметрами изучаемого движения второго тела будут начальные условия, то есть координаты и компоненты скорости

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ \dot{x}_1^{(0)},\ \dot{x}_2^{(0)},\ \dot{x}_3^{(0)},$$

заданные на начальный момент времени t_0.

Искомые частные производные, необходимые для дифференциального уточнения параметров, образуют матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x_1^{(0)}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_1^{(0)}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_1^{(0)}} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial x_2^{(0)}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_2^{(0)}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2^{(0)}} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial x_3^{(0)}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_3^{(0)}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_3^{(0)}} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \dot{x}_1^{(0)}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \dot{x}_1^{(0)}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \dot{x}_1^{(0)}} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \dot{x}_2^{(0)}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \dot{x}_2^{(0)}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \dot{x}_2^{(0)}} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \dot{x}_3^{(0)}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \dot{x}_3^{(0)}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \dot{x}_3^{(0)}} \end{pmatrix}. \tag{6.34}$$

Для элементов этой матрицы можно составить дифференциальные уравнения путем дифференцирования левых и правых частей уравнений (6.33) по параметру. Выполняя последовательно эту операцию для каждого из параметров, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^{(0)}}\right)=\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_j^{(0)}}\ , \tag{6.35}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_j^{(0)}}\right)=\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \dot{x}_j^{(0)}}\ , \tag{6.36}$$

$$(i,j=1,2,3),$$

где

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_n}=Gm\frac{1}{r^3}\left(\frac{3}{r^2}x_ix_n-\delta_{in}\right)+Gm'\frac{1}{\Delta^3}\left[\frac{3}{\Delta^2}(x_i-x_i')(x_n-x_n')-\delta_{in}\right],$$

$$\delta_{in}=\begin{cases}1 & \text{при } \ i=n\\ 0 & \text{при } \ i\neq n\end{cases}\ .$$

Уравнения (6.35) и (6.36) можно записать в матричной форме. Для этого введем в рассмотрение матрицу

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2}\\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}. \tag{6.37}$$

Тогда уравнения (6.35) и (6.36) запишутся в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{A}=\mathbf{AF}. \tag{6.38}$$

Численное интегрирование уравнений (6.35) и (6.36) следует выполнять совместно с уравнениями движения (6.33). Начальные условия для уравнений (6.35) и (6.36) определяются матрицами

$$\mathbf{A_0} = \mathbf{A}|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.39}$$

$$\dot{\mathbf{A}}_0 = \dot{\mathbf{A}}|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.40}$$

Здесь точка над буквами означает дифференцирование по времени.

6.4.3. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче трех тел. Уточнение массы возмущающего тела

Рассмотрим движение второго из трех тел под действием притяжения первого тела и возмущающего влияния третьего гравитирующего тела. Из наблюдений движения второго тела можно определять параметры его движения. Кроме того, совместно с начальными условиями второго тела можно определять массу возмущающего тела. Такое определение следует делать обязательно совместно, поскольку при коррекции массы возмущающего тела параметры движения второго тела будут уже другими.

В такой задаче уточняемыми параметрами будут начальные условия, то есть координаты и компоненты скорости

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ \dot{x}_1^{(0)},\ \dot{x}_2^{(0)},\ \dot{x}_3^{(0)},$$

заданные на начальный момент времени t_0 для второго тела и гравитационный параметр μ' возмущающего тела. В этом случае к матрице (6.34) нужно добавить еще одну строку

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \mu'} & \frac{\partial x_2}{\partial \mu'} & \frac{\partial x_3}{\partial \mu'} \end{pmatrix}. \tag{6.41}$$

Для элементов этой строки можно составить следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \mu'}\right) = -\left(\frac{x_i - x_i'}{\Delta^3} + \frac{x_i'}{r'^3}\right) + \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \mu'} \ . \tag{6.42}$$

Тогда нужно интегрировать совместно уравнения движения (6.33), уравнения (6.35), (6.36) и (6.42). Начальными условиями для переменных (6.41) будут

$$\begin{gathered} \frac{\partial x_1}{\partial \mu'}\Big|_{t=t_0} = 0,\ \frac{\partial x_2}{\partial \mu'}\Big|_{t=t_0} = 0,\ \frac{\partial x_3}{\partial \mu'}\Big|_{t=t_0} = 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \mu'}\right)\Big|_{t=t_0} = 0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \mu'}\right)\Big|_{t=t_0} = 0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_3}{\partial \mu'}\right)\Big|_{t=t_0} = 0. \end{gathered} \tag{6.43}$$

6.4.4. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче о движении спутника сжатой планеты

Рассмотрим процедуру дифференциального уточнения параметров движения спутника в случае учета возмущений от несферичности планеты. В этой задаче возмущения элементов промежуточной орбиты спутника могут определяться методами теории возмущений в аналитическом виде. Однако уравнения движения спутника могут также решаться численным интегрированием. В таком случае в качестве параметров движения рассматривают начальные условия, то есть значения координат на некоторый начальный момент времени t_0.

