

**ДИНАМИКА
ЕСТЕСТВЕННЫХ
СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ
НА ОСНОВЕ
НАБЛЮДЕНИЙ**

Московский государственный университет имени
М.В.Ломоносова
Государственный астрономический институт имени
П.К.Штернберга

Н.В.Емельянов

**ДИНАМИКА
ЕСТЕСТВЕННЫХ
СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ
НА ОСНОВЕ
НАБЛЮДЕНИЙ**

Фрязино
2019

УДК 521.1+523.4

ББК 22.62

Е60



Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту № 19-12-00005, не подлежит продаже.

Емельянов Н. В.

Динамика естественных спутников планет на основе наблюдений.
– Фрязино: Век-2. 2019. – 576 с.
ISBN 978-5-85099-199-9

Представлен обширный набор методов и результатов изучения движения естественных спутников планет. Основное внимание уделено задаче уточнения параметров движения спутников на основе наблюдений. Дается множество фактических сведений об орбитах и физических свойствах естественных спутников больших планет Солнечной системы. Главы книги снабжены обширной библиографией работ, на которых основаны представленные в книге сведения.

Материал, изложенный в книге, предназначен для исследователей в широкой области динамики Солнечной системы, для специалистов, осуществляющих проекты по подготовке миссий к другим планетам. Книга предназначена также для использования в учебном процессе в классических университетах.

Она будет полезна и популяризаторам науки.

ББК 22.62

Emelyanov N. V.

The dynamics of natural satellites of the planets based on observations.

An extensive set of study methods and results on the motion of natural satellites of the planets is presented. The main attention is paid to the problem of determining the parameters of satellite motion from observations. A lot of factual information about orbits and physical properties of the natural satellites is given. The chapters of the book are provided with an extensive bibliography of papers on which the presented information is based.

The material presented in the book is intended for researchers in the wide field of the dynamics of the solar system, for professionals implementing mission projects preparation to other planets. The book is also intended for use in the educational process in classical universities. It will be useful for popularizers of science as well.

© Н.В. Емельянов, текст, илл.

© Век-2, 2019

ISBN 978-5-85099-199-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие автора	12
Глава 1. Цели, задачи и общий подход к изучению динамики спутников	15
1.1. Введение	15
1.2. Небесная механика — основа изучения динамики спутников планет	17
1.3. Цели изучения динамики спутников планет	18
1.4. Основные понятия небесной механики и астрометрии	19
1.5. Общий подход к изучению динамики планет и спутников	25
1.6. Особые свойства необходимых наблюдений	28
Глава 2. Спутники планет	33
2.1. Спутники планет — объекты Солнечной системы . . .	34
2.2. Классификация и номенклатура спутников планет . .	35
2.3. Открытие Нептуна и его спутника Тритона	39
2.4. История открытия спутника Плутона Харона	41
2.5. Орбитальные и физические параметры планет	49
2.6. Орбитальные параметры спутников планет	53
Литература к Главе 2	55
Глава 3. Уравнения движения и аналитические теории	59
3.1. Уравнения движения и системы координат	60
3.2. Модель кеплеровского движения	63
3.2.1. Основные формулы кеплеровского движения .	63
3.2.2. Вычисление координат в эллиптическом кеплеровском движении	71
3.2.3. Вычисление скорости в эллиптическом кеплеровском движении	71

3.2.4.	Частные производные от координат и компонент скорости	71
3.2.5.	Формулы кеплеровского движения относительно элементов Лагранжа	74
3.2.6.	Примеры использования элементов Лагранжа	77
3.3.	Силовая функция притяжения несферичной планеты	77
3.3.1.	Разложение силовой функции	77
3.3.2.	Притяжение в моделях и для реальных тел	79
3.4.	Приближенный учет влияния главных спутников на движение далеких	83
3.5.	Подходы и методы построения моделей движения	84
3.6.	Обобщенная задача двух неподвижных центров	87
3.7.	Методы теории возмущений	90
3.7.1.	Общая схема теории возмущений	90
3.7.2.	Применение методов теории возмущений	92
3.7.3.	Уравнения относительно элементов промежуточной орбиты	98
3.7.4.	Решение уравнений методом малого параметра	105
3.7.5.	Решение уравнений способом Пуассона	109
3.8.	Разложение возмущающей функции относительно элементов промежуточной орбиты	112
3.9.	Определение возмущений	117
3.10.	Постоянное возмущение большой полуоси	123
3.11.	Прецессирующий эллипс	127
3.12.	Возмущенное движение при малых эксцентриситетах	129
3.12.1.	Формулировка проблемы	129
3.12.2.	Круговое возмущенное движение	130
3.12.3.	Переход к элементам кеплеровской орбиты	132
3.12.4.	Оскулирующие элементы в возмущенном движении при малых эксцентриситетах	135
3.13.	Построенные аналитические теории движения спутников планет	142
3.13.1.	Аналитическая теория движения Тритона	142
3.13.2.	Модели прецессирующих эллипсов для близких спутников Юпитера	149
3.13.3.	Специальные аналитические теории главных спутников больших планет	152
3.14.	Влияние приливов в вязко-упругих телах планеты и спутника	155

3.14.1. Постановка задачи о влиянии приливов	155
3.14.2. Уравнения в прямоугольных координатах	157
3.14.3. Решение уравнений в прямоугольных координатах	160
3.14.4. Переход к элементам кеплеровской орбиты	164
3.14.5. Некоторые важные выводы	176
Литература к Главе 3	178
Глава 4. Методы численного интегрирования	183
4.1. Цели решения уравнений движения небесных тел	184
4.2. Общие свойства методов численного интегрирования	185
4.3. Метод Рунге-Кутты	190
4.4. Алгоритм решения задач методами численного интегрирования	192
4.5. Инструкция к программе Эверхарта	194
4.6. Программа интегрирования М.В. Беликова	200
4.7. Сравнение процедур численного интегрирования	202
4.8. Аппроксимация рядами по полиномам Чебышева	202
4.9. Обзор методов. Книга В.А.Авдюшева	205
Литература к Главе 4	206
Глава 5. Наблюдения спутников планет	208
5.1. Общие принципы наблюдений	208
5.2. Определение топоцентрических положений	210
5.3. Наблюдения планеты	211
5.4. Наблюдения спутника планеты	214
5.5. Наблюдения двух спутников планеты	215
5.6. Определение угловых измеряемых величин	217
5.7. Угловое расстояние и позиционный угол	220
5.8. Определение тангенциальных координат	221
5.9. Определение разности координат в случае наблюдений взаимных затмений спутников	222
5.10. Заключение относительно измеряемых величин	225
5.11. Моменты видимых сближений спутников	225
5.12. Средства и техника наземных наблюдений	228
5.13. Источники данных наблюдений	231
5.14. Шкалы времени и системы координат	233
Литература к Главе 5	239

Глава 6. Построение моделей движения небесных тел на основе наблюдений	241
6.1. Метод дифференциального уточнения параметров. Применение МНК	242
6.2. Плохая обусловленность и неоднозначность решения .	254
6.3. Обзор сведений об алгоритмах фильтрации	257
6.4. Вычисление измеряемых величин и частных производных	259
6.4.1. Общий порядок вычислений	259
6.4.2. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче трех тел	263
6.4.3. Дифференциальные уравнения для изохронных производных. Уточнение массы возмущающего тела	266
6.4.4. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче о движении спутника сжатой планеты	267
6.4.5. Построение условных уравнений при угловых измерениях	270
6.5. Назначение весов наблюдениям	275
6.6. Вычисление статистических характеристик невязок .	278
6.7. Проблема отбраковки грубых наблюдений	280
Литература к Главе 6	281
Глава 7. Получение астрометрических данных из наблюдений взаимных покрытий и затмений спутников планет	282
7.1. Описание явлений	283
7.2. Метод получения астрометрических данных	286
7.3. Упрощенный вариант модели	290
7.4. Фотометрические модели явлений	293
7.4.1. Общие фотометрические характеристики	293
7.4.2. Фотометрическая модель взаимного покрытия спутников	295
7.4.3. Фотометрическая модель взаимного затмения спутников	297
7.5. Законы рассеяния света для спутников планет	299
7.5.1. Закон рассеяния света Ломмеля–Зеелигера	299
7.5.2. Закон Хапке для гладкой поверхности	300
7.5.3. Закон Хапке для шероховатой поверхности	301

7.5.4. Параметры закона Хапке для Галилеевых спутников Юпитера	302
7.6. Фотометрические характеристики спутника, интегральные по диску	303
7.7. Фотометрические модели взаимных покрытий и затмений главных спутников Сатурна и Урана	306
7.7.1. Фотометрическая модель спутников Сатурна .	306
7.7.2. Фотометрическая модель для спутников Урана	311
7.8. Соотношение точности наблюдений различных типов	312
7.9. Всемирные кампании наблюдений	313
7.10. Препятствия перед улучшением точности	313
7.11. Периоды явлений в будущем	320
Литература к Главе 7	321
Глава 8. Оценка точности эфемерид спутников планет	326
8.1. Факторы, определяющие точность эфемерид	327
8.2. Вариация ошибок наблюдений методом Монте-Карло	329
8.3. Вариация состава наблюдений «бутстреп»-выборками	332
8.4. Оценка точности методом вариации параметров	335
8.5. Точность эфемерид далеких спутников	337
Литература к Главе 8	342
Глава 9. Вращение спутников планет	344
9.1. Общие свойства вращения спутников планет	344
9.2. Основные понятия о вращении планет и спутников . .	347
9.3. Вращение Нептуна и орбита Тритона	349
9.4. Теория вращения Фобоса	353
9.5. Вращение Галилеевых спутников Юпитера, спутников Сатурна и Плутона	357
9.6. Хаотическое вращение спутников планет. Вращение Гипериона	359
Литература к Главе 9	366
Глава 10. Эволюция орбит спутников планет	370
10.1. Воздействие различных факторов на эволюцию орбит спутников планет	371
10.2. Эволюция орбит спутников от сжатия планеты	372
10.3. Эволюция орбит спутников планет под действием притяжения Солнца	376
10.3.1. Осреднение возмущающей функции	376
10.3.2. Частный случай — задача Хилла	381

10.3.3. Анализ при дважды осредненной возмущающей функции в случае Хилла	382
10.3.4. Эволюция при дважды осредненной возмущающей функции в случае Хилла	392
10.3.5. Применения для реальных спутников планет	400
10.4. Уточненные модели эволюции. Численно-аналитический метод	401
10.5. Эволюция орбит при совместном влиянии различных факторов	405
10.6. Классификация орбит спутников по свойствам эволюции орбит	409
10.7. Эволюция орбит и сближения далеких спутников	411
10.7.1. Современные знания об эволюции орбит далеких спутников планет	411
10.7.2. Сближения далеких спутников планет	415
10.7.3. Аналитическое описание эволюции орбит	416
10.7.4. Определение минимальных расстояний между орбитами	417
10.7.5. Интернет-ресурс по эволюции орбит и сближений далеких спутников	419
10.7.6. Примеры вычислений	420
10.7.7. Заключение	423
10.8. Уточнение теории вековых возмущений Лапласа – Лагранжа	424
Литература к Главе 10	425
Глава 11. Физические параметры спутников планет	432
11.1. Введение	433
11.2. Справочник по физическим параметрам спутников	434
11.3. Детектирование вулканов на спутнике Юпитера Ио	435
11.4. Оценки физических параметров далеких спутников планет	436
11.4.1. Особенности далеких спутников планет	436
11.4.2. Обзор имеющихся фотометрических данных	438
11.4.3. Фотометрическая модель для далеких спутников	442
11.4.4. Определение фотометрических параметров по результатам фотометрии	444
11.4.5. Исходные данные и результаты	446
11.4.6. Сравнение результатов разных авторов	450

11.4.7. Выводы об оценках фотометрических параметров	453
11.5. Определение массы Гималии по астрометрическим наблюдениям	454
Литература к Главе 11	459
Глава 12. Информационные ресурсы по естественным спутникам планет	464
12.1. Варианты и смена версий теорий движения	465
12.2. Доступ к базам данных и эфемеридам спутников	468
12.3. Возможности сервера эфемерид MULTI-SAT	475
12.4. Теории и модели в сервере эфемерид MULTI-SAT	481
12.5. Теории и модели в сервере эфемерид JPL	486
12.6. Спутники планет в виртуальных обсерваториях	488
12.7. Стандарты фундаментальной астрономии	488
Литература к Главе 12	491
Приложение 1. Номенклатура спутников планет	495
Приложение 2. Орбитальные параметры спутников	510
Приложение 3. Специальные функции в небесной механике	524
Приложение 4. Шкалы времени	530
Приложение 5. Декомпозиция Холецкого. Программа	536
Приложение 6. Параметры вращения планет и спутников	538
Приложение 7. Физические параметры спутников планет	556
Предметный указатель	572

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Лишь тогда есть толк в теории, когда она представляет собой не только абстрактные конструкции в воображении очарованного теоретика, а хорошо отлаженные процедуры, исправно служащие целям практического познания природы.

Динамика спутников планет представляет собой весьма занимательную область небесной механики. На первый взгляд динамику спутников можно изучать и без наблюдений. Исследователь может придумать близкую к действительности или вообще абстрактную спутниковую модель, испытывать на ней новые методы, демонстрируя свое высочайшее мастерство. Есть и другое соблазнительное направление деятельности — объяснение того, почему небесные тела движутся именно так, как они движутся. Новое объяснение известных в природе фактов или объяснение ранее не объясненных явлений выглядит значительным научным достижением. Безусловно, мы таким образом оттачиваем свое мастерство. Однако в этих делах исследователь должен в какой-то момент остановиться и задать себе вопрос: добываем ли мы при этом новую информацию об окружающей нас природе. Разумеется, научное обобщение фактов на каком-то этапе может создать качественный скачок в наших представлениях о природе. Однако этому предшествует трудоемкий, а

иногда и изнурительный процесс накопления фактических знаний. В динамике спутников планет этот путь неизбежно пролегает через техническое освоение наблюдательной информации, через составление непомерно громоздких вычислительных программ и проведение скучнейших вычислений. Какой исследователь пойдет туда? Либо тот, кто понимает суровую неизбежность этого процесса, либо тот, кто имеет свои особые научно-технические пристрастия. В помощь именно таким отважным исследователям и написана предлагаемая книга.

Как и во многих других разделах астрономии, в динамике спутников планет критерием истины является соответствие наблюдениям. Теоретикам известно, что чем больше наблюдений, тем может быть хуже для теории. Можно поздравить таких теоретиков — на смену их теории пришла новая. Именно на такие события нецелена предлагаемая книга.

Как в обычной жизни, так и в научных исследованиях, мы нередко находимся в поисках справочного бюро. В наше время таким бюро является «всемирный виртуальный разум» — Интернет. В исследованиях динамики спутников планет, как и во многих других научных исследованиях, востребованы только такие данные, которые снабжены сведениями о том, кто и как эти данные получил, и для которых ясна их точность и достоверность. В предлагаемой книге приводится справочная информация по спутникам планет, снабженная ссылками на заслуживающие доверия источники.

Научный труд часто бывает успешным, когда он ограничен определенными рамками как по объектам, так и по методам исследований. В таком стройном процессе иногда случаются досадные ситуации, когда необходимо выходить наружу за незнакомыми методами или сведениями. В таких ситуациях может помочь предлагаемая книга.

Наконец, данная книга помогает противодействовать мнению о том, что слова «небесная механика» звучат старомодно, и что это не современная область астрономии. В действительности, небесная механика не ограничена задачей трех тел и определением орбиты по трем наблюдениям. В наше время это самая практическая и современная область астрономии. Она не только удовлетворяет наше природное любопытство, но также служит решению двух вечных проблем человечества: расширению среды обитания и защите от опасных сил природы.

Большая часть книги основана на научных результатах и публикациях автора. Для тех разделов, которыми автор сам непосредственно не занимался, в книге представлены краткие обзоры публикаций других специалистов. По всем разделам книги дана обширная библиография. Это необходимо для более детального изучения методов и научных результатов. Библиография сама по себе представляет справочный материал, востребованный для широкого использования. К каждой главе дается отдельный список. Некоторые ссылки могут повторяться в разных главах.

Научная работа по теме предлагаемой книги велась автором частично при сотрудничестве с коллегами из французского Института небесной механики и вычисления эфемерид. Это, с одной стороны, сопровождало работу хорошей экспертизой, а с другой стороны, обеспечивало востребованность получаемых автором результатов.

Возможность написания книги была в первую очередь обеспечена высоким уровнем образования, которое дал автору Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. Всю свою научную жизнь автор провел в стенах Государственного астрономического института имени П.К. Штернберга МГУ, где и была написана эта книга.

Автор выражает благодарность доценту Г.И.Ширмину за окончательное редактирование и корректуру книги.

ЦЕЛИ, ЗАДАЧИ И ОБЩИЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ ДИНАМИКИ СПУТНИКОВ

Резюме

В этой главе происходит первое свидание читателя с автором. Это очень важный момент. Поэтому здесь представлен общий взгляд автора на всю тему книги. Объясняются специфические особенности науки о динамике естественных спутников планет. Показаны цели всего этого дела и какой от него толк.

Для хорошего понимания всегда нужен общий язык. Поэтому в этой первой главе даны основные понятия, которыми оперирует автор. В отдельных научных сообществах вырабатываются свои определения вещей, иногда даже свой жаргон. Автор использует здесь те определения и понятия, которыми пользовались в свое время его учителя, и которые обычно используются в лекциях на астрономическом отделении Физического факультета МГУ.

Далее в главе представлен основной методический подход. Этому подходу подчинен весь последующий материал книги. В книге сделана попытка разностороннего описания динамики естественных спутников планет. Однако главное заключается в построении моделей движения на основе наблюдений. Во многих других задачах исследователи становятся пользователями этих моделей.

1.1. Введение

Сознание того, что во все стороны от нас простирается необъятная Вселенная, всегда беспокоило человека. Это вызывает двоякое желание. Во-первых, хорошо бы понять своё место в необозримом

пространстве и бесконечном разнообразии мира. У человека нередко возникает легкий дискомфорт от отсутствия ответа на подобный вопрос. Одновременно рождается желание извлечь из Космоса выгоду для удовлетворения своих постоянно возрастающих потребностей. Еще большее беспокойство испытывает человек, обнаружив угрозу своей жизни со стороны сил природы. Ничто так не пугает нас, как непонятное. Удивительно легко успокоить человека объяснением страшных явлений даже не совсем знакомыми словами. Сознание того, что хоть кто-то разбирается в деяниях природы, возвращает нас к привычному комфорту повседневной жизни. Вот почему мы должны быть благодарны тем немногим людям, которые работают, чтобы избавить нас от мучительных вопросов о космосе и судьбе.

С древних времен люди задумывались о влиянии небесных светил на земную жизнь. Попытки сопоставить небесные явления с судьбой человека делались как учеными, так и далекими от науки предприимчивыми личностями. Однако во все времена неизменно получался весьма ненадежный результат. Что касается судьбы самих небесных тел, то астрономы и математики давно рассчитали удивительно устойчивый характер их движения. Размеры и формы орбит планет, наклоны осей их вращения почти не изменились даже на космогонических интервалах времени.

Ученые-естествоиспытатели и философы пришли к выводу, что главная причина существования Разума во Вселенной — это функция познания. Разумная жизнь характеризуется стремлением понять и объяснить происходящие вокруг явления.

На любом этапе познания Вселенной мы уже имеем более или менее адекватную ее модель. Новые, более точные наблюдения приводят к рассогласованию модели с действительностью. Чаще всего желаемое согласование модели восстанавливается путем уточнения известных параметров движения или состояния небесных тел. Иногда приходится значительно совершенствовать теории, методы построения модели или методы вычислений. Процесс невольно направлен на обнаружение новых, необъясненных явлений. На некотором этапе удается добыть эту столь необходимую Разуму «пищу», но этому всегда предшествует колоссальный труд ученых — наблюдателей, теоретиков, вычислителей. Модели движения небесных тел ценны еще тем, что позволяют нам предвычислять их расположение на любой момент времени в прошлом или будущем.

Лишь тогда есть толк в теории, когда она представляет собой не только абстрактные конструкции в воображении очарованного теоретика, но и хорошо отлаженные процедуры, исправно служащие целям практического познания природы. Одним из главных инструментов на таком пути является практическая небесная механика. Именно практическая небесная механика дает нам наиболее полные и точные знания о динамике спутников планет.

1.2. Небесная механика — основа изучения динамики спутников планет

Небесная механика — область науки, которая занимается изучением движений небесных тел под действием естественных сил природы.

Предметом небесной механики являются механические формы движения материи.

Объекты исследований — всевозможные материальные образования, от мельчайших частиц космической пыли до колоссальных систем типа звездных скоплений, галактик и скоплений галактик.

Цель небесной механики — познание законов природы, управляющих механическими движениями небесных тел.

Для всего естествознания небесная механика играет роль фундамента, без которого немислимо познание Вселенной и освоение Космоса. Значение небесной механики для жизни на Земле состоит в использовании знаний о движении небесных тел и ближнем Космосе для лучшего удовлетворения потребностей человека и его защиты от сил природы. Теория движения искусственных спутников Земли позволяет использовать космические аппараты для коммуникации и исследования земных ресурсов. Теория движения астероидов, комет и метеоров дает оценку опасности попадания этих тел в атмосферу и выпадения на земную поверхность. Исследования движений тел Солнечной системы позволили создать фундаментальную систему отсчета — модель инерциальной системы, реализованную небесной механикой и астрометрией в форме астрономических ежегодников и фундаментальных звездных каталогов.

В недрах небесной механики возникли, оформились и развились многие наиболее эффективные методы математической физики и вычислительной математики.

В качестве примера (и отнюдь не единственного!) можно указать методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих различные природные явления и рукотворные процессы. Зародившись в небесной механике, эти и другие численные методы получили широчайшее распространение в науке и технике. В XVII-XVIII веках с решения астрономических задач методами небесной механики началась, по существу, и вся теоретическая физика.

Не только преимущественно теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений, как это было в прошлом столетии, но, по сути дела, весь арсенал современных средств прикладной математики используется современной небесной механикой при моделировании движений космических объектов.

1.3. Цели изучения динамики спутников планет

Основная цель изучения динамики тел Солнечной системы — знание движения планет и их спутников. Задача совпала с вечной проблемой человечества — расширением и изучением среды обитания. Спутники больших планет — наиболее подходящие места для посадки автоматических и обитаемых космических аппаратов. Изучение строения и динамики тел Солнечной системы является важной частью динамической астрономии. Решается эта задача методами небесной механики на основе астрометрических наблюдений. Новая задача динамики тел Солнечной системы, возникшая во второй половине XX века, — межпланетная навигация.

Общий подход к изучению динамики — создание моделей движения и эфемерид планет, астероидов и естественных спутников планет. Процесс основывается на общих законах природы, физических параметрах небесных тел и, самое главное, на их наблюдениях. Используются современные математические методы и самые совершенные методы вычислений. Эфемериды являются конечным результатом исследований, так как содержат в себе все знания о динамике тел Солнечной системы.

Эфемериды нужны для определения физических свойств небесных тел. С их помощью изучается происхождение и эволюция Солнечной системы. Эфемериды нужны также для подготовки и проведения космических миссий к другим планетам. С помощью эфемерид открывают новые небесные тела. Еще в середине XIX века

французский ученый Леверье на основе эфемерид открыл новую планету Нептун. Процесс открытия новых планет и спутников таким путем продолжается и сейчас. В итоге мы заключаем, что эфемериды являются средством исследований, так как содержат в себе все знания о движении планет и спутников.

Результаты и выводы небесной механики явно и незримо присутствуют во многих других областях науки и практической деятельности человека.

1.4. Основные понятия небесной механики и астрометрии

Установим некоторые основные понятия практической небесной механики и астрометрии, которыми мы будем оперировать в последующем изложении.

Объектами наших исследований являются планеты и спутники Солнечной системы. На пути исследований оперируют с моделями небесных тел, которых в природе не существует, но которые в известной мере мало отличаются от реальных небесных тел. Примерами таких объектов могут служить материальная точка или абсолютно твердое однородное тело, ограниченное поверхностью трехосного эллипсоида.

Законы движения. Реальным проявлением движения небесных тел является изменение их взаимного расположения, которое определяется взаимными расстояниями. Для задания движения системы небесных тел следует задать закон изменения их взаимных расстояний во времени. Математическим описанием законов движения являются те или иные функции времени.

Для удобного отображения движения небесных тел оперируют понятиями системы отсчета, системы координат и шкалы времени. Абстрактное понятие системы координат так или иначе связывают с реальными небесными телами. Примерами могут служить Гринвичский меридиан на Земле или внегалактические радиоисточники излучения. Абстрактное понятие шкалы времени связывают с реальными физическими процессами. Примерами могут служить вращение Земли или электромагнитное излучение атома.

Законы взаимодействия. Основой для изучения движения небесных тел являются строго установленные из наблюдений законы физики, которые описывают взаимодействия тел или воздействия на

них той среды, в которой они движутся. Математической формой законов взаимодействия небесных тел оказываются обыкновенные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют взаимные расстояния между небесными телами или их координаты.

Механическая модель. В небесной механике используют понятие механической модели. Модель описывается составом движущихся объектов, их свойствами, заданием сил, действующих на отдельные компоненты модели. Механические модели используются либо для приближенного описания движений небесных тел либо как основа для разработки более точных методов описания их движений.

Задачей практической небесной механики считается создание и исследование различных механических моделей, а также изучение и описание движения реальных небесных тел.

Механическая модель, являясь, как правило, приближенным описанием движения системы реальных небесных тел, может принципиально от нее отличаться. В частности, свойства тел в модели могут не соответствовать реальности, а законы действующих сил могут задаваться специальным образом. Примерами могут служить задача о движении системы **материальных точек**, в которой небесные тела не имеют размеров, или **ограниченная задача трех тел**, не удовлетворяющая третьему закону Ньютона.

Наблюдения. Измеряемые величины. Источником наших знаний о небесных телах являются наблюдения. Наблюдая, мы не можем довольствоваться констатацией факта наличия небесного тела на небе. В процессе астрономических наблюдений выполняются измерения тех или иных величин. Делается это с помощью разнообразных приборов. В отличие от абстрактных координат, измеряемая величина всегда реальна. Она образуется в измерительном приборе. Астрономы имеют дело с богатым разнообразием приборов и измеряемых величин. Примерами могут служить углы поворота оси телескопа относительно отвесной линии и плоскости меридиана, расстояния между изображениями небесных тел на фотопластинках, промежуток времени между вспышкой лазерного дальномера и фиксацией в телескопе отраженного от небесного тела светового импульса, интенсивность засветки отдельного пиксела полупроводникового приемника света, разность продолжительностей записи фрагмента излучения космического радиоисточника на двух радиотелескопах.

Точность наблюдений. Приборам присуща погрешность. Таинства процессов, происходящих в измерительных приборах, оставляют нам лишь возможность строить гипотезы относительно ошибок измерений. Никогда не бывает известна величина ошибки отдельного измерения. Очень часто мы предполагаем, что погрешности чисто случайны, и рассматриваем различные статистические характеристики ошибок. Чаще всего оперируют с понятием наиболее вероятной среднеквадратичной величиной ошибки. Конструктивные свойства измерительных приборов иногда позволяют приближенно установить точность измерений. В общем случае мы говорим о *точности наблюдений*.

Время. Изменение измеряемой величины во времени обусловлено движением небесных тел. Измерение выполняется в некоторый момент времени. Момент отсчитывается по часам обсерватории. В практической небесной механике измеряемой величине всегда приписывают конкретный момент измерения.

Время является абстрактным понятием, для его определения нужны какие-нибудь измерительные приборы. Любой прибор имеет собственную погрешность измерения. Сначала время измеряли углом вращения Земли. Такое время назвали всемирным и обозначили через UT. Когда были обнаружены расхождения теории движения Луны с наблюдениями, стало ясно, что Земля вращается неравномерно, и эталоном стало время, как независимая переменная в теории движения Луны. Время, измеряемое по наблюдениям Луны, называлось эфемеридным временем и обозначалось ET (Ephemeris Time). Однако точность наблюдений Луны все же ограничена. Поиски более точного измерителя времени привели к атомным часам. Этот датчик времени является сейчас наиболее точным. Время, осредненное по нескольким наиболее точным атомным часам мира, называют международным атомным временем и обозначают IAT.

В дальнейшем мы будем говорить о наблюдениях небесных тел, всегда предполагая при этом получение той или иной *изменяемой величины* на некоторый момент времени — *момент измерения*.

Точность астрономических измерений достигла уже такого уровня, что стала заметна неадекватность классической ньютоновской механики наблюдаемому движению небесных тел. В более точной общей теории относительности время течет различно в любых двух

точках пространства. Для связи различных шкал времени нужно учитывать движение тел и их массы.

Параметры движения. Изучая планеты и спутники, звезды и галактики мы смело предполагаем, что все время остаются постоянными некоторые параметры, присущие небесным телам и их движению. К ним относятся масса, размеры и форма тел, параметры орбиты и многие другие величины. Эти параметры невозможно непосредственно измерить с помощью имеющихся приборов. Однако их значения реально проявляют себя в наблюдаемом движении небесных тел. Будем называть в дальнейшем такие величины *параметрами движения* небесных тел.

Системы координат. Измеряемые величины не дают наглядных представлений о конфигурации системы небесных тел и тем более непригодны непосредственно для выражения общих законов движения. Удобным средством описания пространственного расположения тел и направлений на небесные светила являются системы координат. Когда говорят о положении светила или об ориентации тела в некоторой системе координат, имеется в виду абстрактные оси координат в пространстве и воображаемые линии на небе. Системы координат выбираются так, чтобы дать ясное представление о законах и свойствах движения небесных тел.

Выбор системы координат обусловлен удобством описания и изучения движения конкретного небесного тела. Начало и оси координат связывают либо с деталями объекта, например с гринвичским меридианом Земли, либо с его динамическими свойствами, например, с главными осями инерции тела, либо со свойствами движения, например, с осью вращения тела, либо с положением тела в некоторый момент времени, либо выбирают систему координат другим специальным образом.

Чаще других используется система прямоугольных или декартовых координат, ее начало обозначают буквой O , а оси — буквами x , y , z . Столь же часто применяется система сферических координат с обозначением центрального расстояния буквой r , широты — буквой φ и долготы — буквой λ .

Любые системы координат с началом, расположенным в точке наблюдения, называются топоцентрическими. Направления осей топоцентрической системы связывают с линией отвеса и местным меридианом. Говорят о геоцентрических системах координат, когда начало помещено в центр масс Земли.

Законы движения небесных тел — это зависимости координат тел от времени и параметров движения. Зависимости могут принимать различные формы. Чаще всего используются аналитические функции, описывающие явную зависимость координат от времени. В некоторых случаях зависимость дается в неявной форме, тогда координаты получаются путем вычислений по формулам последовательными приближениями. Закон движения может иметь форму числовых таблиц, в которых значения координат небесных тел заданы на ряд фиксированных моментов времени, обычно следующих с каким-то постоянным шагом. При таком численном задании закона движения теряется зависимость координат от параметров движения небесного тела. В этом случае затруднен анализ свойств движения, и мы ограничены тем интервалом времени, для которого координаты были вычислены.

Координаты небесных тел являются абстрактными понятиями. Их нельзя измерить никакими приборами. Системы координат моделируются с помощью формул и алгоритмов и являются составной частью модели движения небесных тел.

Модель движения небесного тела.

Мы не знаем точно, как устроены небесные тела и по каким точным законам они движутся. Поэтому приходится довольствоваться изучением моделей движения, выдвигая смелую гипотезу о том, что наши модели мало отличаются от действительности.

В общем случае под моделью движения небесного тела мы будем подразумевать некоторую конструкцию, позволяющую определять значения измеряемой величины на любые заданные моменты времени при известных значениях параметров движения.

Реализации модели движения небесного тела могут иметь весьма различные формы. Это могут быть математические формулы, написанные вручную на бумаге или опубликованные в виде печатного материала. Это могут быть напечатанные числовые таблицы значений координат. В настоящее время и формулы и таблицы отображаются в памяти компьютеров. При этом формулы преобразуются в алгоритмы вычислений, а таблицы доступны вычислительным программам, решающим те или иные задачи. Однако даже в эпоху мощной вычислительной техники в нескольких научных центрах мира создаются и печатаются в форме астрономических ежегодников координаты основных небесных тел, вычисленные на несколько лет вперед.

Откуда же берутся законы движения небесных тел? В старые времена они устанавливались почти эмпирически из простых наблюдений. Сейчас же, конечно, законы движения находят в процессе решения дифференциальных уравнений движения относительно координат небесных тел. Составляют эти уравнения на основе строго установленных законов физики, которые описывают взаимодействия тел или воздействия на них той среды, в которой они движутся. Это делается в рамках какой-либо механической модели. Четко фиксируются все факторы, влияющие на движение каждого тела системы и включенные в рассматриваемую модель. Процесс построения законов движения небесных тел, а также его результат — сами законы движения, называют теорией движения. Именно этим занимается небесная механика.

В подавляющем большинстве задач небесной механики невозможно получить точное решение уравнений движения. Приходится довольствоваться либо приближенным решением точных уравнений, либо точным решением приближенных уравнений. Применяются как аналитические, так и численные методы решения дифференциальных уравнений. В обоих случаях решение обладает погрешностью. Эта погрешность может быть более или менее достоверно оценена с помощью самой теории.

Точность модели движения небесного тела. Исходными данными для модели движения небесного тела являются параметры движения, которые в свою очередь известны с некоторой погрешностью. Эта погрешность также повлияет на точность предвычисления координат небесного тела и точность предвычисления измеряемой величины. В дальнейшем мы будем говорить о *точности модели*, подразумевая погрешность вычисления измеряемой величины. При этом мы разделяем два источника этой погрешности: приближенность найденного решения уравнений движения и неточность параметров движения. Погрешность решения уравнений движения мы будем также называть погрешностью вычислений или погрешностью метода. Говоря о точности теории движения небесного тела, всегда нужно уточнять, включена ли в погрешность теории неточность параметров движения или имеется в виду точность теории в предположении абсолютно точных параметров.

Методы исследований. От других астрономических дисциплин небесная механика отличается лишь методами исследования, среди которых выделяются: *аналитические, численные, качественные*.

Аналитические методы дают возможность получать набор аналитических соотношений, позволяющих рассчитывать приближенные положения и скорости небесных тел на заданные моменты времени, минуя какие-либо промежуточные их значения. Особенностью аналитических методов является большая трудоемкость и нарастающая громоздкость выкладок. Кроме того, аналитические методы не дают возможности судить о свойствах исследуемых движений на очень больших интервалах времени. Другим их недостатком является то, что применимы они не ко всем объектам.

Ограничения, свойственные аналитическим методам, не распространяются на *численные методы*, которые пригодны для расчета движений любых небесных тел и их систем с наперед заданной точностью. С внедрением в научные исследования мощных вычислительных машин считавшаяся прежде чрезмерной трудоемкость численных методов перестала быть препятствием для их применения. Но и у них есть своя ахиллесова пята — это неуклонное накопление погрешности с увеличением интервала интегрирования при невозможности строгих оценок роста этой погрешности. Еще один недостаток этих методов — численная форма представления результатов и неизбежность расчета промежуточных этапов, хотя зачастую целью исследования является конечная конфигурация после интегрирования.

Качественные методы небесной механики позволяют судить о свойствах движений небесных тел без полного интегрирования (аналитического или численного) дифференциальных уравнений.

Аналитические, численные и качественные методы продолжают применяться в современной практической небесной механике, причем красота и высокая эффективность аналитических методов удачно сочетается с простотой и универсальностью методов численных, а все это дополняется космогонической важностью выводов, получаемых качественными методами исследований.

1.5. Общий подход к изучению динамики планет и спутников на основе наблюдений

Общим подходом к изучению динамики планет и спутников является построение модели движения на основе наблюдений. Именно модель движения нужна для практического познания природы.

На рис. 1.1 изображена схема изучения динамики тел Солнечной системы на основе наблюдений. На любом этапе исследований мы фиксируем состав изучаемой системы небесных тел. Установленные на текущий момент законы взаимодействия тел (гравитационное притяжение, сопротивление среды) позволяют записать дифференциальные уравнения движения. Используя аналитические методы, можно найти общее решение уравнений движения. Подставляя в это общее решение значения произвольных постоянных (параметров движения), получим искомую модель движения системы небесных тел. Решая уравнения движения методами численного интегрирования при известных начальных условиях (параметров движения), также получаем модель движения системы небесных тел. Некоторые предварительные значения параметров движения обычно бывают известны из предшествующих исследований. Для построения модели движения потребуются также значения физических параметров, входящих в уравнения движения посредством законов взаимодействия (например, массы тел).

Основным процессом изучения динамики небесных тел является уточнение модели на основе наблюдений. Наблюдения дают нам значения измеряемых величин. Назовем их измеренными значениями. С другой стороны, мы имеем модель движения, которая для того и служит, чтобы предвычислять измеряемые величины. Мы можем вычислить измеряемые величины именно на моменты наблюдений. Результаты называются вычисленными значениями измеряемой величины. Разные по происхождению значения одной и той же величины будут различаться между собой. Эту разность значений мы обозначаем на рис. 1.1 символически через «О-С» (О — observatum, С — calculatum). Разность естественна, так как в ней присутствует погрешность наблюдений и погрешность модели движения небесного тела. Однако в некоторых случаях разности «О-С» будут превышать погрешность модели и погрешность наблюдений. Новые, более точные наблюдения обнаруживают рассогласование модели с действительностью. В этих случаях рассогласованию приписывают наиболее простую и наиболее вероятную причину — неточность принятых значений параметров движения небесного тела. В дело включается процесс, называемый уточнением параметров движения из наблюдений (см. «Методы уточнения параметров» на рис. 1.1). Чаще всего желаемое согласование теории с наблюдениями достигается путем уточнения параметров, и разно-

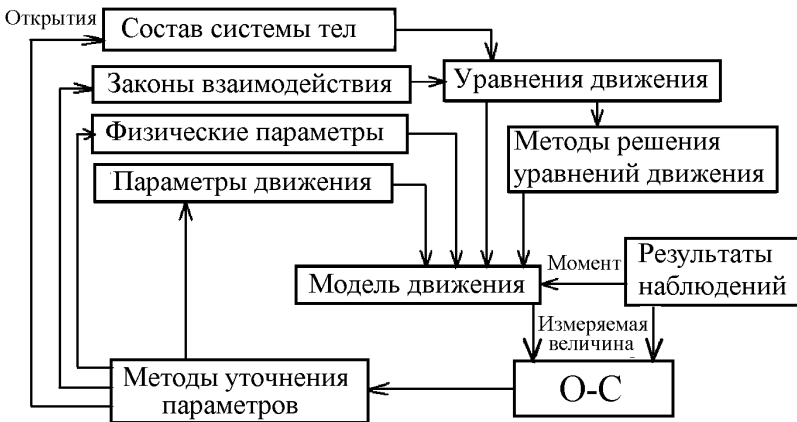


Рис. 1.1. Схема процесса изучения динамики небесных тел.

сти «О-С» снова оказываются в пределах погрешностей модели и наблюдений.

В некоторых редких случаях не удается добиться согласования теории с наблюдениями — разности «О-С» остаются значительными. Тогда приходится совершенствовать методы решения уравнений движения и методы вычислений. Это наиболее трудоемкая часть небесной механики. Заново пересматриваются факторы, влияющие на движение каждого небесного тела. Выводятся новые, более точные формулы теории. Как следствие, формулы становятся более длинными. Разрабатываются и применяются более точные методы вычислений. Как следствие, необходимое вычислительное время существенно увеличивается.

В еще более редких случаях рассогласование теории с наблюдениями остается существенным, сколько ни пытаются исследователи уточнить параметры движения и усовершенствовать модель движения. В результате обобщения фактов, проверки новых гипотез и высшего напряжения интеллекта совершается открытие. Могут быть открыты ранее неизвестные небесные тела или новые законы взаимодействия известных тел. В такой ситуации резко расширяются наши общие представления об окружающем мире. Делается обобщение основных законов природы.

Приведенная здесь схема, как любая схема, суха и ограничена,

она лишь в общем виде отражает разнообразные научные изыскания и накопление фактов, фантазии и ошибки.

Отметим, что описанный процесс имеет также сугубо практическую направленность. Модель движения небесных тел является основой для слежения за возможными опасностями со стороны сил космоса. Модель движения небесных тел также непосредственно используется для проектирования и обеспечения полетов автоматических и пилотируемых околоземных и межпланетных аппаратов — искусственных небесных тел.

1.6. Особые свойства необходимых наблюдений

Движение большинства реальных и воображаемых небесных тел имеет характер обращений одних тел вокруг других. Изучаются также собственные вращения небесных тел. Обращение или вращение тела описывается углом, величина которого монотонно возрастает во времени. Рассмотрим подробнее, как определяются эти процессы из наблюдений.

Угол орбитального обращения или угол вращения небесного тела назовем условно *долготой* и обозначим ее здесь через λ . В большинстве механических моделей скорость изменения долготы $\dot{\lambda}$ приближенно оказывается постоянной.

Прогресс может быть достигнут повышением точности наблюдений. На этом пути может произойти открытие либо нового свойства известного небесного тела, либо новой планеты или спутника. Поясним это на примере.

Допустим, что мы построили хорошую модель движения и с ее помощью вычислили разности значений орбитальной долготы, полученных из наблюдений, и вычисленных по теории, т. е. так называемые невязки «О-С». При наличии ошибок наблюдений график этих разностей может выглядеть так, как показано на рис. 1.2а. Мы видим здесь только «шум» и ничего интересного. Допустим, что прогресс в технике наблюдений позволил улучшить точность наблюдений. Шум уменьшился. На его фоне возникает что-то подозрительное на вид. Это мы видим на рис. 1.2б. При дальнейшем повышении точности наблюдений очевидно наличие некоторого синусоидального изменения разностей «О-С». Смотрите на рис. 1.2в. Этот «сигнал» послужит определению того, чего мы раньше не учли в нашей теории.

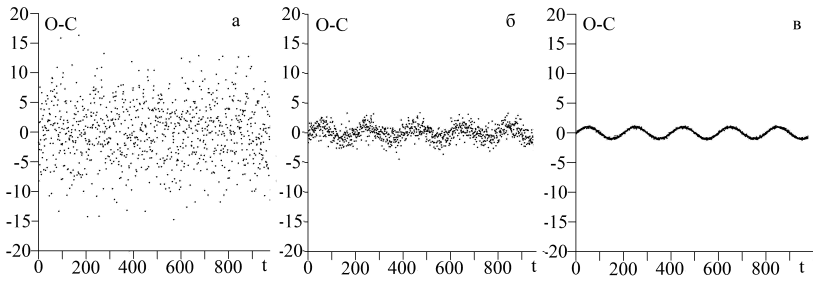


Рис. 1.2. Примеры остаточных отклонений O-C орбитальной долготы небесного тела при различной точности наблюдений.

