Н.В.Емельянов

ДИНАМИКА ЕСТЕСТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ НА ОСНОВЕ НАБЛЮДЕНИЙ

ГАИШ МГУ - 2019

Приложение 3

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

Функции наклона

Функции наклона $F_{k,m,p}(i)$ появляются в теории возмущенного движения спутника при разложении возмущающей функции, обусловленной несферичностью планеты, или от притяжения внешнего тела. Направление радиус-вектора спутника однозначно определяется его широтой φ и долготой, отсчитываемой от восходящего узла орбиты, т.е. $\lambda-\Omega$. Направление радиус-вектора спутника также однозначно определяется наклоном орбиты i и аргументом широты u (угол между радиус-вектором и направлением на восходящий узел). Между этими парами углов справедливы соотношения

$$\sin\varphi = \sin i \sin u,$$

$$\cos\varphi\cos(\lambda-\Omega) = \cos u,$$

$$\cos\varphi\sin(\lambda-\Omega) = \cos i \sin u.$$

При разложении возмущающей функции возникает некоторая функция

$$Q_{km} = P_k^{(m)}(\sin\varphi)\exp\sqrt{-1}m(\lambda-\Omega),$$

зависящая от φ и $\lambda-\Omega$. Используя последние соотношения эту функцию можно выразить через i и u следующим образом:

$$Q_{km} = \left(\sqrt{-1}\right)^{m-k+2E\left(\frac{k-m}{2}\right)} \sum_{p=0}^{k} F_{kmp}(i)\exp\sqrt{-1}(k-2p)u, \quad (\text{П3.1})$$

где $F_{kmp}(i)$ — специальные функции небесной механики, называемые функциями наклона. В этом выражении использовано обозначение $E(...)$ - целая часть числа.

Выражение для $F_{kmp}(i)$ для любых значений индексов через $\sin i$ и $\cos i$ имеет вид

$$F_{kmp}(i) = \sum_t \frac{(2k-2t)!}{t!(k-t)!(k-m-2t)!2^{2k-2t}} \sin^{k-m-2t} i \times$$

$$\sum_{s=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ s \end{array} \right) \cos^s i \sum_c \left(\begin{array}{c} k-m-2t+s \\ c \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} m-s \\ p-t-c \end{array} \right) (-1)^{c-E_{km}}.$$

Здесь E_{km} — целая часть $(k-m)/2$, t изменяется от 0 до p или E_{km} (в зависимости от того, что меньше), а суммирование выполняется по всем значениям c, при которых биномиальные коэффициенты отличны от нуля.

В статье (Брумберг, 1967) можно найти выражение для $F_{kmp}(i)$ через $\sin i/2$ и $\cos i/2$. В публикации (Фоминов, Филенко, 1978) даются удобные формулы для вычисления функций наклона и их производных, а также соответствующие вычислительные программы. При необходимости определения функций наклона для больших значений индексов можно воспользоваться методом, основанном на специальных рекуррентных соотношениях, изложенным в работе (Емельянов, 1985). Эффективный метод вычисления функций наклона с помощью рекуррентных соотношений предложен в работе (Emelianov, Kanter, 1989).

Ниже приводятся явные выражения для функций наклона с индексами $k = 2, 3, 4$, $m = 0, 1, ..., k$, $p = 0, 1, ..., k$.

$$\begin{array}{ll}
F_{200}(i) = -\frac{3}{8}\sin^2 i, & F_{201}(i) = \frac{3}{4}\sin^2 i - \frac{1}{2}, \\
F_{202}(i) = -\frac{3}{8}\sin^2 i, & F_{210}(i) = \frac{3}{4}\sin i(1+\cos i), \\
F_{211}(i) = -\frac{3}{2}\sin i\cos i, & F_{212}(i) = -\frac{3}{4}\sin i(1-\cos i), \\
F_{220}(i) = \frac{3}{4}(1+\cos i)^2, & F_{221}(i) = \frac{3}{2}\sin^2 i, \\
F_{222}(i) = \frac{3}{4}(1-\cos i)^2, &
\end{array}$$