Силовую функцию притяжения несферичной планеты используют в форме разложения в ряд по сферическим функциям. Это разложение подробно рассмотрено в Главе 3 (раздел 3.3) настоящей книги. Поскольку разложение силовой функции в этом случае записывается в системе координат, связанной с осью симметрии сжатого тела, то в разложении фигурируют прямоугольные координаты в системе с основной плоскостью, совпадающей с плоскостью экватора планеты. Обозначим эти координаты через $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$,

$\overline{x}_3$. Однако в ряде задач оказывается, что необходимо решать уравнения движения относительно координат x_1, x_2, x_3, не связанных с экватором планеты.

Связь координат в двух системах задается соотношением

$$\{x_1, x_2, x_3\}^T = \mathbf{R_0}\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3\}^T,$$

где матрица $\mathbf{R_0}$ описана в Главе 3 (раздел 3.3).

Возьмем сначала для простоты рассмотрения в разложении силовой функции только главный член, описывающий динамическое сжатие планеты, а именно, вторую зональную гармонику. Для других членов этого разложения уравнения для изохронных производных могут быть выведены аналогично.

Уравнения движения с учетом второй зональной гармоники разложения силовой функции притяжения планеты запишем в следующей форме:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i \quad (i = 1, 2, 3)\ , \tag{6.44}$$

где

$$\{F_1, F_2, F_3\}^T = \mathbf{R_0}\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\}^T,$$

причем в экваториальной системе координат $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\}$ согласно формулам в разделе 3.3 настоящей книги имеют вид

$$\overline{F}_i = -\mu\frac{\overline{x}_i}{r^3} + \frac{3}{2}\mu J_2 \frac{r_0^2}{r^5}\overline{x}_i\left(5\frac{\overline{x}_3^2}{r^2} - e_i\right) \quad (i = 1, 2, 3)\ , \tag{6.45}$$

где μ — гравитационный параметр планеты, J_2 — коэффициент при второй зональной гармонике разложения силовой функции притяжения планеты, r_0 — средний экваториальный радиус планеты. Кроме того, мы используем следующие обозначения:

$$r = \sqrt{\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + \overline{x}_3^2},$$

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = 3.$$

Параметрами изучаемого движения спутника будут начальные условия, то есть координаты и компоненты скорости

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ \dot{x}_1^{(0)},\ \dot{x}_2^{(0)},\ \dot{x}_3^{(0)},$$

заданные на начальный момент времени t_0.

Искомые частные производные, необходимые для дифференциального уточнения параметров, образуют матрицу вида (6.34). Для элементов этой матрицы можно составить дифференциальные уравнения путем дифференцирования левых и правых частей уравнений (6.45) по параметру. Выполняя последовательно эту операцию для каждого из параметров, получим систему уравнений, которую запишем здесь в матричной форме:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{R_0}\overline{\mathbf{F}} \cdot \left(\mathbf{R_0}^T\right), \tag{6.46}$$

где матрица $\overline{\mathbf{F}}$, аналогичная матрице (6.37), имеет общий вид

$$\overline{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial \overline{x}_1} & \frac{\partial \overline{F}_2}{\partial \overline{x}_1} & \frac{\partial \overline{F}_3}{\partial \overline{x}_1} \\ \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial \overline{x}_2} & \frac{\partial \overline{F}_2}{\partial \overline{x}_2} & \frac{\partial \overline{F}_3}{\partial \overline{x}_2} \\ \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial \overline{x}_3} & \frac{\partial \overline{F}_2}{\partial \overline{x}_3} & \frac{\partial \overline{F}_3}{\partial \overline{x}_3} \end{pmatrix} \tag{6.47}$$

с элементами, определяемыми по формулам

$$\frac{\partial \overline{F}_i}{\partial \overline{x}_n} = \mu \frac{1}{r^3}\left(\frac{3}{r^2}\overline{x}_i\overline{x}_n - \delta_{in}\right) +$$

$$+\frac{3}{2}\mu J_2 \frac{r_0^2}{r^5}\left[\left(5\frac{\overline{x}_3^2}{r^2} - e_i\right)\delta_{in} - 35\frac{x_3^2}{r^4}\overline{x}_i\overline{x}_n + 10\frac{\overline{x}_3\overline{x}_i}{r^2}f_n + 5\frac{\overline{x}_i\overline{x}_n}{r^2}e_i\right], \tag{6.48}$$

где введено обозначение

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 1\,,$$

а δ_{in} — символ Кронекера: $\delta_{in} = 1$ при $i = n$ и $\delta_{in} = 0$ при $i \neq n$.