Свойство орбитальных движений небесных тел таково, что орбитальная долгота увеличивается монотонно со временем. Если исключить из ее значений, полученных из наблюдений, функцию ее теоретического изменения, то можно получить то, что изображено на рис. 1.3а. Снова ничего интересного. Если поискать старые наблюдения и продолжать наблюдать интересующее нас небесное тело, то можно получить то, что показано на рис. 1.3б. Мы видим почти квадратичное по времени изменение долготы. Такой эффект может появиться только из-за неучтенной диссипации механической энергии небесного тела, что может быть вызвано, например, приливными силами.

Теперь ясно, что для прогресса необходимо расширение интервала времени наблюдений. На каком-то этапе это может привести к открытию новых явлений.

Какова же связь интервала времени наблюдений и точности эфемерид? Посмотрим на рис. 1.4а. Показаны значения орбитальной долготы небесного тела, полученные из наблюдений на интервале времени (t_1, t_2) . Налицо некоторый «шум» и линейное изменение. На основе теории и наблюдений мы можем вычислить возможные значения долготы на интересующий нас момент времени t_f , ограниченные прямыми линиями на рисунке. Если мы продолжим наблюдения с прежней точностью до момента t_3 , то точность эфемериды улучшится, что и видно на рис. 1.4б.

Очевидно, что мы не можем измерять орбитальную долготу непосредственно при наблюдениях. Мы наблюдаем лишь проекцию орбитального движения на небесную сферу. Однако можно вывести

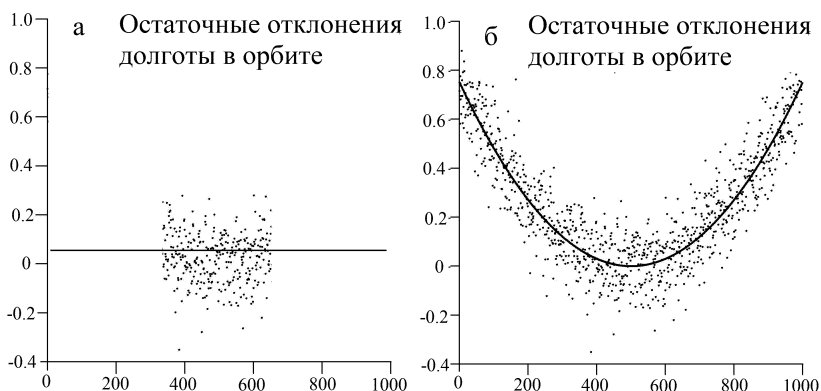


Рис. 1.3. Примеры остаточных отклонений О-С орбитальной долготы небесного тела на различных интервалах времени.

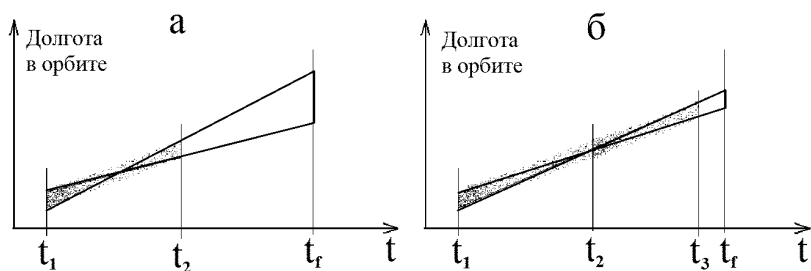


Рис. 1.4. Демонстрация зависимости точности эфемерид небесного тела от интервала времени наблюдений.

приближенную формулу относительно точности определения орбитальной долготы. Аналогичные выводы можно будет сделать и по отношению к другим характеристикам орбитального движения.

Теория рассматриваемого здесь процесса состоит в описании линейного изменения орбитальной долготы небесного тела во времени. Параметром теории движения, определяемым из наблюдений, будет λ . Измеряемой величиной — сама долгота λ . Такие обстоятельства характерны для всех естественных спутников планет.

При выполнении однотипных наблюдений погрешность измерения долготы будет одинаковой в любые моменты времени. Обозначим эту погрешность через σ_λ . Пусть измерение долготы выполне-

но в два момента времени t_1 и t_2 . Тогда погрешность определения параметра движения σ_λ находится из соотношения

$$\sigma_\lambda = \frac{\sigma_\lambda}{t_2 - t_1},$$

откуда видно, что точность определения параметра движения улучшается с ростом интервала измерений $t_2 - t_1$.

Посмотрим теперь, какова роль точности параметра движения при реализации основной цели теории — предвычисления долготы на заданные моменты времени. Допустим, что нужно вычислить долготу на момент времени t_f в будущем, то есть $t_f > t_2$. Погрешность такого предвычисления определится по формуле

$$\sigma_{\lambda(t_f)} = \frac{\sigma_\lambda}{t_2 - t_1} \left(t_f - \frac{t_1 + t_2}{2} \right).$$

Эта погрешность также уменьшается с ростом интервала измерений.

Допустим, что наблюдения продолжались после момента t_2 . Пусть последнее новое наблюдение выполнено в некоторый момент t_3 ($t_3 > t_2$). Теперь погрешность предвычисления долготы на момент t_f стала равной

$$\sigma_{\lambda(t_f)} = \frac{\sigma_\lambda}{t_3 - t_1} \left(t_f - \frac{t_1 + t_3}{2} \right) < \frac{\sigma_\lambda}{t_2 - t_1} \left(t_f - \frac{t_1 + t_2}{2} \right).$$

Таким образом, точность предвычисления долготы улучшилась.

Посмотрим, что может дать привлечение более точных наблюдений, но выполненных на небольшом интервале времени. Пусть, например, посередине интервала измерений $t_1 - t_2$ в моменты t_1^*, t_2^* выполнены два измерения долготы с погрешностью σ_λ^* . Пусть при этом

$$\sigma_\lambda^* = 0.5 \sigma_\lambda, \quad t_2^* - t_1^* = 0.1 (t_2 - t_1), \quad \frac{t_1^* + t_2^*}{2} = \frac{t_1 + t_2}{2},$$

то есть новые наблюдения в два раза точнее прежних, а интервал измерений в десять раз меньше.

Точность предвычисления долготы на основе более точных наблюдений найдется из соотношений

$$\sigma_{\lambda(t_f)} = \frac{\sigma_\lambda^*}{t_2^* - t_1^*} \left(t_f - \frac{t_1^* + t_2^*}{2} \right) = 5 \frac{\sigma_\lambda}{t_2 - t_1} \left(t_f - \frac{t_1 + t_2}{2} \right),$$

откуда видно, что эта точность оказалась в пять раз хуже, чем на основе прежних, менее точных наблюдений.

Рассмотренный здесь анализ общих свойств построения модели на основе наблюдений приводит к следующим выводам.

1. Для построения модели движения любого небесного тела всегда стараются использовать набор всех существующих в мире наблюдений, начиная с момента открытия этого небесного тела.

2. Продолжение наблюдений небесных тел даже с прежней точностью оказывается полезным.

3. Использование наблюдений, выполненных с лучшей точностью, не всегда приводит к уточнению модели. Преимущества одних наблюдений по сравнению с другими определяются не только их точностью, но также интервалом времени, на котором они выполнены.

4. Любые новые наблюдения, даже более точные, почти всегда используются только как дополнение к уже существующей базе данных.

Эти выводы составляют особенность практической небесной механики по сравнению с многими другими исследованиями небесных тел, когда новые ценные научные результаты получаются на основе только новейших наблюдений, которые по точности перекрывают старые. В практической небесной механике более точная и более адекватная действительности модель движения небесного тела строится на основе более полной базы данных наблюдений.

Кроме того, очевидна необходимость поиска новых способов наблюдений, представляющих новые данные о движениях небесных тел.

Резюме

В этой главе предлагается первое знакомство с естественными спутниками планет. Рассказано, как были открыты спутники.

Отметим, что в число изучаемых здесь объектов мы включаем спутники Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона. С Луной мы не знакомимся, ее динамику здесь не рассматриваем, поскольку это особый и огромный раздел практической небесной механики. Спутники астероидов мы также оставляем за рамками нашего рассмотрения.

История практической небесной механики такова, что динамика указанной группы естественных спутников всегда составляла ограниченную и хорошо обозначенную область изучения.

Сначала была Луна. В 1610 году Галилей открыл первые спутники у другой планеты, и процесс изучения динамики спутников пошел. С 1957 года накопленные знания и методы небесной механики стали применяться к искусственным спутникам Земли (ИСЗ). Однако динамика ИСЗ стала особой областью науки и техники, имеющей теперь очень широкие приложения. По этой причине динамику ИСЗ мы оставляем за рамками настоящей книги.

2.1. Спутники планет — объекты Солнечной системы

В названии изучаемых объектов «спутники планет» заключено их свойство сопровождать планеты в их движении вокруг Солнца. Спутники имеются у больших и малых планет. Есть планеты без спутников. Земля тоже имеет спутник — это Луна. В нашем рассмотрении мы ограничимся спутниками Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона. Луну мы здесь не рассматриваем. Она заслуживает отдельного внимания по ряду причин. Главное в том, что Луна — ближайший к нам естественный внеземной объект. Поэтому ее наблюдения имеют особо высокую точность. Динамика Луны тесно связана с формой и вращением Земли. Для описания движения Луны требуются специальные подходы и методы. Это предмет обширной и специальной науки — динамики Луны. Мы не будем здесь рассматривать спутники карликовых планет и астероидов, кроме спутников Плутона. Специфика спутников карликовых планет и астероидов связана с тем, что видимые расстояния этих спутников от своих малых планет столь малы, что точность определения орбит оказывается очень низкой. Для большинства таких спутников известно только то, что они есть.

Спутники больших планет и спутники карликовой планеты Плутон — особые объекты Солнечной системы, и они представляют особый интерес. Главные спутники Юпитера и Сатурна открыты относительно давно. Их динамика хорошо изучена. Есть хорошие условия для наблюдения большинства спутников с Земли. Спутники планет представляют практический интерес как наиболее подходящие объекты для расширения среды обитания человечества. На многие спутники легче посадить аппарат, чем на планету. Свойства поверхностей спутников и силы тяготения на них наиболее подходящи для освоения. Другая замечательная роль спутников заключается в том, что их движение подчинено гравитации планеты. Следовательно, по движению спутников можно определять массу и динамические параметры планеты. Более того, движение спутников оказывается чувствительным к вязкости вещества тела планеты.

Разнообразие и сложность движения спутников планет привело к совершенствованию и строгому тестированию методов небесной механики. Изучение динамики спутников требует самых сложных и изысканных форм математического аппарата.

Являясь телами, образовавшимися вместе с планетами, спутники оставили свидетельства сложной картины образования и разви-

тия Солнечной системы. Изучая динамику спутников, можно приближаться к пониманию этой картины.

Присутствие человека вне Земли уже много времени представлено его автоматическими посланниками — космическими аппаратами. Эти искусственные объекты повсюду снуют в Солнечной системе. Естественные спутники планет попадают в поле зрения их фотокамер и радиолокаторов. Вдобавок к наземным наблюдениям это дает нам обширные данные для изучения этой нашей расширенной среды обитания.

В итоге можно заключить, что свойства спутников дают нам основание выделить динамику спутников планет в особую область науки, достойную специального и пристального внимания. Развитие этой науки представляет несомненный практический интерес.

2.2. Классификация и номенклатура спутников планет

Классификация небесных тел, как всегда, весьма неблагоприятное дело. Всегда найдутся объекты, выходящие за рамки любой классификации. Всё же, спутники планет можно условно разделить на три группы.

Первая группа — это группа главных спутников планеты. Для спутников этой группы характерно то, что они имеют самый значительный размер и почти круговые орбиты вблизи плоскости экватора планеты. Поскольку экваторы больших планет связаны с осевой симметрией их сжатых тел, то несферичность планеты оказывает заметное влияние на движение главных спутников. У Юпитера, Сатурна и Урана орбиты главных спутников недалеко отстоят друг от друга. Поэтому взаимное притяжение спутников также существенно влияет на их движение. Другой характерной особенностью главных спутников является наличие большого числа относительно точных наблюдений, накопленных на значительных интервалах времени. Это получилось потому, что условия наблюдений этих спутников наиболее благоприятные. Диапазон звездных величин главных спутников от 4 до 14. Планеты своими яркими телами не очень мешают наблюдениям. В итоге, среди всех спутников динамика главных спутников является наиболее изученной. До недавнего времени для построения моделей движения главных спутников использовались аналитические теории. В настоящее время ме-

тоды численного интегрирования уравнений движения спутников оказываются наиболее подходящими для построения и использования моделей движения.

Вторая группа — это близкие спутники планет. Они существенно меньше по размеру, чем главные спутники, и движутся внутри орбит главных спутников по почти круговым орбитам в плоскости экватора планеты. Наземные наблюдения близких спутников весьма затруднены, в основном из-за близости их видимых положений к самим планетам. Яркое тело планеты, не очень резко выглядящее на получаемых с Земли изображениях, своим ореолом скрывает слабые пятнышки спутников. Ряд близких спутников был открыт с помощью космических аппаратов. Некоторые из них потом удалось увидеть также и с Земли.

По указанным причинам известные параметры орбит близких спутников не очень точны. На динамику близких спутников самое большое влияние оказывает сжатие и другие особенности нецентральной гравитационного поля планеты. Существенно влияет на их движение также притяжение главных спутников. Модели движения близких спутников в большинстве случаев — это прецессирующие эллипсы. Такие модели мы рассматриваем в соответствующем разделе книги.

Третья группа — это далекие спутники. Это также небольшие тела Солнечной системы, они существенно меньше главных спутников. Орбиты далеких спутников простираются за орбитами главных. Наклон и эксцентриситет орбит далеких спутников планет распределены в широких пределах. Эксцентриситет достигает значения 0.75. Наклон орбиты далекого спутника по отношению к плоскости орбиты планеты может быть даже больше 90 градусов, это так называемые ретроградные спутники с обратным орбитальным движением по отношению к орбитальному движению планеты. Самым значительным возмущающим фактором для этих спутников оказывается притяжение Солнца. Слабее влияет притяжение главных спутников и сжатие планеты. Во времена, когда не было мощных компьютеров, делались попытки построения аналитических теорий движения далеких спутников планет. Трудность здесь заключается в том, что основной возмущающий фактор — притяжение Солнца имеет значительную величину. Соответствующий малый параметр в теории возмущений недостаточно мал, чтобы можно было ограничиться учетом возмущений низких порядков. Необ-

ходимость точность теории требовала определения возмущений высоких порядков, что приводило к чрезвычайно громоздким и выкладкам. С появлением возможности быстро получать решение дифференциальных уравнений движения методами численного интегрирования аналитические методы остались востребованными только для изучения эволюции орбит далеких спутников на больших интервалах времени.

К настоящему времени открыты 71 далекий спутник Юпитера, 38 далеких спутника Сатурна, 9 далеких спутников Урана и 6 далеких спутника Нептуна.

Далекие спутника Юпитера можно условно разделить на две подгруппы. Одна из них представлена спутниками с большими полуосями орбит в пределах 10–13 млн км с прямым орбитальным движением. Вторая подгруппа — это спутники со значениями больших полуосей орбит между 20 и 25 млн км, совершающие обратное орбитальное движение.

Отметим особенность в классификации спутников Плутона. Дело в том, что вследствие открытия множества малых планет за орбитой Нептуна, по свойствам, сравнимых с Плутоном, эту планету решено относить к классу карликовых планет. Решение было принято на 26-й Генеральной ассамблее Международного Астрономического Союза в 2006 году. Теперь планета обозначается как 134340 Pluto или 134340 Плутон. Соответственно правилам для малых планет спутники Плутона должны обозначаться, например, S/2011 (134340) 1 для Кербероса, открытого в 2011 году. Необходимость давать в обозначении год открытия не совсем удобна. Поэтому мы будем использовать принятые ранее обозначения P1, P2, ... и присвоенные спутникам имена.

При рассмотрении всего комплекса спутников планет нас интересует самая простая характеристика — количество спутников. С течением времени это количество изменяется, так как открываются все новые спутники. На рис. 2.1 показан график зависимости числа известных спутников N от времени с момента первого открытия спутников Юпитера в 1610 году Галилео Галилеем.

К настоящему времени известны 189 естественных спутников Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна, Плутона. Распределение числа спутников по трем группам для каждой из планет дано в табл. 2.1.

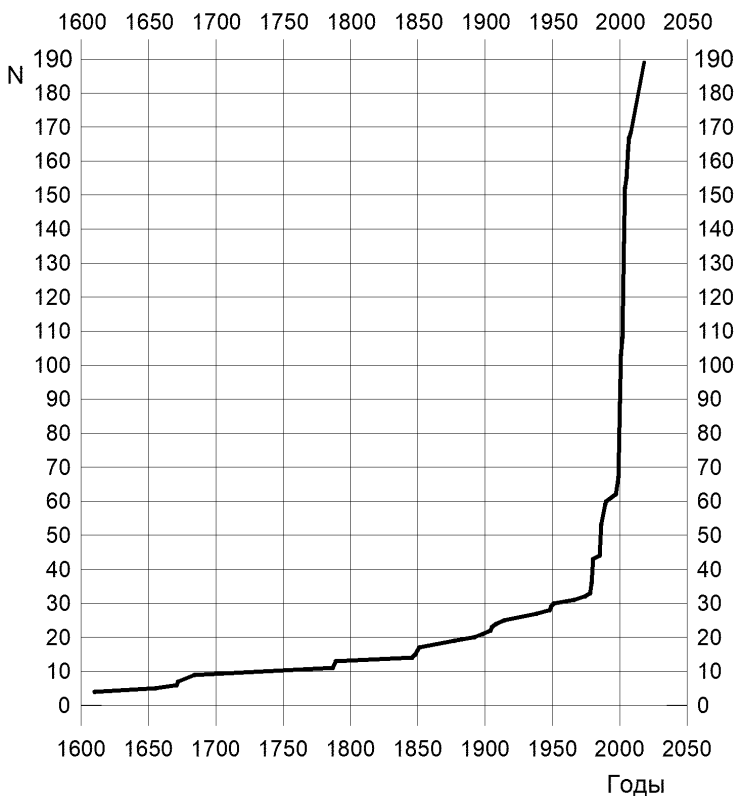


Рис. 2.1. Количество спутников планет, известных в разные годы.

Состав всех известных к данному моменту спутников планет представляется некоторой таблицей, которую называют Номенклатурой спутников. Каждому спутнику назначается номер и дается название (имя). Номера и названия спутников утверждаются решением специальной комиссии Международного Астрономического Союза. Названия даются латинскими буквами и обычно берутся из мифологии. Некоторые недавно открытые спутники еще не имеют названий. Им присвоено временное обозначение.

Русскоязычные эквиваленты названий спутников следует делать с привлечением сведений из мифологии, записанных на русском языке профессиональными филологами.

Для идентификации спутника номенклатура содержит также

Таблица 2.1. Число спутников каждого из трех типов для каждой планеты.

Планета	Ближние	Главные	Далекие	В сумме
Марс	-	2	-	2
Юпитер	4	4	71	79
Сатурн	16	8	38	62
Уран	13	5	9	27
Нептун	7	1	6	14
Плутон	-	1	4	5

приближенное значение большой полуоси орбиты. Это сразу дает возможность определить, к какой группе относится спутник.

Номенклатура естественных спутников планет размещена в Приложении 1 настоящей книги. Там даны также обстоятельства открытия каждого спутника: год открытия, ссылка на публикацию сообщения об открытии. Список публикаций составлен отдельно для спутников каждой планеты. Русскоязычные названия спутников планет выбраны на основе русскоязычных переводов мифологии. Эта работа выполнена Валентиной Семеновной Уральской (ГАИШ МГУ).

2.3. Открытие Нептуна и его спутника Тритона

Вычисление эфемерид планет в некоторых странах было истинно государственным делом. В прошлые века наиболее интенсивно этим занимались во Франции, где с 1679 года издавался астрономический ежегодник под названием *Connaissance des Temps*. В 1795 году в Париже был создан институт *Bureau des Longitudes*, задачей которого было вычисление эфемерид. Краткую историю этого института можно прочесть в статье (Емельянов, 1997). Эфемериды планет создавались последовательно рядом французских ученых. Историю и описание французских эфемерид, созданных до 1997 года, можно найти в книге (*Introduction aux éphémérides astronomiques*, 1997). Эфемериды планет назывались тогда таблицами. В середине XIX века этим занимался Alexis Bouvard. Для Юпитера, Сатурна и Урана это были таблицы Буvara.

К 1845 году рассогласования между положениями Урана, кото-

рые давались таблицами Буvara (Bouvard), и результатами наблюдений, достигли $2'$. По просьбе Араго (Dominique François Jean Arago) проблемой занялся Леверье (Urbain Le Verrier). Он вычислил в движении Урана возмущения второго порядка относительно масс планет, вызванные притяжением Юпитера и Сатурна, и внес в таблицы Буvara поправки к долготе Урана порядка $40''$. Затем он сравнил свою теорию с наблюдениями и улучшил постоянные интегрирования. Таким образом он довел рассогласования между теорией и меридианными наблюдениями Урана до $20''$, что было еще слишком много.

Тогда Леверье стал искать возмущения, которые оказывает на Уран некоторая планета, расположенная примерно в плоскости эклиптики и в первом приближении на среднем расстоянии от Солнца, вдвое большим, чем Уран (согласно эмпирическому закону Тициуса-Боде). Ему удалось уменьшить рассогласования в долготе между теорией и наблюдениями по крайней мере до $5.4''$ для меридианных наблюдений и до $20''$ для старых наблюдений с учетом возмущающей планеты, имеющей массу 0.000107 масс Солнца и орбиту с большой полуосью 36.1539 а.е. (а.е. — астрономическая единица). Он установил, что на 1 января 1847 года гелиоцентрическая долгота возмущающей планеты должна быть равна $326^{\circ}32'$, а расстояние — 33.06 а.е. Леверье сообщил положение планеты 18 сентября 1846 г. немецкому астроному Галле (Johann Gottfried Galle), который 23 сентября 1846 года обнаружил ее на расстоянии $52'$ от положения, предсказанного Леверье.

Известно, что английский астроном Адамс (John Couch Adams) решил эту проблему одновременно с Леверье, но его результаты были опубликованы уже после открытия планеты. Положение, вычисленное Адамсом, отличалось от наблюдений Галле на $2^{\circ}27'$.

Из первых наблюдений Нептуна и старых наблюдений Лаланда (Jérôme Lalande), который в 1795 году принял планету за звезду, оказалось возможным определить элементы эллиптической орбиты. Затем удалось вычислить массу планеты из наблюдений спутника Нептуна Тритона, открытого Ласселем (William Lassell) в 1846 году вскоре после открытия планеты. Этот результат существенно отличался от значения массы, предсказанного Леверье.

Тиссеран (Félix Tisserand) заметил, что период меридианных наблюдений соответствует интервалу времени, когда взаимные возмущения Урана и Нептуна оказываются существенными. Он показал,

что направления возмущающих сил, вычисленных Леверье, оказались близкими к реальным, но принятые значения эксцентриситета и большой полуоси орбиты дали слишком слабые возмущения, что было частично скомпенсировано большой массой Нептуна. Это позволило Леверье и Адамсу правильно представить гелиоцентрическое положение Нептуна.

2.4. История открытия и наблюдений спутника Плутона Харона

Планета Плутон до недавнего времени была наименее изученной из всех тел Солнечной системы. Расстояние до него от Земли составляет в среднем около 40 а.е., т.е. 6 млрд км. С Земли Плутон выглядит как звезда примерно 14 звездной величины.

Спутник Плутона, названный Хароном, был открыт 1978 году на снимке, полученном в Морской обсерватории США (Smith, Christy, Graham, 1978). Спутник был еле различим в виде горба на изображении планеты. Максимальное угловое расстояние между Плутоном и Хароном составляет 0.9 сек. дуги.

Впервые орбита Харона была определена в работе (Christy, Harrington, 1978) и затем уточнена по дополнительным наблюдениям (Christy, Harrington, 1980; Harrington, Christy, 1980). Харон был найден на старых фотопластинках 1965 года, на которых были измерены позиционные углы спутника. Для орбиты Харона были независимо определены большая полуось и период обращения, что позволило приближенно оценить массу системы планета-спутник. Однако точность определения большой полуоси из фотографических наблюдений оставалась не высокой.

К этому времени прогресс в астрономической технике привел к появлению спекл-интерферометрических наблюдений. Их методика описана в Главе 5. С 1980 года стали появляться результаты спекл-интерферометрических наблюдений системы Плутон-Харон (Vopneau, Fou, 1980). В качестве примера обработки спекл-интерферометрических наблюдений этой системы можно указать работу (Baier, Weigelt, 1987). Для получения семи положений Плутона и Харона были обработаны 87000 интерферограмм.

К 1985 году накопилось 19 спекл-интерферометрических наблюдений. Наиболее значительные результаты по определению орбиты Харона по этим наблюдениям получены в работе (Tholen,

1985). Автор этой работы определял орбиту Харона нелинейным методом наименьших квадратов с учетом весов наблюдений. В качестве модели движения Харона принималась кеплеровская невозмущенная орбита. Попытка определить эксцентриситет орбиты на основе наблюдений привела к значению 0.008 ± 0.032 . Ошибка в четыре раза превышает само значение, поэтому орбита была принята круговой. Радиус орбиты получился равным 19360 ± 300 км, а период обращения 6.38764 ± 0.00018 сут. Независимое определение периода обращения и радиуса орбиты позволило определить суммарную массу системы Плутон-Харон, она получилась равной $(6.8 \pm 0.5) \cdot 10^{-9}$ масс Солнца. Оказалось, что орбита Харона почти перпендикулярна к плоскости экватора Земли. Наклон к экватору эпохи 1950.0 составил 93.9 градуса.

Поскольку период орбитального движения Харона точно совпадает с периодом собственного вращения Плутона и периодом собственного вращения Харона, систему Плутон-Харон можно считать полностью завершившей свою приливную эволюцию (Farinella, Paolicchi, Ferrini, 1979; Reinsch, Pakull, 1987). Это в свою очередь служит объяснением того, что из наблюдений получается почти круговая орбита Харона (Tholen, 1985).

По спекл-интерферометрическим наблюдениям нельзя достоверно определить размеры тел, что можно заключить из описания методики таких наблюдений. Поэтому вопрос о плотности вещества системы Плутон-Харон некоторое время оставался открытым.

Исключительным астрономическим событием той эпохи было прохождение плоскости орбиты Харона вблизи линии, соединяющей Солнце и Плутон. Это явление повторяется с периодом 124 года (половина периода обращения Плутона вокруг Солнца). Согласно параметрам орбиты, определенным по спекл-интерферометрическим наблюдениям, с 1985 года Плутон и Харон, как они видны с Земли, должны периодически заслонять друг друга. Кроме того тень, которую отбрасывает одно тело на другое, будет видна с Земли. Соответственно будет уменьшаться их суммарный блеск. Как впоследствии выяснилось, это уменьшение может достигать 0.7 звездной величины. Такие заслонения и затмения называются в литературе взаимными покрытиями и затмениями или взаимными событиями.

Изменения яркости Плутона из-за покрытий и затмений действительно были обнаружены в 1985 году впервые по наблюдени-

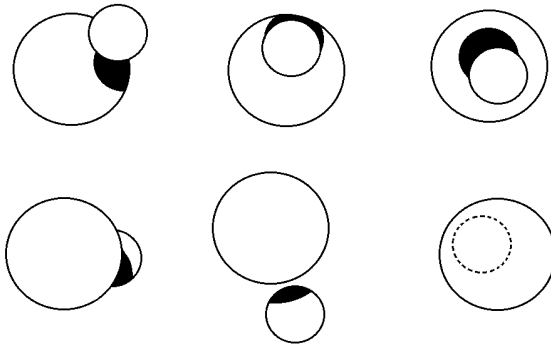


Рис. 2.2. Различные фазы взаимных покрытий и затмений в системе Плутон-Харон.

ям, выполненным на обсерваториях Маунт Паломар и Мак Дональд (Binzel et al., 1985).

Высокоточные фотометрические наблюдения системы Плутон-Харон дают принципиально новую информацию для определения параметров системы. Подробное описание методики моделирования картины явлений и соответствующие формулы приводятся в работе (Dunbar, Tedesco, 1986). Предполагается, что Плутон и Харон имеют шарообразную форму.

Измеряемая величина — суммарный блеск существенно зависит от физических свойств поверхностей тел. Поэтому в число определяемых параметров включается альbedo для каждого из тел. В работе (Dunbar, Tedesco, 1986) считается, что альbedo одинаковое по поверхности тела.

На рис. 2.2 показаны несколько примеров взаимного расположения Плутона, Харона и тени одного из тел, как это видно с Земли. Размеры тел и смещение тени на рисунках соответствуют параметрам системы, найденным в работе (Tholen et al., 1987) по первым фотометрическим наблюдениям взаимных явлений в системе Плутон-Харон.

Видимая граница тени представляет собой кривую, описываемую довольно сложным уравнением. Видимые освещенные площади тел в работе (Dunbar, Tedesco, 1986) предлагается определять

численно путем вычисления определенных интегралов. Для приближенных расчетов можно ввести упрощение — считать видимую границу тени окружностью радиусом, равным радиусу тела, которое отбрасывает тень (Dunbar, Tedesco, 1986). В этом случае видимые освещенные площади можно выразить аналитически и вычислять их по простым формулам. Такие формулы приводятся в работе (Dunbar, Tedesco, 1986). Ошибка вычисленной яркости системы при этом не превосходит 0.005 звездной величины. Несмотря на простоту формул, алгоритм вычисления яркости оказывается довольно сложным из-за многочисленности вариантов относительного расположения тел и тени.

В 1985 и 1986 годах затмения были неполными, т.е. никогда видимый диск одного тела не находился полностью внутри видимого диска другого тела или его тени. При этих условиях надежно определяемым параметром является сумма радиусов планеты и спутника. Радиусы каждого из тел определяются существенно менее точно. Однако для определения плотности вещества тел необходимо знать их радиусы отдельно, а не только сумму. Чтобы отдельно определить радиусы Плутона и Харона, следует привлечь наблюдения полных затмений, которые происходили в 1987 и 1988 годах. Затмения в 1989 и 1990 годах снова являются неполными и в 1990 году закончились совсем.

При использовании фотометрических наблюдений затмений в принципе невозможно отдельно определить большую полуось орбиты Харона и радиусы тел. Если, например, одновременно увеличить в N раз большую полуось орбиты и радиусы тел, то кривая блеска системы не изменится. С другой стороны, чтобы определить среднюю плотность вещества системы Плутон-Харон, достаточно знать только отношения радиусов тел к большой полуоси орбиты. Действительно, легко получить формулу для средней плотности ρ вещества системы

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \left[\left(\frac{R_P}{a} \right)^3 + \left(\frac{R_C}{a} \right)^3 \right]^{-1},$$

где G — универсальная гравитационная постоянная, T — период орбитального движения Харона, a — большая полуось его орбиты, R_P и R_C — радиусы Плутона и Харона, соответственно. Период T точнее других параметров определяется как из спекл-

интерферометрических наблюдений, так и по фотометрическим наблюдениям в периоды взаимных покрытий и затмений.

Полную массу системы можно найти при условии, что кроме периода T , известна большая полуось орбиты спутника, которая могла быть определена только по спекл-интерферометрическим наблюдениям.

Фотометрические наблюдения взаимных затмений в системе Плутон-Харон с 1985 года систематически велись на обсерватории Мауна Кеа на Гавайских островах и на обсерватории Макдональда в штате Техас (США).

Первые наиболее значительные результаты определения параметров системы Плутон-Харон по фотометрическим наблюдениям затмений были получены в работе (Tholen et al., 1987). Использовались наблюдения частичных затмений 1985 и 1986 годов. Результаты наблюдений не публикуются, результаты сравнения приводятся только на рисунках теоретической кривой блеска после уточнения параметров с результатами наблюдений для шести затмений 1986 года. Наклон орбиты определяется с пониженной точностью, поскольку информацию для его определения из фотометрии дает только отклонение тени, которое само по себе весьма мало. Средняя величина остаточных отклонений измеренных значений яркости от теоретических после уточнения параметров для каждого затмения не превышала 0.002 звездной величины. Максимальное уменьшение яркости системы Плутон—Харон в затмениях 1985 и 1986 года составило около 0.25 звездной величины.

Авторы работы (Tholen et al., 1987) сделали попытку определить вариации альбедо по видимым дискам Плутона и Харона. Уверенно сделан вывод о том, что экваториальные области Плутона немного темнее полярных. Этот результат согласуется с данными радиотехнических измерений излучения Плутона в инфракрасном диапазоне, сделанных 16 августа 1983 года с астрономического спутника IRAS (Infrared Astronomical Satellite) (Sykes et al., 1987). Предполагалось, что Плутон имеет яркие полярные шапки из твердого метана, распространяющиеся по крайней мере до широт ± 45 градусов. Что касается Харона, то сделана попытка идентифицировать на его поверхности лед (Marcialis, Rieke, Lebofsky, 1987).

По всем фотометрическим наблюдениям затмений, включая полные затмения вплоть до 26 июня 1987 года, были снова уточнены параметры системы Плутон—Харон (Tholen, Buie, Swift, 1987).

Таблица 2.2. Параметры системы Плутон-Харон, полученные по фотометрическим наблюдениям во время их полных взаимных затмений.

Параметр	Значение	Ср. квадр. ошибка
Большая полуось орбиты Харона, км	19640	320
Эксцентриситет	0.00009	0.00038
Наклон к геоэкватору эпохи 1950.0, град	98.3	1.3
Период обращения Харона, сут	6.387230	0.000021
Радиус Плутона, км	1142	9
Радиус Харона, км	596	17
Геометрическое альbedo Плутона	0.43 - 0.60	—
Геометрическое альbedo Харона	0.375	0.018
Средняя плотность вещества системы Плутон-Харон, г/см ³	2.065	0.047

Аналогично делались дальнейшие уточнения параметров и прогноз обстоятельств затмений на 1989 год (Tholen, Buie, 1988). Максимальный спад светимости системы Плутон—Харон из-за затмений происходил в феврале 1987 года и составлял 0.67 звездной величины. Последние определенные значения параметров системы, взятые из работы (Tholen, Buie, 1988), приведены в табл. 2.2.

Разработка методов и алгоритмов предвычисления затмений в системе Плутон—Харон велась также в ГАИШ МГУ. Были вычислены эфемериды затмений на 1989 год, а также условия фотометрических наблюдений затмений на 1990 год (Емельянов, 1989; Емельянов, Медведев, 1989).

В работах (Mulholland, Gustafson, 1987; Tholen, Hubbard, 1988) рассматривалось явление дифракции во время взаимных затмений Плутона и Харона. Вопрос о влиянии этого эффекта на результаты наблюдений остался открытым.

Попытка интерпретации наблюдений системы на основе модели альbedo Плутона, включающей два пятна на поверхности, сделана автором работы (Marcialis, 1988).

В итоге дадим окончательно общее представление о системе Плутон—Харон на основе данных, полученных после последней эпохи взаимных покрытий и затмений в этой системе.

Плутон и Харон — два шарообразных небесных тела общей массой $(6.8 \pm 0.5) \cdot 10^{-9}$ масс Солнца движущихся по круговым орбитам вокруг общего центра масс на расстоянии 19130 км с периодом 6.387217 сут. Плоскость орбит почти перпендикулярна плоскости экватора Земли (наклон к плоскости экватора эпохи 1950.0 около 98.3 град.). Радиусы: Плутона — 1142 км, Харона — 696 км. Отношение массы спутника к массе планеты в предположении равной плотности вещества тел равно 0.1526. Каждое из тел вращается вокруг собственной оси с периодом, равным периоду орбитального движения Харона вокруг Плутона. Оси вращения перпендикулярны плоскости орбиты Харона. Таким образом, Плутон и Харон постоянно ориентированы друг к другу одними и теми же своими сторонами.

Вопросы об отличии тел от шарообразных и об отличии эксцентриситета орбиты спутника от нуля остаются открытыми.

Возмущения кеплеровской орбиты Харона до сих пор не изучались. Поддается простой оценке вековое изменение долготы восходящего узла орбиты из-за притяжения Солнца, Оно составляет $3 \cdot 10^{-21}$ градуса в год.

На поверхности Плутона имеются светлые полярные шапки из твердого метана. Харон вероятно состоит из льда и имеет равномерную освещенность.

Существуют несколько типов наблюдений системы Плутон-Харон. Первый тип — спекл-интерферометрические наблюдения, которые состоят в измерении углового расстояния между планетой и спутником и позиционного угла. Второй тип наблюдений — фотометрические измерения суммарного блеска системы в период взаимных затмений, который длится около шести лет и повторяется один раз в 124 года. Недавний такой период — с 1985 по 1990 год.

Наблюдения системы Плутон-Харон проводились также с космического телескопа Hubble Space Telescope (HST). В 1993 году были получены 60 изображений (Tholen, Buie, 1997). Из этих наблюдений были определены новые значения параметров орбиты. В противоположность предположениям, основанным на модели приливной эволюции, было найдено неожиданно большое значение эксцентриситета орбиты, равное 0.0076 ± 0.0005 . Большая полуось ока-

Таблица 2.3. Параметры системы Плутона и его спутников. G_m — гравитационный параметр. Большая полуось орбиты Харона относится к его движению вокруг Плутона. Для остальных четырех спутников большие полуоси орбит относятся к движению вокруг барицентра двойной системы. Наклоны орбит даны по отношению к плоскости орбиты Харона. Для Плутона дан период осевого вращения, для спутников — периоды обращения вокруг планеты.

Тело	Большая полуось, км	Эксцентриситет	Наклон, град.	Период, сутки	G_m , км ³ /с ²
Плутон				6.3872	869.60 ± 1.8
Харон	19596	0.00005	0.0	6.3872	105.88 ± 1.0
Стикс	42413	0.00001	0.0	20.1617	0.0000 ± 0.0001
Никта	48690	0.00000	0.0	24.8548	0.0030 ± 0.0027
Цербер	57750	0.00000	0.4	32.1679	0.0011 ± 0.0006
Гидра	64721	0.00554	0.3	38.2021	0.0032 ± 0.0028

залась равной 19636 ± 8 км. Гравитационный параметр системы был выведен равным 981.5 ± 1.1 км³/с².

В работе (Olkin, Wasserman, Franz, 2003) докладывается о проведении наблюдений системы Плутон-Харон с помощью HST в 1998 году непрерывно в течение 4.4 суток. В 2002–2003 годах с помощью HST были получены еще 12 положений Харона относительно Плутона (Buie et al., 2006).

В 2005 году были открыты два новых спутника Плутона Никта и Гидра, а в 2011 и 2012 годах еще два спутника Цербер и Стикс. Это весьма малые по сравнению с Хароном объекты движущиеся на расстояниях 40–60 тысяч км от планеты.

Современные данные об орбитальных свойствах спутников получены из наземных наблюдений и наблюдений с космического телескопа Хаббла (HST) (Brozovic et al., 2015). Эти данные воспроизведены в табл. 2.3. В таблице приводятся также период вращения и гравитационный параметр Плутона.

Новый шаг в изучении системы спутников Плутона был сделан в 2006 году запуском к Плутону автоматического космического аппарата New Horizons. В середине 2015 года аппарат достиг окрест-

ностей Плутона. С расстояния 12 тыс. км были сделаны многочисленные снимки планеты. Получены также изображения Харона и других спутников. Построены карты температур планеты и спутника, открыта тонкая атмосфера у Плутона, состоящая из молекул азота и метана.

С космического аппарата New Horizons получено очень много данных. Их обработка займет какое-то время. Предварительные результаты даны в публикации (Stern et al., 2015). Приводятся карты поверхностей Плутона и Харона. Описаны физические свойства их поверхностей. Особое внимание уделено атмосфере Плутона.

На основе данных с аппарата New Horizons получены новые значения радиусов Плутона и Харона — 1187 ± 4 км и 606 ± 3 км, соответственно. Определены полуоси трехосного тела Никты: 54, 41, 36 км. Найдены полуоси эллипсоида, представляющего тело Гидры: 43 и 33 км.

Подробное изложение первых результатов можно найти в работе (Stern et al., 2018). Основное внимание уделено физическим свойствам Плутона и его спутников. Результаты изложены в следующих разделах: геология и состав, атмосфера, недра, размеры и форма объектов, морфология, состав и цвет поверхностей, Особое внимание уделено вопросам происхождения системы Плутона.

Новые данные позиционных наблюдений, на основе которых можно было бы уточнить орбиты спутников, к настоящему времени не опубликованы.

Для приложений методов небесной механики двойная планета Плутон – Харон представляет собой уникальный случай в Солнечной системе. Имеют место максимальное отношение массы спутника к массе планеты — 0.1217, максимальное отношение радиуса спутника к его расстоянию до планеты — 0.0309 и двойная синхронность вращения планеты и спутника с орбитальным движением.

2.5. Орбитальные и физические параметры планет, имеющих спутники

В задачах изучения динамики естественных спутников планет приходится вычислять возмущения в движении спутников, обусловленные притяжением больших планет. В некоторых случаях необходимо учитывать также несферичность планет. Для этого удобно иметь под рукой необходимые параметры. Поэтому мы при-

Таблица 2.4. Орбитальные параметры некоторых больших планет. Наклон измеряется относительно эклиптики эпохи J2000. Период задан в юлианских годах по 365.25 суток.

Планета	Большая полуось орбиты, а.е.	Эксцен- триситет орбиты	Наклон к экл., градусы	Период обращения, лет
Марс	1.5236793402	0.093400630	1.84972607	1.88084832678
Юпитер	5.2026032025	0.048497982	1.30328059	11.8619832216
Сатурн	9.5549104300	0.055548261	2.48887405	29.4571606779
Уран	19.2184382726	0.046384032	0.77318296	84.0204024633
Нептун	30.1104158724	0.009454315	1.76994618	164.770405189
Плутон	39.54461714	0.24905026	17.1420813	247.997694064

водим здесь некоторые орбитальные и физические параметры Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона. В табл. 2.4 даются орбитальные параметры, взятые из публикации (Simon, Franco, 2016). Для Марса взяты параметры теории VSOP2013, а для остальных планет параметры теории TOP2013.

В следующих таблицах приводятся некоторые физические параметры больших планет. Гравитационный параметр — это произведение универсальной гравитационной постоянной на массу тела. Именно гравитационный параметр фигурирует в уравнениях движения небесных тел. Он определяется из наблюдений, причем точнее, чем отдельно универсальная гравитационная постоянная.

Следует учесть, что приведенные значения гравитационных параметров планет могут включать в себя массы спутников. Значения для планеты вместе со спутниками называются *гравитационными параметрами системы*. Отдельно для планеты задается *гравитационный параметр планеты*.

Необходимыми для построения модели движения спутников являются также параметры гравитационного поля планеты. Модель гравитационного поля представляется коэффициентами разложения силовой функции притяжения в ряд по сферическим функциям. Вид разложения приводится в соответствующем разделе главы 3. Большие планеты почти осесимметричны, но имеют еще и экваториальную плоскость симметрии. По этим причинам в разло-

жении берутся только члены с коэффициентами J_2, J_4, J_6 . Эти коэффициенты определяются из наблюдений для заданного экваториального радиуса планеты R_e и совместно с ее гравитационным параметром. Поэтому необходимо совместно использовать взаимно согласованные значения этих параметров.