$$F_{300}(i) = -\tfrac{5}{16}\sin^3 i,$$

$$F_{301}(i) = \tfrac{15}{16}\sin^3 i - \tfrac{3}{4}\sin i,$$

$$F_{302}(i) = -\tfrac{15}{16}\sin^3 i + \tfrac{3}{4}\sin i,$$

$$F_{303}(i) = \tfrac{5}{16}\sin^3 i,$$

$$F_{310}(i) = -\tfrac{15}{16}\sin^2 i(1+\cos i),$$

$$F_{311}(i) = \tfrac{15}{16}\sin^2 i(1+3\cos i) - \tfrac{3}{4}(1+\cos i),$$

$$F_{312}(i) = \tfrac{15}{16}\sin^2 i(1-3\cos i) - \tfrac{3}{4}(1-\cos i),$$

$$F_{313}(i) = -\tfrac{15}{16}\sin^2 i(1-\cos i),$$

$$F_{320}(i) = \tfrac{15}{8}\sin i(1+\cos i)^2,$$

$$F_{321}(i) = \tfrac{15}{8}\sin i(1-2\cos i-3\cos^2 i),$$

$$F_{322}(i) = -\tfrac{15}{8}\sin i(1+2\cos i-3\cos^2 i),$$

$$F_{323}(i) = -\tfrac{15}{8}\sin i(1-\cos i)^2,$$

$$F_{330}(i) = \tfrac{15}{8}(1+\cos i)^3,$$

$$F_{331}(i) = \tfrac{45}{8}\sin^2 i(1+\cos i),$$

$$F_{332}(i) = \tfrac{45}{8}\sin^2 i(1-\cos i),$$

$$F_{333}(i) = \tfrac{15}{8}(1-\cos i)^3, F_{400}(i) = \tfrac{35}{128}\sin^4 i,$$

$$F_{401}(i) = -\tfrac{35}{32}\sin^4 i + \tfrac{15}{16}\sin^2 i,$$

$$F_{402}(i) = \tfrac{105}{64}\sin^4 i - \tfrac{15}{8}\sin^2 i + \tfrac{3}{8},$$

$$F_{403}(i) = -\tfrac{35}{32}\sin^4 i + \tfrac{15}{16}\sin^2 i,$$

$$F_{404}(i) = \tfrac{35}{128}\sin^4 i,$$

$$F_{410}(i) = -\tfrac{35}{32}\sin^3 i(1+\cos i),$$

$$F_{411}(i) = \tfrac{35}{16}\sin^3 i(1+2\cos i) - \tfrac{15}{8}\sin i(1+\cos i),$$

$$F_{412}(i) = \cos i(\tfrac{15}{4}\sin i - \tfrac{105}{16}\sin^3 i),$$

$$F_{413}(i) = -\tfrac{35}{16}\sin^3 i(1-2\cos i) + \tfrac{15}{8}\sin i(1-\cos i),$$

$$F_{414}(i) = \tfrac{35}{32}\sin^3 i(1+\cos i),$$

$$F_{420}(i) = -\tfrac{105}{32}\sin^2 i(1+\cos i)^2,$$

$$F_{421}(i) = \tfrac{105}{8}\sin^2 i\cos i(1+\cos i) - \tfrac{15}{8}(1+\cos i)^2,$$

$$F_{422}(i) = \tfrac{105}{16}\sin^2 i(1-3\cos^2 i) + \tfrac{15}{4}\sin^2 i,$$

$$F_{423}(i) = -\tfrac{105}{8}\sin^2 i\cos i(1-\cos i) - \tfrac{15}{8}(1-\cos i)^2,$$

$$F_{424}(i) = -\tfrac{105}{32}\sin^2 i(1-\cos i)^2,$$

$$F_{430}(i) = \tfrac{105}{16}\sin i(1+\cos i)^3,$$

$$F_{431}(i) = \tfrac{105}{8}\sin i(1-3\cos^2 i-2\cos^3 i),$$

$$F_{432}(i) = -\tfrac{315}{8}\sin^3 i\cos i,$$

$$F_{433}(i) = -\tfrac{105}{8}\sin i(1-3\cos^2 i+2\cos^3 i),$$

$$F_{434}(i) = -\tfrac{105}{16}\sin i(1-\cos i)^3,$$

$$F_{440}(i) = \tfrac{105}{16}(1+\cos i)^4,$$

$$F_{441}(i) = \tfrac{105}{4}\sin^2 i(1+\cos i)^2,$$

$$F_{442}(i) = \tfrac{315}{8}\sin^4 i,$$

$$F_{443}(i) = \tfrac{105}{4}\sin^2 i(1-\cos i)^2,$$

$$F_{444}(i) = \tfrac{105}{16}(1-\cos i)^4.$$

Функции эксцентриситета

Функции эксцентриситета появляются в теории возмущенного движения спутника при разложении возмущающей функции, обусловленной несферичностью планеты, или притяжением внешнего тела. Следующие функции от расстояния r и истинной аномалии v