Начальными условиями при интегрировании уравнений (6.46) следует взять (6.39), (6.40).

Заметим, что в случаях, когда главным фактором, влияющим на движение спутника, является сжатие планеты, основную систему координат x, y, z можно связать с экватором планеты. Тогда координаты $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ совпадают с координатами x, y, z, компоненты ускорения $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ совпадают с компонентами F_1, F_2, F_3, матрица $\mathbf{R_0}$ оказывается единичной матрицей, и матрица (6.47) совпадает с матрицей (6.37).

Если при решении окажется, что необходимо учитывать также четвертую зональную гармонику разложения силовой функции притяжения планеты, то в правые части уравнений (6.45) и (6.48) нужно добавить соответствующие члены. В обозначениях, принятых выше, эти добавочные члены имеют вид

$$\overline{F}_i = ... \quad + A\left(a_i \frac{\overline{x}_i}{r^7} + b_i \frac{\overline{x}_3^2 \overline{x}_i}{r^9} + c\frac{\overline{x}_3^4 \overline{x}_i}{r^{11}}\right) \ ,$$

где

$$A = \frac{5}{8}\mu r_0^4 J_4 \ ,$$

$$a_1 = 3, \quad , a_2 = 3, \quad , a_3 = 15, \quad ,$$

$$b_1 = -42, \quad , b_2 = -42, \quad , b_3 = -70, \quad ,$$

$$c = 63$$

и для уравнений (6.48)

$$\frac{\partial \overline{F}_i}{\partial \overline{x}_n} = ... \quad + A\left(a_i F_{in}^{(1)} + b_i F_{in}^{(2)} + cF_{in}^{(3)}\right) \ ,$$

где

$$F_{in}^{(1)} = \frac{\delta_{in}}{r^7} - \frac{7\overline{x}_i \overline{x}_n}{r^9}$$

$$F_{in}^{(2)} = \frac{\overline{x}_3^2 \delta_{in}}{r^9} - \frac{9\overline{x}_3^2 \overline{x}_i \overline{x}_n}{r^{11}} + f_n \frac{2\overline{x}_3 \overline{x}_i}{r^9}$$

$$F_{in}^{(3)} = \frac{\overline{x}_3^4 \delta_{in}}{r^{11}} - \frac{11\overline{x}_3^4 \overline{x}_i \overline{x}_n}{r^{13}} + f_n \frac{4\overline{x}_3^3 \overline{x}_i}{r^{11}} \ .$$

Причем δ_{in} — символ Кронекера.

6.4.5. Построение условных уравнений при угловых измерениях топоцентрических координат

Построение условных уравнений для дифференциального уточнения параметров орбит небесных тел из наблюдений связано с вычислением частных производных от измеряемой величины по координатам небесного тела. В разделе 6.4.1 эти производные составляют компоненты вектора-столбца **B**. Разумеется, эти производные зависят от типа наблюдений и типа измеряемой величины. В данном разделе рассмотрим вычисления для случаев угловых топоцентрических измерений.

В Главе 5 введено понятие вектора наблюдения. Начало этого вектора расположено в точке наблюдения — топоцентре, а конец — в центре наблюдаемого тела. Обозначим компоненты вектора наблюдения через X, Y, Z. В соответствие вектору наблюдения ставят геоэкваториальные угловые координаты: прямое восхождение α и склонение δ. Связь угловых и прямоугольных координат описывается формулами

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{X}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Если измеряемыми величинами являются прямое восхождение и склонение, то формулы для частных производных от измеряемых величин по прямоугольным топоцентрическим координатам имеют вид

$$\frac{\partial\alpha}{\partial X} = \frac{-\sin\alpha}{R\cos\delta}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial Y} = \frac{\cos\alpha}{R\cos\delta}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial Z} = 0,$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial X} = \frac{-\cos\alpha\sin\delta}{R}, \quad \frac{\partial\delta}{\partial Y} = \frac{-\sin\alpha\sin\delta}{R}, \quad \frac{\partial\delta}{\partial Z} = \frac{\cos\delta}{R},$$

где $R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$.