Заметим, что для разложения силовой функции притяжения планеты принимается такой вид, чтобы коэффициент J_2 , характеризующий ее динамическое сжатие, был положительным.

Значения гравитационных постоянных систем планет, взятые из публикации (Folkner et al., 2014), приводятся в табл. 2.5. Это те значения, которые использовались при построении модели движения планет DE431. Они включают в себя значения масс спутников.

Заметим, что при использовании постоянных в той или иной теории следует брать согласованные между собой их значения. В частности, некоторые другие постоянные в комплекте с гравитационными постоянными планет следует брать из той же публикации (Folkner et al., 2014):

- астрономическая единица 149597870.700 км,
- скорость света 299792.458 км/с,
- радиус Солнца 696000.0 км,
- гравитационный параметр Солнца $132712440041.939400 \text{ км}^3/\text{с}^2$,
- динамическое сжатие Солнца $J_2 = 2.1106088532726840 \cdot 10^{-7}$.

Большое (излишнее) количество значащих цифр в этих значениях бывает необходимо для согласования исходных данных при вычислениях.

В табл. 2.5 даны средние, экваториальные и полярные значения радиусов планет. Эти значения рекомендованы Рабочей группой по картографическим координатам и параметрам вращения планет и спутников Международного астрономического союза (IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements – IAU WG CCRE). Они опубликованы в очередном отчете этой рабочей группы (Archinal et al., 2018). Радиус Плутона в таблице не приводится, он дан выше как результат наблюдений с помощью космического аппарата New Horizons.

При построении модели движения спутников планеты на основе наблюдений получают также некоторые физические параметры планеты. Рассмотрим данные из нескольких таких работ. В каждой из них значения параметров согласованы между собой. Поэтому совместно должны использоваться значения коэффициентов J_2 ,

Таблица 2.5. Физические параметры некоторых больших планет. Значения среднего R_m , экваториального R_e и полярного R_p радиусов взяты из публикации (Archinal et al., 2018). Гравитационные параметры систем планет со спутниками G_m соответствуют планетной теории DE431 (Folkner et al., 2014).

Планета	R_m , км	R_e , км	R_p , км	G_m , км ³ /с ²
Марс	3389.50	3396.19	3376.20	42828.375214
Юпитер	69911.0	71492.0	66854.0	126712764.80
Сатурн	58232.0	60268.0	54364.0	37940585.200
Уран	25362.0	25559.0	24973.0	5794548.600
Нептун	24622.0	24764.0	24341.0	6836527.10058
Плутон	-	-	-	977.00

Таблица 2.6. Физические параметры некоторых больших планет, полученные из наблюдений спутников. Единицы измерения км³/с².

Планета	Гравитационный параметр планеты	Гравитационный параметр системы
Юпитер	126686536.1 ± 2.7	126712764.1 ± 2.7
Сатурн	37931208.0 ± 1.0	37940585.0 ± 1.0
Уран	5793951.3 ± 4.4	5794556.4 ± 4.3
Нептун	6835100.0 ± 10	6836527.0 ± 10

J_4 , J_6 и принятые значения радиусов планет R_e . Полученные значения физических параметров приводятся в табл. 2.6 и 2.7, где даются также погрешности определения параметров. Библиографические ссылки источников этих данных таковы:

для спутников Юпитера – (Jacobson, 2013),

для спутников Сатурна – (Jacobson et al., 2006),

для спутников Урана – (Jacobson, 2014),

для спутников Нептуна – (Jacobson, 2009).

Таблица 2.7. Физические параметры некоторых больших планет, полученные из наблюдений спутников. Параметры гравитационных полей.

Планета	Радиус	J_2	J_4	J_6
	R_e , км	$\times 10^6$	$\times 10^6$	$\times 10^6$
Юпитер	71492	14695.62 ± 0.29	-591.31 ± 2.06	20.78 ± 4.87
Сатурн	60330	16290.71 ± 0.27	-935.83 ± 2.77	86.14 ± 9.64
Уран	25559	3510.68 ± 0.70	-34.17 ± 1.30	-
Нептун	25225	3408.43 ± 4.50	-33.40 ± 2.90	-

2.6. Орбитальные параметры спутников планет

Движение спутников планет подвержено влиянию различных факторов. Уравнения движения решаются методами численного интегрирования или методами теории возмущений. Удобный и наглядный способ представления движения — это кеплеровская орбита. При наличии возмущений реальное движение по сравнению с решением задачи двух тел представляет собой движение по кеплеровской орбите, параметры которой изменяются во времени. Эти изменения при малости возмущений будут малыми. Поэтому движение спутника можно характеризовать некоторыми средними параметрами кеплеровской орбиты. Средние значения параметров получатся различными при осреднении на различных интервалах времени.

Для понимания места спутника в пространстве нас интересуют прежде всего средние значения большой полуоси, эксцентриситета и наклона орбиты по отношению к какой-нибудь неизменной плоскости. Обычно неизменную плоскость выбирают так, чтобы наклон орбиты по отношению к ней изменялся минимально.

Для близких спутников доминирующее влияние имеет сжатие планеты. Под действием сжатия плоскость орбиты медленно прецессирует с почти постоянным наклоном вокруг оси симметрии планеты. Сама орбита также медленно поворачивается в своей плоскости. На это движение накладываются весьма малые короткопериодические возмущения, которые не сильно изменяют характер движения.

Для далеких спутников планет основные возмущения обусловлены притяжением Солнца. При этом орбита прецессирует с почти

постоянным наклоном по отношению к плоскости орбиты Солнца вокруг планеты. При моделировании движения далеких спутников следует учитывать также притяжение других ближайших планет.

Взаимное притяжение спутников, а также совместное влияние различных факторов, имеющих примерно одинаковые величины, существенно изменяют такой упрощенный характер движения по прецессирующей кеплеровской орбите.

Для далеких спутников планет возмущения от притяжения Солнца могут иметь весьма значительную величину. В этих случаях эксцентриситет и наклон могут изменяться в довольно широких пределах, и их средние значения будут значительно зависеть от интервала времени, на котором делается осреднение элементов. По этим причинам постоянные значения большой полуоси орбиты, эксцентриситета и наклона могут только приближенно представлять движение спутника.

Тем не менее, даже приближенные значения указанных параметров демонстрируют характер движения и место спутника в пространстве вокруг планеты. Поэтому в данной книге сделана попытка показать параметры орбит. Поскольку известных спутников планет довольно много и таблицы параметров получаются объемными, они помещены в Приложении 2. Ниже описано, как они составлены, и даны краткие описания таблиц.

Для большинства спутников построены модели движения путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения. Наиболее совершенные из них помещены в службы эфемерид. Одна из таких служб — эфемеридный сервер MULTI-SAT (Emel'yanov, Arlot, 2008) для естественных спутников планет. Использовать его можно через интернет по адресу <http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/multisat/index.html>. Этот сервер позволяет вычислять значения элементов кеплеровской оскулирующей орбиты, осредненные на заданном интервале времени. Таблицы орбитальных параметров для некоторых спутников планет, помещенные в Приложении 2, составлены с помощью сервера MULTI-SAT. Интервалы времени, на которых вычислены средние элементы, указаны в заголовках таблиц.

В сервере эфемерид по умолчанию используются наиболее совершенные в последнее время модели движения спутников. Именно они и использовались. Какие это модели, описано в специальном разделе Главы 12 настоящей книги.

Заметим, что элементы оскулирующей орбиты спутника вычисляются по значениям прямоугольных координат и компонент скорости. В вычислениях используются значения гравитационных параметров планеты и спутника. При вычислении наклона орбиты к плоскости экватора планеты используются также углы, определяющие плоскость экватора. Эти параметры могут иметь разные версии значений. В сервере MULTI-SAT используются наиболее достоверные версии. Поскольку вычисляемые средние элементы являются приближенными, то в приводимых данных не уточняется, при каких значениях указанных параметров вычислялись элементы.

Для ряда спутников средние орбитальные параметры взяты из публикаций, в которых они получены на основе некоторых моделей движения, построенных на основе наблюдений. Это указано в заголовках таблиц, где даны также источники данных. В частности, для 59 далеких спутников Юпитера средние элементы получены в работе (Brozovic, Jacobson, 2017). Это сделано путем определения параметров прецессирующего эллипса по модели движения спутников, построенных численным интегрированием уравнений движения и уточненных по наблюдениям. В указанной работе средние элементы вычислены на интервале времени 1000 лет с 1600 по 2600 год.

Литература к Главе 2

- Емельянов Н. В.* Эфемериды затмений в системе Плутон-Харон в 1989 году. *Астрономический циркуляр*. 1989. № 1535. С. 27–28.
- Емельянов Н. В., Медведев В. Г.* Предвычисление взаимных затмений в системе Плутон-Харон. *Препринт ГАИШ*. 1989. № 10. С. 1–14.
- Емельянов Н. В.* Двести лет Бюро долгот. *Вселенная и мы*. 1997. № 3. С. 94–97.
- Archinal B. A., Acton C. H., A'hearn M. F., Conrad A., Consolmagno G. J., Duxbury T., Hestroffer D., Hilton J. L., Kirk R. L., Klioner S. A., McCarthy D., Meech K., Oberst J., Ping J., Seidelmann P. K., Tholen D. J., Thomas P. C., Williams I. P.* Report of the IAU Working Group on cartographic Coordinates and Rotational

- Elements: 2015. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2018. 130:22.
- Baier G., Weigelt G.* Speckle interferometric observations of Pluto and its moon Charon on seven different nights. *Astronomy and Astrophysics*. 1987. V. 174. No. 1-2. P. 295–298.
- Binzel R. P., Tholen D. J., Tedesco E. F., Buratti B. J., Nelson R. M.* The detection of eclipses in the Pluto-Charon system. *Science*. 1985. V. 228. P. 1193–1195.
- Bonneau D., Foy R.* Speckle interferometry with the 3.60 M CFH telescope. I - Resolution of the Pluto-Charon system. *Astronomy and Astrophysics*. 1980. V. 92. No. 1–2. P. L1–L4.
- Brozovic M., Showalter M. R., Jacobson R. A., Buie M. W.* The orbits and masses of satellites of Pluto. *Icarus*. 2015. V. 246. P. 317–329.
- Brozovic, M., Jacobson R. A.* The Orbits of Jupiter's Irregular Satellites. *Astronomical Journal*. 2017. V. 153. Issue 4. Article id. 147, 10 pp.
- Buie M. W., Grundy W. M., Young E. F., Young L. A., Stern S. A.* Orbits and photometry of Pluto's satellites: Charon, S/2005 P1 and S/2005 P2. *Astronomical Journal*. 2006. V. 132. No. 1. P. 290–298.
- Christy J. W., Harrington R. S.* The satellite of Pluto. *Astronomical Journal*. 1978. V. 83. P. 1005, 1007, 1008.
- Christy J. W., Harrington R. S.* The discovery and orbit of Charon. *Icarus*. 1980. V. 44. P. 38–40.
- Dunbar R. S., Tedesco E. F.* Modeling Pluto-Charon mutual eclipse events. I - First-order models. *Astronomical Journal*. 1986. V. 92. P. 1201–1209.
- Emel'yanov N. V., Arlot J.-E.* The natural satellites ephemerides facility MULTI-SAT. *Astronomy and Astrophysics*. 2008. V. 487. P. 759–765.
- Farinella P., Paolicchi P., Ferrini F.* Planet formation process as a phase transition. III - Mass distribution in the outer solar system. *Moon and the Planets*. 1979. V. 21. P. 405–408.
- Folkner W.M., Williams J.G., Boggs D.H., Park R.S., Kuchynka P.* The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431. The Interplanetary Network Progress Report. 2014. Jet Propulsion

Laboratory. California Institute of Technology. V. 42-196. P. 1–81.

Harrington R. S., Christy J. W. The satellite of Pluto. II. *Astronomical Journal*. 1980. V. 85. P. 168–170.

Introduction aux éphémérides astronomiques. Supplément explicatif à la connaissance des temps. (eds. Simon J.-L., Chapront-Touzé M., Morando B., Thuillot W.). 1997, Paris: BDL, 450 c. Institute of Technology. 2013.

Jacobson R. A., Antreasian P. G., Bordi J. J., Criddle K. E., Ionasescu R., Jones J. B., Mackenzie R. A., Pelletier F. J., Owen Jr. W. M., Roth D. C., Stauch, J. R. The gravity field of the Saturnian system from satellite observations and spacecraft tracking data. *Astronomical Journal*. 2006. V. 132. Issue 6. P. 2520–2526.

Jacobson, R. A. The Orbits of the Neptunian Satellites and the Orientation of the Pole of Neptune. *Astronomical Journal*. 2009. V. 137. Issue 5. P. 4322–4329.

Jacobson R. A. JUP310 orbit solution. Jet Propulsion Laboratory. California Institute of Technology. 2013.

Jacobson, R. A. The Orbits of the Uranian Satellites and Rings, the Gravity Field of the Uranian System, and the Orientation of the Pole of Uranus. *Astronomical Journal*. 2014. V. 148. P. 76–88.

Marcialis R. L., Rieke G. H., Lebofsky L. A. The surface composition of Charon - Tentative identification of water ice. *Science*. 1987. V. 237. P. 1349–1351.

Marcialis R. L. A two-spot albedo model for the surface of Pluto. *Astronomical Journal*. 1988. V. 95. P. 941–947.

Mulholland J. D., Gustafson B. A. S. Pluto eclipses of and by Charon must be unequal. *Astronomy and Astrophysics*. 1987. V. 171. No. 1–2. P. L5–L7.

Olkin C. B., Wasserman L. H., Franz O. G. The mass ratio of Charon to Pluto from Hubble Space Telescope astrometry with the fine guidance sensors. *Icarus*. 2003. V. 164. No. 1. P. 254–259.

Reinsch K., Pakull M. W. Physical parameters of the Pluto-Charon

- system. *Astronomy and Astrophysics*. 1987. V. 177. No. 1–2. P. L43–L46.
- Simon J.L., Francou G.* Construction des théories planétaires analytiques de l’IMCCE. Notes scientifiques et techniques de l’Institut de mécanique céleste. 2016. S103.
- Smith J. C., Christy J. W., Graham J. A.* IAU Circ. 1978. No. 3241, P. 1.
- Stern S. A., Bagenal F., Ennico K., Gladstone G. R. and 147 coauthors.* The Pluto system: Initial results from its exploration by New Horizons. *Science*. 2015. V. 350. Issue 6258. id.aad1815.
- Stern S. A., Grundy W. M., McKinnon Wm. B., Weaver H. A., Young L. A.* The Pluto System After New Horizons. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 2018. V. 56. P. 357–392.
- Sykes M. V., Cutri R. M., Lebofsky L. A., Binzel R. P.* IRAS serendipitous survey observations of Pluto and Charon. *Science*. 1987. V. 237. P. 1336–1340.
- Tholen D. J.* The orbit of Pluto’s satellite. *Astronomical Journal*. 1985. V. 90. P. 2353–2359.
- Tholen D. J., Buie M. W., Binzel R. P., Frueh M. L.* Improved orbital and physical parameters for the Pluto-Charon system. *Science*. 1987. V. 237. P. 512–514.
- Tholen D. J., Buie M. W., Swift C. E.* Circumstances for Pluto-Charon mutual events in 1988. *Astronomical Journal*. 1987. V. 94. P. 1681–1685.
- Tholen D. J., Buie M. W.* Circumstances for Pluto-Charon mutual events in 1989 *Astronomical Journal*. 1988. V. 96. P. 1977–1982.
- Tholen D. J., Hubbard W. B.* No effect of diffraction on Pluto-Charon mutual events. *Astronomy and Astrophysics*. 1988. V. 204. No. 1–2. P. L5–L7.
- Tholen D. J., Buie M. W.* The Orbit of Charon. *Icarus*. 1997. V. 125. No. 2. P. 245–260.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Резюме

Это большая глава, в которой представлен набор аналитических методов построения моделей движения спутников планет. Начинается все с задачи двух тел. Даются формулы кеплеровского движения. Для уточнения параметров орбит спутников на основе наблюдений нужны значения частных производных от координат по элементам орбиты. Здесь даются формулы для этих производных.

Приводится разложение силовой функции притяжения несферического тела, выраженное через координаты спутника. Рассматривается связанная с этим очень интересная обобщенная задача двух неподвижных центров.

Основа аналитических методов — это теория возмущений. Здесь подробно излагается весь алгоритм применения теории возмущений. Применяется метод малого параметра.

Разложение возмущающей функции, обусловленной несферичностью центрального тела, выражено через элементы кеплеровской промежуточной орбиты и дается в форме, удобной для практического применения. Для возмущающей функции, обусловленной притяжением внешнего тела, приводится разложение также выраженное через элементы кеплеровской промежуточной орбиты.

С помощью теории возмущений в первую очередь получают вековые возмущения. Далее на основе такого подхода строится модель прецессирующего эллипса. В конце главы рассматриваются применения этой модели. Показано, как получаются периодические возмущения. Изучаются их свойства.

В этой главе рассматриваются особые случаи в теории возмущений, которые не освещены должным образом в литературе. Они связаны с интерпретацией вековых возмущений и возмущениями при малых эксцентриситетах. Эти результаты кажутся неожиданными.

Как пример построения чисто аналитической теории движения спутника описывается модель движения спутника Нептуна Тритона, построенная автором данной книги. Параметры теории уточнены на основе всех имеющихся наблюдений. По точности эта модель конкурирует с моделями, построенными другими авторами численным интегрированием дифференциальных уравнений движения Тритона.

В конце главы описан метод определения возмущений орбитальных параметров спутника, обусловленных приливами в вязкоупругих телах планеты и самого спутника. Применяются некоторые упрощения модели действующих сил, принятые и другими исследователями. Приводятся результаты, выведенные автором данной книги, которые проясняют некоторые аспекты этой теории. Рассмотренная задача слабо освещена в публикациях. Однако имеются современные работы, в которых принимается более общий и точный подход, чем в предшествующих публикациях. В данной главе приводятся результаты определения параметров вязкоупругих свойств Юпитера, Сатурна и некоторых их спутников на основе астрометрических наблюдений.

3.1. Уравнения движения и системы координат

Движение спутников описывается дифференциальными уравнениями. В уравнениях движения записана вся информация о том, какие силы и причины воздействуют на движение. Форма записи уравнений представляет собой очень важный момент в процессе изучения динамики. С одной стороны, здесь необходима безукоризненная точность, ибо при неаккуратной записи вся последующая работа окажется бесполезной. С другой стороны, от формы записи зависит применимость и простота методов, с помощью которых будут решаться уравнения.

Уравнения движения основаны на законах механики. Вначале предполагается, что применяемая механика — это классическая механика Ньютона. Возможно, что этого будет достаточно. На каком-

то этапе исследований возникает вопрос о необходимости перехода к законам общей теории относительности (ОТО), как более адекватным реальной окружающей нас природе. На этом этапе мы оказываемся перед противоречивыми требованиями. Переход к уравнениям общей теории относительности чрезвычайно усложняет задачу. С другой стороны, необходимость перехода должна быть четко обоснована. Нужно ли переходить? Очень важно, какими критериями при этом воспользоваться. При практическом моделировании движения с целью максимально приблизить модель к действительности критерием выбора типа применяемой модели механики должно быть соответствие точности модели точности наблюдений. Сопоставление точности уравнений и точности наблюдений здесь не годится. С точностью наблюдений нужно сопоставлять точность решения дифференциальных уравнений движения, а не самих уравнений. Однако оценка точности решения всегда весьма затруднительна. Кроме того, при моделировании величин, которые измеряются в процессе наблюдений, участвует еще множество других факторов, которые не содержатся в самих уравнениях движения.

Проблему перехода к механике ОТО можно решать тем приемом, который часто применяется в небесной механике в подобных случаях. Вместо перехода к уравнениям ОТО уравнения движения записывают в рамках механики Ньютона, но при этом вводят в рассмотрение некоторые фиктивные возмущающие силы, действующие на небесное тело, так что получаемое решение будет достаточно близко к решению уравнений ОТО. Необходимость даже такого упрощенного приема должна быть тщательно оценена. На данном этапе изложения мы ограничимся уравнениями механики Ньютона.

Рассмотрим систему планеты со спутниками, которые пронумеруем индексом $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Движение системы N спутников происходит под действием притяжения планеты, взаимного притяжения спутников, притяжения других спутников, не включенных в первые N , а также под действием притяжения Солнца и других планет. Солнце, другие планеты и спутники назовем внешними телами. Будем допускать, что тело планеты имеет конечные размеры, а его гравитационный потенциал отличается от потенциала материальной точки. Дифференциальные уравнения движения спутников планеты первоначально составляются как уравнения движения задачи для $N+1$ материальной точки. При этом не важно, в какой

из них расположено начало системы координат. Вид уравнений от этого не зависит. Можно полагать, что спутники, Солнце и другие планеты движутся вокруг главной планеты, в центре которой расположено начало системы координат. Такую систему мы будем называть планетоцентрической.

Дальнейшее уточнение уравнений движения спутников состоит в принятии в расчет того факта, что планета, а также другие спутники, отличаются от материальных точек и притягивают как протяженные тела со сложными гравитационными полями.

Рассмотрим уравнения движения N спутников с координатами x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) в планетоцентрической невращающейся системе координат. Уравнения движения в векторной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = & -G(m_0 + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} - \sum_{j=1}^N G m_j \left(\frac{\Delta_{ij}}{|\Delta_{ij}|^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right) - \\ & - \sum_{j=1}^{N'} G m'_j \left(\frac{\Delta'_{ij}}{|\Delta'_{ij}|^3} + \frac{\mathbf{r}'_j}{|\mathbf{r}'_j|^3} \right) + \mathbf{F}(t, \mathbf{r}_i) , \end{aligned} \quad (3.1)$$

где G — универсальная гравитационная постоянная, m_i — масса спутника, m_0 — масса планеты, m'_j — масса внешнего тела (Солнца, планеты, спутника). В уравнениях обозначены: $\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ — радиус-вектор спутника номер i , $\mathbf{r}'_j = \{x_j, y_j, z_j\}$ — радиус-вектор внешнего тела номер j , $\Delta_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, $\Delta'_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j$. Через $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}_i)$ обозначен вектор ускорения, обусловленного несферичностью планеты. Этот вектор может явно зависеть от времени, поскольку планета со своим гравитационным полем движется независимо от спутника. Впрочем, это слагаемое может включать в себя и учет несферичности самого спутника, если его вращение задано. В первой сумме штрих означает, что слагаемое при $j = i$ опущено.

В модели движения спутника могут учитываться и другие силы. Это могут быть силы негравитационной природы, например, силы сопротивления среды или силы приливного трения в теле планеты или в теле спутника. Тогда соответствующие члены в правой части уравнений движения могут зависеть еще и от компонент скорости спутника.

В уравнениях движения векторы \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) фигурируют как искомые функции, а векторы \mathbf{r}'_j должны быть вычисляемыми на любой заданный момент времени. Координаты Солнца

и других планет определяются по эфемеридам планет. Координаты других спутников, помимо первых N , вычисляются на основе ранее разработанных моделей их движения.

Главной силой, действующей на спутник, является притяжение планеты. Потому он и является ее спутником. Главное действие планеты — это ее притяжение как материальной точки, расположенной в центре масс. Это главное действие задается первым слагаемым в правой части уравнений движения. Пренебрегая всеми другими воздействиями на спутник, кроме главного, получим уравнения движения задачи двух материальных точек. При этом начало координат совпадает с одной из них — с планетой. Для простоты такую задачу называют задачей двух тел.

Альтернативой уравнений движения в относительной системе координат являются уравнения движения в барицентрической системе. Оставляя в рассмотрении только планету и спутник, приходим снова к уравнениям движения задачи двух тел.

Хорошо известно решение дифференциальных уравнений задачи двух тел. Это закон и модель кеплеровского движения. Такую модель рассмотрим в следующем разделе.

Для детального и глубокого изучения задачи двух тел можно рекомендовать Учебное пособие (Холшевников, Титов, 2007). Стиль изложения в этой книге абстрактно-теоретический. В частности, строятся метрические пространства орбит и описываются их топологические свойства. Уделено внимание разложению координат в ряды и задачам определения орбит. В конце книги приводится список литературы, содержащий ссылки на справочники, учебники и задачки по небесной механике.

3.2. Модель кеплеровского движения

3.2.1. Основные формулы кеплеровского движения

Модель кеплеровского движения появляется как решение задачи двух тел. Тела считаются материальными точками, изолированными от других тел и любых других воздействий. Они движутся только под действием взаимного притяжения по закону квадратов обратных расстояний Ньютона. Такое движение еще называется невозмущенным.

Рассматривают относительное движение в задаче двух тел, когда начало системы отсчета помещается в центр масс одного из них, и

барицентрическое движение, при котором начало помещено в центр масс обоих тел.

Траектория движения в задаче двух тел всегда лежит в неизменной плоскости. Она представляет собой эллипс, параболу или гиперболу. Центральное тело в относительном движении или барицентр двух тел в барицентрическом движении расположены в фокусе одной из указанных кривых. Существуют также прямолинейные траектории в задаче двух тел.

Точку траектории с минимальным расстоянием до начала системы отсчета называют перицентром, а точку с максимальным расстоянием (в случае эллиптического движения) — апоцентром. Апоцентр может располагаться в бесконечности (гиперболические и параболические траектории). Линию, соединяющую перицентр орбиты с ее апоцентром, называют линией апсид.

Относительное движение описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка. Следовательно, общее решение зависит от шести независимых произвольных постоянных.

Рассмотрим уравнения движения задачи двух тел с массами m_1 и m_2 в произвольной невращающейся системе прямоугольных координат x, y, z . Начало системы координат O расположим либо в первое тело, либо во второе, либо в барицентр системы. Для всех трех случаев уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а μ — постоянная, называемая гравитационным параметром.

Если начало координат помещено в одно из тел, то уравнения описывают движение другого из них, а гравитационный параметр μ задается равенством

$$\mu = G(m_1 + m_2),$$

где G — универсальная гравитационная постоянная. Если начало координат помещено в барицентр системы, то уравнения описывают движение первого тела с гравитационным параметром

$$\mu = G \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Уравнения движения второго тела относительно барицентра имеют такой же вид, но гравитационный параметр в этом случае задается равенством

$$\mu = G \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Существуют семь первых интегралов уравнений движения, содержащих семь произвольных постоянных интегрирования, пять из которых являются независимыми. Недостающей шестой независимой произвольной постоянной является константа, определяющая положение тела на орбите в заданный момент времени.

Траекторию движения в задаче двух тел описывают параметрами (элементами) кеплеровской орбиты.

Поскольку известно, что движение тел происходит в некоторой неизменной плоскости, рассмотрим систему координат ξ, η, ζ с началом в точке O , ось ξ которой направлена в перигецентр орбиты, а ось η располагается в плоскости движения так, что радиус-вектор тела вращается от оси ξ в сторону оси η . Третью ось ζ направим так, чтобы система координат оказалась правой. Систему координат ξ, η, ζ называют орбитальной.

Формулы перехода от орбитальной системы координат $O\xi\eta\zeta$ к системе координат $Oxyz$ имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= P_x \cdot \xi + Q_x \cdot \eta + R_x \cdot \zeta, \\ y &= P_y \cdot \xi + Q_y \cdot \eta + R_y \cdot \zeta, \\ z &= P_z \cdot \xi + Q_z \cdot \eta + R_z \cdot \zeta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где через $P_i, Q_i, R_i (i = 1, 2, 3)$ обозначены направляющие косинусы линии апсид, направляющие косинусы перпендикуляра к линии апсид в плоскости орбиты, и направляющие косинусы перпендикуляра к плоскости орбиты, соответственно. Направляющие косинусы принято выражать через три угла поворота орбитальной системы координат $O\xi\eta\zeta$ по отношению к системе координат $Oxyz$:

Ω — долгота восходящего узла орбиты,

ω — угловое расстояние перигецентра от восходящего узла орбиты,

i — наклон орбиты к основной плоскости.

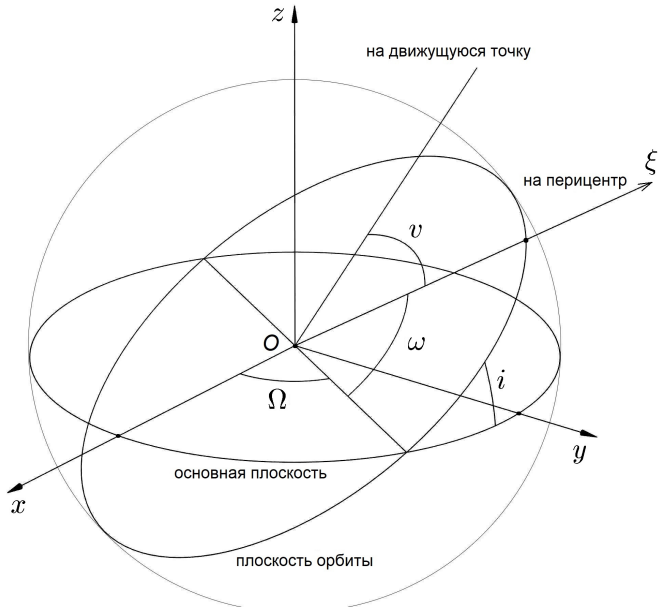


Рис. 3.1. Геометрия систем координат и плоскости орбиты кеплеровского движения.

Выражения для направляющих косинусов имеют вид

$$\begin{aligned}
 P_x &= \cos \omega \cdot \cos \Omega - \sin \omega \cdot \sin \Omega \cdot \cos i, \\
 P_y &= \cos \omega \cdot \sin \Omega + \sin \omega \cdot \cos \Omega \cdot \cos i, \\
 P_z &= \sin \omega \cdot \sin i, \\
 Q_x &= -\sin \omega \cdot \cos \Omega - \cos \omega \cdot \sin \Omega \cdot \cos i, \\
 Q_y &= -\sin \omega \cdot \sin \Omega + \cos \omega \cdot \cos \Omega \cdot \cos i, \\
 Q_z &= \cos \omega \cdot \sin i, \\
 R_x &= \sin \Omega \cdot \sin i, \\
 R_y &= -\cos \Omega \cdot \sin i, \\
 R_z &= \cos i.
 \end{aligned}$$

Ориентацию орбиты в пространстве можно увидеть на рис. 3.1, где показаны углы i , ω , Ω .

Траектория движения в задаче двух тел в орбитальной системе координат описывается следующим соотношением:

$$\mu \cdot r = c^2 - f \cdot \xi,$$

где $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ — модуль радиус-вектора тела, c — постоянная интеграла площадей, f — постоянная интеграла Лапласа.

Вырожденный случай прямолинейного движения в задаче двух тел, когда постоянная интеграла площадей c равна нулю, мы не рассматриваем. Здесь допустим, что $c > 0$, и рассмотрим уравнение траектории в полярных координатах.

Введем в плоскости орбиты полярные координаты r и v объекта по формулам

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v,$$

где угол v в кеплеровском движении называется *истинной аномалией* и отсчитывается от перицентра в положительном направлении движения точки. Фокальное уравнение орбиты в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

где обозначено $p = c^2/\mu$, $e = f/\mu$. При этом p называется фокальным параметром орбиты, а e — ее эксцентриситетом.

Из первых интегралов уравнений движения в задаче двух тел следует, что постоянная энергии зависит от введенных параметров следующим образом :

$$h = \frac{\mu^2}{c^2}(e^2 - 1).$$

Изменение полярного угла v во времени описывается дифференциальным уравнением

$$\left(\frac{p}{1 + e \cos v} \right)^2 \frac{dv}{dt} = c.$$

Решение этого уравнения записывают в различных формах в зависимости от типа движения. Тип движения определяется значением эксцентриситета e . Поэтому форма зависимости координат от времени t будет различной. Существуют следующие типы орбит.

- 1) К р у г о в а я о р б и т а : $e = 0, \quad h < 0, \quad r = const.$
- 2) Э л л и п т и ч е с к а я о р б и т а : $0 < e < 1, \quad h < 0.$
- 3) П а р а б о л и ч е с к а я о р б и т а : $e = 1, \quad h = 0.$
- 4) Г и п е р б о л и ч е с к а я о р б и т а : $e > 1, \quad h > 0.$

Поскольку мы изучаем движение спутников планет на конечных траекториях, то ограничимся рассмотрением только кругового и эллиптического движений в задаче двух тел. Тогда эксцентриситет $e < 1$. Круговое движение будет при $e = 0$.

В круговом и эллиптическом движениях рассматривают большую полуось орбиты a . При этом фокальный параметр и интеграл энергии выражаются через большую полуось следующим образом:

$$p = a(1 - e^2), \quad h = -\frac{\mu}{a}.$$

Из фокального уравнения в полярных координатах следует, что минимальное расстояние тела до начала координат будет равно $a(1 - e)$, а максимальное — $a(1 + e)$.

Для нахождения r и v как функций времени введем в качестве вспомогательной переменной *эксцентрическую аномалию* E :

$$r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad r \cos v = a(\cos E - e),$$

$$r = a(1 - e \cos E).$$

Зависимость E от времени t описывается соотношениями

$$E - e \sin E = M,$$

$$M = n(t - t_0) + M_0,$$

$$n = \sqrt{\mu/a^3},$$

t_0 — начальный момент времени (эпоха), а M_0 — произвольная постоянная интегрирования. Величина M называется *средней аномалией*, n называется *средним движением*, а M_0 — средней аномалией в эпоху.

Уравнение

$$E - e \sin E = M$$

относительно эксцентрической аномалии E называется *уравнением Кеплера*. Его численное решение обычно выполняется методом

последовательных приближений. Оптимальное построение приближений описано ниже.

Отметим, что при изменении M на 2π углы E и v также изменяются на 2π . Точно так же обстоит дело при изменении на π . Разница между ними заключается в том, что M изменяется равномерно во времени, а E и v — с переменной угловой скоростью. Лишь в частном случае кругового движения ($e = 0$) все три угла совпадают.

В практике вычисления координат в кеплеровском движении иногда используется функция времени $u = v + \omega$, которая называется *аргументом широты* объекта. Фактически u — это центральный угол в плоскости орбиты между направлением на движущееся тело и направлением на восходящий узел орбиты. Используется также величина $\lambda = v + \omega + \Omega$, называемая *долготой в орбите*, которая является суммой двух углов u и Ω , отсчитываемых в разных плоскостях. Рассматривается еще величина $\bar{\lambda} = M + \omega + \Omega$, которая называется *средней долготой*.

Период T обращения тела по орбите связан со средним движением n соотношением

$$T = \frac{2\pi}{n}.$$

Исходными элементами эллиптической орбиты в задаче двух тел, задающими движение в плоскости орбиты, считаются три параметра

- n — среднее движение,
- e — эксцентриситет,
- M_0 — средняя аномалия в эпоху.

Существует важное соотношение между средним движением n и большой полуосью a

$$n^2 a^3 = \mu,$$

которое соответствует 3-му закону Кеплера и имеет важное практическое значение. Если в относительном движении двух тел из наблюдений независимо определяются среднее движение n и большая полуось a , то сразу находится сумма масс двух тел

$$m_1 + m_2 = \frac{\mu}{G}.$$

В качестве параметра орбиты вместо n можно задать большую полуось a . Однако следует отметить, что наблюдаемое положение тела

на орбите задается средней аномалией M . Поэтому после наблюдения нескольких оборотов тела по орбите среднее движение n определяется точнее, из соотношения

$$n = \frac{M - M_0}{t - t_0},$$

чем большая полуось a .

В качестве параметров кеплеровской орбиты рассматриваются также параметр $\varpi = \omega + \Omega$, который называется долготой перигея, а также параметр $\bar{\lambda}_0 = M_0 + \omega + \Omega$, который называют средней долготой в эпоху.

Вместо средней аномалии в эпоху M_0 иногда задают динамический момент t' прохождения телом перигея орбиты. Т.е.

$$n(t' - t_0) + M_0 = 0.$$

Рассмотрим, как лучше решать уравнение Кеплера. В классическом методе последовательных приближений итерации выполняются по правилам:

1. В нулевом приближении полагаем $E_0 = M$.
2. Вычисляем последовательно $E_{n+1} = M + e \sin E_n$ для $n = 0, 1, \dots$ до тех пор, пока $|E_{n+1} - E_n| > \varepsilon$,

где ε — требуемая точность вычислений.

Более эффективным оказывается метод последовательных приближений по Денби (Danby, 1995). Итерации производятся по схеме:

1. В нулевом приближении полагаем $E_0 = M + 0.85 e$.
2. Вычисляем последовательно

$$E_{n+1} = E_n - \frac{(M + e \sin E_n - E_n)^2}{E_n - 2(M + e \sin E_n) + M + e \sin(M + e \sin E_n)}$$

для $n = 0, 1, \dots$ до тех пор, пока $|E_{n+1} - E_n| > \varepsilon$.

3.2.2. Вычисление координат в эллиптическом кеплеровском движении

В некоторых случаях вместо преобразования координат из орбитальной системы в заданную систему x, y, z , как указано выше (3.2), удобно использовать аргумент широты $u = v + \omega$ и вычислять координаты в заданной системе по следующим формулам:

$$x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i),$$

$$y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$

$$z = r \sin u \sin i.$$

3.2.3. Вычисление скорости в эллиптическом кеплеровском движении

После того, как найдены расстояние r и истинная аномалия v , можно вычислить модуль скорости V , радиальную компоненту скорости V_r и трансверсальную компоненту скорости V_n из соотношений

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v,$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v).$$

Далее можно найти скорости изменения прямоугольных координат по формулам

$$\dot{x} = \frac{x}{r} V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) V_n,$$

$$\dot{y} = \frac{y}{r} V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) V_n,$$

$$\dot{z} = \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i V_n.$$

3.2.4. Вычисление частных производных от координат и компонент скорости по элементам кеплеровской орбиты в эллиптическом движении

В практической небесной механике решаются задачи уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений. В качестве

параметров могут использоваться элементы кеплеровской орбиты. Уточнение орбиты делается дифференциальным уточнением с применением метода наименьших квадратов. Для построения условных уравнений необходимы частные производные от координат и компонент скорости по орбитальным элементам. Приведем здесь формулы для этих производных в предположении, что координаты и скорость связаны с параметрами и временем формулами эллиптического кеплеровского движения. Формулы следуют в той последовательности, какая нужна для вычислений. Сначала вычисляются вспомогательные величины

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \sin i \sin \Omega, & c_2 &= -\sin i \cos \Omega, & c_3 &= \cos i, \\
 l_1 &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\
 l_2 &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\
 l_3 &= \sin \omega \sin i, \\
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \cos v &= \frac{l_1 x + l_2 y + l_3 z}{r}, \\
 \sin v &= \frac{(c_2 l_3 - c_3 l_2)x + (c_3 l_1 - c_1 l_3)y + (c_1 l_2 - c_2 l_1)z}{r}, \\
 a_1 &= \frac{1 + e \cos v}{1 - e^2}, & r_1 &= a_1 \cos v - \frac{e}{1 - e^2}, \\
 r_2 &= \frac{n a_1 \sin v (1 + e \cos v + e^2)}{(1 - e^2)^{3/2}}, \\
 p_1 &= -\frac{\mu}{n r^3}, & q_1 &= \frac{2}{3n}, \\
 p_2 &= -a_1 \cos v, & q_2 &= \left(a_1 + \frac{1}{1 - e^3} \right) \sin v.
 \end{aligned}$$

Затем находятся искомые производные

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial n} &= \frac{\dot{x}}{n}(t - t_0) - q_1 x, & \frac{\partial y}{\partial n} &= \frac{\dot{y}}{n}(t - t_0) - q_1 y, & \frac{\partial z}{\partial n} &= \frac{\dot{z}}{n}(t - t_0) - q_1 z, \\
 \frac{\partial \dot{x}}{\partial n} &= p_1 x(t - t_0) + \frac{1}{2} q_1 \dot{x}, & \frac{\partial \dot{y}}{\partial n} &= p_1 y(t - t_0) + \frac{1}{2} q_1 \dot{y}, & \frac{\partial \dot{z}}{\partial n} &= p_1 z(t - t_0) + \frac{1}{2} q_1 \dot{z}, \\
 \frac{\partial x}{\partial i} &= z \sin \Omega, & \frac{\partial y}{\partial i} &= -z \cos \Omega, & \frac{\partial z}{\partial i} &= y \cos \Omega - x \sin \Omega,
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial i} = \dot{z} \sin \Omega, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial i} = -\dot{z} \cos \Omega, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial i} = \dot{y} \cos \Omega - \dot{x} \sin \Omega,$$

$$\frac{\partial x}{\partial M} = \frac{\dot{x}}{n}, \quad \frac{\partial y}{\partial M} = \frac{\dot{y}}{n}, \quad \frac{\partial z}{\partial M} = \frac{\dot{z}}{n},$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial M} = p_1 x, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial M} = p_1 y, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial M} = p_1 z,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = c_2 z - c_3 y, \quad \frac{\partial y}{\partial \omega} = c_3 x - c_1 z, \quad \frac{\partial z}{\partial \omega} = c_1 y - c_2 x,$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \omega} = c_2 \dot{z} - c_3 \dot{y}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \omega} = c_3 \dot{x} - c_1 \dot{z}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \omega} = c_1 \dot{y} - c_2 \dot{x},$$

$$\frac{\partial x}{\partial e} = q_2 \frac{\partial x}{\partial \omega} + p_2 x, \quad \frac{\partial y}{\partial e} = q_2 \frac{\partial y}{\partial \omega} + p_2 y, \quad \frac{\partial z}{\partial e} = q_2 \frac{\partial z}{\partial \omega} + p_2 z,$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial e} = q_2 \frac{\partial \dot{x}}{\partial \omega} + r_2 x + r_1 \dot{x}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial e} = q_2 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \omega} + r_2 y + r_1 \dot{y}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial e} = q_2 \frac{\partial \dot{z}}{\partial \omega} + r_2 z + r_1 \dot{z},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -y, \quad \frac{\partial y}{\partial \Omega} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \Omega} = -\dot{y}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \Omega} = \dot{x}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \Omega} = 0,$$

При выводе этих формул предполагалось, что независимыми параметрами орбиты являются шесть элементов n , e , i , M_0 , ω , Ω , обозначения которых объяснены в предыдущем разделе. При этом производные по M_0 равны производным по M .

В практике исследований часто рассматривается задача независимого определения из наблюдений среднего движения n и большой полуоси a орбиты. Это бывает в тех случаях, когда масса притягивающего центра не известна, и ее желательно определить из наблюдений. Тогда необходимы частные производные от координат или компонент скорости по элементам n и a , рассматриваемым как независимые параметры. В этих случаях в приведенных выше формулах для производных по n следует отбросить вторые слагаемые, а производные по a вычислять согласно следующим равенствам:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a}, \quad \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{y}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{z}{a}, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} = -\frac{\dot{x}}{2a}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial a} = -\frac{\dot{y}}{2a}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial a} = -\frac{\dot{z}}{2a}.$$

3.2.5. Формулы кеплеровского движения относительно несингулярных элементов (элементов Лагранжа)

Кеплеровское движение является простейшим законом движения небесных тел. Выражения для координат и компонент скорости как функций времени следуют из общего решения уравнений движения задачи двух тел. Общее решение зависит также от шести независимых произвольных постоянных. Выбор независимых произвольных постоянных не является однозначным. В предыдущих разделах в качестве произвольных постоянных рассматривались элементы кеплеровской орбиты, которые имеют наглядный геометрический смысл.