приходится разлагать в ряд по кратным средней аномалии M при малых эксцентриситетах e:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp\sqrt{-1}jv = \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_q^{n,j}(e) \exp\sqrt{-1}qM, \qquad (\text{П}3.2)$$

где $X_q^{n,j}(e)$ — специальные функции небесной механики, называемые функциями эксцентриситета. Вывод такого разложения и формулы для вычисления функций эксцентриситета, можно найти в работах (Брумберг, 1967; Аксенов, 1986). Оказывается, что записанный выше ряд по кратным средней аномалии сходится при всех значениях эксцентриситета, меньших единицы.

Отметим некоторые свойства функций эксцентриситета.

Количество вычислений можно сократить, используя соотношение

$$X_{-q}^{k,-j}(e) = X_q^{k,j}(e).$$

Для всех допустимых значений индексов можно записать разложение

$$X_q^{k,j}(e) = e^{|q-j|} \sum_{s=0}^{\infty} X_{q,s}^{k,j} e^{2s},$$

где $X_{q,s}^{k,j}$ — некоторые числа, а ряд сходится при всех $e < 1$. Вычислить все необходимые коэффициенты $X_{q,s}^{k,j}$ можно с помощью рекуррентных соотношений, которые взяты из работы (Cherniack, 1972) и приведены к удобному для программирования виду в публикации (Фоминов, Филенко, 1978). Аналогичные рекуррентные соотношения даны еще в работе (Hughes, 1981) и приведены в книге (Мюррей, Дермотт, 2010). Функциям эксцентриситета уделено много внимания в книге (Аксенов, 1986).

При значении индекса $q = 0$ функции эксцентриситета выражаются в конечном виде. Для этого частного случая вычисления можно выполнять по рекуррентным соотношениям, взятым из работы (Hughes, 1981).

При вычислении возмущений оказывается важным следующее свойство:

$$X_0^{-3,2}(e) = X_0^{-3,-2}(e) = 0$$

при всех $e < 1$.

Явные выражения функций $X_q^{k,j}(e)$ длл $k = -3, -4, -5$ и некоторых значений j, q даны в книге (Каула, 1970).

Заметим, что в литературе числа $X_{q,s}^{k,j}$ называются еще операторами Ньюкома, а сами функции эксцентриситета — коэффициентами Ганзена.

Ниже приводятся выражения для некоторых функций эксцентриситета при $q = 0$.

$$X_0^{2,0} = 1 + \frac{3}{2}e^2, \quad X_0^{2,1} = -2e - \frac{1}{2}e^3, \quad X_0^{2,2} = \frac{5}{2}e^2,$$

$$X_0^{-3,0} = (1 - e^2)^{-3/2}, \quad X_0^{-4,1} = e(1 - e^2)^{-5/2},$$

$$X_0^{-5,2} = \frac{3}{4}e^2(1 - e^2)^{-7/2}, \quad X_0^{-5,0} = (1 + \frac{3}{2}e^2)(1 - e^2)^{-7/2}.$$

Литература к Приложению 3

Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. М.: Наука, 1986.

Брумберг В. А. Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. Бюллетень ИТА. 1967. Т. 11. N. 2. С. 73–83.

Емельянов Н. В. Вычисление нормированных функций наклона и их производных при больших значениях индексов. Труды ГАИШ. 1985. Т.57. С.83–91.

Каула У. Спутниковая геодезия. М.: Мир, 1970.

Фоминов А.М., Филенко Л.Л. Вычисление нормированных функций наклона и их производных. Вычисление коэффициентов Ганзена и их производных. Алгоритмы небесной механики. 1978. N 19. ИТА АН СССР. Ленинград, 1978.

Cherniack J. R. Computation of Hansen coefficients. SAO Special Report. 1972. N. 346.

Emelianov N. V., Kanter A. A. A method to compute inclination functions and their derivatives. Manuscripta geodaetica. 1989. V. 14. C. 77–83.

Hughes S. The Computation of Tables of Hansen Coefficients. Celestial Mechanics. 1981. V. 25. Issue 1. P. 101–107.