Модель движения планеты дает нам прямоугольные барицентрические координаты планеты на заданные моменты времени. Модель движения спутника планеты представляет планетоцентрические прямоугольные координаты. Если оси всех рассматриваемых систем взаимно параллельны, то давая им общее обозначение x, y, z, можно представить выражения для частных производных от измеряемых прямого восхождения и склонения по координатам планеты или спутника в следующем виде:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{-\sin\alpha}{R\cos\delta}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\cos\alpha}{R\cos\delta}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial x} = \frac{-\cos\alpha\sin\delta}{R}, \quad \frac{\partial\delta}{\partial y} = \frac{-\sin\alpha\sin\delta}{R}, \quad \frac{\partial\delta}{\partial z} = \frac{\cos\delta}{R}.$$

В этих формулах для случая наблюдения планеты x, y, z суть прямоугольные барицентрические координаты планеты, а при наблюдениях спутника x, y, z — это прямоугольные планетоцентрические координаты спутника. В любом случае R есть топоцетрическое расстояние наблюдаемого объекта.

Если измеряются разности прямых восхождений и склонений спутника и планеты, или двух спутников $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2$, то частные производные от измеряемых величин по координатам тел выражаются формулами

$$\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial x_1} = \frac{-\sin\alpha_2}{R\cos\delta_2}, \quad \frac{\partial\Delta\alpha}{\partial y_1} = \frac{\cos\alpha_2}{R\cos\delta_2}, \quad \frac{\partial\Delta\alpha}{\partial z_1} = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta\delta}{\partial x_1} = \frac{-\cos\alpha_2\sin\delta_2}{R}, \quad \frac{\partial\Delta\delta}{\partial y_1} = \frac{-\sin\alpha_2\sin\delta_2}{R}, \quad \frac{\partial\Delta\delta}{\partial z_1} = \frac{\cos\delta_2}{R},$$

$$\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial x_2} = \frac{\sin\alpha_2}{R\cos\delta_2}, \quad \frac{\partial\Delta\alpha}{\partial y_2} = \frac{-\cos\alpha_2}{R\cos\delta_2}, \quad \frac{\partial\Delta\alpha}{\partial z_2} = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta\delta}{\partial x_2} = \frac{\cos\alpha_2\sin\delta_2}{R}, \quad \frac{\partial\Delta\delta}{\partial y_2} = \frac{\sin\alpha_2\sin\delta_2}{R}, \quad \frac{\partial\Delta\delta}{\partial z_2} = -\frac{\cos\delta_2}{R},$$

где нижний индекс означает номер объекта, а R есть топоцентрическое расстояние соответствующего объекта. Если вторым объектом является планета, то координаты x_2, y_2, z_2 в задаче не фигурируют.

Рассмотрим здесь одну модификацию формул для частных производных от измеряемых величин, которая часто применяется на практике. Запишем здесь снова условные уравнения в том виде, как они выведены в разделе 6.1 :

$$\Delta\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial\xi}{\partial p_k}\right)_i \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots\ , \ m). \tag{6.49}$$

Здесь ξ — общее обозначение для измеряемой величины, $p_1, p_2, ...p_n$ — для уточняемых параметров, а m — число наблюдений.

Примем во внимание тот факт, что погрешность моделирования движения планет и спутников в прямоугольных координатах не зависит от того, как мы их наблюдаем. Однако на различных топоцентрических расстояниях эта погрешность будет по-разному проявляться в измеряемых угловых координатах: прямом восхождении и склонении. Чтобы вклад погрешности в левые части условных уравнений стал независимым от топоцентрического расстояния R, нужно умножить каждое условное уравнение на R. Аналогичные рассуждения относительно наблюдений на различных склонениях небесного тела приводят к выводу, что условные уравнения при измерениях прямого восхождения α нужно умножать на $\cos\delta$. Теперь, учитывая вышеуказанные обстоятельства и придавая измеряемой величине ξ поочередно конкретный смысл $\xi = \alpha$, $\xi = \delta$, запишем условные уравнения в виде

$$R\cos\delta\Delta\alpha'_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_k}\right)'_i \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots\ , \ m), \tag{6.50}$$

$$R\Delta\delta'_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial\delta}{\partial p_k}\right)'_i \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots\ , \ m), \tag{6.51}$$