Однако в ряде практических задач выбор кеплеровских элементов в качестве параметров орбиты приводит к потере точности при вычислениях с ограниченным числом значащих цифр в значениях искоемых переменных. При применениях теории возмущений возникают проблемы, связанные с неравноценным вкладом различных членов в выражениях для возмущений кеплеровских элементов. В конечном счете это также приводит к потере точности теории. Такие проблемы возникают в случаях, когда эллиптическая орбита очень близка к круговой. Круговая орбита является вырождением эллиптической при стремлении эксцентриситета к нулю.

Аналогичная ситуация возникает и при очень малых наклонах орбиты спутника. В этих случаях угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты и долготы узла определяются из наблюдений с пониженной точностью при неизменной точности самих наблюдений.

Преодолеть указанные трудности при малых эксцентриситетах и наклонах кеплеровской орбиты позволяют элементы Лагранжа, выбранные в качестве независимых произвольных постоянных интегрирования в общем решении уравнений задачи двух тел. Рассмотрим ниже формулы, которые позволяют непосредственно из элементов Лагранжа вычислять прямоугольные координаты тела.

Элементы орбиты связывают с произвольной невращающейся системой прямоугольных координат x, y, z , начало которой либо размещают в центре масс двух тел, либо совмещают с одним из тел.

Для введения элементов Лагранжа воспользуемся принятыми выше обозначениями для кеплеровских элементов орбиты:

- n — среднее движение, размерность радиан/ед. времени;
 e — эксцентриситет, безразмерный;
 i — наклон (двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью Oxy), рад.;
 M_0 — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии M в начальный момент времени — эпоху), рад.;
 ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;
 Ω — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости Oxy между осью x и линией узлов), рад.;
 t_0 — начальный момент времени — эпоха элементов;
 t — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

В некоторых случаях вместо среднего движения n в качестве исходного параметра орбиты рассматривают большую полуось орбиты a , связанную с n соотношением

$$a^3 n^2 = \mu, \quad (3.3)$$

где μ — гравитационный параметр двух тел.

Средняя аномалия M в любом случае вычисляется по формуле

$$M = n(t - t_0) + M_0. \quad (3.4)$$

Будем полагать, что для вычисления прямоугольных координат на заданный момент времени известны пять элементов кеплеровской орбиты a, e, i, ω, Ω и средняя аномалия M . Элементами Лагранжа считаются величины $a, \bar{\lambda}, k, h, q, p$, пять из которых определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda} &= M + \omega + \Omega, \\
 k &= e \cos(\omega + \Omega), \quad h = e \sin(\omega + \Omega), \\
 q &= \sin \frac{i}{2} \cos \Omega, \quad p = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega.
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Как указано выше, величина $\bar{\lambda}$ называется средней долготой и является линейной функцией времени.

Если заданы элементы Лагранжа $a, \bar{\lambda}, k, h, q, p$, то прямоугольные координаты x, y, z и компоненты скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ можно вычислить по следующей последовательности формул.

Сначала вычисляем

$$\begin{aligned} S &= \sin \bar{\lambda}, \quad C = \cos \bar{\lambda}, \\ k' &= k C + h S, \quad h' = k S - h C. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Далее итерациями решаем уравнения

$$C_\nu = \cos \nu, \quad S_\nu = \sin \nu, \quad \nu = h' C_\nu + k' S_\nu, \quad (3.7)$$

полагая в нулевом приближении $\nu = h'$.

Вычисляем вспомогательные величины

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \sqrt{1 - k^2 - h^2}}, \quad (3.8)$$

$$S' = \frac{S_\nu - \nu' k' + h'}{1 - k' C_\nu + h' S_\nu}, \quad C' = \frac{C_\nu - \nu' h' - k'}{1 - k' C_\nu + h' S_\nu}, \quad (3.9)$$

$$S_\lambda = S C' + C S', \quad C_\lambda = C C' - S S'. \quad (3.10)$$

Теперь центральное расстояние r и прямоугольные координаты тела x, y, z найдутся по формулам

$$r = \frac{a(1 - k^2 - h^2)}{1 + k C_\lambda + h S_\lambda}, \quad (3.11)$$

$$x = r C_\lambda(1 - 2p^2) + 2r S_\lambda p q,$$

$$y = r S_\lambda(1 - 2q^2) + 2r C_\lambda p q, \quad (3.12)$$

$$z = 2r \sqrt{1 - p^2 - q^2}(q S_\lambda - p C_\lambda).$$

Для вычисления компонент скорости необходимо найти вспомогательные величины

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - k^2 - h^2)}}(k S_\lambda - h C_\lambda), \quad (3.13)$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - k^2 - h^2)}}(1 + k C_\lambda + h S_\lambda), \quad (3.14)$$

$$R_x = 2 C_\lambda p q - S_\lambda(1 - 2p^2),$$

$$R_y = C_\lambda(1 - 2q^2) - 2 S_\lambda p q, \quad (3.15)$$

$$R_z = 2 \sqrt{1 - p^2 - q^2}(q C_\lambda + p S_\lambda).$$

После этого компоненты скорости \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} вычисляются с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{x}{r} V_r + R_x V_n, \\ \dot{y} &= \frac{y}{r} V_r + R_y V_n, \\ \dot{z} &= \frac{z}{r} V_r + R_z V_n.\end{aligned}\tag{3.16}$$

3.2.6. Примеры использования элементов Лагранжа

Укажем здесь два примера, когда элементы Лагранжа нашли удачное применение.

Первый пример — это теория вековых возмущений планет, построенная Лагранжем. В возмущающей функции были оставлены только вековые члены (независящие от долгот планет). С учетом малости эксцентриситетов и взаимных наклонов орбит больших планет Солнечной системы вековая часть возмущающей функции была разложена в степенной ряд относительно эксцентриситетов и взаимных наклонов, и в разложении оставлены члены до второй степени включительно. При этом большие полуоси орбит планет считались неизменными. Относительно элементов Лагранжа удалось записать линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Решение этих уравнений получено Лагранжем в виде суммы тригонометрических функций относительно линейных по времени аргументов. Это позволило описать эволюцию орбит планет на больших промежутках времени и обнаружить интересные свойства взаимных возмущений планет. Хорошее описание метода Лагранжа можно найти в монографии М. Ф. Субботина (Субботин, 1968).

Второй пример является фактически применением метода Лагранжа для построения аналитической теории движения главных спутников Урана (Laskar, Jacobson, 1987). Эта теория до недавнего времени была единственным средством получения самых точных эфемерид главных спутников Урана.

3.3. Силовая функция притяжения несферичной планеты

3.3.1. Разложение силовой функции

Учет влияния несферичности планеты делается с использованием разложения силовой функции притяжения несферичной плане-

ты в ряд по сферическим функциям. Коэффициенты разложения зависят от того, в какой системе координат относительно тела планеты сделано разложение. Обычно используется система координат, связанная с телом планеты и основной плоскостью, совпадающей с ее экватором. Экватор планеты связывают с осью ее вращения. При этом предполагают, что ось вращения неизменна в теле планеты. Тела больших планет оказываются близкими к осесимметричным телам, вращающимся вокруг оси симметрии. Поэтому основная плоскость системы координат, в которой ведется разложение силовой функции ее притяжения, выбирается так, чтобы третья ось (ось z) совпадала с осью симметрии некоторого тела, близкого по форме с планетой.

В литературе встречаются различные формы разложения силовой функции притяжения планет. Приведем здесь формулу, которая была рекомендована Комиссией 7 Международного астрономического союза. Она имеет вид

$$U(r, \varphi, \lambda') = \frac{Gm_0}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) (C_{nk} \cos k\lambda' + S_{nk} \sin k\lambda') \right], \quad (3.17)$$

где r , φ и λ' — центральное расстояние, широта и долгота точки в системе координат, связанной с планетой, $P_n(\sin \varphi)$ — полиномы Лежандра, $P_n^{(k)}(\sin \varphi)$ — присоединенные функции Лежандра, аргументом которых является $\sin \varphi$. Значение постоянной r_0 фиксируется заранее равным радиусу круга, наиболее близкого к экваториальному сечению планеты. Тогда постоянные коэффициенты J_n , C_{nk} , S_{nk} задают гравитационное поле планеты. Их значения определяют из наблюдений различных типов.

Члены разложения с коэффициентами J_n называются зональными гармониками.

Во многих работах в разложении силовой функции притяжения несферичного тела вместо коэффициентов J_n используют $C_{n0} = -J_n$. Почему в стандартной формуле (3.17) перед зональной частью разложения принято брать знак «минус», объяснено ниже.

3.3.2. Притяжение в моделях и для реальных тел

Следует указать на важные свойства членов разложения (3.17). Если тело строго осесимметрично и основная плоскость системы координат перпендикулярна оси симметрии, то в разложении остается только зональная часть с коэффициентами J_n . Если, кроме того, тело имеет еще и плоскость симметрии, проходящую через начало координат перпендикулярно к оси симметрии, то в разложении остаются только зональные гармоники с четными номерами.

Известно, что большие планеты сжаты у полюсов. Для сжатого тела $J_2 > 0$. Именно поэтому в стандартной формуле (3.17) перед зональной частью разложения принято писать «минус». Тогда не будет необходимости задавать значения всех коэффициентов J_2 для больших планет со знаком «минус».

Во многих работах изучается форма поверхности тел. Для этого применяют разные модели. Форма тела косвенно влияет на нецентральность его гравитационного поля, однако поле существенно зависит от распределения масс внутри. В частности, сжатое снаружи тело может создавать вытянутое гравитационное поле. Распространенной и удобной моделью является модель однородного трехосного эллипсоида. Разложение силовой функции однородного трехосного эллипсоида содержит бесконечное число членов, однако, любой коэффициент с нечетным n или с нечетным k в разложении (3.17) равен нулю, и все коэффициенты S_{nk} тоже равны нулю.

Могут оказаться полезными формулы, связывающие коэффициенты некоторых членов разложения силовой функции с размерами однородного эллипсоида. Пусть разложение построено так, что оси системы координат \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} , связанной с телом, направлены по осям эллипсоида, а полуоси равны a , b , c , соответственно. Тогда коэффициенты первых нескольких членов выражаются через полуоси эллипсоида следующим образом:

$$\begin{aligned} -J_2 = C_{20} &= \frac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{10r_0^2}, & C_{22} &= \frac{a^2 - b^2}{20r_0^2}, \\ -J_4 = C_{40} &= 3 \frac{3(a^4 + b^4) + 8c^4 + 2a^2b^2 - 8c^2(a^2 + b^2)}{280r_0^4}, \\ C_{42} &= \frac{(a^2 - b^2)(2c^2 - a^2 - b^2)}{280r_0^4}, & C_{44} &= \frac{(a^2 - b^2)^2}{2240r_0^4}. \end{aligned}$$

Теория потенциала развита в фундаментальных работах (Кондратьев, 2003, 2007). Рассмотрены разложения гравитационных потенциалов для разнообразных моделей тел.

Рассмотрим теперь гравитационные поля больших планет. Отметим, что для Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна с приемлемой точностью известны только значения коэффициентов J_2, J_4, J_6 .

При записи уравнений движения (3.1) никак не фиксируется выбор направления осей координат. Обычно делается попытка связать направления осей с геоэкватором эпохи J2000, то есть с Международной системой небесных координат (ICRF – International Celestial Reference Frame). Следует отметить, что эту связь невозможно осуществить записью уравнений. Привязка системы, в которой отсчитываются координаты спутника, к ICRF может быть сделана только путем уточнения параметров движения спутника так, чтобы его модельное движение оказалось наиболее близким к результатам наблюдений, отсчитываемым в системе ICRF. Только близость результатов наблюдений к таковым в системе ICRF и дальнейшее уточнение орбит спутников на основе наблюдений могут обеспечить близость системы координат к системе ICRF.

Значения коэффициентов разложения силовых функций притяжения некоторых больших планет даны в разделе 2.5 Главы 2.

В уравнениях движения спутников (3.1) фигурирует слагаемое $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$ – функция, задающая вектор ускорения, обусловленного несферичностью планеты. Аргументом этой функции являются координаты спутника в системе координат x, y, z . Однако в разложении силовой функции (3.17) фигурируют координаты в системе, связанной с телом, в частности, с экватором планеты. Прямоугольные координаты в этой системе обозначим через $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Соотношения с координатами, фигурирующими в выражении 3.17, очевидны:

$$\bar{x} = r \cos \varphi \cos \lambda', \quad \bar{y} = r \cos \varphi \sin \lambda', \quad \bar{z} = r \sin \varphi.$$

Для вычисления правых частей уравнений движения (3.1) сначала находят компоненты ускорения $\mathbf{F} = \{F_{\bar{x}}, F_{\bar{y}}, F_{\bar{z}}\}$ в системе координат $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, жестко связанной с телом. Это делается путем вычисления частных производных

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(U - \frac{Gm_0}{r} \right), \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(U - \frac{Gm_0}{r} \right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(U - \frac{Gm_0}{r} \right) \right\}.$$

Затем компоненты вектора \mathbf{F} переводятся в систему координат x, y, z с помощью матрицы перехода

$$\{F_x, F_y, F_z\}^T = \mathbf{R}_0 \{F_{\bar{x}}, F_{\bar{y}}, F_{\bar{z}}\}^T.$$

Здесь при записи координат мы для краткости опускаем индекс, обозначающий номер спутника. Матрица \mathbf{R}_0 непосредственно определяется небесными координатами полюса планеты α_0, δ_0 и углом ее вращения W , выраженными в системе координат x, y, z . Если в качестве основной системы координат принимается ICRF, то параметры α_0, δ_0, W можно взять из публикации доклада Рабочей группы по картографическим координатам и элементам вращения Международного астрономического союза (IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements) (Archinal et al., 2018). Эти параметры приведены также в Приложении 6 настоящей книги.

В частном случае, когда планета считается строго осесимметричной, ось \bar{x} можно направить по линии пересечения экватора планеты с плоскостью (x, y) . Для определенности это следует сделать так, чтобы ось \bar{x} была направлена в восходящий узел плоскости \bar{x}, \bar{y} относительно плоскости (x, y) . В этом частном случае матрица \mathbf{R}_0 будет иметь вид

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_0 & -\cos \alpha_0 \sin \delta_0 & \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 \sin \delta_0 & \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ 0 & \cos \delta_0 & \sin \delta_0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Поскольку планеты Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун и некоторые другие планеты почти осесимметричны, то часто возникает вопрос, какой из полюсов планеты считать северным. Чтобы избежать путаницы, Рабочей группой по картографическим координатам и элементам вращения Международного астрономического союза принято решение (Archinal et al., 2018) считать северным полюсом планеты тот, который лежит в северной полусфере по отношению к так называемой неизменной плоскости Солнечной системы (The north pole is that pole of rotation that lies on the north side of the invariable plane of the Solar System). Координаты полюса неизменной плоскости Солнечной системы (перпендикуляра к плоскости) в системе ISRF эпохи J2000 равны: прямое восхождение $\alpha_0 = 273.85$ град, склонение $\delta_0 = 66.99$ град.

Таблица 3.1. Координаты полюса в системе ISRF эпохи J2000 для некоторых больших планет. Аргумент T — время в юлианских столетиях (по 36525 суток) от эпохи J2000.

	Прямое восхождение	Склонение
Планета	α_0 , град	δ_0 , град
Юпитер	268.056595 - 0.006499 T	64.495303 + 0.002413 T
Сатурн	40.589 - 0.036 T	83.537 - 0.004 T
Уран	257.311	-15.175
Нептун	299.36	43.46

В таблице 3.1 даются небесные координаты полюсов Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Как видно в таблице, для Юпитера и Сатурна известна прецессия полюсов.

Заметим, что северный полюс Урана направлен в южное полушарие небесной сферы, так как склонение полюса отрицательно. Однако вращение планеты вокруг этого северного полюса происходит в обратном направлении (от оси y к оси x), и вектор угловой скорости направлен к южному полюсу.

Приведем здесь выражения для компонент вектора \mathbf{F} в плането-экваториальной системе координат $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ с учетом только зональных гармоник с коэффициентами J_2 и J_4 .

$$F_{\bar{x}} = \frac{3}{2}Gm_0J_2\frac{r_0^2}{r^5}\left(5\frac{\bar{z}^2}{r^2} - 1\right)\bar{x} + \frac{5}{8}Gm_0J_4\frac{r_0^4}{r^7}\left(63\frac{\bar{z}^4}{r^4} - 42\frac{\bar{z}^2}{r^2} + 3\right)\bar{x},$$

$$F_{\bar{y}} = \frac{3}{2}Gm_0J_2\frac{r_0^2}{r^5}\left(5\frac{\bar{z}^2}{r^2} - 1\right)\bar{y} + \frac{5}{8}Gm_0J_4\frac{r_0^4}{r^7}\left(63\frac{\bar{z}^4}{r^4} - 42\frac{\bar{z}^2}{r^2} + 3\right)\bar{y},$$

$$F_{\bar{z}} = \frac{3}{2}Gm_0J_2\frac{r_0^2}{r^5}\left(5\frac{\bar{z}^2}{r^2} - 3\right)\bar{z} + \frac{5}{8}Gm_0J_4\frac{r_0^4}{r^7}\left(63\frac{\bar{z}^4}{r^4} - 70\frac{\bar{z}^2}{r^2} + 15\right)\bar{z}.$$

При вычислении правых частей уравнений заданными являются координаты спутника в системе координат x, y, z , а в предыдущие формулы нужно подставлять координаты $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Вычислить эти координаты можно используя преобразование

$$\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}^T = \mathbf{R}_0^{-1}\{x, y, z\},$$

где матрица \mathbf{R}_0 определяется соотношением (3.18). Здесь вместо \mathbf{R}_0^{-1} можно использовать транспонированную матрицу \mathbf{R}_0^T , поскольку $\mathbf{R}_0^{-1} = \mathbf{R}_0^T$ в силу ортогональности этих матриц.

3.4. Приближенный учет влияния главных спутников на движение далеких спутников планеты

Рассмотрим здесь один прием, который применяется для учета влияния притяжения главных спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна при моделировании движения далеких спутников этих планет. Расстояния далеких спутников до планеты значительно превосходят размеры почти круговых орбит главных спутников, которые движутся почти в плоскости экватора планеты. Приближенно можно принять, что орбиты главных спутников круговые и расположены в плоскости экватора планеты. Периоды обращения главных спутников вокруг планеты значительно меньше периодов обращения далеких спутников. Можно усреднить по времени движение главных спутников при учете их влияния на далекие. Тогда мы заменяем реальные главные спутники на бесконечно тонкие массивные круговые кольца, расположенные в плоскости экватора планеты. Массы колец будут равны массам соответствующих спутников, а радиусы равны радиусам их круговых орбит. В небесной механике подобные кольца называют гауссовыми по имени К. Ф. Гаусса, который впервые ввел их в рассмотрение. Зная массу m_c и радиус r_c кольца можно легко найти силовую функцию U_c его притяжения в форме разложения по сферическим функциям. Получаем:

$$U_c = \frac{Gm_c}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n J_n^{(c)} P_n(\sin \varphi) \right],$$

где коэффициенты $J_n^{(c)}$ находятся из соотношения

$$J_n^{(c)} = -\frac{r_c^n}{r_0^n} P_n(0).$$

При этом для нечетных значений n оказывается, что $P_n(0) = 0$, а при четных $n = 2k$, где k — целое, $P_{2k}(0)$ вычисляются по формуле

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k!)}{2^{2k}(k!)^2}.$$

Такой прием замены главных спутников на притягивающие кольца в модели движения далеких спутников был применен в работах (Emelyanov, 2005; Емельянов, Кантер, 2005), где показано, что при точности современных наземных наблюдений эта замена вполне допустима.

3.5. Различные подходы и методы построения моделей движения спутников планет

Движение спутников планет описывается законом движения, который задается функциями, представляющими координаты спутника как функции времени. Получить эти функции можно разными способами. Различными оказываются и способы из отображения. Обычно под функциями понимают аналитические выражения, содержащие операции сложения, умножения, деления, элементарные функции: логарифм, тригонометрические функции, а также специальные функции. Однако закон движения может быть задан табличным описанием функций: численные значения координат на ряд моментов времени.

В теории движения спутников закон движения всегда является решением дифференциальных уравнений движения. Принципиальное различие заключается в способе построения решения. Первый подход заключается в получении аналитического решения, представляемого набором аналитических функций, последовательное вычисление которых позволяет найти координаты небесного тела на любой заданный момент времени. Аналитические методы дают сразу семейство решений, задаваемых различными значениями параметров, буквенно входящих в формулы. Все модели движения семейства описываются одними и теми же формулами. Параметрами движения являются произвольные постоянные аналитического решения дифференциальных уравнений. Выбор произвольных постоянных интегрирования можно сделать различными способами. Один из них — это так называемые начальные условия движения, т. е. значения координат и компонент скорости на некоторый начальный момент времени t_0 .

Пользоваться аналитическим решением можно так: задаем один раз параметры движения. Затем любое число раз задаем любой момент времени. Подставляя его в аналитические функции, представ-

ляющие решение уравнений движения, получаем значения координат и компонент скорости. На каждый момент времени операция одна и та же. Поэтому время вычислений пропорционально количеству моментов, на которые нужно знать координаты, и не зависит от интервала между начальным и конечным моментом.

Получение формул аналитического решения — весьма сложный и трудоемкий процесс. Одно хорошо — сделать это нужно всего один раз. Поскольку точного решения уравнений, кроме нескольких простейших случаев, получить невозможно, то решение всегда получается приближенным. Точность зависит от того, насколько развито аналитическое решение. Чем точнее нужно решение, тем более трудоемким получается процесс его получения. Предел налагают возможности производства аналитических выкладок с огромными формулами.

В этом деле хорошо помогают методы компьютерной алгебры. Однако и эти возможности не беспредельны.

Аналитическое решение дифференциальных уравнений движения получают методами теории возмущений. Этим методом имеется большое разнообразие. Ниже рассмотрены некоторые из них и модели движения спутников планет, построенные таким способом.

Принципиально другим является метод численного интегрирования уравнений. Основной подход заключается в следующем. Задает на некоторый начальный момент времени координаты и компоненты скорости спутника. Выбираем некоторый момент времени, очень близкий к начальному, и приближенным методом вычисляем координаты и скорость на этот новый момент.

Способов, как это сделать существует много. Главное их свойство — все они приближенные, но чем ближе заданный момент к начальному, тем точнее получается результат. После того, как координаты и скорость найдены на новый момент времени, близкий к начальному, этот момент принимается за начальный и процесс повторяется. Так шаг за шагом по времени добираемся до того момента времени, на который нам и нужно было знать положение и скорость небесного тела. Получили искомый результат, однако для этого пришлось вычислить координаты и скорость на множество промежуточных моментов.

Чем точнее нужен результат, тем меньший шаг приходится выбирать, но тем больше нужно сделать шагов вычислений, чтобы добраться до нужного момента времени. Так что время вычисле-

ний при численном интегрировании дифференциальных уравнений движения пропорционально числу шагов, а число шагов тем больше, чем лучше нам нужна точность. Уменьшая величину шага до некоторой степени можно улучшить точность. Однако наступает такая ситуация, когда число шагов столь велико, что накопление ошибок при вычислениях из-за ошибок округления чисел при арифметических операциях начинает превалировать над влиянием ошибок получения решения на каждом одном шаге.

В итоге мы имеем предельную точность, которая получается при некотором оптимальном шаге. Улучшить эту предельную точность можно только увеличивая точность представления чисел в компьютере, уменьшая тем самым ошибки округления. Некоторого принципиального улучшения точности можно добиться усовершенствованием методов вычислений на одном шаге.

Принципиальным преимуществом методов численного интегрирования уравнений является то, что для их реализации нужно знать только выражения правых частей дифференциальных уравнений. Принципиальный недостаток этих методов заключается в весьма больших затратах времени вычислений. Всякий раз, когда нужно получить новое решение, приходится запускать процесс численного интегрирования.

К настоящему времени разработано множество методов численного интегрирования уравнений движения. Основные их свойства рассмотрены ниже в Главе 4.

Одним из недостатков методов численного интегрирования является то, что нужно как-то хранить все значения координат на промежуточные моменты времени. Эти моменты фиксируются при численном интегрировании. Их обычно чрезвычайно много. Если потом нужно найти координаты на какой-то момент, который не совпадает ни с одним из тех, что был в процессе численного интегрирования, придется что-то придумывать. Как обычно хранятся результаты численного интегрирования и как они используются, рассмотрено ниже в специальном разделе Главы 4.

Методов построения моделей движения небесных тел к настоящему времени разработано чрезвычайно много. Приемлемый обзор всех этих методов получился бы чрезвычайно большим. В настоящей книге рассмотрены только некоторые из них. Выбор того, что стоит рассмотреть, обоснован только опытом автора.

3.6. Модель движения спутника сжатой планеты, основанная на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров

Для больших планет характерно свойство сжатости их фигуры. Это самый главный фактор несферичности. Внешней сжатой форме сопутствует нецентральность гравитационного поля планеты. Поэтому в разложении силовой функции притяжения (3.17) после главного члена $\frac{Gm}{r}$ доминирует вторая зональная гармоника с коэффициентом J_2 . Разложение специально было записано в такой форме, чтобы этот коэффициент был положительным для больших планет Солнечной системы.

В небесной механике делались разные попытки учета второй зональной гармоники в решении дифференциальных уравнений движения спутника. В ряде работ это называется главной проблемой.

Давно рассматривается модельная задача о движении материальной точки в поле притяжения двух неподвижных центров. Легко видеть, что гравитационное поле двух неподвижных центров по структуре близко полю вытянутого тела. Однако все большие планеты сжаты.

Силовая функция притяжения двух неподвижных центров имеет вид

$$W = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2},$$

где m_1, m_2 — массы центров, а r_1, r_2 — расстояния от притягиваемой массы до каждого из них. Если в прямоугольной системе координат x, y, z ось z направить по линии, соединяющей центры притяжения, то выражения расстояний через координаты будут иметь вид

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_2)^2},$$

где z_1, z_2 суть координаты центров на оси аппликат.

Впервые эту задачу для случая плоского движения исследовал и свел к квадратурам Леонард Эйлер (Euler, 1760, 1764). Поэтому задачу двух неподвижных центров называют также *задачей Эйлера*. В начале XX века Гастон Дарбу (Darboux, 1901) указал на возможность обобщения задачи Эйлера в случае плоского движения путем введения комплексно сопряженных масс и мнимого расстояния между ними. Силовая функция притяжения при этом всегда принимает действительные значения, а решение задачи также сводится к квадратурам. Это обобщение Дарбу получил как некоторый

чисто математический результат и не рассматривал возможностей для его практического применения.

В работе (Аксенов, Гребеников, Демин, 1961) и в последующем цикле работ этих авторов рассмотрена задача о пространственном движении материальной точки в поле двух неподвижных центров с комплексно сопряженными массами и мнимым расстоянием между ними. Авторы назвали эту модель *обобщенной задачей двух неподвижных центров*.

Главный интерес задача представляет благодаря тому, что гравитационное поле такой системы двух неподвижных центров близко к полю ньютоновского притяжения сжатой планеты. Покажем это. Положим

$$m_1 = \frac{m}{2}(1 + \sqrt{-1}\sigma), \quad m_2 = \frac{m}{2}(1 - \sqrt{-1}\sigma),$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + \sqrt{-1})]^2},$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - \sqrt{-1})]^2},$$

где c и σ — действительные параметры. Тогда силовая функция притяжения в такой модели примет вид

$$W = \frac{Gm}{2} \left[\frac{1 + \sqrt{-1}\sigma}{r_1} + \frac{1 - \sqrt{-1}\sigma}{r_2} \right]. \quad (3.19)$$

Очевидно, что будучи суммой двух комплексно сопряженных величин, силовая функция будет действительной величиной.

Разложим функцию W в ряд по сферическим функциям. Запишем разложение в виде

$$W = \frac{Gm}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n J'_n P_n(\sin \varphi) \right], \quad (3.20)$$

где r_0 искусственно введенный параметр, а коэффициенты J'_n определяются соотношениями

$$J'_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{c}{r_0} \right)^n \left[(1 + \sqrt{-1}\sigma)(\sigma + \sqrt{-1})^n + (1 - \sqrt{-1}\sigma)(\sigma - \sqrt{-1})^n \right],$$

$$(n = 2, 3, \dots).$$

В частности, имеем

$$J'_2 = \left(\frac{c}{r_0}\right)^2 (1 + \sigma^2),$$

$$J'_3 = 2\left(\frac{c}{r_0}\right)^3 \sigma(1 + \sigma^2).$$

Если теперь представить силовую функцию притяжения планеты U в виде $U = W + R$, то для R получим

$$R = -\frac{Gm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n (J_n - J'_n) P_n(\sin \varphi). \quad (3.21)$$

Неопределенными до сих пор параметрами c , σ можно распорядиться так, чтобы оказалось

$$J'_2 = J_2, \quad J'_3 = J_3.$$

Тогда сумма в выражении (3.21) будет начинаться с $n = 4$, т.е. не будет содержать второй и третьей зональных гармоник. Кроме того, для Земли, Марса, Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна оказывается, что $|J'_n| < |J_n|$ по крайней мере для $n = 4, 5, 6$.

Теперь вспомним, что задача двух неподвижных центров сведена Л. Эйлером к квадратурам. Это решение пригодно также и при силовой функции (3.19). Этим обстоятельством воспользовался Е. П. Аксенов (Аксенов, 1977). Он выполнил обращение квадратур и построил на этой основе новую некеплеровскую промежуточную орбиту спутника сжатой планеты и аналитическую теорию движения искусственных спутников Земли. Теория успешно применялась в течении ряда лет, благодаря тому, что возмущающая функция R оказалась в 1000 раз меньшей, чем при использовании кеплеровской промежуточной орбиты.

Аналитическая теория движения естественных спутников больших планет также может быть построена на основе решения обобщенной задачи двух неподвижных центров. Это оказывается эффективным, если достаточно учета второй и третьей зональных гармоник в разложении силовой функции притяжения планеты и возмущений первого порядка для остальных возмущающих факторов. Для определения возмущений более высоких порядков такой подход приводит к довольно громоздким выкладкам и оказывается неэффективным.

При необходимости воспользоваться промежуточной орбитой спутника, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров, формулы для вычисления координат и компонент скорости спутника для любого момента времени лучше взять из работы (Аксенов, Емельянов, Тамаров, 1988), где они даются в форме, удобной для программирования вычислений. Кроме того, в этой работе приводится текст вычислительной программы на языке Фортран.

3.7. Построение аналитических теорий движения спутника планеты методами теории возмущений

3.7.1. Общая схема теории возмущений

Простейшая модель движения спутника планеты — кеплеровское движение. Модель и закон движения получаются путем точного решения дифференциальных уравнений задачи двух тел. Следующие этапы усовершенствования модели — учет влияния возмущающих факторов. Для этого в уравнения движения добавляются соответствующие дополнительные члены. При этом точное аналитическое решение уравнений найти уже невозможно.

Всегда доступны различные методы численного интегрирования дифференциальных уравнений. Этим методам посвящен специальный раздел данной книги. Другой путь — построение приближенного аналитического решения методами теории возмущений.

Теория возмущений применяется во многих областях науки. Основная идея всюду одна и та же. Различаются лишь формы методов и вид формул. Рассмотрим здесь один из методов теории возмущений в форме, наиболее часто применяемой в небесной механике.

Для простоты и наглядности изложения основной идеи ограничимся рассмотрением механической модели, в которой движение материальной точки описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (3.22)$$

где x, y, z — координаты материальной точки в некоторой системе прямоугольных координат, t — время, а U — силовая функция. Как правило, в практических задачах силовая функция имеет такой вид, при котором точное аналитическое решение уравнений движения найти невозможно.

Основная идея теории возмущений заключается в следующем. Разложим силовую функцию на два слагаемых

$$U = V + R$$

при соблюдении следующих двух условий:

1. После замены в уравнениях движения силовой функции U на функцию V может быть найдено их точное общее аналитическое решение.
2. По крайней мере в области рассматриваемого движения выполняется неравенство $|R| \ll |V|$.

Разумеется, не в любой задаче такое разбиение возможно. По крайней мере выполнение первого условия уже позволяет формально строить решение первоначальных уравнений (3.22) методами теории возмущений. Однако практический интерес представляют случаи, когда выполняется также и второе условие.

Уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.23)$$

называют уравнениями невозмущенного движения, исходные уравнения (3.22) — уравнениями возмущенного движения, а R — возмущающей функцией. Исходные уравнения (3.22) можно записать в форме системы шести уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= \frac{\partial(V+R)}{\partial x}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= \frac{\partial(V+R)}{\partial y}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= \frac{\partial(V+R)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где переменные $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ являются искомыми функциями.

Общее решение уравнений невозмущенного движения будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ y &= y(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ z &= z(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{x} &= \dot{x}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — произвольные постоянные интегрирования.

В методе теории возмущений последние формулы используются как формулы замены переменных $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ на переменные функции времени $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ в уравнениях возмущенного движения (3.24). Заменяются зависимые переменные — искомые функции. В итоге преобразований получают дифференциальные уравнения возмущенного движения относительно новых переменных $c_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) в виде

$$\frac{dc_i}{dt} = C_i(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (3.26)$$

Точное аналитическое решение этих уравнений так же, как и уравнений (3.22), найти невозможно. Однако они имеют одно очевидное преимущество. Если в уравнениях (3.24) положить $R = 0$, то они превратятся в уравнения (3.23), а в соответствующем решении (3.25) аргументы $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ будут постоянными величинами. Следовательно, в преобразованных уравнениях (3.26) правые части окажутся равными нулю. При R , не равной нулю, и соблюдении второго условия применения теории возмущений $|R| \ll |V|$ правые части уравнений (3.26) будут содержать множителем некоторый малый параметр. Это позволяет находить приближенное решение уравнений возмущенного движения методом малого параметра. Успех его применения зависит в первую очередь от величины самого малого параметра, то есть от отношения $|R|/|V|$. Поэтому при разложении силовой функции U на два слагаемых V и R естественно стремление уменьшить величину $|R|$ при сохранении первого условия применения методов теории возмущений.

В разнообразных задачах небесной механики вид уравнений движения при применении методов теории возмущений может быть различным, однако общая схема изложенного здесь подхода сохраняется.

3.7.2. Обстоятельства в движении реальных небесных тел, позволяющие применять методы теории возмущений

В общем случае при рассмотрении движения произвольного числа небесных тел совсем не очевидно, что выполняются условия применения методов теории возмущений. Однако в соотношениях размеров большинства реальных небесных тел, расстояний между ними и свойствах их движения существует определенная иерар-

хия. Параметры движения планет Солнечной системы и почти всех их спутников удовлетворяют условиям, необходимым для решения уравнений движения методами теории возмущений. Рассмотрим несколько конкретных случаев, которые приводят к фундаментальным задачам теории движения тел Солнечной системы.

Сначала упростим рассмотрение системы Солнца, планет и спутников, полагая, что все эти тела являются материальными точками. Тогда к ним подойдет механическая модель задачи о движении $n + 1$ материальной точки. Среди этих точек будут Солнце, планеты и их спутники. Поместим начало координат в одну из них. Опишем движение системы $n + 1$ материальных точек уравнениями относительного движения

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial(V_i + R_i)}{\partial x_i}, \quad \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial(V_i + R_i)}{\partial y_i}, \quad \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial(V_i + R_i)}{\partial z_i}, \quad (3.27)$$

где

$$V_i = \frac{G(m_0 + m_i)}{r_i}, \quad R_i = G \sum_{j=1}^{n'} m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right),$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}, \quad r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \\ r_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2},$$

G — универсальная гравитационная постоянная, x_i, y_i, z_i, m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — прямоугольные координаты и массы тел, соответственно, а m_0 — масса центрального тела. Штрих у знака суммы означает, что отсутствует слагаемое при $j = i$.

Рассмотрим несколько практических задач.

Планетная задача.

Будем изучать движение n планет под действием притяжения Солнца и их взаимного притяжения. Малым влиянием других тел пренебрежем. В уравнениях относительного движения центральным телом будет Солнце. В данном случае для уравнений невозмущенного движения при $R_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) известно общее решение, так как система уравнений распадается на n независимых систем уравнений движения двух тел, для каждого из которых известно общее решение. Таким образом, первое условие применения методов теории возмущений выполняется. Проверим те-

перь выполнение второго условия. Рассмотрим отношение R_i/V_i . Из уравнений относительного движения следует

$$\frac{R_i}{V_i} = \sum_{j=1}^{n'} \frac{m_j}{m_0 + m_i} \left[\frac{r_i}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j)}{r_j^3} \right]. \quad (3.28)$$

Здесь $i = 1, 2, \dots, n$.

Параметры орбит девяти больших планет таковы, что планеты не испытывают ни тесных сближений с Солнцем, ни тесных взаимных сближений. Поэтому величины $x_i, y_i, z_i, \Delta_{ij}, r_i$ можно считать величинами примерно одного порядка. С другой стороны, слагаемые в формуле (3.28) имеют множители

$$\frac{m_j}{m_0 + m_i},$$

которые являются малыми параметрами в силу малости масс планет по сравнению с массой Солнца. Таким образом, выполнение второго условия применения методов теории возмущений в планетной задаче обеспечивается малостью масс планет по сравнению с массой Солнца. При решении уравнений возмущенного движения (3.26) в планетной задаче малыми параметрами будут отношения

$$\varepsilon_j = \frac{m_j}{m_0} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Спутниковая задача.

Рассмотрим движение системы спутников планеты под действием притяжения планеты, Солнца и взаимного притяжения спутников. Притяжением других планет пренебрежем в силу их удаленности. Притяжением Солнца, несмотря на его удаленность, пренебречь нельзя, так как оно имеет большую массу. В уравнениях относительного движения центральным телом будет планета. С ней и совместим начало координат. Солнце будем считать телом номер 1 ($i = 1$). Уравнения при $i = 1$ рассматривать не будем, так как они определяют относительное движение планеты и Солнца.

В рассматриваемой спутниковой задаче для уравнений невозмущенного движения при $R_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots, n$) также известно общее решение, так как система уравнений распадается на независимые системы уравнений движения двух тел. Таким образом, первое условие применения методов теории возмущений выполняется.

Проверим теперь выполнение второго условия. Рассмотрим выражение

$$\frac{R_i}{V_i} = \sum_{j=1}^{n'} \frac{m_j}{m_0 + m_i} \left[\frac{r_i}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j)}{r_j^3} \right] \quad (3.29)$$

для $i = 2, \dots, n$. Малость слагаемых при $j = 2, \dots, n$ так же, как и в планетной задаче, обеспечивается малостью масс спутников m_j по сравнению с массой планеты m_0 . Слагаемое при $j = 1$ (влияние притяжения Солнца) требует особого рассмотрения. Обозначим это слагаемое в величине R_i через $(R_i)_1$, а в величине $\frac{R_i}{V_i}$ — через $(\frac{R_i}{V_i})_1$.

Воспользуемся соотношениями

$$x_i x_1 + y_i y_1 + z_i z_1 = r_i r_1 \cos H_{1i}, \quad \Delta_{i1}^2 = r_i^2 + r_1^2 - 2 r_i r_1 \cos H_{1i}.$$

Здесь r_i — планетоцентрическое расстояние спутника, r_1 — гелиоцентрическое расстояние планеты, а H_{1i} — угол между планетоцентрическими направлениями на спутник и на Солнце. Очевидно, что пока спутник остается спутником планеты, отношение r_i/r_1 будет малым. Разложим величину $\frac{1}{\Delta_{i1}}$, а затем и $(R_i)_1$ в ряд по степеням малого параметра r_i/r_1 . Будем иметь

$$(R_i)_1 = G m_1 \frac{1}{r_1} \left[1 + \left(\frac{r_i}{r_1} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right) + \dots \right],$$

где невыписанные члены имеют более высокий порядок малости, чем $(\frac{r_i}{r_1})^2$.

Возмущающая функция R_i входит в уравнения движения только под знаком частных производных по x_i, y_i, z_i . Производные от первого слагаемого дадут нуль. Поэтому его можно опустить. Оставляя только самое существенное слагаемое в разложении, получим

$$(R_i)_1 = G m_1 \frac{r_i^2}{r_1^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right).$$

Тогда, пренебрегая массой спутника m_i по сравнению с массой планеты m_0 , слагаемое в величине $\frac{R_i}{V_i}$, обусловленное притяжением Солнца, можно записать в виде

$$\left(\frac{R_i}{V_i} \right)_1 = \frac{m_1}{m_0} \frac{r_i^3}{r_1^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right).$$

Несмотря на то, что масса Солнца m_1 во много раз больше массы планеты m_0 , отношение $(\frac{R_i}{V_i})_1$ для спутников планет оказывается малой величиной за счет того, что расстояния спутников до планеты r_i малы по сравнению с расстоянием r_1 планеты до Солнца. Таким образом, выполнение второго условия применения методов теории возмущений в спутниковой задаче обеспечивается малостью масс спутников m_2, m_3, \dots, m_n по сравнению с массой планеты m_0 , а также малостью расстояний спутников до планеты по сравнению с расстоянием планеты до Солнца. При решении уравнений возмущенного движения (3.26) в спутниковой задаче используются следующие малые параметры:

$$\varepsilon'_j = \frac{m_1}{m_0} \frac{r_j^3}{r_1^3} \quad (j = 2, 3, \dots, n).$$

Здесь расстояния r_j ($j = 2, 3, \dots, n$) изменяются во времени. Чтобы параметры были действительно постоянными, изменяющиеся расстояния заменяют на приближенные их значения, равные большим полуосям кеплеровских орбит, которые используются как нулевое приближение модели движения. Можно также использовать средние движения кеплеровского движения. Тогда малыми параметрами будут

$$\varepsilon'_j = \frac{m_1}{m_0} \frac{a_j^3}{a_1^3} = \frac{n_1^2}{n_j^2} \quad (j = 2, 3, \dots, n),$$

где a_1, a_j — большие полуоси, а n_1, n_j — средние движения.

Задача о движении спутника несферичной планеты.

Рассмотрим теперь пример движения в задаче двух тел, когда одно из тел (спутник) можно считать материальной точкой, а другое (планета) создает гравитационное поле, отличное от гравитационного поля материальной точки или шара со сферическим распределением плотности. Уравнения движения спутника в этом случае можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial z}, \quad (3.30)$$

где

$$V = \frac{Gm}{r}, \quad R = \frac{Gm}{r} J X(x, y, z),$$

x, y, z — планетоцентрические прямоугольные координаты спутника, m — масса планеты, G — универсальная гравитационная по-

стоянная, r определяется выражением $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, J — постоянный параметр, а $X(x, y, z)$ — некоторая известная функция. Последними двумя величинами можно распорядиться так, чтобы функция $X(x, y, z)$ в области движения спутника принимала значения, немного отличающиеся от единицы. Параметр J в этом случае будет характеризовать отличие планеты от шара с концентрическим распределением плотности. Известные гравитационные поля Земли, других планет и многих естественных спутников планет мало отличаются от поля притяжения материальной точки. Поэтому условия применимости методов теории возмущений в данном случае также выполняются, а J является характерным малым параметром.

Формы больших планет и их основных спутников близки к форме сжатого осесимметричного тела. Поэтому в качестве параметра J берется коэффициент при второй зональной гармонике разложения силовой функции притяжения планеты в ряд по сферическим функциям.

Другие случаи применения теории возмущений.

Рассмотренные выше конфигурации небесных тел являются лишь примерами многочисленных применений теории возмущений в небесной механике. Отметим здесь еще только одну группу задач, когда в качестве невозмущенного движения рассматривается частное решение уравнений движения. Возмущенное движение происходит вблизи этого частного решения. Малые параметры в таких задачах характеризуют разности координат в возмущенном и невозмущенном движениях, а дополнительным условием применимости теории возмущений является сохранение малости этих разностей по крайней мере на исследуемом интервале времени.

При рассмотрении различных малых параметров в задачах небесной механики следует выделять параметры, которые характеризуют малость возмущающей функции. Возмущающая функция может разлагаться в ряды по степеням также и других малых параметров. Это часто делается для обеспечения возможности решения дифференциальных уравнений возмущенного движения в форме (3.26).

Отметим еще случаи, когда силы, действующие на небесное тело, не имеют силовой функции. Примером таких сил служат силы, вызванные приливной деформацией вязко-упругих тел планеты и

спутника. В таких случаях исходные уравнения движения в прямоугольных координатах записываются в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = V_x + R_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = V_y + R_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = V_z + R_z, \quad (3.31)$$

где слагаемые V_x, V_y, V_z должны выбираться так, чтобы можно было найти общее решение уравнений движения при отбрасывании слагаемых R_x, R_y, R_z . Эти последние слагаемые называются компонентами возмущающего ускорения. Для возможности применения теории возмущений необходимо, чтобы R_x, R_y, R_z были малы по сравнению с компонентами основного ускорения V_x, V_y, V_z .

3.7.3. Уравнения относительно элементов промежуточной орбиты

Уравнения возмущенного движения небесного тела в теории возмущений в общем виде уже были построены выше. Чтобы изложение было непрерывным, будем исходить снова из уравнений движения в прямоугольных координатах

Для простоты понимания общей схемы теории возмущений ограничимся случаем движения одного небесного тела под действием сил, имеющих силовую функцию.

Исходные уравнения движения в прямоугольных координатах имеют общий вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (3.32)$$

где V и R являются функциями от координат x, y, z и времени t . Согласно теории возмущений слагаемое V выбирается так, чтобы можно было найти общее решение уравнений невозмущенного движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (3.33)$$

Тогда R называется возмущающей функцией.

Воспроизведем здесь для удобства изложения повторно некоторые соотношения из общей схемы теории возмущений.

Предположим, что решение уравнений (3.33) найдено в форме

$$\begin{aligned}x &= x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\y &= y(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\z &= z(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{x} &= \dot{x}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),\end{aligned}\tag{3.34}$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — произвольные постоянные интегрирования.

На этом вспомогательная роль уравнений (3.33) заканчивается. Достаточно того, что они породили нам соотношения (3.34). Далее эти соотношения рассматриваются как формулы преобразования, связывающие координаты и компоненты скорости тела в возмущенном движении с некоторыми новыми неизвестными функциями времени $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$. Соотношения (3.34) используют как формулы замены переменных в уравнениях (3.32) от переменных $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ к переменным $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$. Таким образом получают новые уравнения возмущенного движения

$$\frac{dc_i}{dt} = C_i(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6),\tag{3.35}$$

преимущества которых в том, что правые части этих уравнений обращаются в нули, если в исходных уравнениях (3.32) положить $R = 0$. Это позволяет решать их методом малого параметра.

Формулы (3.34), если в них $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ считаются заданными постоянными, определяют закон движения, который называют промежуточной орбитой. Сами эти формулы называются формулами промежуточной орбиты. Уравнения (3.35) называются уравнениями для элементов промежуточной орбиты.

Успех дальнейших действий существенно зависит от того, как выбраны произвольные постоянные $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$. Выбирать их можно бесконечным числом способов. В практике исследователей за последние три столетия были рассмотрены и успешно применялись множество вариантов. Рассмотрим здесь один из них, который имел большое число применений.

В качестве силовой функции невозмущенного движения V выбираем силовую функцию задачи двух тел, рассматриваемых здесь

как материальные точки. Такой выбор обусловлен общей иерархией в движении тел Солнечной системы. Движение каждой планеты происходит под действием притяжения Солнца. Влияние других планет относительно слабо. Спутник потому и является спутником планеты, поскольку движется под действием ее притяжения. Другие спутники и даже Солнце лишь слегка искажают движение.

Таким образом, в данном рассмотрении мы имеем

$$V = \frac{\mu}{r}, \quad (3.36)$$

где μ — постоянная, а r — расстояние между двумя телами. Чаще всего начало координат помещают в одно из тел, которому присвоим номер 0. Тогда $\mu = G(m_0 + m_1)$, где G — универсальная гравитационная постоянная, а $m_0 + m_1$ — сумма масс тел. В случае, когда начало координат располагается в барицентре двух тел, имеем $\mu = G \frac{m_0^3}{(m_0 + m_1)^2}$.

Решение задачи двух тел описывает движение, которое называется кеплеровским, поскольку происходит по законам Кеплера. Поскольку мы рассматриваем движение тел Солнечной системы, имеющее определенную иерархию, ограничимся эллиптическим типом движения. В соответствии с кеплеровским движением выбирают и произвольные постоянные, которые называются кеплеровскими орбитальными элементами. Перечислим здесь кеплеровские элементы, а также связанные с ними моменты времени.

n — среднее движение, размерность радиан/ед. времени;

e — эксцентриситет, безразмерный;

i — наклон (двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью Oxy), рад.;

M_0 — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии M в начальный момент времени — эпоху), рад.;

ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;

Ω — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости Oxy между осью x и линией узлов), рад.;

t_0 — начальный момент времени — эпоха элементов;

t — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

Наряду со средним движением n в качестве параметра орбиты будем рассматривать также большую полуось орбиты a , связанную с n третьим законом Кеплера

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} .$$

Замену переменных в уравнениях (3.32) делают с помощью формул кеплеровского движения. Эти формулы описаны в предыдущих разделах. Частные производные от возмущающей функции R по координатам выражаются через частные производные по кеплеровским элементам. Процедура такой замены подробно описана в книге (Дубошин, 1975). Процедура называется «основной операцией».

Применение теории возмущений оказывается проще, если в качестве новых искомым функций взять величины $a, e, i, M, \omega, \Omega$. Вместо средней аномалии в эпоху M_0 взята средняя аномалия M , которая в кеплеровском движении является известной линейной функцией времени

$$M = M_0 + n(t - t_0) .$$

Для краткости записи уравнений для элементов промежуточной орбиты сделаем простые переобозначения:

$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_2 = e, \quad \alpha_3 = i, \quad \beta_1 = M, \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega. \quad (3.37)$$

В результате замены переменных уравнения возмущенного движения небесного тела можно записать в следующем общем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i}{dt} &= \sum_{j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j} , \\ \frac{d\beta_i}{dt} &= n_i - \sum_{j=1}^3 a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$(i = 1, 2, 3) .$$

В этих уравнениях n_i, a_{ij} — функции, зависящие только от элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и постоянной μ . В случае кеплеровской промежуточной орбиты n_1, n_2 , а также некоторые из девяти функций a_{ij} , равны нулю. Однако это обстоятельство не упрощает решение

уравнений. Запись уравнений (3.38) в таком общем виде позволяет применять их также для некоторых некеплеровских промежуточных орбит. Методы решения этих уравнений рассмотрены в следующих разделах.

Заметим, что в уравнениях (3.38) возмущающая функция R обозначена той же буквой, что и в уравнениях (3.32). Однако здесь она является функцией от элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ и времени t .

Рассмотрим теперь явный вид уравнений для элементов промежуточной орбиты в случае элементов (3.37)

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Множители в правых частях уравнений можно заменить согласно соотношениям

$$\frac{1}{na^2} = \frac{na}{\mu}, \quad \frac{1}{na} = \frac{na^2}{\mu}. \quad (3.41)$$

В практической небесной механике применяются и другие варианты элементов кеплеровской промежуточной орбиты. Особого внимания заслуживают два из них. Орбиты множества естественных спутников планет являются почти круговыми и лежат вблизи плоскости экватора планеты. В таких случаях положение спутника на орбите в первую очередь определяется средней долготой λ , а ориентация орбиты — долготой перигентра ϖ . Эти величины связаны с M, ω, Ω соотношениями

$$\lambda = M + \omega + \Omega, \quad \varpi = \omega + \Omega. \quad (3.42)$$

Для обратных орбит вместо суммы ω и Ω используется их разность. Уравнения составляются относительно функций λ , ϖ и Ω . Элементами промежуточной орбиты считаются ϖ , Ω и λ_0 — средняя долгота в эпоху t_0 . В этом случае вместо уравнений (3.39), (3.40) нужно решать уравнения

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial \varpi}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + e \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Правые части уравнения для i и Ω имеют особенности при $i = 0$, а правые части уравнений для e и ω имеют особенности при $e = 0$. Эти обстоятельства требуют особого внимания при решении уравнений.

Заметим, что во многих русскоязычных публикациях и учебниках вместо ϖ для обозначения долготы перицентра используется буква π .

Теперь рассмотрим вариант элементов промежуточной орбиты, при которых уравнения не имеют особенностей при эксцентриситете и наклоне орбиты, равных нулю. Такие элементы придумал Лагранж для изучения вековых возмущений планет. Они теперь так и называются — элементы Лагранжа. Уравнения для a и λ не имеют особенностей, а остальные элементы нужно заменить. Обычно элементы Лагранжа обозначаются в литературе через h, k, p, q . С рассмотренными выше элементами они связаны соотношениями

$$h = e \sin \varpi, \quad k = e \cos \varpi, \quad (3.45)$$

$$p = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega. \quad (3.46)$$

После замены переменных уравнения для элементов Лагранжа будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \left(\frac{\partial R}{\partial k} - \frac{h}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) + \frac{k \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{dk}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \left(-\frac{\partial R}{\partial h} - \frac{k}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) - \\ &\quad - \frac{h \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p}{2na^2 \sqrt{1-e^2} \cos i \cos^2 \frac{i}{2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right), \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial p} - \\ &\quad - \frac{q}{2na^2 \sqrt{1-e^2} \cos i \cos^2 \frac{i}{2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Для полного состава к ним нужно добавить уже приведенные выше уравнения

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + e \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \end{aligned} \quad (3.49)$$

В правых частях уравнений (3.47), (3.48), (3.49) содержатся частные производные от возмущающей функции по величинам, которые не являются искомыми функциями в этих уравнениях. Это нормально. Так следует оставить. Дело в том, что возмущающая функция получается сначала, как функция от переменных $a, e, i, \lambda, \varpi, \Omega$. Поэтому лучше сначала ее продифференцировать по этим элементам, а потом переходить к переменным h, k, p, q уже в полученных производных.

Заметим, что в публикациях встречаются несколько вариантов введения в рассмотрение элементов Лагранжа в зависимости от желаемого эффекта. Выше в разделе 3.2.5 мы рассмотрели один из таких вариантов, в данном разделе — другой.

3.7.4. Решение уравнений для элементов промежуточной орбиты. Метод малого параметра

Рассмотрим метод решения уравнений (3.38). Это наиболее часто применяемые уравнения. В случаях использования других вариантов элементов промежуточной орбиты спутника решение строится аналогично.

Метод решения основан на малости возмущающей функции R по сравнению с функцией V , поэтому он называется методом малого параметра. В литературе этот метод называется методом малого параметра А. Пуанкаре.

Для изложения метода малого параметра нужно ввести понятие порядка малости. Введение порядка малости неоднозначно. Дело в том, что на практике возмущающая функция R , выраженная через элементы промежуточной орбиты, содержит множество членов — слагаемых, разных по величине. Для выражения возмущающей функции применяют разложения в ряды по степеням различных малых параметров.

Присвоение каждому слагаемому того или иного порядка малости является иногда условным. При построении решения многократно перемножаются величины разных порядков малости. Чаще всего заранее полагается максимальный учитываемый порядок малости. В каждой конкретной теории движения имеются свои особенности. Величины малых параметров определяются как физическими свойствами небесных тел, так и соотношениями между их взаимными расстояниями.

Для общего изложения метода мы примем, что малость возмущающей функции обеспечивается некоторым малым параметром, содержащимся в ней как общий множитель. Будем считать этот параметр первого порядка малости. На практике возмущающая функция оказывается разложенной по степеням этого и других малых параметров. Таким образом, ее разложение начнется с члена первого порядка малости.

Для краткости изложения не будем выписывать явно сами малые параметры. Однако каждой величине будет присвоен определенный порядок малости. Этот порядок будем записывать с помощью верхнего индекса величины в круглых скобках. Теперь разложение возмущающей функции будет иметь вид

$$R = R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)} + \dots \quad (3.50)$$

Введем еще обозначения

$$\begin{aligned}
 A_i &= \sum_{j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j} , \\
 B_i &= - \sum_{j=1}^3 a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \\
 &(i = 1, 2, 3) .
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Теперь уравнения для элементов промежуточной орбиты запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{d\alpha_i}{dt} &= A_i^{(1)} + A_i^{(2)} + \dots , \\
 \frac{d\beta_i}{dt} &= n_i^{(0)} + n_i^{(1)} + \dots + B_i^{(1)} + B_i^{(2)} + \dots , \\
 &(i = 1, 2, 3) .
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Заметим, что в частном случае кеплеровской промежуточной орбиты $n_2 = n_3 = 0$ и $n_1^{(s)} = 0$ при $s > 1$. В последних уравнениях правые части зависят от искомым функций $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ и явно от времени.

Каждое из слагаемых $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots$) зависит от всех шести элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Слагаемые $n_i^{(0)} + n_i^{(1)} + \dots$ зависят только от $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Будем искать решение уравнений (3.52) в виде рядов по степеням малых параметров, т.е.

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \alpha_i^{(0)} + \alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} + \dots , \\
 \beta_i &= \beta_i^{(0)} + \beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)} + \dots , \\
 &(i = 1, 2, 3) .
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Здесь мы рассматриваем построение формального решения. Доказательства существования такого решения и сходимости построенных рядов можно найти в книгах (Дубошин, 1975; Субботин, 1968).

Итак, подставим ряды (3.53) в уравнения (3.52). Затем приравняем в левой и правой частях уравнений члены одинакового порядка малости. Каждое из слагаемых в правых частях этих уравнений

придется разложить в ряд Тейлора по степеням малого параметра. Разложение делается по схеме

$$f(a + \varepsilon) = f(x)|_{x=a} + \frac{1}{1!} \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=a} \varepsilon + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x=a} \varepsilon^2 + \dots,$$

где a — значение аргумента функции $f(x)$, относительно которого отсчитывается малое приращение ε . Таким образом, в аргументах функций $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, n_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots$) приращениями будут бесконечные суммы $\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} + \dots$, $\beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)} + \dots$.

Для членов нулевого порядка малости получим

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i^{(0)}}{dt} &= 0, \\ \frac{d\beta_i^{(0)}}{dt} &= (n_i^{(0)})_0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Здесь и далее символы $(\dots)_0$ обозначают значения функций при значениях элементов $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$.

Решение уравнений (3.54) тривиально:

$$\alpha_i^{(0)} = \alpha_{i0}^{(0)}, \quad \beta_i^{(0)} = (n_i^{(0)})_0(t - t_0) + \beta_{i0}^{(0)}. \quad (3.55)$$

Здесь $\alpha_{i0}^{(0)}, \beta_{i0}^{(0)}$ ($i = 1, 2, 3$) — произвольные постоянные интегрирования. При этом постоянные $(n_i^{(0)})_0$ зависят от $\alpha_{i0}^{(0)}$. Решение (3.55) описывает промежуточное невозмущенное движение.

Теперь выделим и приравняем в правых и левых частях уравнений (3.52) члены первого порядка малости с учетом (3.53). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i^{(1)}}{dt} &= (A_i^{(1)})_0, \\ \frac{d\beta_i^{(1)}}{dt} &= (B_i^{(1)})_0 + (n_i^{(1)})_0 + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$(i = 1, 2, 3)$.

Здесь $(A_i^{(1)})_0, (B_i^{(1)})_0$ являются известными функциями времени t в силу подстановок $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$ и равенств (3.55). Заметим, что произвольные постоянные $\alpha_i^{(0)}, \beta_{i0}^{(0)}$ входят сюда буквенно, их значения пока не определены.

Решение первых трех из шести уравнений (3.56) имеет вид

$$\alpha_i^{(1)} = \int (A_i^{(1)})_0 dt + \alpha_{i0}^{(1)} \quad (3.57)$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

где $\alpha_{i0}^{(1)}$ — новые произвольные постоянные интегрирования. Можно оставить эти постоянные в решении присутствовать буквенно и распорядиться их значениями позже. Однако они излишни, и их можно сразу положить равными нулю. Именно так мы и поступим для дальнейших построений.

Чтобы построить решение, нужно взять неопределенный интеграл в правой части соотношения (3.57). Для этого в конкретных случаях разрабатываются специальные методы разложения возмущающей функции. Допустим, что это удалось. Тогда $\alpha_i^{(1)}$ и правые части остальных трех уравнений (3.56) становятся известными функциями времени. Теперь решение для $\beta_i^{(1)}$ выражается через неопределенный интеграл

$$\beta_i^{(1)} = \int \left[(B_i^{(1)})_0 + (n_i^{(1)})_0 + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \right] dt + \beta_{i0}^{(1)} \quad (3.58)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Здесь произвольные постоянные интегрирования $\beta_{i0}^{(1)}$ можно положить равными нулю.

Аналогично строится решение для членов второго порядка малости. Сначала находим

$$\alpha_i^{(2)} = \int \left[(A_i^{(2)})_0 + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} \right] dt + \alpha_{i0}^{(2)} \quad (3.59)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Произвольные постоянные $\alpha_{i0}^{(2)}$ полагаем равными нулю. Подынтегральное выражение в (3.59) оказывается известной функцией вре-

мени t . Допустим, что эту функцию удалось проинтегрировать. Тогда решение для $\beta_i^{(2)}$ выражается в виде

$$\begin{aligned} \beta_i^{(2)} = & \int \left[(B_i^{(2)})_0 + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \right. \\ & + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \alpha_k^{(1)} \right] dt + \beta_{i0}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.60)$$

$(i = 1, 2, 3) .$

Произвольные постоянные $\beta_{i0}^{(2)}$ также полагаем равными нулю.

Таким образом, последовательно находится решение для членов следующих порядков малости. Всякий раз нужно интегрировать новую известную функцию времени, а новые излишние произвольные постоянные полагать равными нулю. Так как при получении подынтегральных выражений в правых частях уравнений делались подстановки $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$, то с учетом (3.55) все слагаемые рядов (3.53) оказываются зависимыми от произвольных постоянных $\alpha_i^{(0)}, \beta_i^{(0)}$ ($i = 1, 2, 3$). В результате мы получаем решение уравнений возмущенного движения как функции времени t и шести независимых произвольных постоянных

$$\begin{aligned} \alpha_i = & \alpha_i(\alpha_{10}^{(0)}, \alpha_{20}^{(0)}, \alpha_{30}^{(0)}, \beta_{10}^{(0)}, \beta_{20}^{(0)}, \beta_{30}^{(0)}) , \\ \beta_i = & \beta_i(\alpha_{10}^{(0)}, \alpha_{20}^{(0)}, \alpha_{30}^{(0)}, \beta_{10}^{(0)}, \beta_{20}^{(0)}, \beta_{30}^{(0)}) \end{aligned} \quad (3.61)$$

$(i = 1, 2, 3) .$

3.7.5. Решение уравнений для элементов промежуточной орбиты. Способ Пуассона

Применение метода малого параметра в том порядке, как описано выше, приводит к некоторым принципиальным осложнениям, которые следуют из свойств разложения возмущающей функции. Этим осложнениям можно избежать, если применить прием, предложенный еще французским математиком Пуассоном. Проблема возникает на этапе получения возмущений второго порядка методом малого параметра Пуанкаре.

Уравнения для элементов промежуточной орбиты мы рассматриваем в виде (3.52). Решение этих уравнений ищем в виде рядов по степеням малых параметров (3.53).

Возмущения второго порядка в элементах α_i находятся по формулам (3.59). Произвольные постоянные $\alpha_{i0}^{(2)}$ можно положить равными нулю, так как они входят в решение уравнений (3.52) аддитивно вместе с произвольными постоянными, появляющимися в членах других порядков малости. Подынтегральная функция в (3.59) оказывается известной функцией времени. Если эту функцию удалось проинтегрировать, то возмущения второго порядка в элементах β_i найдутся по формуле (3.60).

Рассмотрим в подынтегральных выражениях последних двух формул слагаемые

$$\left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)}, \quad \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.62)$$

После подстановки в уравнения для элементов промежуточной орбиты возмущающей функции в форме (3.65) (см. ниже) становится ясно, что левые множители в выражениях (3.62) могут содержать только периодические члены. С другой стороны, мы получили ранее, что в возмущениях первого порядка $\beta_j^{(1)}$ могут содержаться как периодические, так и вековые, т.е. линейные по времени члены. Произведение периодических членов на вековые даст в подынтегральном выражении смешанные члены, что после интегрирования приведет к появлению в решении смешанных членов в возмущениях второго порядка. Смешанными членами мы называем произведения вида $t \sin at$, где t — время, а a — постоянная. Появление таких выражений в возмущениях второго порядка является следствием применяемого метода. Это не означает неизбежного неограниченного возрастания возмущений во времени, так как таким образом мы получаем только начальные члены разложения возмущений по степеням малых параметров. Полный ряд, представляющий возмущения, может оказаться разложением ограниченной функции на бесконечном интервале времени.

Оказывается, существует способ, основная идея которого была предложена еще французским математиком Пуассоном, позволяющий исключить в решении смешанные члены по крайней мере второго, а возможно и более высоких порядков малости. Рассмотрим

этот способ в приложении к уравнениям возмущенного движения (3.52).

Предположим, что все возмущения элементов α_i не содержат вековых и смешанных членов и все возмущения элементов β_i не содержат смешанных членов по крайней мере до некоторого порядка малости. Однако возмущения элементов α_i могут содержать периодические, а элементов β_i – периодические и вековые члены любых порядков. Обозначим суммы вековых членов данного порядка малости k через $\bar{\alpha}_i^{(k)}$, $\bar{\beta}_i^{(k)}$ а суммы периодических членов порядка k через $\tilde{\alpha}_i^{(k)}$, $\tilde{\beta}_i^{(k)}$. Теперь представим разложение искомого решения уравнений возмущенного движения в виде

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \bar{\alpha}_i^{(0)} + \tilde{\alpha}_i^{(1)} + \tilde{\alpha}_i^{(2)} + \dots, \\ \beta_i &= \bar{\beta}_i^{(0)} + \bar{\beta}_i^{(1)} + \bar{\beta}_i^{(2)} + \dots + \tilde{\beta}_i^{(1)} + \tilde{\beta}_i^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (3.63)$$

$(i = 1, 2, 3) .$

Как было показано выше, по крайней мере $\bar{\alpha}_i^{(1)} = 0$ для $i = 1, 2, 3$ и возмущения первого порядка всех элементов не содержат смешанных членов.

По методу малого параметра нужно делать разложение правых частей уравнений по степеням малого параметра по схеме

$$f(a + \varepsilon) = f(x)|_{x=a} + \frac{1}{1!} \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=a} \varepsilon + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_{x=a} \varepsilon^2 + \dots,$$

где a – значение аргумента функции $f(x)$, относительно которого отсчитывается малое приращение ε . Согласно способу Пуассона центрами разложения (a) считаются $\bar{\alpha}_i^{(0)}$ и бесконечные суммы $\bar{\beta}_i^{(0)} + \bar{\beta}_i^{(1)} + \bar{\beta}_i^{(2)} + \dots$ вековых членов, а приращениями (ε) – бесконечные суммы $\tilde{\alpha}_i^{(1)} + \tilde{\alpha}_i^{(2)} + \dots$, $\tilde{\beta}_i^{(1)} + \tilde{\beta}_i^{(2)} + \dots$ периодических слагаемых.

При этих предположениях вместо выражений (3.62), входящих в формулы для возмущений второго порядка, мы будем иметь

$$\left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \tilde{\beta}_j^{(1)}, \quad \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \tilde{\beta}_j^{(1)} \quad (i, j = 1, 2, 3) . \quad (3.64)$$

Эти выражения представляют собой произведения сумм периодических членов. Таким образом, в возмущениях второго порядка исключены смешанные члены.

Легко показать, что если все возмущения элементов α_i не содержат вековых и смешанных членов и все возмущения элементов β_i не содержат смешанных членов по крайней мере до порядка малости $(k - 1)$ включительно, то все возмущения порядка k не будут содержать смешанных членов, но могут быть вековые.

3.8. Разложение возмущающей функции относительно элементов промежуточной орбиты спутника планеты

Во всех предыдущих разделах возмущающая функция рассматривалась как функция от координат небесного тела. Теперь для применения теории возмущений и метода малого параметра необходимо выразить ее через элементы промежуточной орбиты. При этом выражение должно иметь такой вид, чтобы интегралы по времени, возникающие в теории возмущений, можно было получить в аналитическом виде. Общий подход заключается в том, чтобы привести результаты интегрирования к виду

$$\int \cos(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t + \beta),$$

где α, β — постоянные.

Для каждого типа возмущающих факторов это разложение имеет специальный вид. Рассмотрим здесь разложения возмущающей функции в теории движения спутника планеты для основных факторов — притяжения других тел и несферичности планеты. Выводы таких разложений чрезвычайно сложны и объемны. Мы воздержимся от того, чтобы демонстрировать эти выводы здесь. Ниже даны ссылки на работы, где можно найти соответствующие выкладки и результаты. Приведем здесь самый общий вид разложения возмущающей функции

$$R = \bar{R} + \sum \left(R_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n}^{(s)} \sin D_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n} + R_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n}^{(c)} \cos D_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n} \right), \quad (3.65)$$

где

$$D_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n} = k_1 M + k_2 \omega + k_3 \Omega + j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + \dots + j_n \lambda_n.$$

Суммирование ведется по индексам $k_1, k_2, k_3, j_1, j_2, \dots, j_n$. Здесь коэффициенты $\bar{R}, R_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n}^{(s)}, R_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n}^{(c)}$ зависят от элементов a, e, i и не зависят от M, ω, Ω и времени t . Величины $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ суть известные линейные функции времени. Слагаемое \bar{R} называется вековым членом разложения возмущающей функции. Все эти коэффициенты и величины содержат параметры, характеризующие возмущающие факторы. В частности, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ описывают орбитальные движения или вращения других тел.

Легко показать, что подставляя в таком виде возмущающую функцию в уравнения теории возмущений, которые рассмотрены выше, получающиеся интегралы по времени будут «берущимися». В возмущениях первого порядка малости будут получаться только вековые и периодические члены, но в возмущениях более высоких порядков могут появляться также смешанные члены вида

$$t \cos(\alpha t + \beta).$$

В теории движения спутника планеты учитывается притяжение других спутников этой же планеты, а также и притяжение Солнца. Система дифференциальных уравнений относительного движения имеет тот же вид, берется ли в качестве доминирующего притягивающего тела Солнце или планета. Поэтому в теории движения спутника принимается, что Солнце движется вокруг планеты, как и другие спутники. Притяжение других планет учесть в аналитической теории гораздо сложнее. Мы здесь этот весьма слабый эффект не рассматриваем.

Рассмотрим здесь возмущающую функцию, обусловленную несферичностью планеты. Воспользуемся выводом и результатами работы (Брумберг, 1967).

При выводе формулы исходят из выражения возмущающей функции через координаты, которое дано выше (3.17). При этом система прямоугольных координат связана с телом планеты, основная плоскость — с экватором планеты, которая в реальных случаях больших планет близка к осесимметричному телу. Фактически ось z берется совпадающей с осью динамической симметрии. Выражение (3.17) содержит угол вращения планеты S .

На практике бесконечный предел в первой сумме заменяют на конечное число N . Таким образом пренебрегают влиянием гармоник более высоких порядков. При выражении функции через элементы кеплеровской промежуточной орбиты приходится делать

разложения по степеням эксцентриситета e . При этом пренебрегают членами, содержащими e в более высокой степени, чем заданное число K .

Рассмотрим одну модификацию разложения возмущающей функции, обусловленной нецентральностью гравитационного поля планеты, имеющую преимущества на практике и при анализе возмущений в движении спутника. В формуле из работы (Брумберг, 1967) изменим порядок суммирования так, чтобы выделить члены с одинаковыми коэффициентами при $M, \omega, (\Omega - S)$. Получим

$$R = \sum_{q=q'}^{q''} \sum_{j=j'}^{j''} \sum_{k=0}^N (A_{qjk} \cos D_{qjk} + B_{qjk} \sin D_{qjk}), \quad (3.66)$$

где

$$D_{qjk} = qM + j\omega + k(\Omega - S),$$

$$A_{qjk} = \sum_{p=p'}^{p''} Gm \frac{r_0^n}{a^{n+1}} F_{nkp}(i) X_q^{-n-1,j}(e) C'_{nk}, \quad (3.67)$$

$$B_{qjk} = \sum_{p=p'}^{p''} Gm \frac{r_0^n}{a^{n+1}} F_{nkp}(i) X_q^{-n-1,j}(e) S'_{nk}, \quad (3.68)$$

$$C'_{nk} = \begin{cases} C_{nk} & \text{при } n - k - \text{чет} \\ -S_{nk} & \text{при } n - k - \text{нечет} \end{cases},$$

$$S'_{nk} = \begin{cases} S_{nk} & \text{при } n - k - \text{чет} \\ C_{nk} & \text{при } n - k - \text{нечет} \end{cases},$$

$$n = j + 2p.$$

Здесь и далее в тех случаях, когда массой спутника по сравнению с массой планеты пренебрегают, масса планеты обозначена через m . Как и выше, G — универсальная гравитационная постоянная.

Пределы суммирования $q', q'', j', j'', p', p''$ определяются из соотношений

$$q' = -K - N, \quad q'' = K + N,$$

$$j' = \max\{q - K, -N\}, \quad j'' = \min\{q + K, N\},$$

$$p' = -E \left(-\frac{1}{2} \max\{0, -2j, 2 - j, k - j\} \right), \quad p'' = E \left(\frac{N - j}{2} \right).$$

Здесь функция $E(\dots)$ означает целую часть числа, то есть ближайшее целое, не превышающее заданное. Через S_{nk} , C_{nk} обозначены, как и выше, коэффициенты разложения силовой функции притяжения планеты, однако дополнительно принято, что

$$C_{n0} = -J_n, \quad S_{n0} = 0.$$

В формулах (3.67), (3.68) фигурируют специальные функции небесной механики: $F_{nkp}(i)$ — функции наклона и $X_q^{-n-1,j}(e)$ — функции эксцентриситета, которые в данном разложении называют еще коэффициентами Ганзена. Методы вычисления этих функций описаны в книгах (Аксенов, 1986; Каула, 1970) и в статье (Брумберг, 1967). Здесь только отметим некоторые их свойства. При значении индекса $q = 0$ коэффициенты Ганзена выражаются в конечном виде как функции от эксцентриситета. Кроме того для всех допустимых значений индексов можно записать разложение

$$X_q^{l,j}(e) = e^{|q-j|} \sum_{s=0}^{\infty} X_{q,s}^{l,j} e^{2s}, \quad (3.69)$$

где $X_{q,s}^{l,j}$ — некоторые числа, а ряд сходится при всех $e < 1$. Функции наклона и функции эксцентриситета для некоторых значений индексов приведены в явном виде в Приложении 3.

Поскольку в разложении силовой функции притяжения больших планет Солнечной системы превалирует вторая зональная гармоника, то принято считать малым параметром первого порядка малости величину коэффициента J_2 . Остальные гармоники имеют значительно меньшую величину. Их вклад в возмущения элементов промежуточной орбиты спутника считается малой величиной второго порядка малости.

Рассмотрим теперь разложение возмущающей функции, обусловленной притяжением внешних тел. Для далеких спутников планет главным из таких внешних тел является Солнце. Разложение в удобном для практических применений виде впервые появляется в работе (Kaula, 1962). Изящный вывод этого разложения сделан также в работе (Брумберг, 1967). Разложение приводится также в книге (Мюррей, Дермотт, 2010).

Воспроизведем здесь разложение возмущающей функции, обусловленной притяжением внешних тел, с использованием принятых в этой главе обозначений для кеплеровских элементов a , e , i ,

M, ω, Ω , а также других связанных с ними величин $n, \lambda = M + \omega + \Omega$, $\varpi = \omega + \Omega$. Такие же величины, но относящиеся к возмущающему телу, будем обозначать теми же буквами, но со штрихом. Гравитационный параметр возмущающего тела (произведение универсальной гравитационной постоянной на массу) обозначим через μ' . В этих обозначениях разложение имеет вид

$$R = \frac{\mu'}{a} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=0}^k \sum_{p=0}^k \sum_{p'=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{q'=-\infty}^{\infty} (2 - \delta_{m,0}) \left(\frac{a}{a'}\right)^{k+1} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \times$$

$$\times F_{kmp}(i) F_{kmp'}(i') X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e) X_{k-2p'+q'}^{k,k-2p'}(e') \times \quad (3.70)$$

$$\times \cos[(k-2p+q)M - (k-2p'+q')M' + (k-2p)\omega - (k-2p')\omega' + m(\Omega - \Omega')]$$

Здесь аргумент под знаком косинуса может быть выражен через средние долготы и долготы перицентров следующим образом:

$$(k-2p+q)M - (k-2p'+q')M' + (k-2p)\omega - (k-2p')\omega' + m(\Omega - \Omega') =$$

$$= (k-2p+q)\lambda - (k-2p'+q')\lambda' - q\varpi + q'\varpi' + (m-k+2p)\Omega - (m-k+2p')\Omega'.$$

Величина $\delta_{m,0}$ равна единице при $m = 0$ и нулю в противном случае.

Входящие в разложение функции наклона $F_{kmp}(i)$ и функции эксцентриситета $X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e)$ рассмотрены в Приложении 3. Для построения моделей движения и анализа возмущений спутников важны следующие три свойства этих функций.

1. При наклонах орбит малых или близких к 180 градусам справедливо следующее свойство (Брумберг, 1967):

$$F_{kmp}(i) = O\left(\left(\sin \frac{i}{2}\right)^{|k-2p-m|}, \left(\cos \frac{i}{2}\right)^{|k-2p-m|}\right).$$

Отсюда следует, что если выбрать основную плоскость системы координат, совпадающей с плоскостью орбиты внешнего тела, то в разложении возмущающей функции останутся только те члены, при которых $|k - 2p' - m| = 0$.

2. При нулевом эксцентриситете отличны от нуля только те функции эксцентриситета $X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e)$, при которых $q = 0$. Это следует из приведенной выше формулы (3.69). Поэтому для круговых орбит спутника в разложении возмущающей функции остаются только члены с $q = 0$, а при круговых орбитах внешнего тела остаются только члены с $q' = 0$.

3. При $k - 2p + q = 0$ функции $X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e)$ выражаются в конечном виде без использования разложений в ряды по степеням эксцентриситета.

В Приложении 3 даны явные выражения для некоторых функций наклона и функций эксцентриситета.

Отметим, что приведенное разложение возмущающей функции (3.70) с учетом указанных свойств функций наклона и функций эксцентриситета применяется при построении модели эволюции орбит спутников. Этому посвящена специальная глава книги. Разложение (3.70) было использовано также при построении аналитической теории движения спутника Нептуна Тритон (Emelyanov, Samorodov, 2015). Как это делалось, описано ниже в специальном разделе.

3.9. Определение возмущений элементов промежуточной орбиты спутника планеты

Рассмотрим некоторые аспекты построения аналитической теории движения спутников методами теории возмущений.

Естественно, наибольший интерес представляют вековые возмущения элементов промежуточной орбиты спутника. По крайней мере именно с них начинают вывод всех возмущений в теории. Из вышеприведенных формул видно, что вековые возмущения, обусловленные несферичностью планеты, создаются только четными зональными гармониками разложения силовой функции, т. е. при $k = 0$ и n — четном.

Периодические возмущения элементов могут иметь периоды, равные

$$\frac{2\pi}{q\dot{M} + j\dot{\omega} + k(\dot{\Omega} - \dot{S})}, \quad (3.71)$$

где буквы с верхней точкой означают скорости изменения соответствующих величин. Здесь среди аргументов в знаменателе максимальную скорость изменения имеет M . Поэтому при $q \neq 0$ возмущения имеют минимальный период и называются короткопериодическими.

Вековые возмущения.

Возвращаясь к вековым возмущениям, их можно получить, подстановкой вековых членов в уравнения Лагранжа относительно элементов и интегрированием их сначала для возмущений первого по-

рядка. В некоторых задачах могут оказаться существенными также вековые возмущения второго порядка.

Для спутников больших планет Солнечной системы в разложении силовой функции притяжения планеты среди зональных гармоник максимальную величину имеет вторая гармоника ($n = 2$). Следующая по значимости оказывается четвертая зональная гармоника ($n = 4$). Вековые возмущения содаются также притяжением внешних тел — Солнца и других спутников. Приведем здесь формулы для упомянутых вековые возмущений.

При определении вековых возмущений полагаем

$$M = M_0 + n_1(t - t_0), \quad \omega = \omega_0 + n_2(t - t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + n_3(t - t_0) .$$

Величины $a, e, i, M_0, \omega_0, \Omega_0$ считаются произвольными постоянными интегрирования. Если определяются только возмущения первого порядка, то коэффициенты n_1, n_2, n_3 найдутся как значения правых частей уравнений Лагранжа относительно элементов M, ω, Ω , соответственно, после подстановки в них значений постоянных значений a, e, i . Аналогичный вид будут иметь и вековые возмущения второго порядка.

Чтобы различить между собой вековые члены разных порядков, обусловленные различными возмущающими факторами, представим n_1, n_2, n_3 в следующем виде:

$$n_1 = n[1 + \nu_1(J_2) + \nu_1(J_2^2) + \nu_1(J_4) + \nu_1(m')],$$

$$n_2 = n[\nu_2(J_2) + \nu_2(J_2^2) + \nu_2(J_4) + \nu_2(m')],$$

$$n_3 = n[\nu_3(J_2) + \nu_3(J_2^2) + \nu_3(J_4) + \nu_3(m')],$$

где $\nu_j(J_2)$ и $\nu_j(J_2^2)$ ($j = 1, 2, 3$) — члены первого и второго порядков, обусловленные второй зональной гармоникой в разложении силовой функции притяжения планеты, $\nu_j(J_4)$ ($j = 1, 2, 3$) — члены первого порядка, обусловленные четвертой зональной гармоникой, $\nu_j(m')$ ($j = 1, 2, 3$) — члены, обусловленные притяжением внешнего тела (Солнце, другой спутник).

Вековые возмущения первого порядка относительно коэффициента J_2 при второй зональной гармонике разложения силовой функции притяжения планеты получают следующим образом. В возмущающей функции берем только вековую часть, подставляем ее в уравнения для элементов промежуточной орбиты. Интегрируем уравнения, считая a, e, i постоянными. Обозначим через r_0 —

средний экваториальный радиус планеты и положим $s = \sin i$. Таким образом, получаем

$$\nu_1(J_2) = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{2 - 3s^2}{(1 - e^2)^{3/2}} , \quad (3.72)$$

$$\nu_2(J_2) = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{4 - 5s^2}{(1 - e^2)^2} , \quad (3.73)$$

$$\nu_3(J_2) = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2} . \quad (3.74)$$

В некоторых задачах необходимо сразу вычислять сумму

$$\begin{aligned} & \nu_1(J_2) + \nu_2(J_2) + \nu_3(J_2) = \\ & = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{4 - 5s^2 + \sqrt{1 - e^2}(2 - 3s^2) - 2 \cos i}{(1 - e^2)^2} . \end{aligned} \quad (3.75)$$

Аналогично получаются выражения для $\nu_1(J_4)$, $\nu_2(J_4)$, $\nu_3(J_4)$:

$$\nu_1(J_4) = -\frac{45}{128} J_4 \left(\frac{r_0}{a} \right)^4 e^2 \frac{8 - 40s^2 + 35s^4}{(1 - e^2)^{7/2}} ,$$

$$\nu_2(J_4) = -\frac{15}{128} J_4 \left(\frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{4(16 - 62s^2 + 49s^4) + 9e^2(8 - 28s^2 + 21s^4)}{(1 - e^2)^4} ,$$

$$\nu_3(J_4) = \frac{15}{32} J_4 \left(\frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{\cos i(4 - 7s^2)(2 + 3e^2)}{(1 - e^2)^4} .$$

Вековые возмущения второго порядка находятся более сложными действиями. Воспользуемся результатами, полученными Брауэром (Brower, 1959). В наших обозначениях имеем

$$\begin{aligned} \nu_1(J_2^2) &= \frac{3}{128} J_2^2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} \{ -15 + 16\sqrt{1 - e^2} + 25(1 - e^2) + \\ &+ [30 - 96\sqrt{1 - e^2} - 90(1 - e^2)] \cos^2 i + \\ &+ [105 + 144\sqrt{1 - e^2} + 25(1 - e^2)] \cos^4 i \} , \\ \nu_2(J_2^2) &= \frac{3}{128} J_2^2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{1}{(1 - e^2)^4} \{ -35 + 24\sqrt{1 - e^2} + 25(1 - e^2) + \end{aligned}$$

$$+ [90 - 192\sqrt{1 - e^2} - 126(1 - e^2)] \cos^2 i + \\ + [385 + 360\sqrt{1 - e^2} + 45(1 - e^2)] \cos^4 i \} ,$$

$$\nu_3(J_2^2) = \frac{3}{32} J_2^2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^4} \{ -5 + 12\sqrt{1 - e^2} + 9(1 - e^2) - \\ - [35 + 36\sqrt{1 - e^2} + 5(1 - e^2)] \cos^2 i \} .$$

Для орбит с малыми наклонами и эксцентриситетами удобнее пользоваться другим видом этих формул

$$\nu_1(J_2^2) = \frac{3}{128} J_2^2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} [3(40 - 80s^2 + 35s^4) + \\ + 16(4 - 12s^2 + 9s^4)\sqrt{1 - e^2} + 5(-8 + 8s^2 + 5s^4)(1 - e^2)] ,$$

$$\nu_2(J_2^2) = \frac{3}{128} J_2^2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{1}{(1 - e^2)^4} [5(88 - 172s^2 + 77s^4) + \\ + 24(8 - 22s^2 + 15s^4)\sqrt{1 - e^2} + (-56 + 36s^2 + 45s^4)(1 - e^2)] ,$$

$$\nu_3(J_2^2) = \frac{3}{32} J_2^2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^4} [5(-8 + 7s^2) + \\ + 12(-2 + 3s^2)\sqrt{1 - e^2} + (4 + 5s^2)(1 - e^2)] .$$

Периодические возмущения.