где

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\right)' \\ \left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\right)' \\ \dots \\ \left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_n}\right)' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}'_\alpha, \quad \mathbf{B}'_\alpha = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.52}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\delta}{\partial p_1}\right)' \\ \left(\frac{\partial\delta}{\partial p_2}\right)' \\ \dots \\ \left(\frac{\partial\delta}{\partial p_n}\right)' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}'_\delta, \quad \mathbf{B}'_\delta = \begin{pmatrix} -\cos\alpha\sin\delta \\ -\sin\alpha\sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix}. \tag{6.53}$$

Здесь матрица $\mathbf{A}$ описана выше. В левых частях равенств (6.50) и (6.51) $\Delta\alpha'_i$ и $\Delta\delta'_i$ суть разности измеренных и вычисленных значений измеряемых величин, которыми могут быть как сами прямые восхождения и склонения одного небесного тела α, δ, так и их разности для двух тел, например, спутника и планеты или двух спутников $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2$. В последнем случае, если условное уравнение строится относительно параметров второго небесного тела, то элементы векторов-столбцов $\mathbf{B}'_\alpha$, $\mathbf{B}'_\delta$, нужно взять с обратным знаком.

В практике уточнения параметров движения из наблюдений вместо измеряемой величины $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ часто используется величина $X_d = \Delta\alpha\cos\delta_2$. Для единообразного обозначения к ней добавляется $Y_d = \Delta\delta$. В этом случае условные уравнения (6.50) и (6.51) записываются в следующем виде:

$$R\,\Delta X_d^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_k}\right)_i' \Delta p_k, \quad (i = 1, 2,\ \ldots\ ,\ m), \tag{6.54}$$

$$R\,\Delta Y_d^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial\delta}{\partial p_k}\right)_i' \Delta p_k, \quad (i = 1, 2,\ \ldots\ ,\ m), \tag{6.55}$$

где $\Delta X_d^{(i)}$ и $\Delta Y_d^{(i)}$ суть разности измеренных и вычисленных значений X_d и Y_d, соответственно, на момент наблюдения t_i.

Рассмотрим теперь, как построить условные уравнения, если измеряются взаимное угловое расстояние между двумя телами s и соответствующий позиционный угол P. В этом случае условные уравнения имеют вид

$$R\,\Delta s_i = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{X_d^{(i)}}{s_i}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_k}\right)_i' + \frac{Y_d^{(i)}}{s_i}\left(\frac{\partial\delta}{\partial p_k}\right)_i'\right] \Delta p_k, \quad (i = 1, 2,\ \ldots\ ,\ m), \tag{6.56}$$

$$R\,s_i\Delta P_i = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{Y_d^{(i)}}{s_i}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_k}\right)_i' - \frac{X_d^{(i)}}{s_i}\left(\frac{\partial\delta}{\partial p_k}\right)_i'\right] \Delta p_k,\ (i = 1, 2,\ \ldots\ ,\ m), \tag{6.57}$$

где Δs_i и ΔP_i суть разности измеренных и вычисленных значений s и P, соответственно, а индекс i означает, что величины берутся на момент наблюдения t_i.

В формулах (6.54), (6.55), (6.56), (6.57) частные производные вычисляются с помощью соотношений (6.52), (6.53).

Для тангенциальных координат X_t, Y_t, s_t, P_t условные уравнения строятся аналогично.

При построении условных уравнений в рассматриваемых задачах следует учитывать, что коэффициенты при поправках Δp_k, $(i = 1, 2,\ \ldots,\quad m)$ могут вычисляться в некоторой степени приближенно, поскольку уточнение может выполняться последовательными приближениями несколько раз. Однако значения измеряемых величин должны вычисляться с максимально возможной точностью, т.к. в последовательных приближениях разности измеренных и вычисленных значений измеряемой величины должны стремиться к нулю.

6.5. Назначение весов наблюдениям и условным уравнениям

Для обоснованного применения метода наименьших квадратов необходимо, чтобы гипотеза, принимаемая по отношению к ковариационной матрице ошибок наблюдений, была максимально близкой к действительности. Недиагональные элементы ковариационной матрицы на практике чаще всего бывают неизвестными. Поэтому их просто приравнивают нулю. Что касается диагональных элементов, то они характеризуют точность наблюдений, которая может различаться для разных наблюдений. Однако диагональные элементы можно сделать равными, если подходящим образом назначить веса наблюдениям.