Периодические возмущения элементов промежуточной орбиты, обусловленные несферичностью планеты, имеют небольшие амплитуды. Поэтому возмущенное движение спутника сжатой осесимметричной планеты можно представить, как движение вблизи некоторого эллипса, плоскость которого прецессирует при постоянном наклоне вокруг оси симметрии планеты с угловой скоростью $\dot{\Omega}$ в направлении, обратном орбитальному движению. При этом линия апсид прецессирует в плоскости орбиты с угловой скоростью $\dot{\omega}$. Направление вращения линии апсид определится знаком выражения $4 - 5 \sin^2 i$. Добавок $\Delta \dot{M}$ к угловой скорости орбитального движения не изменяет характер движения.

Отметим любопытный факт в теории возмущенного движения спутника сжатой планеты. Попытаемся определить периодические

возмущения элементов, порождаемые членами разложения возмущающей функции при $q = 0, k = 0$. Очевидно, что скорость прецессии линии апсид $\dot{\omega}$ имеет малую величину первого порядка малости. Соответствующий этим возмущениям период по формуле (3.71) получается максимальным среди периодических возмущений. Поэтому эти возмущения называются долгопериодическими. Ясно, что вторая зональная гармоника при $n = 2$ с коэффициентом J_2 будет также порождать долгопериодические возмущения в элементах промежуточной орбиты спутника. Поскольку J_2 имеет первый порядок малости, следует ожидать получения долгопериодического возмущения первого порядка. При интегрировании уравнений Лагранжа для рассматриваемых членов разложения возмущающей функции в знаменатель выражения поступает величина $\dot{\omega}$, имеющая первый порядок малости. В итоге получаем возмущение нулевого порядка малости. На первый взгляд получается, что метод малого параметра дает отказ в попытках описать возмущенное движение спутника сжатой планеты. Ситуацию спасает «подарок природы». Искомое долгопериодическое возмущение при $n = 2, q = 0, k = 0$ содержит функции эксцентриситета, равные нулю, т. е.

$$X_0^{-3,2}(e) = X_0^{-3,-2}(e) = 0$$

при всех $e < 1$. По этой причине долгопериодические возмущения, обусловленные второй зональной гармоникой разложения силовой функции притяжения планеты, просто отсутствуют. Долгопериодические возмущения, обусловленные другими гармониками разложения, будут малыми, поскольку соответствующие коэффициенты имеют второй порядок малости.

Отметим важное свойство возмущений элементов промежуточной орбиты спутника несферичной планеты. Применяя метод малого параметра, как описано выше, мы будем получать вековые, периодические, а также, возможно, смешанные возмущения. Присутствие вековых возмущений в элементах a, e, i могло бы приводить к катастрофическим последствиям — потерей планетой своих спутников. Смешанные возмущения привели бы к выводу о несостоятельности теории. Однако, как доказано в работе (Аксенов, 1966), в возмущениях элементов промежуточной орбиты спутника, обусловленных несферичностью планеты, в элементах a, e, i отсутствуют вековые, а во всех шести элементах $a, e, i, M, \omega, \Omega$ отсутствуют смешанные возмущения всех порядков малости. Это можно дока-

зять методом математической индукции, применяя его к последовательности возмущений каждого следующего порядка малости.

Определение возмущений, обусловленных притяжением других тел, а именно других спутников и Солнца, вызывает особые проблемы.

Обратимся к общему виду разложения возмущающей функции (3.65). Как предписано методами теории возмущения, сначала определяются вековые возмущения элементов промежуточной орбиты. Элементы ω , Ω , постоянные в кеплеровском движении, теперь станут линейными функциями времени с коэффициентом при времени, пропорциональным малому параметру возмущающей функции. Затем находятся периодические члены. При этом встретятся слабые, содержащие только ω , Ω под знаком тригонометрических функций. При интегрировании уравнений Лагранжа по времени, малый параметр окажется в знаменателе и сократится с малым параметром в возмущающей функции. Здесь при построении теории методом малого параметра возникает противоречие: малые возмущения фактически оказываются не малыми. Такие возмущения оказываются весьма долгопериодическими. Если такая теория применяется на коротком интервале времени, то такие возмущения можно считать постоянными. Они фактически будут учтены при определении параметров движения из наблюдений. Однако на больших интервалах времени так теорию построить нельзя. Поэтому для далеких спутников больших планет приемлемых аналитических теорий движения так и не было до сих пор построено. В некоторых случаях, когда вековые возмущения от сжатия планеты превалируют, то при указанном выше интегрировании уравнений Лагранжа для периодических членов разложения возмущающей функции в знаменатель поступает не столь малая величина, как малый параметр, обусловленный притяжением другого тела. Пример такой благоприятной ситуации рассмотрен ниже. Так была успешно построена аналитическая теория движения главного спутника Нептун Тритон (Emelyanov, Samorodov, 2015).

Еще одна проблема учета притяжения других спутников связана с необходимостью разлагать возмущающую функцию по степеням отношения больших полуосей орбит возмущаемого и возмущающего тел. Это разложение представлено в книге (Мюррей, Дормотт, 2010). При определении возмущений, обусловленных взаимным притяжением главных спутников Юпитера, Сатурна и Урана,

обычным методом теории возмущения построить аналитическую теорию не удастся. Примеры специальных теорий для этих спутников кратко рассмотрены ниже в специальном разделе.

3.10. Постоянное возмущение большой полуоси орбиты спутника

Вековые возмущения элементов промежуточной орбиты спутника являются основными возмущениями при рассмотрении движения на интервалах времени, значительно превышающих период обращения спутника. По определению вековые возмущения получаются от вековой части разложения возмущающей функции. Легко видеть в уравнениях Лагранжа, что вековые возмущения первого порядка в элементах a — большая полуось, e — эксцентриситет, i — наклон отсутствуют.

Как было положено выше, большая полуось орбиты a связана с невозмущенным значением среднего движения n соотношением

$$n = \sqrt{\frac{Gm}{a^3}}, \quad (3.76)$$

где G — универсальная гравитационная постоянная, а m — масса планеты.

Можно предположить, что учет вековых возмущений в элементах M , ω , Ω дает приемлемую модель движения спутника, поскольку периодические возмущения, пропорциональные малому параметру возмущающей функции, малы. На самом деле такая модель вековых возмущений не будет наилучшей при согласовании с наблюдениями. Оказывается, что при заданном значении n с наблюдениями лучше согласуется другое значение большой полуоси. Дело в том, что комбинация короткопериодических возмущений в эксцентриситете e и средней аномалии M дает постоянный член в возмущениях центрального расстояния спутника r . Однако в теории вековых возмущений короткопериодические возмущения отброшены.

Лучшая модель вековых возмущений получится, если в качестве большой полуоси вместо a взять значение \bar{a} , вычисляемое по формуле

$$\bar{a} = a + \bar{\delta r}, \quad (3.77)$$

где $\bar{\delta r}$ — постоянная часть возмущений центрального расстояния.

Определение δr произведем здесь для случая возмущений, обусловленных второй зональной гармоникой разложения силовой функции притяжения планеты. Кроме того, будем предполагать, что эксцентриситет орбиты спутника e настолько мал, что в разложениях по степеням эксцентриситета можно ограничиться членом наименьшего порядка. То есть мы пренебрегаем величиной эксцентриситета по сравнению с единицей.

С принятой точностью можно записать

$$\delta r = (1 - e \cos M)\delta a - a \cos M \delta e + ea \sin M \delta M, \quad (3.78)$$

где δa , δe , δM — возмущения соответствующих элементов.

Возьмем разложение возмущающей функции согласно приведенным выше формулам (3.66), (3.67), (3.68). Оставим в разложении только члены, соответствующие второй зональной гармонике разложения силовой функции притяжения планеты. Получим

$$R = Gm \frac{r_0^2}{a^3} C_{20} \sum_{p=0}^2 F_{2,0,p}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_q^{-3,2-2p}(e) \cos[qM + (2-2p)\omega],$$

где C_{20} — коэффициент при второй зональной гармонике, а r_0 — средний экваториальный радиус планеты, принятый при определении C_{20} . При этом $C_{20} = -J_2$. В последней сумме окажутся только четыре короткопериодических слагаемых наименьшего порядка относительно малого эксцентриситета, которые соответствуют следующим комбинациям значений индексов суммирования

$$p = 0, \quad q = 1,$$

$$p = 1, \quad q = 1,$$

$$p = 1, \quad q = -1,$$

$$p = 2, \quad q = -1.$$

Оставляя в сумме только эти слагаемые, найдем

$$R = Gm \frac{r_0^2}{a^3} C_{20} \times \\ \left[F_{200}(i) X_1^{-3,2}(e) \cos(M + 2\omega) + F_{201}(i) X_1^{-3,0}(e) \cos M + \right. \\ \left. F_{201}(i) X_{-1}^{-3,0}(e) \cos(-M) + F_{202}(i) X_{-1}^{-3,-2}(e) \cos(-M - 2\omega) \right].$$

Входящие сюда функции наклона и функции эксцентриситета с принятой точностью имеют вид

$$F_{200}(i) = F_{202}(i) = -\frac{3}{8} \sin^2 i, \quad F_{201}(i) = \frac{3}{4}(i) \sin^2 i - \frac{1}{2},$$

$$X_1^{-3,2}(e) = X_{-1}^{-3,-2}(e) = -\frac{1}{2}e, \quad X_1^{-3,0}(e) = X_{-1}^{-3,0}(e) = \frac{3}{2}e.$$

Подставляя их в предыдущее выражение для возмущающей функции, будем иметь

$$R = Gm \frac{r_0^2}{a^3} C_{20} 3e \left[\left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \cos M + \frac{1}{8} \sin^2 i \cos(M + 2\omega) \right].$$

Теперь выпишем необходимые здесь уравнения возмущенного движения относительно кеплеровских элементов a , e и функции M :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned}$$

После подстановки выведенного выше упрощенного выражения для возмущающей функции уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -Gm \frac{r_0^2}{a^3} C_{20} \frac{6e}{na} \left[\left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \sin M + \frac{1}{8} \sin^2 i \sin(M + 2\omega) \right], \\ \frac{de}{dt} &= -Gm \frac{r_0^2}{a^3} C_{20} \frac{3}{na^2} \left[\left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \sin M - \frac{1}{8} \sin^2 i \sin(M + 2\omega) \right], \\ \frac{dM}{dt} &= -Gm \frac{r_0^2}{a^3} C_{20} \frac{3}{ena^2} \left[\left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \cos M + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \sin^2 i \cos(M + 2\omega) \right]. \end{aligned}$$

Интегрирование уравнений методом малого параметра дает следующие возмущения первого порядка относительно коэффициента C_{20} :

$$\begin{aligned} \delta a &= r_0^2 C_{20} \frac{6e}{a} \left[\left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \cos M + \frac{1}{8} \sin^2 i \cos(M + 2\omega) \right], \\ \delta e &= r_0^2 C_{20} \frac{3}{a^2} \left[\left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \cos M - \frac{1}{8} \sin^2 i \cos(M + 2\omega) \right], \\ \delta M &= -r_0^2 C_{20} \frac{3}{ea^2} \left[\left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \sin M + \frac{1}{8} \sin^2 i \sin(M + 2\omega) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.78), найдем основные короткопериодические возмущения центрального расстояния

$$\begin{aligned} \delta r = & r_0^2 C_{20} \frac{1}{a^2} 6ea \left[\left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) (1 - e \cos M) \cos M + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \sin^2 i (1 - e \cos M) \cos(M + 2\omega) \right] - \\ & - r_0^2 C_{20} \frac{1}{a^2} 3a \left[\left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \cos^2 M - \frac{1}{8} \sin^2 i \cos(M + 2\omega) \cos M \right] - \\ & - r_0^2 C_{20} \frac{1}{a^2} 3a \left[\left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \sin^2 M + \frac{1}{8} \sin^2 i \sin(M + 2\omega) \sin M \right]. \end{aligned}$$

Выделим образующуюся здесь постоянную часть возмущения наиминшого порядка относительно эксцентриситета

$$\bar{\delta r} = \frac{3}{4} \frac{r_0^2}{a^2} C_{20} a (2 - 3 \sin^2 i).$$

В итоге оказывается, что при заданном среднем движении спутника n возмущенное постоянное значение большой полуоси (3.77) следует определять по формуле

$$\bar{a} = a \left[1 + \frac{3}{4} \frac{r_0^2}{a^2} C_{20} (2 - 3 \sin^2 i) \right], \quad (3.79)$$

где a находится из соотношения (3.76).

Заметим, что из наблюдений обычно определяется возмущенное значение среднего движения n_1 . Тогда невозмущенное значение n находят итерациями из соотношения

$$n_1 = n[1 + \nu_1(J_2)],$$

где $\nu_1(J_2)$ определяется по формуле (3.72), а невозмущенное значение большой полуоси a находится из соотношения

$$n^2 a^3 = Gm.$$

При малых наклонах и эксцентриситетах лучше всего из наблюдений определяется возмущенное среднее движение в долготе \bar{n} . В этом случае n находится итерациями из соотношения

$$\bar{n} = n[1 + \nu_1(J_2) + \nu_2(J_2) + \nu_3(J_2)], \quad (3.80)$$

где $\nu_2(J_2)$ и $\nu_3(J_2)$ определяются по формулам (3.73), (3.74).

Рассмотрим специально случай малых эксцентриситетов и наклонов орбиты спутника сжатой планеты. Пренебрегая эксцентриситетом и наклоном в соотношениях (3.79) и (3.80), получим

$$\bar{n} = n \left(1 + 3J_2 \frac{r_0^2}{a^2} \right), \quad (3.81)$$

$$\bar{a} = a \left(1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{r_0^2}{a^2} \right). \quad (3.82)$$

В итоге учет основных возмущений, обусловленных сжатием планеты, позволяет представить спутник, обращающийся с частотой \bar{n} по орбите радиуса \bar{a} . Такая модель наилучшим образом будет соответствовать наблюдениям. Третий закон Кеплера, модифицированный в силу возмущений, примет вид

$$\bar{a}^3 \bar{n}^2 = Gm \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{r_0^2}{a^2} \right). \quad (3.83)$$

Соотношение

$$Gm = n^2 a^3$$

используется для определения массы планеты по наблюдениям спутников. Как следует из формулы (3.83) в случае сжатой планеты из наблюдений фактически получается значение правой части этой формулы. Для учета сжатия планеты в этом случае приходится либо принимать какие-нибудь гипотезы относительно величины динамического сжатия, либо пытаться определить коэффициент J_2 из наблюдений.

3.11. Модель прецессирующего эллипса

Для изучения динамики спутника планеты строится та или иная модель движения на основе наблюдений. Во многих случаях важно увидеть основные свойства движения, пренебрегая малыми возмущениями. Иногда требуется приближенная эфемерида. Для некоторых спутников точность наблюдений оказывается невысокой, и простейшая модель движения может дать хорошее согласование с результатами наблюдений. Во всех этих случаях пригодна некоторая приближенная модель движения, называемая прецессирующим

эллипсом. В этой модели спутник движется по некоторому эллипсу, плоскость которого прецессирует с постоянной угловой скоростью при постоянном наклоне к некоторой основной неподвижной плоскости. Линия апсид эллипса вращается в плоскости орбиты с постоянной угловой скоростью. Движение спутника по прецессирующему эллипсу происходит по законам задачи Кеплера, однако постоянное среднее движение отличается от того, которое получается из большой полуоси орбиты согласно известному соотношению.

Из предыдущих разделов ясно, что такая модель может быть создана в процессе построения аналитической теории движения путем учета вековых возмущений, обусловленных основными возмущающими факторами. Получается приближенное решение точных дифференциальных уравнений движения шестого порядка. Поэтому это решение содержит шесть произвольных постоянных интегрирования.

На практике определение вековых возмущений бывает затруднительным, неточным или вообще невозможным из-за того, что параметры, характеризующие возмущающие факторы, неточны или неизвестны. В таких случаях поступают следующим образом. Изменения функции M и элементов ω и Ω задают линейными функциями времени

$$M = M_0 + \bar{n}(t - t_0), \quad \omega = \omega_0 + \dot{\omega}(t - t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0), \quad (3.84)$$

где M_0 , \bar{n} , ω_0 , $\dot{\omega}$, Ω_0 , $\dot{\Omega}$ — постоянные. Элементы кеплеровской орбиты спутника e , i тоже считаются постоянными. Большая полуось, непосредственно входящая в формулы кеплеровского движения, задается независимо от параметра \bar{n} . Поскольку эти параметры уже не будут связаны законами кеплеровского движения, обозначим большую полуось через \bar{a} .

Для определения координат используются формулы кеплеровского движения. Средняя аномалия M и элементы ω , Ω вычисляются по формулам (3.84), параметры \bar{a} , e , i независимо подставляются в формулы кеплеровского движения.

В итоге девять постоянных параметров \bar{a} , \bar{n} , e , i , M_0 , ω_0 , $\dot{\omega}$, Ω_0 , $\dot{\Omega}$, формулы (3.84) и формулы кеплеровского движения полностью описывают модель движения. Основная плоскость, относительно которой отсчитываются наклон i , долгота восходящего узла Ω и угловое расстояние перигентра от восходящего узла орбиты, задается

так, чтобы в этой системе координат изменения наклона, получаемые из наблюдений, были минимальны.

Все девять параметров уточняются из наблюдений так, чтобы согласование модели с наблюдениями было наилучшим. В такой модели учитываются все вековые возмущения, вызванные любыми возможными причинами.

Модель прецессирующего эллипса используется также для приближенной аппроксимации более точной модели движения спутника, основанной на аналитической теории, или построенной методом численного интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Пример использования модели прецессирующего эллипса для четырех близких спутников Юпитера описан в работе (Емельянов, 2015). Параметры модели были определены по эфемеридам спутников, вычисленным на основе двух различных моделей, каждая из которых в свою очередь была построена на основе наблюдений путем численного интегрирования уравнений движения.

3.12. Возмущенное движение при малых эксцентриситетах орбит

3.12.1. Формулировка проблемы

В классическом подходе к теории возмущенного движения, когда уравнения Лагранжа относительно элементов кеплеровской орбиты решаются методом малого параметра Пуанкаре, встречаются мало исследованные случаи, приводящие иногда к непривычным выводам. К таким случаям относится возмущенное движение при малых эксцентриситетах промежуточной орбиты.

При решении уравнений Лагранжа в первую очередь необходимо найти вековые возмущения, поскольку именно они наиболее существенны как в количественном, так в качественном аспектах описания движения. Вековые возмущения обычно получаются путем разложения возмущающей функции и отбрасывания в правых частях уравнений Лагранжа периодических членов. Так была создана и стала широко применяться модель прецессирующего эллипса. Для возмущений, обусловленных несферичностью осесимметричного центрального тела, например, сжатой большой планеты, плоскость орбиты будет прецессировать вокруг оси симметрии тела с постоянным наклоном.

Невозмущенная кеплеровская орбита может быть вырождена в круговую орбиту, а наклон в невозмущенном движении определен только выбором системы прямоугольных координат. Естественным параметром, описывающим вырождение орбиты в круговую, является эксцентриситет. Для круговой орбиты он просто равен нулю. Можно было бы ожидать, что и для возмущенного движения, когда эксцентриситет изменяется во времени, его близость или равенство нулю должны приводить к вырождению орбиты в круговую. На самом деле это совсем не так.

Первое упоминание о существовании кругового возмущенного движения с ненулевым эксцентриситетом мы обнаружили в работе В. В. Белецкого (Белецкий, 1962). В этой работе указано частное решение уравнений относительно элементов кеплеровского движения, при котором круговая орбита в оскулирующих элементах описывается эллипсом, вращающимся с угловой скоростью обращения спутника вокруг центрального тела, причем спутник всегда находится в перигеуме этого эллипса.

Впрочем, в работе В. В. Белецкого замечено, что данный пример принадлежит Т. М. Энееву.

Широко применяемая на практике модель прецессирующего эллипса с произвольным постоянным и сколь угодно малым эксцентриситетом находится в противоречии с примером, приведенным в работе (Белецкий, 1962). Интересно выяснить, как соотносятся между собой эти две модели. Важно иметь строгое доказательство существования решения для кругового возмущенного движения с ненулевым эксцентриситетом. Было бы полезно найти достаточно простое решение, адекватно описывающее возмущенное движение при малых эксцентриситетах.

Такое исследование было выполнено в работе (Емельянов, 2015). В следующем разделе приведем основные выкладки и выводы из этой работы.

3.12.2. Построение модели кругового возмущенного движения

Рассмотрим движение материальной точки в центральном поле притяжения с силовой функцией вида

$$U = \frac{\mu}{r} [1 + f(r)],$$

где r — центральное расстояние, μ — гравитационный параметр, а $f(r)$ — некоторая достаточно произвольная безразмерная функция.

Разложим силовую функцию на два слагаемых следующим образом:

$$U = V + R, \quad V = \frac{\mu}{r}, \quad R = \frac{\mu}{r} f(r),$$

где V — силовая функция задачи Кеплера, а R — возмущающая функция. Движение при $R = 0$ называют невозмущенным.

Покажем, что при некотором ограничении на функцию $f(r)$ уравнения с силовой функцией U будут иметь частное решение, соответствующее круговому движению. Рассмотрим подробнее возмущенные движения материальной точки, близкие к круговому.

Попытаемся построить приближенные аналитические модели движения реальных спутников планет при малых эксцентриситетах орбит. Для примера возьмем четыре близких спутника Юпитера.

Поскольку силовая функция зависит только от расстояния, траектория движения лежит в некоторой неизменной плоскости, в которой зададим невращающуюся систему координат Oxy с началом O в притягивающем центре. Тогда дифференциальные уравнения движения можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3} [1 + F(r)], \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3} [1 + F(r)], \quad (3.85)$$

где безразмерная функция $F(r)$ задается соотношением

$$F(r) = f(r) - r f'(r),$$

а штрих здесь означает первую производную по r . При этом $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

В области, в которой выполняется условие $F(r) > -1$, существуют решения дифференциальных уравнений движения, соответствующие круговым движениям точки вокруг притягивающего центра на любом расстоянии r с линейной скоростью V_c , зависящей от r .

Центростремительное ускорение точки, движущейся по окружности радиуса r с линейной скоростью V_c , независимо от причины ускорения определяется выражением

$$\frac{V_c^2}{r}.$$

Причиной движения по окружности является гравитационная сила, создающая ускорение

$$\frac{\mu}{r^2} [1 + F(r)].$$

Приравнивая эти два выражения для ускорения, получим

$$V_c^2 = \frac{\mu}{r}[1 + F(r)]. \quad (3.86)$$

Не нарушая общности задачи, будем предполагать, что в начальный момент времени t_0 точка находится на оси x . Тогда частное решение дифференциальных уравнений для кругового движения в координатах будет иметь вид

$$x = r \cos n_c(t - t_0), \quad y = r \sin n_c(t - t_0), \quad (3.87)$$

где частота обращения точки n_c определится формулой

$$n_c = \frac{V_c}{r}.$$

Это будет однопараметрическое семейство частных решений. В качестве параметра этого семейства можно взять r или n_c .

Поставим задачу найти элементы кеплеровской оскулирующей орбиты как функции времени для кругового движения, рассматривая уравнения (3.85), как уравнения возмущенного кеплеровского движения. Для этого нужно сделать замену переменных искомых функций x, y на элементы кеплеровской оскулирующей орбиты как функции времени и подставить в формулы замены переменных вместо x, y частное решение (3.87). Кроме того, желательно рассмотреть уравнения движения, выраженные в кеплеровских элементах, то есть уравнения Лагранжа, и проверить, удовлетворяют ли полученные выражения для кеплеровских элементов этим уравнениям.

3.12.3. Переход к элементам кеплеровской орбиты

Поскольку мы рассматриваем здесь плоское движение, нам достаточно использовать для описания движения четыре кеплеровских элемента: a — большая полуось, размерность единица длины; e — эксцентриситет, безразмерный; M — средняя аномалия, рад; ω — угловое расстояние перигентра от восходящего узла орбиты, рад.

Наряду с большой полуосью a в качестве параметра орбиты будем рассматривать также параметр n , называемый средним движением и связанный с a законом

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

Размерность среднего движения n — радианы в единицу времени.

Связь прямоугольных координат и компонент скорости с элементами кеплеровской орбиты можно найти в книгах (Дубошин, 1975; Субботин, 1968).

В кеплеровском движении скорость V и расстояние r связаны соотношением

$$V^2 = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right], \quad (3.88)$$

где a — постоянная.

В случае кругового кеплеровского движения при $e = 0$ имеем $r = a$ и

$$V_c^2 = \frac{\mu}{r},$$

что отличается от (3.86). Поэтому оказывается, что частное решение уравнений возмущенного движения (3.85) не может быть представлено элементами кеплеровской оскулирующей орбиты с постоянным нулевым эксцентриситетом. В зависимости от знака $F(r)$ имеется возможность представить возмущенное круговое движение одним из двух способов. Если $F(r) > 0$, то, положим

$$M = 0, \quad r = a(1 - e), \quad \omega = n_c(t - t_0),$$

а элементы a и e будем считать постоянными. Сравнивая (3.86) и (3.88), найдем

$$e = F(r).$$

Тогда оказывается, что материальная точка всегда находится в перигентре орбиты, а линия апсид вращается с угловой скоростью n_c . Истинная v и эксцентрическая E аномалии постоянны и равны нулю. Элемент a найдется по формуле

$$a = \frac{r}{1 - e}.$$

Частота n_c обращения точки вокруг притягивающего центра выразится через элементы кеплеровской оскулирующей орбиты формулой

$$n_c = \sqrt{\frac{\mu}{a^3} \frac{\sqrt{1+e}}{(1-e)^{3/2}}}. \quad (3.89)$$

В случае $-1 < F(r) < 0$ следует положить

$$M = \pi, \quad r = a(1 + e),$$

где

$$e = -F(r).$$

В этом случае оказывается, что точка всегда находится в апоцентре орбиты, а линия апсид вращается с угловой скоростью n_c . Истинная и эксцентрическая аномалии v и E постоянны и равны π . Большая полуось орбиты a и скорость вращения линии апсид найдутся по формулам

$$a = \frac{r}{1+e}, \quad n_c = \sqrt{\frac{\mu}{a^3} \frac{\sqrt{1-e}}{(1+e)^{3/2}}}.$$

Здесь мы нашли выражения для элементов оскулирующей кеплеровской орбиты как функций времени для частных решений уравнений движения, соответствующих круговым орбитам материальной точки вокруг притягивающего центра. Формулы получены при произвольной функции $f(r)$ при условии $F(r) > -1$. Рассмотрим частный случай возмущенного движения.

Пусть движение точки происходит в плоскости экватора осесимметричной планеты под действием ее притяжения. В разложении силовой функции притяжения планеты в ряд по сферическим функциям возьмем только главный член и вторую зональную гармонику. Для больших планет таким образом учитывается динамическое сжатие планеты в движении ее спутника. Тогда имеем

$$R = \frac{1}{2}\mu J_2 r_0^2 \frac{1}{r^3}, \quad f(r) = \frac{1}{2}J_2 r_0^2 \frac{1}{r^2}, \quad F(r) = \frac{3}{2}J_2 r_0^2 \frac{1}{r^2}.$$

Здесь всегда $F(r) > 0$, и круговое движение на любом заданном расстоянии r представлено кеплеровской оскулирующей орбитой с вращающейся линией апсид, а точка находится постоянно в перигентре орбиты. Эксцентриситет и большая полуось такой орбиты определяются по формулам

$$e = \frac{3}{2}J_2 r_0^2 \frac{1}{r^2}, \quad a = \frac{r}{1-e}, \quad (3.90)$$

а скорость вращения линии апсид находится по формуле (3.89).

Попытаемся сравнить построенную здесь модель кругового возмущенного движения спутника с моделью кругового возмущенного движения, рассмотренного в разделе 3.10. В обоих случаях возмущения обусловлены второй зональной гармоникой в разложении силовой функции притяжения планеты. В разделе 3.10 радиус круговой орбиты получался равным возмущенному значению большой

полуоси \bar{a} , а частота обращения спутника была равна возмущенному значению среднего движения \bar{n} . Поэтому в соответствии с моделью кругового движения, построенной здесь выше, мы должны положить

$$\bar{a} = r, \quad \bar{n} = n_c.$$

Выразим теперь левую часть соотношения (3.83), используя выражение (3.89) для n_c и приведенное выше выражение $r = a(1 - e)$ для r . После простых преобразований получим

$$\bar{a}^3 \bar{n}^2 = \mu \left(1 + \frac{3}{2} J_2 r_0^2 \frac{1}{a^2} \right),$$

что в точности воспроизводит соотношение (3.83). Здесь так же, как и в разделе 3.10, мы пренебрегли малыми величинами порядка J_2^2 по сравнению с единицей.

Таким образом, мы доказали полное соответствие двух рассмотренных моделей кругового возмущенного движения спутника.

3.12.4. Оскулирующие кеплеровские элементы орбиты спутника в возмущенном движении при малых эксцентриситетах

В часто используемой модели прецессирующего эллипса при любых значениях эксцентриситета орбиты, включая равное нулю, средняя аномалия изменяется линейно по времени. Это находится в противоречии с выводом о том, что возмущенное движение по круговой орбите возможно только при некотором ненулевом значении эксцентриситета и средней аномалии постоянной и равной нулю. Интересно было бы выяснить, как изменяются элементы кеплеровской оскулирующей орбиты при движении спутника под действием притяжения сжатой планеты. Поскольку точного аналитического решения этой задачи не найдено, анализ можно выполнить только по результатам численного интегрирования.

Рассмотрим снова движение спутника осесимметричной планеты в плоскости экватора. Возьмем уравнения движения (3.85) с силовой функцией

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2} \mu J_2 \frac{r_0^2}{r^3}.$$

Здесь из разложения силовой функции притяжения планеты взяты основной член и вторая зональная гармоника.

Автором было выполнено численное интегрирование этих уравнений (3.85) и получены значения координат x, y и компонент скорости спутника \dot{x}, \dot{y} для ряда моментов времени с постоянным шагом. Затем, независимо от возможных приближенных аналитических решений, в полученном точном решении сделаем замену переменных x, y, \dot{x}, \dot{y} на переменные $a(t), e(t), M(t), \omega(t)$ по формулам кеплеровского движения. Посмотрим, как изменяются эти переменные во времени при различных начальных условиях.

Такие вычисления были сделаны, приводим здесь полученные результаты. Для нашего примера гравитационный параметр μ и начальные условия были взяты приблизительно соответствующими близкому спутнику Юпитера Адрастея. Для Юпитера $\mu = 126712763.92 \text{ км}^3/\text{с}^2$, $J_2 = 0.014736$, $r_0 = 71398.0 \text{ км}$. Начальные условия мы взяли так, что в начальный момент времени координата y равна нулю, а вектор начальной скорости перпендикулярен оси x . Значение начального расстояния x_0 , примерно соответствующее спутнику Юпитера Адрастея, было взято равным $127748.2879217545 \text{ км}$. Вычисления сделаны для ряда значений начальной скорости V . В первом варианте значение скорости было взято соответствующим круговому движению, $V = V_c$ (3.86). В следующих вариантах вычисления были сделаны для $V > V_c$. Интервал времени интегрирования соответствовал двум оборотам спутника вокруг планеты.

Результаты изменения во времени оскулирующих элементов M, ω представлены на рис. 3.2-3.5. Сплошной тонкой линией показаны значения средней аномалии M , штриховой линией — значения ω , а жирной линией — значения суммы $M + \omega$, то есть средней долготы в орбите. На рис. 3.2 видно, что при $V = V_c$ (круговое движение) средняя аномалия M остается равной нулю, а график ω сливается с графиком средней долготы $M + \omega$ и показывает линейное вращение линии апсид с угловой скоростью обращения спутника вокруг планеты. При следующем большем значении начальной скорости на рис. 3.3 видно, что на изменения M и ω накладываются сильные колебания в противофазе друг другу, а средняя долгота по-прежнему линейно возрастает во времени. Для следующего значения начальной скорости на рис. 3.4 наступает критический характер изменения элементов. Колебания элементов M и ω имеют амплитуду до половины оборота. При этом долгота по-прежнему линейно возрастает во времени. Для следующего значения начальной скорости гра-

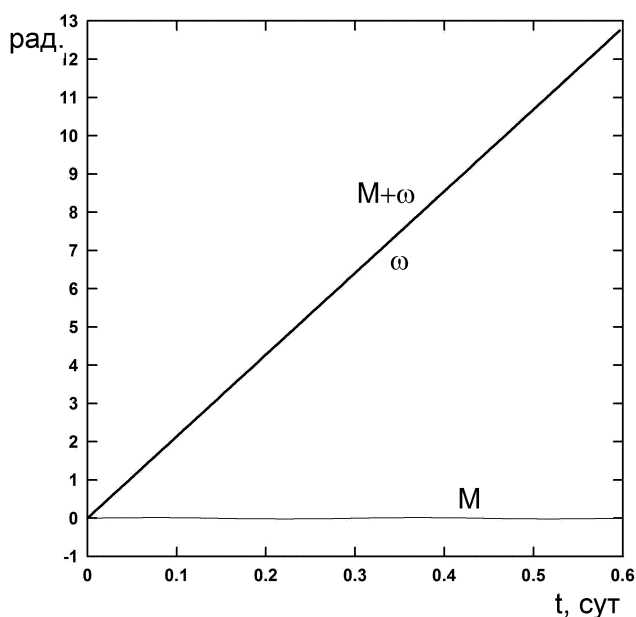


Рис. 3.2. Изменение средней аномалии M , углового расстояния перицентра от узла орбиты ω и $M + \omega$ для начальной скорости кругового движения. Средняя аномалия равна нулю. Линия апсид вращается с угловой скоростью обращения материальной точки вокруг центрального тела.

фики на рис. 3.5 показывают, что M и ω обменялись характерами изменения. Теперь в средней аномалии M на линейное возрастание во времени накладываются колебания, а ω имеет периодическое изменение с небольшим линейным ходом.

Чтобы различать два качественных характера изменения средней аномалии, мы будем называть монотонное возрастание средней аномалии *циркуляционным изменением*. Случаи, когда средняя аномалия испытывает колебания относительно нулевого значения, будем называть *либрационным изменением*.

Из рассмотренных примеров видно, что существует некоторое *сепаратрисное значение* начальной скорости $V = V_s$, разделяющее два различных по характеру семейства решений.

Представляет интерес изменение эксцентриситета в рассмотренных семействах решений. На рис. 3.6 точками на концентрических

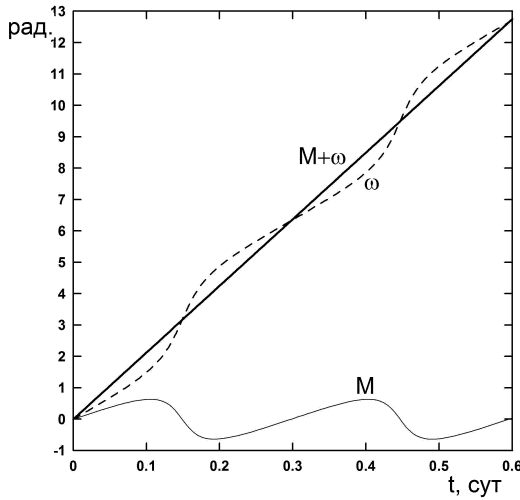


Рис. 3.3. Изменение средней аномалии M , углового расстояния перицентра от узла орбиты ω и $M + \omega$ для начальной скорости, незначительно превышающей скорость кругового движения. Средняя аномалия колеблется относительно нулевого значения с периодом, равным периоду обращения.

около нуля. На рис. 3.3 показаны графики изменения средней аномалии M , углового расстояния перицентра от узла орбиты ω и $M + \omega$ для начальной скорости, незначительно превышающей скорость кругового движения. Средняя аномалия колеблется относительно нулевого значения с периодом, равным периоду обращения.

около нуля. На рис. 3.4 показаны графики изменения эксцентриситета e и средней аномалии M для ряда значений начальной скорости. По оси абсцисс отложены значения $e \cos M$, а по оси ординат значения $e \sin M$. Таким образом, расстояние точки от начала координат $(0, 0)$ на графиках дает нам значение эксцентриситета, а угол между центральным направлением и осью абсцисс — значение средней аномалии M . Решение, соответствующее круговому движению ($V = V_c$), показано на графике точкой, в которой $M = 0$, а эксцентриситет e имеет значение, вычисляемое по формуле (3.90). На рис. 3.6 видны два решения при значениях V , больших V_c , в которых средняя аномалия M испытывает колебания возле нуля, а эксцентриситет изменяется в небольших пределах. Значком «s» показано некоторое частное решение, в котором эксцентриситет изменяется от некоторого максимального значения до нуля, а средняя аномалия колеблется в пределах $(-\pi, \pi)$. На графиках показаны также два решения, в которых средняя аномалия M имеет циркуляционный характер движения, при этом эксцентриситет изменяется в некоторых

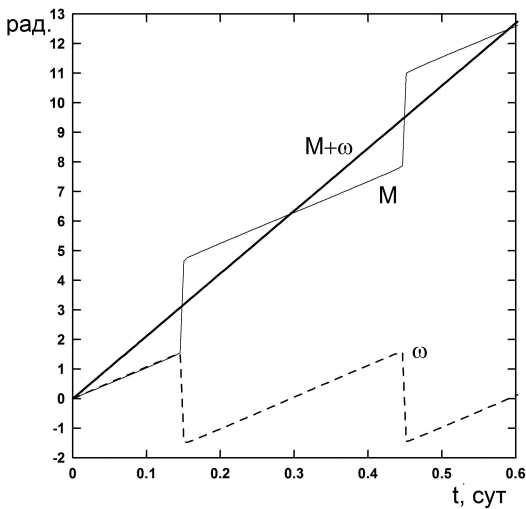


Рис. 3.4. Критический характер изменения средней аномалии M , углового расстояния перигендра от узла орбиты ω и средней аномалии $M + \omega$ при некотором частном значении начальной скорости движения. Средняя аномалия и угловое расстояние перигендра от узла испытывают колебания в противофазе с большой амплитудой.

небольших пределах. Частное решение «s» разделяет два семейства решений с различными свойствами изменений эксцентриситета и средней аномалии. Решение с такими начальными условиями мы называем *сепаратрисным*.

На рис. 3.6 тонкими линиями изображено еще одно семейство изменений элементов. Это семейство получено на основе аналитического решения обобщенной задачи двух неподвижных центров, рассмотренной выше в специальном разделе. На рисунке видно, что это решение совпадает с результатами численного интегрирования по крайней мере с точностью изображения линий на графиках.

Из полученных результатов следует вывод о том, что модель прецессирующего эллипса с постоянным эксцентриситетом как вариант приближенного аналитического решения не отражает качественную картину семейств решений.

В работе (Емельянов, 2015) выведены первые интегралы дифференциальных уравнений движения в рассматриваемой задаче. Они

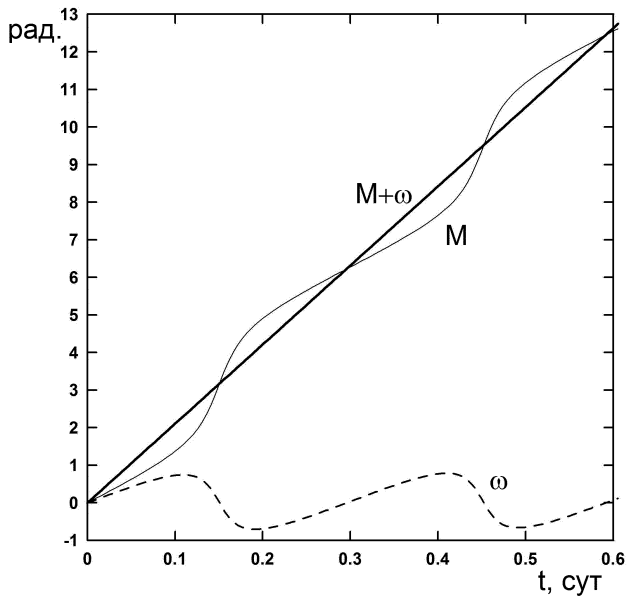


Рис. 3.5. Изменения средней аномалии M , углового расстояния перигицентра от узла орбиты ω и средней долготы $M+\omega$ при начальной скорости, превышающей критическое значение. Средняя аномалия монотонно возрастает со временем.

помогли найти такие начальные условия, которые разделяют два семейства решений с различными свойствами изменений эксцентриситета и средней аномалии, т.е. начальные условия сепаратрисного решения.

В этой цитируемой работе показано, что в сепаратрисном движении расстояние изменяется от некоторого минимального значения, при котором эксцентриситет максимален, до максимального значения, когда эксцентриситет равен нулю.

Отметим, что в сепаратрисном решении в моменты, когда истинная аномалия принимает нулевое значение при нулевом эксцентриситете, средняя аномалия тоже принимает нулевое значение.

На примере движения спутника Юпитера, рассмотренного выше, в работе (Емельянов, 2015) проведено исследование точности представления движения спутника сжатой планеты двумя рассмот-

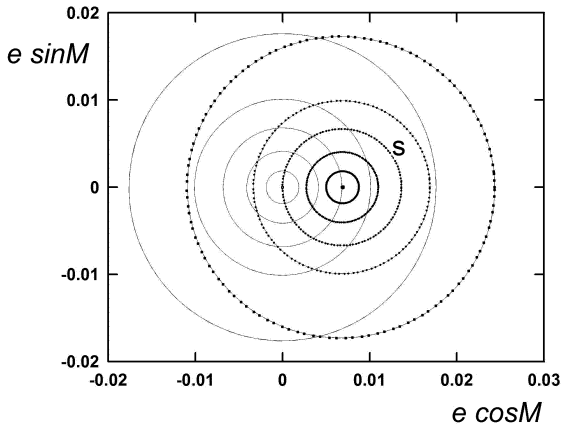


Рис. 3.6. Изменения средней аномалии M и эксцентриситета e в точном решении (точки), в уточненной модели, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров (окружности, проходящие по точкам) и в модели прецессирующего эллипса (концентрические окружности с центром в начале координат).

ренными моделями: моделью прецессирующего кеплеровского эллипса (ПЭ) и моделью, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров, и которую будем обозначать буквами УМ (уточненная модель). В качестве опорных решений было взято семейство решений, полученное численным интегрированием уравнений движения сжатой планеты на интервале времени двух оборотов спутника вокруг планеты. Результаты исследования позволяют сделать следующие выводы. Погрешность представления точного решения моделью решения обобщенной задачи двух неподвижных центров в 120 раз меньше, чем погрешность представления моделью прецессирующего эллипса, для всех вариантов начальных условий. Для обеих моделей погрешность убывает при приближении траектории к круговой.

В работе (Емельянов, 2015) сделана также попытка представить двумя рассмотренными аналитическими моделями ПЭ и УМ эфемериды четырех близких спутников Юпитера, построенные с помощью численного интегрирования уравнений движения на основе имеющихся наблюдений. При построении этих эфемерид учитывались возмущения от притяжения Галилеевых спутников Юпите-

ра, возмущающее действие которых значительно и не учитывается в аналитических моделях. Поскольку рассогласования, вызванные пренебрежением этими возмущающими факторами, превалируют, то рассогласования оказались лишь немного меньше при использовании модели, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров, по сравнению с моделью прецессирующего эллипса. Обе модели с почти одинаковой точностью представляют движение упомянутых выше спутников Юпитера.

3.13. Построенные аналитические теории движения спутников планет

3.13.1. Аналитическая теория движения спутника Нептуна Тритон

Более подробно рассмотрим аналитическую теорию движения спутника Нептуна Тритон, построенную в работе (Emelyanov, Samorodov, 2015). Ко времени выполнения этой работы уже существовали несколько версий модели движения этого спутника, основанных на численном интегрировании дифференциальных уравнений движения. Однако очень выгодное соотношение возмущающих факторов и подходящие свойства орбиты Тритона позволили авторам продемонстрировать преимущества аналитической теории по сравнению с методами численного интегрирования.

Система Тритон – Нептун характеризуется следующими приближенными значениями параметров (Jacobson, Riedel, Taylor, 1991). Экваториальный радиус Нептуна составляет 25225 км, радиус Тритона равен 1350 км. Отношение массы спутника к массе планеты составляет 0.0002089.

Тритон обращается вокруг планеты по почти круговой орбите с периодом 5.87685244989 суток на расстоянии 354700 км. Наклон орбиты к экватору планеты равен примерно 156.66 градусов. Прямое восхождение и склонение северного полюса Нептуна равны приблизительно 299.5 и 43.6 градусов, соответственно. На движение спутника влияет динамическое сжатие Нептуна и гравитационное притяжение Солнца. Притяжение других спутников Нептуна пренебрежимо мало.

Критерием необходимости учета тех или иных возмущений является точность наблюдений. Поэтому был проведен анализ всех возможных возмущений в элементах промежуточной орбиты Три-

тона. Члены разложения возмущающей функции, которые дают вклад в видимые координаты спутника, не превышающие точность наблюдений, были отброшены. Из предшествующих работ других авторов было ясно, что эксцентриситет орбиты Тритона пренебрежимо мал. Поэтому орбита заранее принималась круговой. Сделанные авторами статьи (Emelyanov, Samorodov, 2015) оценки короткопериодических возмущений в элементах круговой кеплеровской орбиты показали, что их учитывать не нужно. Остается необходимым учет только вековых и долгопериодических возмущений первого порядка малости.

Из уравнений Лагранжа (3.39) следует, что долгопериодических возмущений первого порядка в большой полуоси орбиты не будет. Они могут порождаться только членами возмущающей функции, не содержащими среднюю аномалию M , а такие члены при подстановке в правую часть уравнения относительно большой полуоси дают нуль. Поэтому в цитируемой работе (Emelyanov, Samorodov, 2015) большая полуось a принималась постоянной.

Тритон своим притяжением влияет на вращательное движение Нептуна. Поэтому ось вращения планеты прецессирует синхронно с движением плоскости орбиты Тритона вокруг вектора суммарного момента количества движения планеты и спутника. Постоянный угол между этими осями составляет примерно 0.506 градуса (Jacobson, 2009). Углы наклона орбиты относительно оси вращения планеты и относительно вектора суммарного момента количества движения также остаются постоянными. Как показано в работе (Jacobson, 2009), такая модель движения планеты и спутника наиболее близка к действительности. Небольшие отклонения от нее могут вызвать лишь возмущения от притяжения Солнца.

Рассмотрим принятые в этой теории системы координат. Основная система координат связана с неподвижным вектором суммарного момента количества движения планеты и спутника. Ось z системы направлена вдоль этого вектора, ось x — по линии пересечения плоскости xy с плоскостью геоэкуатора так, чтобы ось y была наклонена к плоскости геоэкуатора под острым углом. Будем называть в дальнейшем такую систему *орбитальной системой координат*.

Расположение плоскостей орбит Тритона и Солнца, а также плоскости геоэкуатора в орбитальной системе координат показано на рис. 3.7.

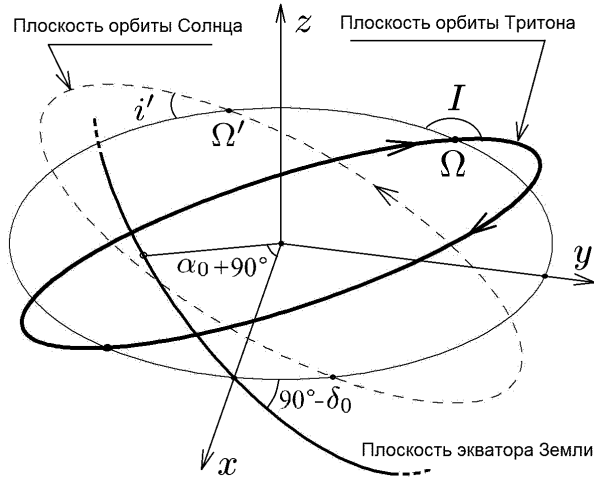


Рис. 3.7. Расположение основных плоскостей в теории движения Тритона.

Обозначим через x_g, y_g, z_g оси планетоцентрической геоэкваatorialной системы координат. Связь этих координат с координатами орбитальной системы задается прямым восхождением α_0 и наклоном δ_0 оси z . Переход к координатам x_g, y_g, z_g осуществляется по формулам

$$\begin{aligned}
 x_g &= -\sin \alpha_0 x - \cos \alpha_0 \sin \delta_0 y + \cos \alpha_0 \cos \delta_0 z, \\
 y_g &= \cos \alpha_0 x - \sin \alpha_0 \sin \delta_0 y + \sin \alpha_0 \cos \delta_0 z, \\
 z_g &= \cos \delta_0 y + \sin \delta_0 z.
 \end{aligned}
 \tag{3.91}$$

Параметры α_0, δ_0 заранее неизвестны. Их можно определить только из наблюдений движения спутника.

Основной фактор несферичности Нептуна — это вторая зональная гармоника разложения силовой функции притяжения. Долгопериодических возмущений первого порядка этот фактор вызвать не может. Ось симметрии Нептуна остается неподвижной в орбитальной системе координат и относительно плоскости орбиты Тритона. В итоге, в элементах кеплеровской оскулирующей орбиты не может быть долгопериодических возмущений, вызванных несферичностью планеты. Если пренебречь возмущениями от притяжения Солнца, то движение спутника должно происходить по плоской

орбите, прецессирующей с постоянной угловой скоростью и постоянным наклоном к основной плоскости.

В рассматриваемой модели радиус орбиты a , наклон I , аргумент широты u , долгота восходящего узла Ω задают положение спутника относительно центра планеты в орбитальной системе координат. Три из этих величин являются функциями времени

$$\begin{aligned} I &= I_0 + \delta I(t), \\ u &= u_0 + \dot{u}(t - t_0) + \delta u(t), \\ \Omega &= \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0) + \delta \Omega(t), \end{aligned} \quad (3.92)$$

где I_0 , u_0 , \dot{u} , Ω_0 , $\dot{\Omega}$ — постоянные, t_0 — некоторая заданная начальная эпоха, а $\delta I(t)$, $\delta u(t)$, $\delta \Omega(t)$ — долгопериодические возмущения соответствующих элементов.

В силу принятых упрощений формулы кеплеровского движения вырождаются в следующие простые соотношения

$$\begin{aligned} x &= a (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos I), \\ y &= a (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos I), \\ z &= a \sin u \sin I. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Для построения модели движения Тритона при сделанных допущениях остается определить долгопериодические возмущения $\delta I(t)$, $\delta u(t)$, $\delta \Omega(t)$, обусловленные притяжением Солнца.

Разложение возмущающей функции R' было взято из книги (Мюррей, Дермотт, 2010). Это разложение представляет собой ряд по степеням отношения a/a' , где a' — большая полуось орбиты Солнца вокруг планеты. Ряд начинается с члена, содержащего $(a/a')^2$.

Сделаны дополнительные обоснованные упрощения. Так как большая полуось орбиты Тритона $a = 354700$ км, а среднее расстояние Нептуна от Солнца составляет 4504449760 км, то $a/a' = 0.000078757455$.

В теории движения Тритона пренебрегаем более высокими степенями этого отношения и оставляем в разложении только члены с $(a/a')^2$. Кроме того предполагаем, что Солнце движется по круговой орбите в неизменной плоскости. Обозначим через i' и Ω' наклон и долготу восходящего узла орбиты Солнца в орбитальной системе

Таблица 3.2. Параметры модели движения Солнца по средним элементам из работы (Simon et al., 1994) и определенные с помощью эфемерид INPOP10.

Параметр	По средним элементам	По эфемериде INPOP 10
a' , км	4504449760	4499478064
i' , град	27.923658	27.923678
Ω' , град	200.788305	200.788181
u'_0 , град	258.329018	258.727508
\dot{u}' , град/сут	0.00598182615	0.00598084154

координат. Полагаем, что i' и Ω' являются известными постоянными величинами, а аргумент широты Солнца u' есть известная линейная функция времени $u' = u'_0 + \dot{u}'(t - t_S)$, где t_S — некоторая заданная эпоха. Величины i' и Ω' , u'_0 , \dot{u}' можно определить, используя средние элементы орбиты Нептуна, которые можно взять, например, из работы (Simon et al., 1994). Однако в работе (Emelyanov, Samogodov, 2015) параметры модели движения Солнца были определены методом наименьших квадратов по гелиоцентрическим координатам Солнца, вычисленным на ряд моментов времени с шагом 10 суток на интервале времени с 1800 по 2200 год с помощью эфемерид INPOP10 (Fienga et al., 2011). Значения параметров даны в табл. 3.2. Для начальной эпохи t_S параметра u'_0 взят момент JD=2451545.0 (ТТ).

В итоге сделанных упрощений возмущающая функция принимает вид

$$R' = \frac{Gm'}{a'} \left(\frac{a}{a'}\right)^2 \sum_{k=0}^2 (2 - \delta_{0,k}) \frac{(2-k)!}{(2+k)!} \sum_{p'=0}^2 F_{2k1}(I) F_{2kp'}(i') \times \\ \times \cos[(2 - 2p')u' + k(\Omega' - \Omega)],$$

где m' — масса Солнца, символ Кронекера $\delta_{0,k} = 1$ при $k = 0$ и $\delta_{0,k} = 0$ при $k \neq 0$, а штрих у знака второй суммы означает, что пропущено слагаемое при $k = 0$ и $p' = 1$, соответствующее вековому члену. Через $F_{2k1}(I)$ обозначены функции наклона. В результате

выражение содержит 8 слагаемых, два из которых равны между собой, поскольку $F_{200}(i') = F_{202}(i')$. Необходимые функции наклона можно взять из книги (Каула, 1970).

Уравнения Лагранжа относительно $\delta I(t)$, $\delta u(t)$, $\delta \Omega(t)$ решались методом малого параметра. Определялись возмущения первого порядка относительно малого параметра $(m'/m)(a/a')^3$. Кроме того, принималось во внимание то, что вековые возмущения от второй зональной гармоники с коэффициентом J_2 в элементах u , Ω зависят от элемента $I(t)$, который подвержен долгопериодическим возмущениям. Здесь фактически определялись возмущения второго порядка в методе малого параметра Пуанкаре по способу Пуассона, как предписано выше. Эти возмущения содержатся в общих формулах (3.60), (3.64). Таким образом, учитывались также комбинированные возмущения, пропорциональные $(m'/m)(a/a')^3 J_2$.

Долгопериодические возмущения от Солнца определялись сначала в аналитическом виде. Затем в полученные формулы были подставлены значения приведенных выше параметров движения Солнца, а также найденные из наблюдений значения параметров движения Тритона. В итоге оказалось, что возмущения в элементах на заданный момент времени можно вычислять по следующим простым формулам:

$$\begin{aligned}\delta I(t) &= \sum_{i=1}^7 K_I^{(i)} \cos \left[k_1^{(i)} u' + k_2^{(i)} (\Omega' - \bar{\Omega}) \right], \\ \delta u(t) &= \sum_{i=1}^7 K_u^{(i)} \sin \left[k_1^{(i)} u' + k_2^{(i)} (\Omega' - \bar{\Omega}) \right], \\ \delta \Omega(t) &= \sum_{i=1}^7 K_\Omega^{(i)} \sin \left[k_1^{(i)} u' + k_2^{(i)} (\Omega' - \bar{\Omega}) \right],\end{aligned}\quad (3.94)$$

где

$$u' = u'_0 + \dot{u}'(t - t_S), \quad \bar{\Omega} = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0). \quad (3.95)$$

Входящие в эти формулы коэффициенты даны в Табл. 3.3.

Графики изменений долгопериодических возмущений от притяжения Солнца в элементах орбиты Тритона I , u , Ω на интервале времени с 1800 по 2200 год показаны на рис. 3.8.

В итоге была построена аналитическая теории движения спутника Нептуна Тритон. Произвольными постоянными теории были параметры I_0 , u_0 , \dot{u} , Ω_0 , $\dot{\Omega}$. Параметры теории были определены в

Таблица 3.3. Коэффициенты в формулах для долгопериодических возмущений, обусловленных притяжением Солнца.

i	$K_I^{(i)}$, град	$K_u^{(i)}$, град	$K_\Omega^{(i)}$, град	$k_1^{(i)}$	$k_2^{(i)}$
1	0.0	-0.00012327	0.00063339	2	0
2	0.00096486	-0.00279450	-0.00178905	2	1
3	0.00664661	-0.04335622	-0.01560091	0	1
4	0.00004687	-0.00017215	-0.00009186	-2	1
5	0.00095976	-0.00233686	-0.00218071	2	2
6	-0.00037627	0.00096231	-0.00037627	0	2
7	-0.00000225	0.00000730	0.00000536	-2	2

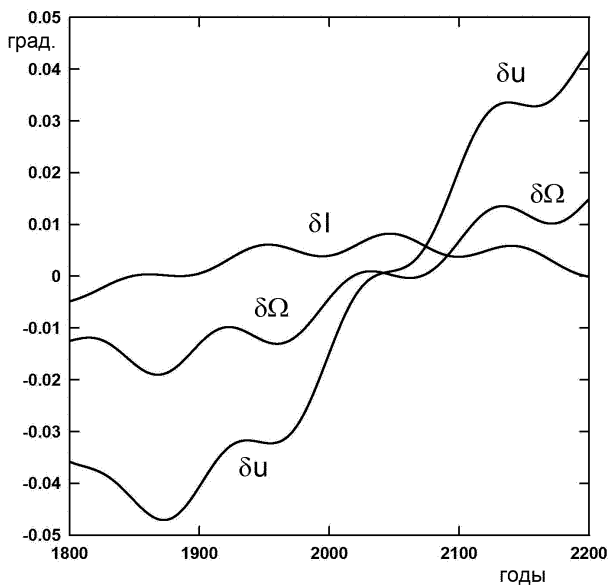


Рис. 3.8. Долгопериодические возмущения от притяжения Солнца в элементах орбиты Тритона.

работе (Emelyanov, Samorodov, 2015) по всем имеющимся наблюдениям, выполненным на интервале времени 165 лет с 1847 по 2012 год. При этом в число определяемых параметров были включены

также геоэквиаториальные координаты оси z орбитальной системы координат α_0, δ_0 . Эфемерида Тритона, основанная на рассмотренной аналитической теории, незначительно отличается от эфемерид других авторов. Отличия обусловлены разным составом использованных наблюдений.

Таким образом было показано преимущество аналитической теории по сравнению с моделями движения, основанными на численном интегрировании дифференциальных уравнений движения.

Более подробно с рассмотренной здесь теорией можно познакомиться в публикации (Emelyanov, Samorodov, 2015).

3.13.2. Модели прецессирующих эллипсов для близких спутников Юпитера

Четыре близких спутника Юпитера движутся вокруг планеты почти в плоскости экватора и по почти круговым орбитам. В порядке возрастания больших полуосей орбит это спутники Метис, Адрастея, Амальтея и Теба. В возмущениях кеплеровских орбит спутников превалирует влияние сжатия Юпитера. Значительно меньшие возмущения оказывает притяжение массивных Галилеевых спутников. Действие притяжения Солнца весьма мало. В работе (Jacobson, 1997) сообщалось о построении теории движения близких спутников Юпитера. Применены модели прецессирующих эллипсов с учетом вековых возмущений от несферичности Юпитера, притяжения Галилеевых спутников и Солнца. Скорости прецессии $\dot{\omega}, \dot{\Omega}$ определены по теории возмущений. Исследователи из Томского государственного университета (ТГУ) В. А. Авдюшев и М. А. Баньщикова (Авдюшев, Баньщикова, 2008) построили новую модель движения четырех близких спутников Юпитера. Уравнения движения решались методом численного интегрирования. Параметры движения уточнены на основе всех имевшихся к 2008 году наземных наблюдений. В работе показано, что в задаче имеется несколько решений, примерно одинаково хорошо представляющих наблюдения. Выбрано одно из решений. На его основе построены эфемериды на интервале времени с 1954 по 2034 год. Эфемериды представлены в форме разложений прямоугольных планетоцентрических координат спутников в ряды по полиномам Чебышева.

В современной работе (Jacobson, 2013) объявлено о создании эфемерид Галилеевых и близких спутников Юпитера с помощью численного интегрирования уравнений движения на основе всех

имеющихся наземных наблюдений и наблюдений с помощью космических аппаратов. Эти эфемериды спутников доступны через Интернет в службе Данные Солнечной системы JPL (Jet Propulsion Laboratory, NASA, USA). Служба описана в статье (Giorgini et al., 1997).

В работе автора (Емельянов, 2015) сделано представление эфемерид JPL (Jacobson, 2013) и эфемерид (Авдюшев, Баныщикова, 2008) двумя моделями: прецессирующим эллипсом (ПЭ) и моделью, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров и учитывающей периодические возмущения, которую мы обозначили буквами УМ (уточненная модель). Эфемериды (Авдюшев, Баныщикова, 2008), представленные в форме разложений прямоугольных планетоцентрических координат спутников в ряды по полиномам Чебышева, были переданы автору работы (Емельянов, 2015).

С помощью каждого из двух вариантов эфемерид были составлены таблицы прямоугольных планетоцентрических координат четырех близких спутников Юпитера на интервале времени с 1 августа 2014 года по 1 января 2016 года с шагом 0.1 суток. Эфемериды JPL были получены через Интернет 3 апреля 2014 года. По этим данным методом дифференциального уточнения были найдены параметры каждой из двух моделей. В число определяемых параметров были включены также геоэквиаториальные координаты α_0 , δ_0 полюса Юпитера. Эти координаты фактически определяют ту ось, вокруг которой прецессирует плоскость орбиты с постоянным наклоном к экватору планеты. Для каждого из четырех спутников отдельно определялись α_0 , δ_0 . При этом геоэквиатор считался неподвижным и заданным на эпоху J2000.

Следует отметить, что в модели прецессирующего эллипса фактически учитываются только вековые возмущения. В модели, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров, учитываются также короткопериодические возмущения первого порядка, обусловленные второй зональной гармоникой разложения силовой функции притяжения планеты. В опорных моделях JPL и ТГУ учитываются также и другие возмущения от несферичности Юпитера, от притяжения Галилеевых спутников и Солнца. Поэтому рассогласования аналитических моделей с результатами численного интегрирования обусловлены различиями в учитываемых возмущающих факторах.

Таблица 3.4. Согласование представления эфемерид JPL (Jacobson, 2013) и ТГУ (Авдюшев, Баныщикова, 2008) двумя приближенными моделями: ПЭ — модель прецессирующего эллипса, УМ — уточненная модель, основанная на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров.

Спутник	a км	JPL		ТГУ	
		$\bar{\sigma}$ (ПЭ) км	$\bar{\sigma}$ (УМ) км	$\bar{\sigma}$ (ПЭ) км	$\bar{\sigma}$ (УМ) км
Метис	127978.9	0.49	0.47	0.64	0.48
Адрастея	128979.9	0.49	0.48	1.87	0.58
Амальтея	181365.5	2.82	2.71	2.89	2.73
Теба	221888.2	12.98	12.55	12.98	12.62

В результате для четырех спутников на основе каждого из двух источников эфемерид, JPL и ТГУ, по двум моделям движения были определены 11 параметров: девять параметров модели прецессирующего эллипса \bar{a} , \bar{n} , e , i , M_0 , ω_0 , $\dot{\omega}$, Ω_0 , $\dot{\Omega}$ и параметры α_0 , δ_0 . В процессе уточнения параметров определялась среднеквадратичная величина $\bar{\sigma}$ отклонений модельных координат от опорных, вычисленных из эфемерид. Отклонение для каждого момента времени эфемерид вычислялось как расстояние между модельными и эфемеридными положениями и измерялось в километрах.

Величина $\bar{\sigma}$ показывает точность согласования аналитической модели с опорной моделью, основанной на численном интегрировании. Полученные значения для спутников даны в табл. 3.4. В этой таблице приводятся также значения большой полуоси a , полученные для модели прецессирующего эллипса из эфемерид JPL.

Результаты, данные в табл. 3.4, показывают, что рассогласование аналитических моделей с эфемеридами тем больше, чем больше большая полуось орбиты. Это легко объяснить тем, что при увеличении большой полуоси орбиты близкого спутника движение происходит все ближе к орбитам Галилеевых спутников, возмущающее действие которых значительно и не учитывается в аналитических моделях. Поскольку рассогласования, вызванные различиями в учитываемых возмущающих факторах, превалируют, величина $\bar{\sigma}$ лишь немного меньше в модели, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров, по сравнению с моделью

прецессирующего эллипса. Обе модели с почти одинаковой точностью представляют движение близких спутников Юпитера.

Чтобы оценить найденные рассогласования моделей в масштабе геоцентрических угловых координат спутников следует учитывать, что 1 секунда дуги соответствует 3800 км на среднем расстоянии Юпитера от Земли. Рассогласование в 12 км на орбите спутника соответствует разности геоцентрических угловых координат в 0.003 секунды дуги. Такая разность по крайней мере в 50 раз меньше точности имеющихся наземных наблюдений близких спутников Юпитера.

Параметры прецессирующих эллипсов, которые были определены по эфемеридам JPL и ТГУ, можно использовать для вычисления эфемерид по простым формулам кеплеровского движения на любой момент времени. Для этого в табл. 3.5, 3.6 мы приводим найденные значения с необходимым числом значащих цифр для вычисления эфемерид. Параметры различаются для разных моделей и разных опорных эфемерид, однако каждый набор параметров является самосогласованным.

Координаты полюса Юпитера α_0, δ_0 , полученные по эфемеридам JPL, оказались почти одинаковыми для четырех спутников и двух моделей, а именно $\alpha_0 = 268.057$ град, $\delta_0 = 64.497$ град. По эфемеридам ТГУ координаты полюса Юпитера получились следующими: $\alpha_0 = 268.049$ град, $\delta_0 = 64.489$ град.

В работе (Емельянов, 2015) показано, что для спутников Метис и Адрастея средняя аномалия имеет либрационный характер изменения во времени. Изменение средней аномалии спутника Теба имеет циркуляционный характер. Для спутника Амальтея изменение эксцентриситета и средней аномалии почти совпадает с сепаратрисным решением уравнений движения.

3.13.3. Специальные аналитические теории главных спутников больших планет, учитывающие взаимное притяжение спутников

Взаимное притяжение главных спутников в известных аналитических теориях спутников учитывалось специальными методами теории возмущений. Не вдаваясь в подробности этих методов, кратко опишем, что было сделано.

Для Галиевых спутников Юпитера английским исследователем Sampson R.A. в 1921 году (Sampson, 1921) был предложен некото-

Таблица 3.5. Параметры прецессирующего эллипса для спутников Юпитера Метис и Адрастея, полученные по эфемеридам JPL (Jacobson, 2013) и ТГУ (Авдюшев, Баньщикова, 2008). Начальная эпоха элементов (шкала TT) 0 часов 1 августа 2014 г. (MJD=56870.0).

Параметр	JPL	ТГУ
Метис		
\bar{a} , км	127978.860	127978.870
e	0.000504857	0.001274382
i , рад	0.000213446	0.000348744
M_0 , рад	3.813296566	0.527952271
ω_0 , рад	0.169346010	0.312420298
Ω_0 , рад	5.753821299	2.603426115
\bar{n} , рад/сут	21.164087429	21.164083095
$\dot{\omega}$, рад/сут	0.300596369	0.300600575
$\dot{\Omega}$, рад/сут	-0.149768271	-0.149770172
Адрастея		
\bar{a} , км	128979.903	128979.840
e	0.000180935	0.005415531
i , рад	0.000225599	0.007701531
M_0 , рад	2.545515933	1.724761655
ω_0 , рад	3.034354065	2.395080996
Ω_0 , рад	5.712371588	0.919577232
\bar{n} , рад/сут	20.919404709	20.919415107
$\dot{\omega}$, рад/сут	0.292385013	0.292382363
$\dot{\Omega}$, рад/сут	-0.145685219	-0.145690358

рый эвристический метод построения аналитической теории движения спутников. Система координат принималась цилиндрической, основная плоскость — плоскость экватора Юпитера. Решение дифференциальных уравнений движения четырех Галилеевых спутников находилось в виде рядов Пуассона с полиномиальными и тригонометрическими аргументами. Применялись разложения в ряды по степеням малых параметров, малость которых обеспечива-

Таблица 3.6. Параметры прецессирующих эллипсов близких спутников Юпитера Амальтея и Теба, полученные по эфемеридам JPL (Jacobson, 2013) и ТГУ (Авдюшев, Баныщикова, 2008). Начальная эпоха элементов (шкала ТТ) 0 часов 1 августа 2014 г. (MJD=56870.0).

Параметр	JPL	ТГУ
Амальтея		
\bar{a} , км	181365.552	181365.561
e	0.003426003	0.004079207
i , рад	0.006565694	0.005659253
M_0 , рад	3.839867712	4.038848183
ω_0 , рад	4.598920930	4.476760700
Ω_0 , рад	4.630652745	4.556545020
\bar{n} , рад/сут	12.568437183	12.568436283
$\dot{\omega}$, рад/сут	0.087582088	0.087583381
$\dot{\Omega}$, рад/сут	-0.043716407	-0.043716439
Теба		
\bar{a} , км	221888.173	221888.157
e	0.017531954	0.016117934
i , рад	0.018706263	0.019443802
M_0 , рад	1.526572934	1.603754238
ω_0 , рад	4.294075517	4.238345375
Ω_0 , рад	4.125853541	4.115550534
\bar{n} , рад/сут	9.293210969	9.293215547
$\dot{\omega}$, рад/сут	0.043193094	0.043188124
$\dot{\Omega}$, рад/сут	-0.021577028	-0.021574888

лась малыми эксцентриситетами и наклонами орбит. Впоследствии эта теория была развита в работе (Lieske, 1977) с применением методов компьютерной алгебры. Формулы этой теории содержали 49 свободных параметров, которые уточнялись из всех имевшихся тогда наблюдений. В работе (Arlot, 1982) параметры теории были заново переуточнены на основе всех предыдущих и новых к тому времени наблюдений.

Для главных спутников Сатурна аналитические теории строились методами теории возмущений с использованием разложений по степеням различных малых параметров (Harper, Taylor, 1993). Заслуживает особого внимания модель движения главных спутников Сатурна построенная в работе (Vienne, Duriez, 1995). В этой работе основные частоты тригонометрических рядов, представляющих возмущения элементов промежуточной орбиты спутников, находились методами аналитической теории, а амплитуды уточнялись по модели движения, построенной методом численного интегрирования уравнений движения. Теория получила название «синтетической».

Для главных спутников Урана аналитическая теория была построена методом вековых возмущений Лагранжа – Лапласа. Этот метод описан в книгах (Дубошин, 1975; Субботин, 1968), а построенная теория движения спутников – в работе (Laskar, Jacobson, 1987).

3.14. Влияние приливов в вязко-упругих телах планеты и спутника на его орбитальное движение

3.14.1. Постановка задачи о влиянии приливов

Задача о влиянии приливов в вязко-упругих телах планеты и спутника на его орбитальное движение в последнее время стала весьма актуальной. Точность наблюдений главных спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна возросла. С течением времени естественным образом увеличился интервал времени наблюдений. Этот прогресс стал основанием для попыток определения из наблюдений физических параметров планет и спутников, от которых зависят силы приливного трения. Приливной горб движется в небесном теле, создавая момент сил, действующих на спутник. Движение спутника зависит от параметров приливных деформаций. Поэтому можно решать обратную задачу: определять эти параметры по наблюдениям движения спутника. Сила пропорциональна отношению k_2/Q , где k_2 – число Лява, характеризующее деформируемость тела, а Q – величина, называемая добротностью, характеризует вязкость вещества. Из уравнений движения следует, что по наблюдениям нельзя получить отдельно k_2 и Q , а только их отношение k_2/Q .

В работе (Laine et al., 2009) по всем имеющимся к тому времени астрометрическим наблюдениям Галилеевых спутников Юпитера были определены отношения k_2/Q для Юпитера и для его спутника Ио. Для Юпитера получено $k_2/Q = (1.102 \pm 0.203) \cdot 10^{-5}$, для Ио $k_2/Q = 0.015 \pm 0.003$.

В работе (Laine et al., 2012) также на основе астрометрических наблюдений получено новое значение параметра вязкости Сатурна которое примерно в 10 раз больше, чем обычно принимаемое значение, установленное из теоретических предпосылок. Публикуется следующее значение: $k_2/Q = (2.3 \pm 0.7) \cdot 10^{-4}$.

В этой же работе (Laine et al., 2012) получено неожиданно высокое значение векового ускорения спутника Мимас, обусловленное приливами в теле спутника.

При определении параметров из наблюдений обычно выполняют численное интегрирование уравнений движения в прямоугольных координатах. Поэтому необходимо выражение для возмущающего ускорения, обусловленного приливными силами. Такие уравнения были получены уже давно несколькими авторами. Ниже цитируются соответствующие работы.

Эволюцию орбиты спутника под действием приливных сил удобно изучать по изменению двух ключевых параметров: большой полуоси a и эксцентриситету e орбиты. Изменения именно этих двух параметров определяют судьбу спутника: он либо падает на планету, либо удаляется от нее. С этой целью в ряде работ выведены дифференциальные уравнения относительно этих элементов. Пренебрегая малыми короткопериодическими возмущениями, получают два уравнения вида

$$\frac{da}{dt} = \frac{k_2}{Q} A_a(a, e), \quad \frac{de}{dt} = \frac{k_2}{Q} A_e(a, e).$$

Такие уравнения составляются отдельно для задачи учета приливов в теле планеты и задачи учета приливов в теле спутника. В двух этих задачах уравнения получаются различными. Однако можно совместно учесть оба эффекта в одной системе уравнений.

Дифференциальные уравнения относительно элементов кеплеровской орбиты в рассматриваемой задаче встречаются в ранее опубликованных работах. В частности, они приводятся в работе (Laine et al., 2012) со ссылкой на источник формул (Kaula, 1964) в

случае приливов в теле планеты и на источник (Peale, Cassen, 1978) в случае приливов в теле спутника.

В цитированных здесь работах уравнения относительно элементов орбиты выводятся отдельно от уравнений в прямоугольных координатах, используя выражения для правых частей уравнений, как функций от a и e .

С целью развития методов, выяснения возможностей определения параметров приливного трения из наблюдений и изучения эволюции орбит было бы интересно сравнить между собой решение уравнений в координатах и решение уравнений в элементах кеплеровской орбиты. Именно такая цель была поставлена в работе (Emelyanov, 2018). В этой работе заново выведены дифференциальные уравнения, описывающие изменения большой полуоси и эксцентриситета орбиты спутника, обусловленные приливами в вязко-упругих телах планеты и спутника. Рассмотрим здесь выводы и результаты, полученные в работе (Emelyanov, 2018).

3.14.2. Уравнения в прямоугольных координатах

Возьмем дифференциальные уравнения движения спутника планеты в прямоугольных планетоцентрических координатах, используя результаты ряда работ.

Уравнения, необходимые для поставленной задачи, были выведены в работе (Mignard, 1979). Рассматривалось влияние приливов в вязко-упругом теле Земли на движение Луны. Воспользуемся формулой (5) из этой работы. Далее рассматриваемая теория была развита в работе (Mignard, 1980).

Позже задача о влиянии приливов в теле Марса на движение Фобоса была решена в работе (Lainey, Dehant, Patzold, 2007). Авторы этой работы воспроизвели и использовали уравнения движения спутника в прямоугольных координатах со ссылкой на работу (Mignard, 1980). Соответствующая идентичная формула в работе (Lainey, Dehant, Patzold, 2007) имеет номер (3).

Авторы работы (Lainey et al., 2009a) обобщили формулы для возмущающего ускорения со стороны приливов в теле планеты на случай влияния приливов в вязко-упругом теле спутника на его орбитальное движение. Подробного вывода сделано не было. Формулы просто были объявлены и приведены в Дополнительном материале к этой работе без объяснений (Lainey et al., 2009b). Это формулы с номерами (1) и (2). Они имеют общий вид для влияния

приливов в теле планеты и для влияния приливов в теле спутника. Позже эти же уравнения в идентичном виде были даны также в работе (Laineу et al., 2012). Там они также имеют номера (1) и (2).

Воспользуемся общим видом уравнений движения спутника планеты, приведенным в работах (Laineу et al., 2009) и (Laineу et al., 2012). Введем пару упрощений, оставляя в формулах только члены, принципиально важные для дальнейшего анализа. Во-первых, оставим в уравнениях только главный член, соответствующий притяжению планеты, как материальной точки, и члены, описывающие рассматриваемые приливные эффекты. Во-вторых, пренебрежем массой спутника по сравнению с массой планеты. Это предположение близко к реальности: массы спутников действительно малы по сравнению с массой планеты. Для фигурирующих в формулах величин будем использовать иные обозначения, чем в цитируемых здесь работах. Уравнения движения, как и в цитированных выше работах, запишем относительно прямоугольных координат спутника в планетоцентрической системе. Для удобства рассмотрения запишем уравнения отдельно для двух задач: задача о движении спутника под действием приливов в вязко-упругом теле планеты и задача о движении спутника под действием приливов в вязко-упругом теле самого спутника.

В выводимых далее формулах мы используем следующие обозначения.

R — радиус планеты,

R_s — радиус спутника,

G_M — гравитационный параметр планеты,

G_s — гравитационный параметр спутника,

a — большая полуось орбиты спутника,

n — среднее движение спутника,

k_2 — число Лява планеты (безразмерный),

$k_2^{(s)}$ — число Лява спутника,

Δt_p — временное запаздывание прилива в теле планеты,

Δt_s — временное запаздывание прилива в теле спутника,

Q_p — параметр вязкости планеты,

Q_s — параметр вязкости спутника,

Ω — вектор угловой скорости вращения планеты,

Ω_s — вектор угловой скорости вращения спутника.

Величины Δt_p , Δt_s считаются положительными. Для спутника будем задавать вектор положения \mathbf{r} и вектор скорости \mathbf{v} .

Согласно общим формулам (1) и (2) работ (Lainey et al., 2009) и (Lainey et al., 2012) при сделанных допущениях и в принятых здесь обозначениях дифференциальные уравнения движения спутника имеют вид:

– в случае приливов в теле планеты

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G_M}{r^3} \mathbf{r} - \frac{3k_2 G_s R^5}{r^8} \Delta t_p \left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{v} \right], \quad (3.96)$$

– в случае приливов в теле спутника

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G_M}{r^3} \mathbf{r} - \frac{3k_2^{(s)} G_M R_s^5}{r^8} \frac{G_M}{G_s} \Delta t_s \left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}_s] + \mathbf{v} \right]. \quad (3.97)$$

Здесь выражения $[\mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}]$, $[\mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}_s]$ представляют собой векторные произведения, а выражение $(\mathbf{r} \mathbf{v})$ – скалярное произведение векторов.

Для упрощения дальнейшего рассмотрения введем еще несколько новых обозначений и слегка преобразуем полученные уравнения. Введем в рассмотрение некоторую произвольную величину \bar{a} , значение которой для удобства вычислений лучше выбрать равным некоторому среднему значению большой полуоси орбиты спутника. Воспользуемся известным соотношением для элементов кеплеровской орбиты

$$n^2 a^3 = G_M.$$

Введем безразмерные постоянные коэффициенты K_p , K_s с помощью выражений

$$K_p = \frac{3R^5}{\bar{a}^5} \frac{G_s}{G_M}, \quad (3.98)$$

$$K_s = \frac{3R_s^5}{\bar{a}^5} \frac{G_M}{G_s}. \quad (3.99)$$

Влияние вязко-упругих приливов на орбитальное движение спутника определяется свойством деформируемости тела и свойством запаздывания приливной волны. Для тела планеты и тела спутника влияние характеризуется коэффициентами

$$K_2^{(p)} = k_2 \Delta t_p, \quad (3.100)$$

$$K_2^{(s)} = k_2^{(s)} \Delta t_s, \quad (3.101)$$

соответственно.

Теперь с новыми обозначениями уравнения примут вид:
 – в случае приливов в теле планеты

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G_M}{r^3}\mathbf{r} - K_2^{(p)}K_p\frac{\bar{a}^5a^3}{r^8}n^2\left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{v}\right], \quad (3.102)$$

– в случае приливов в теле спутника

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G_M}{r^3}\mathbf{r} - K_2^{(s)}K_s\frac{\bar{a}^5a^3}{r^8}n^2\left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}_s] + \mathbf{v}\right]. \quad (3.103)$$

В цитируемых выше работах объяснено, как времена запаздывания приливов связаны с параметрами вязкости. Согласно этим объяснениям имеем

$$\Delta t_p = \frac{1}{2Q_p(|\boldsymbol{\Omega}| - n)}, \quad \Delta t_s = \frac{1}{Q_s n}. \quad (3.104)$$

При этом считается, что планета вращается быстрее, чем спутник по орбите. В этом случае $\Delta t_p > 0$.

В работе (Lainey et al., 2012) отмечено, что времена запаздывания приливов Δt_p , Δt_s зависят от так называемой приливной частоты, т.е. скорости пробегания приливной волны по поверхности. Здесь возможны два варианта предположений. Первый — считается, что на бесконечном интервале времени постоянными остаются Δt_p , Δt_s . Во втором варианте предполагаются постоянными коэффициенты k_2/Q_p , $k_2^{(s)}/Q_s$. Однако рассматривая эволюцию орбит на умеренных интервалах времени, все эти величины можно считать постоянными.

В наших дальнейших аналитических выкладках мы не фиксируем, как коэффициенты $K_2^{(p)}$, $K_2^{(s)}$ зависят от скорости пробегания приливной волны.

Заметим, что в некоторых работах вместо параметра вязкости Q используется параметр $\arctan Q$ или $\arcsin Q$. Такая замена параметров в данном исследовании не существенна.

3.14.3. Решение уравнений в прямоугольных координатах

Решение полученных уравнений на достаточно большом интервале времени может дать нам представление об изменениях параметров орбиты спутника, вызванных приливами в вязко-упругих

телах планеты и спутника. Это именно то, что интересует исследователей в рассматриваемой задаче. Попытаемся получить искомые свойства движения спутников. Точное аналитическое решение в данном случае невозможно. Поэтому приходится применять методы численного интегрирования.

Мы выполнили интегрирование дифференциальных уравнений движения (3.102), (3.103) на некотором достаточно большом интервале времени, выдавая планетоцентрические координаты и вектор скорости спутника на ряд моментов времени, распределенных с постоянным шагом. На каждый такой момент мы вычисляли оскулирующие элементы кеплеровской орбиты. Вычисления выполнялись для частного случая, когда коэффициенты $K_2^{(p)}$, $K_2^{(s)}$ считаются постоянными. Изменение элементов во времени было главной целью проводимых вычислений. Нас интересует прежде всего изменение большой полуоси a и эксцентриситета e .

Орбиты реальных главных спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна имеют небольшие наклоны к плоскостям экваторов планет. Рассмотрим здесь некоторый гипотетический случай, близкий к реальному, когда движение спутника происходит в неизменной плоскости, а оси вращений планеты и спутника перпендикулярны этой плоскости. Тогда векторы $[\mathbf{r} \ \boldsymbol{\Omega}]$, $[\mathbf{r} \ \boldsymbol{\Omega}_s]$ лежат в плоскости движения. В итоге, все действующие силы лежат в одной плоскости, и движение спутника действительно будет плоским. Поэтому при решении дифференциальных уравнений (3.102), (3.103) можно ограничиться моделированием двумерного движения.

При проведении вычислений необходимо решить, как выбирать значение угловой скорости вращения спутника $\boldsymbol{\Omega}_s$. Полной ясности в этом вопросе нет. В данном исследовании мы не изучаем вращение спутника. Остается принять ту или иную гипотезу. Возможны два варианта. В первой гипотезе мы предполагаем, что в результате воздействия планеты на приливную волну в вязко-упругом теле спутника он постоянно сохраняет режим синхронного вращения, в котором угловая скорость равна среднему движению орбитального движения. Как видно из описанных ниже исследований, именно такая гипотеза неявно принимается в разных работах по рассматриваемой задаче. Вторая гипотеза состоит в предположении, что угловая скорость вращения спутника не остается постоянной в процессе эволюции орбитального движения и с течением времени может отличаться от среднего движения. Как будет показано ниже,

результат принятия этой второй гипотезы противоречит результатам работ по рассматриваемой задаче. В наших вычислениях мы принимали первую гипотезу о постоянном синхронном вращении спутника.

Физические параметры были взяты близкими к параметрам движения спутников Урана. Для планеты приняты следующие значения постоянных:

$$G_M = 5793939.3 \text{ км}^3/\text{с}^2, \quad \Omega = 501.1600928 \text{ град}^3/\text{сут}^2.$$

Коэффициенты в уравнениях приняты следующими:

$$K_p = 0.1 \cdot 10^{-6},$$

$$K_s = 10.0 \cdot 10^{-6}.$$

Эти значения не соответствуют реальным возможным значениям параметров вязкости Урана и его спутников. Однако такие преувеличенные значения коэффициентов позволили увидеть особенности решения. Чтобы коэффициенты в уравнениях были безразмерными, введена постоянная \bar{a} . Ее значение выбиралось равным начальному значению большой полуоси орбиты спутника.

Начальные условия решения дифференциальных уравнений движения были взяты в двух вариантах:

вариант 1 — $a = 190940.453 \text{ км}$,

вариант 2 — $a = 114820.064 \text{ км}$.

Начальный эксцентриситет в обоих случаях равен 0.002. Первый вариант параметров орбиты очень близок к параметрам спутника Урана Ариэль. Выбор второго варианта обусловлен рассмотренной ниже особенностью эволюции орбиты в этом случае. При интегрировании предполагалось, что спутник стартует из перигентра орбиты.