Возьмем условные уравнения метода наименьших квадратов, которые были рассмотрены в разделе 6.1 для случая равноточных наблюдений :

$$\Delta\xi_i = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \, \dots \, , \, m). \tag{6.58}$$

Здесь $\Delta\xi_i$ — разность измеренного и вычисленного значений измеряемой величины при наблюдении номер i, Δp_1, Δp_2, ..., Δp_n суть уточняемые параметры, а $a_k^{(i)}$ — численные коэффициенты условных уравнений. Набор уточняемых параметров можно предстапвить вектором $\boldsymbol{\Delta} p = \{\Delta p_1, \, \Delta p_2, \, ..., \, \Delta p_n\}^T$.

Для решения задачи согласно методу наименьших квадратов нужно составить систему нормальных уравнений, которую запишем в виде

$$\mathbf{L} \, \boldsymbol{\Delta} p = \mathbf{d} \, ,$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{d}$ суть матрица и вектор

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{pmatrix}, \tag{6.59}$$

элементы которых вычисляются по формулам

$$l_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)} a_j^{(i)} \quad (k, j = 1, 2,\ \dots,\ n), \tag{6.60}$$

$$d_k = \sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)} \Delta\xi_i \quad (k = 1, 2,\ \dots,\ n). \tag{6.61}$$

Веса наблюдений $w_i \ \ (i = 1, 2, ..., m)$ вводятся следующим образом. Умножая условные уравнения (6.58) почленно на $\sqrt{w_i}$, получим

$$\Delta\xi_i \sqrt{w_i} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{w_i}\, a_k^{(i)} \Delta p_k, \quad (i = 1, 2,\ \dots,\ m). \tag{6.62}$$

Вместо (6.60), (6.61) берем формулы

$$l_{kj} = \sum_{i=1}^{m} w_i\, a_k^{(i)} a_j^{(i)} \quad (k, j = 1, 2,\ \dots,\ n), \tag{6.63}$$

$$d_k = \sum_{i=1}^{m} w_i\, a_k^{(i)} \Delta\xi_i \quad (k = 1, 2,\ \dots,\ n). \tag{6.64}$$

Далее решение получается так же, как и для равноточных наблюдений.

Ковариационная матрица ошибок наблюдений будет иметь равные диагональные элементы, если ошибки левых частей условных уравнений (6.62) будут примерно одинаковыми для всех i. Сделать так можно было бы, если погрешности величин $\Delta\xi_i$ были бы известными. Достичь указанного свойства ковариационной матрицы можно, если положить

$$\sqrt{w_i} = \frac{1}{\sigma_i},$$

где σ_i есть ошибка измерения с номером i.

Проблема в том, что обычно мы не знаем ошибок σ_i. Придется принимать какую-нибудь подходящую гипотезу относительно ошибок измерений. Предположим, что все наблюдения можно распределить на группы так, чтобы внутри каждой группы наблюдения можно было бы считать равноточными. Можно предположить, что группа наблюдений на одной обсерватории выполняются одним наблюдателем с помощью одного и того же инструмента в течение некоторого времени, когда условия наблюдений не изменяются.

Сначала выполняем уточнение параметров, полагая все $w_i = 1$. После уточнения для каждого наблюдения величина $\Delta\xi_i$ будет характеризовать согласование теории с наблюдениями. Предполагая, что ошибки наблюдений доминируют над ошибками теории, будем считать $\Delta\xi_i$ ошибками наблюдений.

Теперь для каждой группы по предположению равноточных наблюдений вычислим среднеквадратичную величину от всех $\Delta\xi_i$, принадлежащих группе. Обозначим ее через σ_k, где k — номер группы. Теперь для каждого наблюдения можно задать вес следующим образом:

$$\sqrt{w_i} = \frac{1}{\sigma_k},$$

где k — номер группы, к которой принадлежит наблюдение номер i.

Выполнив уточнение параметров с назначенными весами, можно заново вычислить все ошибки наблюдений и заново назначить веса. Такую итерацию можно сделать 2–3 раза. В итоге получим назначение весов в согласии с точностью наблюдений, и ковариационную матрицу ошибок наблюдений, близкую к действительной.

Метод наименьших квадратов дает возможность оценить точность получаемых значений уточняемых параметров. В разделе 6.1 объяснено, как это сделать. В случае взвешенных условных уравнений последовательность действий такая же, как и без назначения весов. Матрица нормальных уравнений и вектор правых частей находятся по формулам (6.63), (6.64). Дополнительно вычисляется величина

$$d_0 = \sum_{i=1}^{m} w_i \Delta\xi_i^2. \tag{6.65}$$

Вычисляем

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{m-n}\left[d_0 - (\mathbf{d}\boldsymbol{\Delta}p)\right], \tag{6.66}$$

где $\boldsymbol{\Delta}p$ найденный вектор поправок, а компоненты вектора $\mathbf{d}$ определяются по формуле (6.64). Умножим теперь все элементы матрицы $\mathbf{L}^{-1}$ на σ_0^2. Полученная таким образом матрица

$$\mathbf{D} = \sigma_0^2\mathbf{L}^{-1} \tag{6.67}$$

своими диагональными элементами будет иметь квадраты ошибок σ_k поправок Δp_k $(k = 1, 2, ..., n)$ соответственно.

6.6. Вычисление статистических характеристик невязок

В описании метода дифференциального уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений фигурируют величины δ_i $(i = 1, 2, ...m)$, называемые невязками. Они определены соотношениями (6.12). Здесь m — это число измерений. После успешного уточнения параметров, когда поправки к ним становятся пренебрежимо малыми, невязки оказываются равными отклонениям $\Delta\xi_i$, характеризующим согласование теории с наблюдениями. Фактически эти величины содержат ошибки наблюдений и ошибки модели движения небесного тела.

На практике всегда интересуются статистическими характеристиками невязок $\Delta\xi_i$. Они несут полезную информацию для дальнейшего совершенствования как модели движения, так и методов наблюдений. Сначала анализируется средняя арифметическая величина невязок

$$\overline{\Delta\xi} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Delta\xi_i.$$

Существенное отличие этой величины от нуля показывает наличие в результатах наблюдений систематической ошибки, которая может быть вызвана несовершенством наблюдательных приборов или неправильной процедурой предварительной обработки наблюдений. Близость величины $\overline{\Delta\xi}$ к нулю еще не говорит об общем качестве наблюдений.

Далее анализу подвергается среднеквадратичная величина отлонений $\Delta\xi_i$. Она определяется по уже приведенной выше формуле (6.27)

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{d_0}{m}}\ , \tag{6.68}$$

в которой величина d_0 должна вычисляться согласно ее выражению (6.22). Эта характеристика включает в себя как систематические, так и случайные ошибки наблюдений.

В наборе используемых наблюдений могут быть как точные, так и грубые наблюдения. В этом случае в величину суммы (6.22) основной вклад внесут грубые наблюдения с большими невязками.

Если же мы применяем веса наблюдений, то характеристика $\overline{\sigma}$ не будет соответствовать способу использования данных. Тогда можно анализировать так называемую средневзвешенную величину невязок $\overline{\sigma}_w$, которая вычисляется по той же формуле (6.68), но в которую подставлена величина d_0, определяемая соотношением (6.65).

Чтобы отделить систематическую составляющую невязок от случайной, вычисляют так называемую несмещенную дисперсию случайных невязок $D(\Delta\xi)$, которая определяется по формуле

$$D(\Delta\xi) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\Delta\xi_i - \overline{\Delta\xi})^2.$$

Квадратный корень из дисперсии

$$\sigma = \sqrt{D(\Delta\xi)} \tag{6.69}$$

называется стандартным отклонением. Эта величина характеризует случайную составляющую ошибок наблюдений.

В алгоритмах, реализуемых на практике, оказывается нерациональным запасать в памяти все невязки $\Delta\xi_i \quad (i = 1, 2, ...m)$, чтобы затем вычислить статистические характеристики $\overline{\Delta\xi}$, $\overline{\sigma}$, σ. Особенно затруднительно это делать при очень большом числе наблюдений. В процессе вычислений наблюдения просматриваются последовательно одно за другим. Память, отводимая для обработки одного наблюдения, затем используется для обработки следующего. В этом процессе можно использовать рекуррентные соотношения для искомых характеристик. Допустим, что мы вычислили $\overline{\Delta\xi}$, $\overline{\sigma}$, σ для k наблюдений. Обозначим полученные значения через $\overline{\Delta\xi}^{(k)}$, $\overline{\sigma}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, соответственно. При добавлении еще одного наблюдения с номером $k+1$, то есть невязки $\Delta\xi_{k+1}$, новые, следующие значения характетистик $\overline{\Delta\xi}^{(k+1)}$, $\overline{\sigma}^{(k+1)}$, $\sigma^{(k+1)}$ можно найти из рекуррентных соотношений

$$\overline{\Delta\xi}^{(k+1)} = \frac{1}{k+1}(k\,\overline{\Delta\xi}^{(k)} + \Delta\xi_{k+1}),$$

$$\overline{\sigma}^{(k+1)} = \sqrt{\frac{1}{k+1}(k\,{\overline{\sigma}^{(k)}}^2 + {\Delta\xi_{k+1}}^2)},$$

$$\sigma^{(k+1)} = \sqrt{\frac{1}{k}\left[k\,{\overline{\sigma}^{(k)}}^2 - \frac{1}{k+1}\left(k\,\overline{\Delta\xi}^{(k)} + \Delta\xi_{k+1}\right)^2 + {\Delta\xi_{k+1}}^2\right]}.$$

6.7. Проблема отбраковки грубых наблюдений

Наличие ошибок наблюдений создает трудности при определении параметров движения спутников на основе наблюдений. Причем проблема состоит не столько в наличии ошибок, сколько в неопределенности их свойств. Чаще всего у нас об этом нет никакой информации. Остается только принимать те или иные гипотезы.

Среди конкретных ошибок наблюдений могут оказаться такие значительные, которые вызваны не реальной погрешностью измерений, а выдающимся редким событием, несвойственным для всего ряда наблюдений. Распознать наблюдения с такими ошибками бывает практически невозможно.

Многие исследователи поступают так. Задают уровень вероятности того, что величина ошибки наблюдения заключена в некоторых пределах. Пределы находят по среднеквадратичной величине невязок наблюдений σ. После вычисления σ по всем наблюдениям задают некоторый множитель $\varkappa$. Далее все наблюдения, для которых невязки превышают $\varkappa\sigma$, отбрасывают. Чаще всего берут $\varkappa = 3$. При этом обеспечивается некоторый уровень вероятности, что ошибки заключены в пределах $(-\varkappa\sigma, \varkappa\sigma)$. Эта вероятность зависит еще от количества уточняемых параметров, вовлеченных в процесс. После такой отбраковки наблюдений можно снова вычислить σ и повторить процесс отбраковки. При этом могут быть отброшены новые наблюдения. При повторении процесса несколько раз нет гарантии того, что на каком-то этапе новых отброшенных наблюдений не будет. Если такой процесс остановился (новые наблюдения не были отброшены), то нет уверенности, что были отброшены именно те грубые наблюдения, ошибки которых представляют собой исключительные нетипичные события. На практике множитель $\varkappa$ выбирают в пределах от 3 до 6.

Давно разработана «Теория ошибок». Это научная дисциплина, которая имеет целью определение наиболее надежных результатов измерений в экспериментальных науках. Ее можно считать соответствующим приложением статистического метода. Об истории этой науки можно узнать из книги (Шейнин, 2007). Однако и эта теория не дает однозначного алгоритма отбраковки грубых наблюдений при отсутствии данных о свойствах ошибок. Процесс отбраковки наблюдений остается неопределенным.

В книге (Шейнин, 2007) подробно рассказывается, как рассуждали и поступали с отбраковкой грубых наблюдений математикиклассики. Например, приводится цитата Гаусса: «... если слишком проворно отбрасывать наблюдения, возникнет опасность преувеличить их точность. Мне представляется, что это занятие более похоже на поступки в жизни, где редко или никогда не имеется математической строгости и где приходится поступать по наилучшему продуманному усмотрению».

Так что единственная существующая рекомендация — это «поступать по наилучшему продуманному усмотрению». На практике опытные исследователи так и делают. Имея некоторую неформализованную информацию о наблюдениях, выбирают либо подходящий множитель $\varkappa$ в вышеописанном методе, либо устанавливают некоторый предел σ_{lim} и отбрасывают все наблюдения, для которых невязка превышает σ_{lim}.

Больше нам порекомендовать нечего.

Литература к Главе 6

Авдюшев В. А., Баньщикова М. А. Определение орбит близких спутников Юпитера. Астрономический вестник. 2008. Т. 42. № 4. С. 317–340.

Авдюшев В. А., Баньщикова М. А. Альтернативные орбиты новых спутников Юпитера. Известия вузов. Физика. 2010. № 10. С. 27–30.

Авдюшев В. А. Численное моделирование орбит небесных тел. Томск: Издательский дом Томского государственного университета, 2015.

Бахшиян Б. Ц., Назиров Р. Р. и др. Определение и коррекция движения. М.: Наука. 1980.

Губанов В. С. Обобщенный метод наименьших квадратов. СПб.: Наука. 1997.

Емельянов Н. В. Методы составления алгоритмов и программ в задачах небесной механики. М.: Наука, 1983.

Шейнин, О. Б. История теории ошибок. Берлин, 2007. 141 с.

Щиголев Б. М. Математическая обработка наблюдений.3-е изд. М.: Наука, 1969.

Эльясберг П. Е. Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976.