Чтобы увидеть характер и величину короткопериодических изменений оскулирующих элементов, были выведены значения большой полуоси и эксцентриситета орбиты сначала на интервале 8 суток с шагом по времени 0.01. Именно эти изменения для второго варианта начальных условий в задаче учета приливной диссипации в теле планеты показаны на рис. 3.9, 3.10. Короткопериодических колебаний большой полуоси на графике не видно из-за сильного векового изменения. Однако для эксцентриситета хорошо видны периодические колебания с периодом, равным периоду обращения спутника. Результаты на графиках показывают, что короткопериодические изменения оскулирующих элементов a и e чрезвычайно малы и не могут характеризовать приливную эволюцию орбиты.

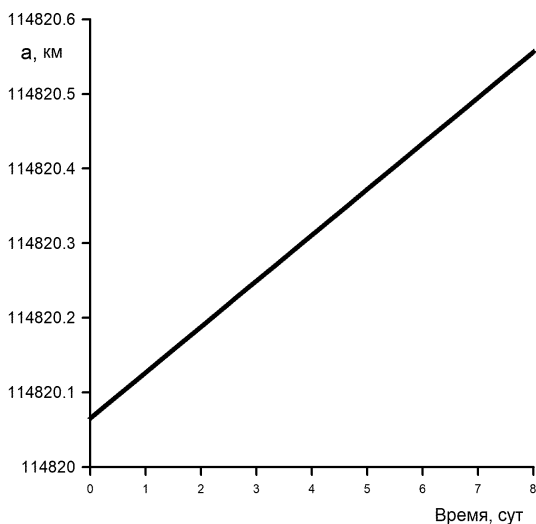


Рис. 3.9. Изменение большой полуоси орбиты спутника на интервале времени 8 суток из-за приливного трения в теле планеты. Вариант 2 начальных условий.

Аналогичные малые амплитуды короткопериодических изменений элементов мы получили во всех остальных исследуемых случаях.

Для исследования эволюции орбиты интегрирование выполнялось на интервале времени 80200.0 суток, что составляет примерно 220 лет. Результаты выводились на печать с шагом 100 суток. Ниже приводятся полученные результаты.

На рис. 3.11-3.14 показаны изменения большой полуоси и эксцентриситета орбиты спутника, вызванные приливным трением в теле планеты, для двух вариантов начальных условий.

Заметим, что при возмущающем влиянии приливов в теле планеты в варианте 2 эксцентриситет в начале интервала остается почти постоянным, а затем возрастает с ростом большой полуоси. В этом решении начальное значение большой полуоси было выбрано специально так, чтобы показать особенность решения в этом случае. Как выбиралось такое значение, поясняется ниже.

На рис. 3.15-3.18 показаны изменения большой полуоси и эксцентриситета орбиты спутника, вызванные приливным трением в теле спутника, для двух вариантов начальных условий.

Отметим, что полученные и изображенные на графиках измене-

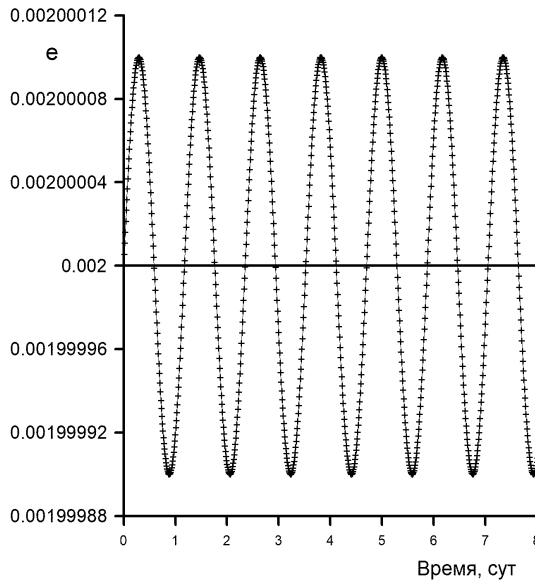


Рис. 3.10. Изменение эксцентриситета орбиты спутника на интервале времени 8 суток из-за приливного трения в теле планеты. Вариант 2 начальных условий.

ния большой полуоси и эксцентриситета отражают именно реальную эволюцию орбиты в результате воздействия приливов в вязкоупругих телах планеты и спутника. Достоверность результатов основана на достоверности уравнений движения спутника планеты в прямоугольных координатах, взятых из цитированных выше работ.

3.14.4. Переход к дифференциальным уравнениям относительно элементов кеплеровской орбиты

При изучении движения спутников планет на больших интервалах времени нас интересует прежде всего поведение большой полуоси a и эксцентриситета e орбиты. Именно эти параметры описывают судьбу спутников. Из-за приливной диссипации механической энергии a и e могут измениться так, что в результате спутник может упасть на планету или удалиться от нее. Поэтому во многих работах при изучении эволюции орбит составляются дифференциальные уравнения относительно большой полуоси и эксцентриситета. Мы сделали попытку составить и решить такие уравнения.

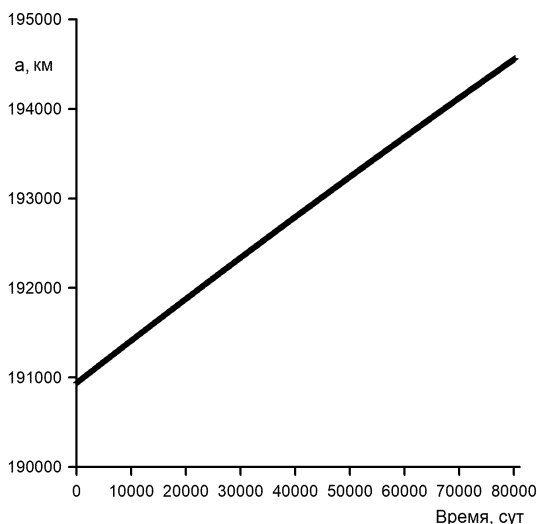


Рис. 3.11. Изменение большой полуоси орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле планеты. Вариант 1 начальных условий.

Поскольку в данной задаче без нарушения общности можно рассматривать плоские движения, в задаче не будут фигурировать наклон и долгота восходящего узла орбиты. Очевидно, что долгота перицентра и средняя аномалия в эпоху не определяют интересующую нас эволюцию орбиты спутника. По этим причинам мы ограничились построением только уравнений относительно большой полуоси a и эксцентриситета орбиты e .

Для вывода искомым уравнений воспользуемся уравнениями относительно a и e , данными в книге (Субботин, 1968). Они имеют вид

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[e \sin f R + \frac{a(1-e^2)}{r} T \right], \quad (3.105)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [\sin f R + (\cos f + \cos E) T], \quad (3.106)$$

где f — истинная аномалия, E — эксцентрическая аномалия, R — радиальная компонента возмущающего ускорения, T — его трансверсальная компонента. Возмущающее ускорение представлено соответствующими членами правых частей уравнений (3.102), (3.103).

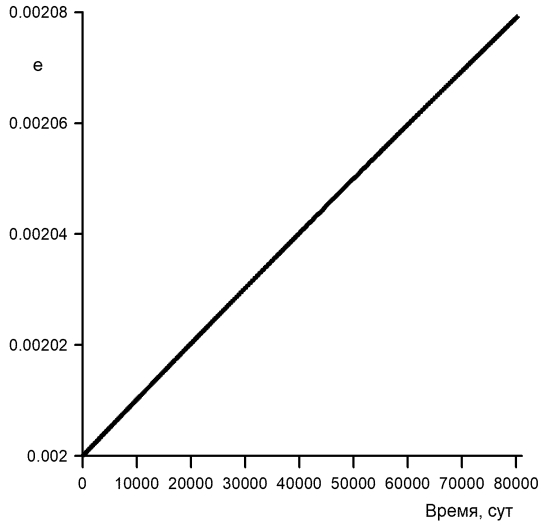


Рис. 3.12. Изменение эксцентриситета орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле планеты. Вариант 1 начальных условий.

Искомые уравнения будем выводить отдельно для случая приливов в теле планеты и случая приливов в теле спутника.

Сначала займемся первой задачей. Из уравнений (3.102) для компонент возмущающего ускорения получим

$$R^{(p)} = -K_p K_2^{(p)} \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} n^2 \left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{v} \right]_R^{(p)}, \quad (3.107)$$

$$T^{(p)} = -K_p K_2^{(p)} \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} n^2 \left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{v} \right]_T^{(p)}. \quad (3.108)$$

Здесь верхний индекс (p) означает принадлежность к задаче с приливами в теле планеты, а нижние индексы R, T здесь и далее различают две компоненты векторов.

Очевидно, что первое слагаемое в квадратных скобках имеет только радиальную составляющую, второе слагаемое — только трансверсальную, а третье — обе компоненты. Мы предположили, что плоскость орбиты спутника перпендикулярна вектору угловой скорости вращения планеты $\boldsymbol{\Omega}$. Отсюда следует, что вектор $[\mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}]$ лежит в плоскости орбиты, перпендикулярен вектору \mathbf{r} и направлен в

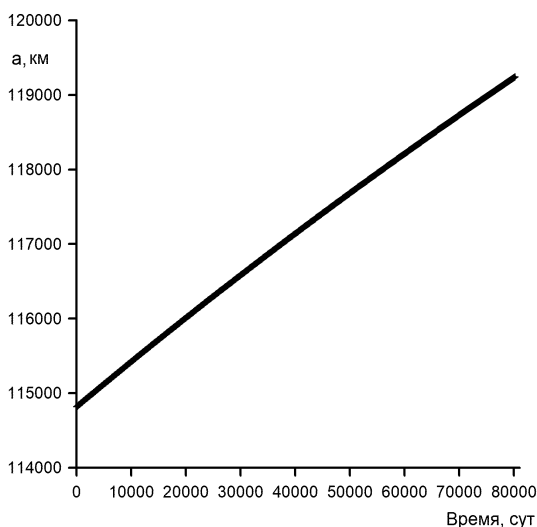


Рис. 3.13. Изменение большой полуоси орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле планеты. Вариант 2 начальных условий.

сторону, противоположную направлению движения спутника. Радиальная компонента произвольного вектора \mathbf{V} может быть получена операцией $(\mathbf{V} \mathbf{r})/r$.

Из формул кеплеровского движения имеем

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \quad \mathbf{v}_R = \frac{an}{\sqrt{1 - e^2}} e \sin f, \quad \mathbf{v}_T = \frac{an}{\sqrt{1 - e^2}} (1 + e \cos f),$$

$$(\mathbf{r} \mathbf{v}) = \frac{ane}{\sqrt{1 - e^2}} r \sin f.$$

Учитывая эти соотношения, получаем

$$\left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \mathbf{\Omega}] + \mathbf{v} \right]_R^{(p)} = 3 \frac{nae}{\sqrt{1 - e^2}} \sin f, \quad (3.109)$$

$$\left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \mathbf{\Omega}] + \mathbf{v} \right]_T^{(p)} = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}} (1 + e \cos f) - \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} |\mathbf{\Omega}|. \quad (3.110)$$

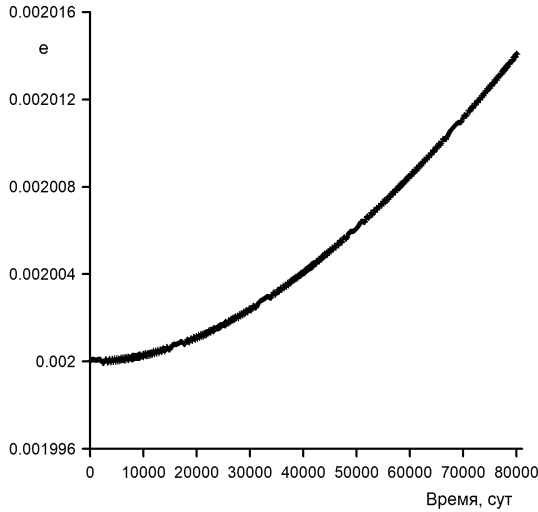


Рис. 3.14. Изменение эксцентриситета орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле планеты. Вариант 2 начальных условий.

Подставляя теперь соотношения (3.109), (3.110) в (3.107), (3.108), а затем полученные выражения в (3.105), (3.106), найдем

$$\frac{da}{dt} = K_p K_2^{(p)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n a \frac{2\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^8} (1+e \cos f)^8 \times \left[|\Omega| - \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}} (1+2e \cos f + 3e^2 - 2e^2 \cos^2 f) \right], \quad (3.111)$$

$$\frac{de}{dt} = K_p K_2^{(p)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^8} (1+e \cos f)^8 \times \left\{ |\Omega| \frac{1-e^2}{1+e \cos f} (\cos f + \cos E) - \frac{n}{\sqrt{1-e^2}} [3e \sin^2 f + (\cos f + \cos E)(1+e \cos f)] \right\}. \quad (3.112)$$

Выведенные здесь уравнения в точности соответствуют исходным уравнениям (3.102), (3.103) относительно прямоугольных координат. Их решение должно выполняться совместно с уравнениями относительно аргумента перицентра ω и средней аномалии M .

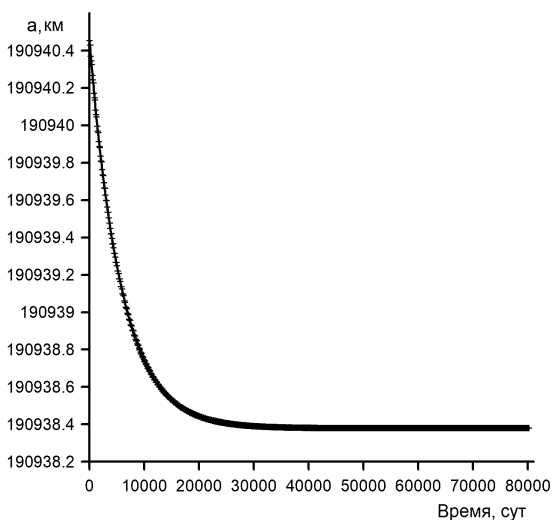


Рис. 3.15. Изменение большой полуоси орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле спутника. Вариант 1 начальных условий.

Такое решение в точности соответствовало бы решению уравнений в прямоугольных координатах. Элементы орбиты и векторы положения и скорости остаются связанными формулами кеплеровского движения.

Как было показано выше, после перехода в решении уравнений относительно координат от координат и вектора скорости к кеплеровским элементам изменения большой полуоси и эксцентриситета представляют собой монотонные эволюционные функции с наложенными на них малыми короткопериодическими колебаниями. Эти короткопериодические колебания весьма малы, и при анализе эволюции орбиты спутника ими можно пренебречь.

Мы сделали предположение, что путем осреднения по времени правых частей полученных уравнений (3.111), (3.112) решение этих уравнений даст нам эволюционные изменения элементов, освобожденные от короткопериодических колебаний. Проверить предположение можно путем сравнения решений точных уравнений (3.102), (3.103) в координатах с решением осредненных уравнений относительно элементов. Совпадение осредненного решения уравнений в координатах с решением осредненных уравнений в элементах дало

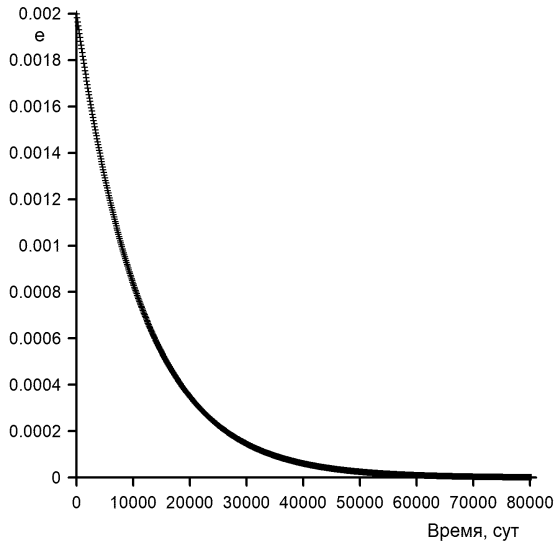


Рис. 3.16. Изменение эксцентриситета орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле спутника. Вариант 1 начальных условий.

бы возможность изучать эволюцию орбит спутников под действием приливного трения в телах планеты и спутников на больших интервалах времени, используя только уравнения относительно a и e .

Чтобы выполнить такую проверку, нужно сначала вывести осредненные уравнения относительно элементов a , e , затем решить их методом численного интегрирования. Мы вывели такие уравнения и получили решение. Далее нас интересовало сравнение двух рассматриваемых решений.

При осреднении уравнений (3.111), (3.112) нам пришлось выполнить также разложение по степеням малого эксцентриситета и оставить только главные члены разложений, пренебрегая квадратом эксцентриситета по сравнению с единицей. Такое упрощение допустимо, поскольку решение задачи предположительно будет применяться к главным спутникам больших планет, орбиты которых действительно имеют малые эксцентриситеты. У наших модельных орбит также были малые эксцентриситеты.

Рассмотрим теперь процедуры, выполненные по указанному плану.

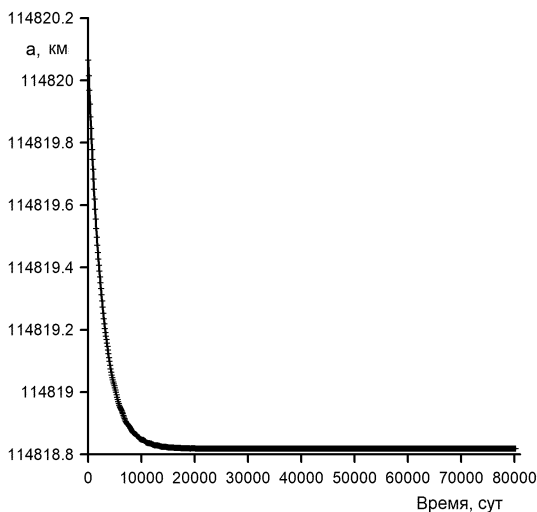


Рис. 3.17. Изменение большой полуоси орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле спутника. Вариант 2 начальных условий.

Осредненные по времени величины мы обозначаем чертой сверху. При осреднении мы учли следующие соотношения:

$$\overline{\cos f} = -e, \quad \overline{\cos E} = -\frac{e}{2}, \quad \overline{\cos^2 f} = \frac{1}{2} + O(e^2), \quad \overline{\cos f \cos E} = \frac{1}{2} + O(e^2),$$

где $O(e^2)$ — члены разложения по степеням малого эксцентриситета e , имеющие второй порядок малости. Кроме того, мы использовали разложения вида

$$(1 + e \cos f)^k = 1 + ke \cos f + O(e^2),$$

где k — произвольное целое число, и оставляли в этом разложении только первые два слагаемых.

На промежуточном этапе действий мы привели уравнения к виду

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 2K_p \frac{\bar{a}^5}{a^5} na \times \\ &\times (1 + 8e \cos f) [|\Omega| - n(1 + 2e \cos f + 3e^2 - 2e^2 \cos^2 f)], \quad (3.113) \\ \frac{de}{dt} &= K_p \frac{\bar{a}^5}{a^5} n \{ |\Omega| (1 + 7e \cos f) (\cos f + \cos E) - \end{aligned}$$

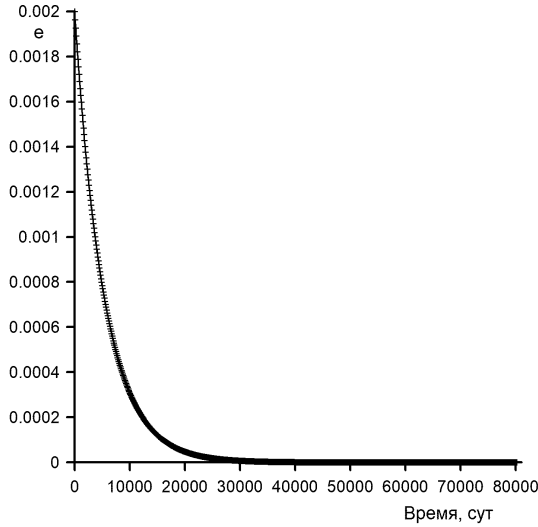


Рис. 3.18. Изменение эксцентриситета орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле спутника. Вариант 2 начальных условий.

$$-\frac{n}{\sqrt{1-e^2}} \left[3e \sin^2 f (1 + 8e \cos f) + (\cos f + \cos E)(1 + 9e \cos f) \right] \Bigg\}. \quad (3.114)$$

После осреднения окончательно получили

$$\frac{da}{dt} = 2K_p K_2^{(p)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} na(|\Omega| - n), \quad (3.115)$$

$$\frac{de}{dt} = K_p K_2^{(p)} \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{a}^5}{a^5} \cdot (11|\Omega| - 18n)ne. \quad (3.116)$$

Теперь рассмотрим, как и какие уравнения получаются в случае возмущающего влияния приливов в вязко-упругом теле спутника. Из дифференциальных уравнений (3.103) находим, что радиальная и трансверсальная компонента возмущающего ускорения будут иметь вид

$$R^{(s)} = -K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} n^2 \left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \Omega_s] + \mathbf{v} \right]_R^{(s)}, \quad (3.117)$$

$$T^{(s)} = -K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} n^2 \left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \Omega_s] + \mathbf{v} \right]_T^{(s)}. \quad (3.118)$$

Здесь верхний индекс (s) означает принадлежность к задаче с приливами в теле спутника, а нижние индексы R, T , как и выше, различают две компоненты векторов.

Здесь угловая скорость вращения спутника $\mathbf{\Omega}_s$ по предположению перпендикулярна плоскости орбиты. Тогда аналогично предыдущему случаю имеем

$$\left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \mathbf{\Omega}_s] + \mathbf{v} \right]_R^{(s)} = 3 \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}} \sin f, \quad (3.119)$$

$$\left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \mathbf{\Omega}_s] + \mathbf{v} \right]_T^{(s)} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (1 + e \cos f) - \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} |\mathbf{\Omega}_s|. \quad (3.120)$$

Поскольку мы приняли гипотезу о постоянном синхронном вращении спутника, то в дальнейшем можно положить $|\mathbf{\Omega}_s| = n$. Учитывая это обстоятельство и подставляя выражения (3.119), (3.120) в формулы (3.117), (3.118), а затем в (3.105), (3.106), находим

$$\frac{da}{dt} = -K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} \cdot \frac{2n^2 a}{1-e^2} \times \\ \times \left[3e^2 \sin^2 f + (1 + e \cos f)^2 - (1 - e^2)^{3/2} \right], \quad (3.121)$$

$$\frac{de}{dt} = -K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} n^2 \times \\ \times \left\{ 3e \sin^2 f + (\cos f + \cos E) \left[1 + e \cos f - \frac{(1-e^2)^{3/2}}{1+e \cos f} \right] \right\}. \quad (3.122)$$

В правых частях этих точных уравнений мы сделали затем упрощения согласно указанному выше плану: выполнили разложения по степеням эксцентриситета, оставили в разложениях только главные члены и усреднили по времени. На промежуточном этапе после разложения по степеням эксцентриситета были получены следующие уравнения:

$$\frac{da}{dt} = -K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} 2n^2 a (1 + 8e \cos f) \left(\frac{9}{2} e^2 - 2e^2 \cos^2 f + 2e \cos f \right), \quad (3.123)$$

$$\frac{de}{dt} = -K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n^2 e [3 \sin^2 f + 2 \cos f (\cos f + \cos E)]. \quad (3.124)$$

Осреднение по времени окончательно дало

$$\frac{da}{dt} = -19K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n^2 a e^2, \quad (3.125)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{7}{2} K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n^2 e. \quad (3.126)$$

Эти уравнения должны описывать эволюцию элементов a и e , обусловленную диссипацией механической энергии орбитального движения спутника из-за приливного трения в вязко-упругом теле самого спутника. Выведенные и приведенные выше уравнения (3.115), (3.116) описывают эволюцию элементов a и e , обусловленную приливным трением в вязко-упругом теле планеты.

Заметим, что эти четыре уравнения были выведены при произвольной зависимости $K_2^{(p)}$, $K_2^{(s)}$ от среднего движения n , то есть при произвольной частотной зависимости запаздывания приливов. Предполагая справедливыми соотношения (3.104), приведем уравнения к виду, в котором они встречаются в публикациях. В результате получим

$$\frac{da}{dt} = K_p \frac{k_2}{Q_p} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n a, \quad (3.127)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{4} K_p \frac{k_2}{Q_p} \cdot \frac{\bar{a}^5}{a^5} \cdot \frac{11|\Omega| - 18n}{|\Omega| - n} n e, \quad (3.128)$$

$$\frac{da}{dt} = -19K_s \frac{k_2^{(s)}}{Q_s} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n a e^2, \quad (3.129)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{7}{2} K_s \frac{k_2^{(s)}}{Q_s} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n e. \quad (3.130)$$

Теперь следует сверить решение уравнений в прямоугольных координатах, полученное и показанное выше, с решением уравнений (3.115), (3.116) первой задачи и решение уравнений (3.125), (3.126) – во второй. Мы выполнили численное интегрирование последних уравнений с тем же предположением о постоянстве коэффициентов $K_2^{(p)}$, $K_2^{(s)}$ и с теми же начальными условиями, которые были заданы при решении дифференциальных уравнений движения спутника в прямоугольных координатах. Эти решения показаны графически на тех же рис. 3.11-3.14 и рис. 3.15-3.18, соответствующих

первой и второй задачам. Линии соответствующих решений полностью сливаются, показывая точное в пределах толщины линий совпадение двух решений. Более точный численный анализ показывает, что решения уравнений относительно элементов орбиты в точности равны значениям элементов, полученным по решению уравнений в координатах и осредненным относительно короткопериодических колебаний.

Полученный результат доказывает сделанное предположение о том, что решение уравнений (3.115), (3.116), (3.125), (3.126) в элементах достоверно описывает эволюцию орбиты спутника в двух рассмотренных задачах.

Заметим, что во втором варианте начальных условий большая полуось орбиты была выбрана именно так, чтобы выполнялось условие

$$n = \frac{11}{18} |\Omega|.$$

В этом случае правая часть уравнения (3.116) в начальный момент равна нулю. На соответствующем рис. 3.12 видно, что в начале периода среднее значение эксцентриситета почти не изменяется. Именно такое поведение этой функции позволило увидеть на рис. 3.10 короткопериодические колебания.

Принимаемая нами гипотеза о постоянном синхронном вращении спутника может быть подвергнута сомнению. По этому вопросу необходимы специальные исследования. Предположение о неизменной угловой скорости вращения спутника, независимой от орбитального движения, было также рассмотрено. В этом случае скорость изменения большой полуоси из-за приливного трения в теле спутника уже не будет пропорциональна квадрату эксцентриситета, как это следует из уравнения (3.125). Численное интегрирование уравнений в координатах для задачи учета вязко-упругих приливов в теле спутника было выполнено для первого варианта начальных условий в предположении постоянной угловой скорости вращения спутника. Результат — изменение большой полуоси во времени показан на рис. 3.19. На рисунке видно, что изменение большой полуоси имеет иной характер по сравнению со случаем синхронного вращения спутника. Изменение более значительное. Изменение эксцентриситета в этом случае не отличается от его изменения в случае синхронного вращения спутника. Поэтому соответствующий график мы не приводим.

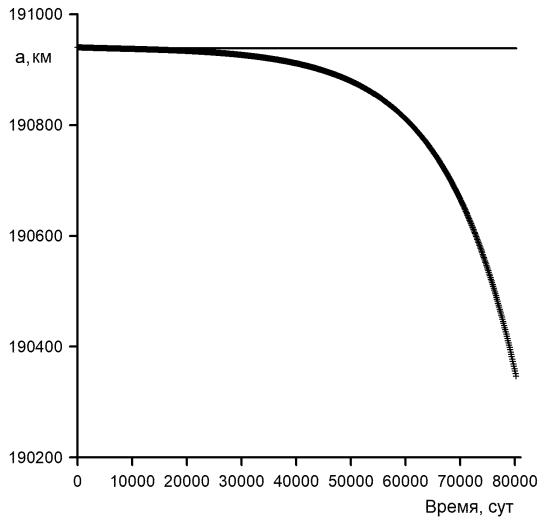


Рис. 3.19. Случай постоянной угловой скорости вращения спутника. Показано изменение большой полуоси орбиты на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле спутника. Взят вариант 1 начальных условий. Жирной линией показано изменение большой полуоси при постоянной скорости вращения спутника. Тонкой линией показано изменение большой полуоси при синхронном вращении. В последнем случае кажущееся постоянство большой полуоси проявляется из-за выбранного на графике масштаба.

3.14.5. Некоторые важные выводы о влиянии приливных деформаций на динамику спутников

В результате выполненной работы (Emelyanov, 2018) получены дифференциальные уравнения эволюционных изменений большой полуоси и эксцентриситета орбиты спутника, обусловленных приливным трением в теле планеты и в теле спутника. Мы исходили из соответствующих дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах, опубликованных в работе (Lainey et al., 2012). Показана идентичность осредненных решений уравнений в координатах с точным решением выведенных в работе (Emelyanov, 2018) осредненных уравнений в элементах.

В задаче учета влияния приливов в теле планеты обнаружено соотношение между средним движением спутника n и угловой скоростью вращения планеты $|\Omega|$, при котором скорость изменения экс-

центриситета становится равной нулю (Emelyanov, 2018). Это происходит при $n = \frac{11}{18}|\Omega|$.

Представляет интерес сравнение полученных результатов с результатами других авторов. Рассмотрим несколько аспектов.

Приливная эволюция в тесных двойных системах была изучена в работе (Hut, 1981). Выведенные в этой работе дифференциальные уравнения движения частицы в прямоугольных координатах с учетом приливного влияния вязко-упругого центрального тела совпадают с уравнениями, опубликованными в статьях (Mignard, 1979, 1980; Lainey et al., 2009; Lainey et al., 2012). Уравнения соответствуют случаю возмущений орбитального движения спутника под действием приливов в вязко-упругом теле планеты. Автор работы (Hut, 1981) преобразовал уравнения к переменным большая полуось a , эксцентриситет e . Наши уравнения (3.127), (3.128) в точности совпадают с результатами работы (Hut, 1981).

Дифференциальные уравнения относительно большой полуоси и эксцентриситета орбиты спутника, описывающие влияние вязко-упругих приливов в теле планеты и в теле спутника на орбитальное движение, опубликованы в работе (Lainey et al., 2012). Эти уравнения имеют такую же форму, как и наши уравнения (3.127), (3.128), (3.129), (3.130). Однако только два из четырех уравнений в работе (Lainey et al., 2012) совпадают с уравнениями (3.127), (3.130). Другие два существенно отличаются. Соответственно они отличаются и от результатов работы (Hut, 1981).

Более общая теория, чем рассмотренная здесь, для учета приливного влияния на орбитальное движение спутников развита в работах (Efroimsky, Makarov, 2013; Makarov, Efroimsky, 2013; Makarov, 2015). Авторы ссылаются на работы предшественников. Показано, что в телах планеты и спутника кроме основной приливной деформации, которая рассмотрена выше, возникают и другие волны деформаций, имеющие другие скорости пробегания по телам и другие запаздывания по времени. Множественность этих волн порождена, в основном, отличием орбиты спутника от круговой и ее наклоном к плоскости экватора планеты.

Параметры диссипации энергии орбитального движения спутника от приливных деформаций можно определить только из наблюдений. Точность наблюдений ограничена. В настоящее время точности едва хватает, чтобы определить эти параметры для Юпитера, Сатурна и их главных спутников. Что касается вязко-упругих

тел Урана и Нептуна, то попыток определения таких параметров пока не делалось. В работе (Laineу, 2016) исследовалось соотношение между точностью наблюдений и возможными значениями параметров приливных деформаций Урана и Нептуна. Найдены такие гипотетические значения параметров, при которых они могли бы быть определены из наблюдений. Эти значения соответствуют значительной приливной деформации.

Отметим здесь результаты определения орбитального ускорения спутника Марса Фобоса. Особенность движения этого спутника состоит в том, что он обращается по орбите быстрее вращения Марса. Приливы в вязко-упругом теле Марса, вызванные притяжением спутника, запаздывают от направления на спутник. В результате энергия орбитального движения теряется, и спутник «падает» на Марс. Наиболее развитая теория орбитального движения Фобоса и Деймоса на основе наблюдений опубликована в работе (Laineу et al., 2007). Значения орбитального ускорения, взятые из этой работы и из нескольких более ранних публикаций, приведены в Приложении 2.

Литература к Главе 3

- Авдюшев В.А., Баньщикова М.А.* Определение орбит близких спутников Юпитера. *Астрономический вестник*. 2008. Т. 42. № 4. С. 317–340.
- Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г.* Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. *Сборник Искусственные спутники Земли*. 1961. № 8. С. 64–71.
- Аксенов Е. П.* Один вид дифференциальных уравнений движения спутника. 1966. *Труды ГАИШ*. Т. 35. С. 44–58.
- Аксенов Е. П.* Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977.
- Аксенов Е.П.* Специальные функции в небесной механике. М.: Наука, 1986.
- Аксенов Е.П., Емельянов Н.В., Тамаров В.А.* Практическое применение промежуточной орбиты спутника. *Формулы, программы, тесты*. *Труды ГАИШ*. 1988. Т. 59. С. 3–40.

- Белецкий В. В.* Орбита экваториального спутника Земли. Искусственные спутники Земли. 1962. Вып. 13. С. 53–60.
- Брумберг В. А.* Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. Бюллетень ИТА. 1967. Т. 11. № 2. С. 73–83.
- Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. Учебник для студентов университетов, обучающихся по специальности «Астрономия». Издание 3-е, дополненное. М.: Наука, 1975.
- Емельянов Н.В., Кантер А.А.* Орбиты новых внешних спутников планет на основе наблюдений. Астрономический вестник. 2005. Т. 39. № 2. Р. 128–140.
- Емельянов Н.В.* Возмущенное движение при малых эксцентриситетах. Астрономический вестник. 2015. Т. 49. № 5. С.380–394.
- Каула У.* Спутниковая геодезия. М.: Мир, 1970.
- Кондратьев Б. П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. Издание института компьютерных исследований. Москва – Ижевск. 2003. ISBN 5-93972-222-9, 624 с.
- Кондратьев Б. П.* Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007. ISBN 978-5-03-003798-1, 512 с.
- Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
- Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968.
- Холиевников К. В., Титов В. Б.* Задача двух тел. Санкт-Петербургский государственный университет. Санкт-Петербург, 2007.
- Archinal B. A., Acton C. H., A'hearn M. F., Conrad A., Consolmagno G. J., Duxbury T., Hestroffer D., Hilton J. L., Kirk R. L., Klioner S. A., McCarthy D., Meech K., Oberst J., Ping J., Seidelmann P. K., Tholen D. J., Thomas P. C., Williams I. P.* Report of the IAU Working Group on cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2015. Celestial Mechanics and Dynamic Astronomy. 2018. 130:22.
- Arlot J.-E.* New constants for Sampson-Lieske theory of the Galilean Satellites of Jupiter. Astronomy and Astrophysics. 1982. V. 107. № 2. Р. 305–310.

- Brower D.* Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *Astronomical Journal*. 1959. V. 64. P. 378–397.
- Darboux G.* Sur un probleme de mecanique. *Archives Neerlandaises des Sciences, Exact et naturel*. 1901. Ser. 2. T. 6. P. 371.
- Danby J. M. A.* *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Second Edition. Willmann-Bell, Inc. USA. 1995.
- Efroimsky M., Makarov V. V.* Tidal Friction and Tidal Lagging. Applicability Limitations of a Popular Formula for the Tidal Torque. *Astrophysical Journal*. 2013. V. 764. Issue 1. Article id. 26, 10 pp.
- Emelyanov N.V.* Ephemerides of the outer Jovian satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 2005. V. 435, p. 1173–1179.
- Emelyanov N. V., Samorodov M. Yu.* Analytical theory of motion and new ephemeris of Triton from observations *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. V. 454. P. 2205–2215.
- Emelyanov N.* Influence of tides in viscoelastic bodies of planet and satellite on the satellite's orbital motion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2018. V. 479. Issue 1. P. 1278–1286.
- Euler L.* Un corps etant attire an raison reciproque quaree des distances vers deux points fixes donnees. *Mem. Berlin*. 1760. V. 228.
- Euler L.* De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti. *Novi Commentarii Acad. Scient. Imperial. Petropolit.* 1764. V. 10. P. 207; 1765. V. 11. P. 152
- Fienga A., Laskar J., Kuchynka P., Manche H., Desvignes G., Gastineau M., Cognard I., Theureau G.* The INPOP10a planetary ephemeris and its applications in fundamental physics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. V. 111. Issue 3. P. 363–385.
- Giorgini J.D., Yeomans D.K., Chamberlin A.B., Chodas P.W., Jacobson R.A., Keesey M.S., Lieske J.H., Ostro S.J., Standish E.M., Wimberly R.N.* JPL's On-Line Solar System Data Service. *Amer. Astron. Soc. DPS meeting N.28, N.25.04*. 1997. *Bull. Amer. Astron. Soc.* 1997. V. 28. P. 1158–1158.
- Harper D., Taylor D. B.* The orbits of the major satellites of Saturn. *Astronomy and Astrophysics*. 1993. V. 268. C. 326–349.

- Hut P.* Tidal evolution in close binary systems. *Astronomy and Astrophysics*. 1981. V. 99. P. 126–140.
- Jacobson R. A., Riedel J. E., Taylor A. H.* The orbits of Triton and Nereid from spacecraft and earthbased observations. *Astronomy and Astrophysics*. 1991. V. 247. P. 565–575.
- Jacobson R.A.* The Orbits of the Inner Jovian Satellites. Amer. Astron. Soc. DDA meeting N.28. 1997. *Bull. Amer. Astron. Soc.* 1997. V. 28. P. 1098–1098.
- Jacobson R. A.* The Orbits of the Neptunian Satellites and the Orientation of the Pole of Neptune. *Astronomical Journal*. 2009. V. 137. 4322–4329.
- Jacobson R. A.* The Orbits of the Regular Jovian Satellites, Their Masses, and the Gravity Field of Jupiter. American Astronomical Society, DDA meeting #44. 2013. Id.402.04.
- Kaula W. M.* Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite. *Astronomical Journal*. 1962. V. 67. P. 300–303.
- Kaula W.M.* Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution. *Reviews of Geophysics*. 1964. V. 2. P. 661–684.
- Lainey V., Dehant V., Patzold M.* First numerical ephemerides of the Martian moons. *Astronomy and Astrophysics*. 2007. V. 465. P. 1075–1084.
- Lainey V., Arlot J.-E., Karatekin O., van Hoolst T.* Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations. *Nature*. 2009a. V. 459. Issue 7249. P. 957–959.
- Lainey V., Arlot J.-E., Karatekin O., van Hoolst T.* Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations. *Nature*. 2009b. V. 459. Issue 7249. P. 957–959. Supplementary information.
- Lainey V., Karatekin O., Desmars J., Charnoz S., Arlot J.-E., Emelyanov N., Le Poncin-Lafitte Chr., Mathis S., Remus F., Tobie G., Zahn J.-P.* Strong tidal dissipation in Saturn and constraints on Enceladus' thermal state from astrometry. *The Astrophysical Journal*. 2012. V. 752. Issue 1. Article id. 14.
- Lainey V.* Quantification of tidal parameters from Solar System data. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2016. V. 126. Issue 1–3. P. 145–156.

- Laskar J., Jacobson R. A.* GUST86 - An analytical ephemeris of the Uranian satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 1987. V. 188. № 1. P. 212–224.
- Lieske J. H.* Theory of motion of Jupiter's Galilean satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 1977. V. 56. P. 333–352.
- Makarov V. V., Efroimsky M.* No Pseudosynchronous Rotation for Terrestrial Planets and Moons. *Astrophysical Journal*. 2013. V. 764. Issue 1. Article id. 27, 12 pp.
- Makarov V. V.* Equilibrium Rotation of Semiliquid Exoplanets and Satellites. *Astrophysical Journal*. 2015. V. 810. Issue 1. Article id. 12, 9 pp.
- Mignard F.* The evolution of the lunar orbit revisited. I. Moon and the Planets. 1979. V. 20. P. 301–315.
- Mignard F.* The evolution of the lunar orbit revisited. II. Moon and the Planets. 1980. V. 23. P. 185–201.
- Peale S.J., Cassen P.* Contribution of Tidal Dissipation to Lunar Thermal History. *Icarus*. 1978. V. 36. P. 245–269.
- Sampson R.A.* Theory of the Four Great Satellites of Jupiter. *Memoirs of the Royal Astronomical Society*. 1921. V. 63. P. 1.
- Simon J.L., Bretagnon P., Chapront J., Chapront-Touze M., Francou G., Laskar J.* Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets *Astronomy and Astrophysics*. 1994. V. 282. P. 663–683.
- Vienne A., Duriez L.* TASS1.6: Ephemerides of the major Saturnian satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 1995. V. 297. C. 588–605.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКОВ. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Резюме

Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений являются альтернативой аналитическим теориям движения спутников больших планет. Эти методы достойны подробного описания в применении к построению моделей движения спутников на основе наблюдений. Именно этому посвящена данная глава.

Сначала рассматриваются общие вопросы, преимущества и недостатки методов численного интегрирования. Далее на простом примере метода «ломаных Эйлера» показываются особенности методов. Рассказывается, как на практике применять методы численного интегрирования. Кроме метода Рунге-Кутты, предлагаются еще два наиболее совершенных метода, широко применяемых в практической небесной механике: метод Эверхарта и метод Беликова. Прямо приводятся инструкции для составления соответствующих вычислительных программ решения дифференциальных уравнений движения спутников.

Рассматривается метод хранения результатов численного интегрирования уравнений движения в практических задачах путем составления отрезков рядов по полиномам Чебышева. Приводятся соответствующие формулы.

В конце главы дается краткий обзор задач и методов численного интегрирования.

4.1. Цели решения уравнений движения небесных тел

Методы численного интегрирования уравнений движения небесных тел разрабатываются и применяются для решения различных задач небесной механики. Совместно с аналитическими и качественными методами они являются процедурами, служащими целям практического познания природы.

Процесс изучения небесных тел состоит в построении модели их движения. Модель является ядром всех научных изысканий. Она постоянно уточняется на основе все новых наблюдений. К настоящему времени мы уже знаем достаточно много о телах Солнечной системы, планетах и спутниках. Открыты законы, согласно которым взаимодействуют планеты и спутники. Эти законы выражаются в форме дифференциальных уравнений относительно координат центров масс тел и относительно углов их вращения.

Использование модели заключается в предвычислении координат и угловых положений тел на любой заданный момент времени. Таким моментом может быть либо момент очередного наблюдения небесного тела, либо момент встречи космического аппарата с небесным телом, либо момент проведения наблюдений с искусственного космического объекта.

Предвычисление орбитального и вращательного движений небесных тел может делаться на основе аналитического решения дифференциальных уравнений движения, если такое решение имеется. Однако почти все практически значимые модели движения описываются уравнениями, точное решение которых неизвестно. Что касается приближенных аналитических решений, то очень часто случается, что погрешность приближенного решения оказывается недопустимой, либо при требуемой точности процедура построения решения оказывается чрезмерно трудоемкой даже для мощнейших современных компьютеров.

Предвычисление координат и углов вращения тела вокруг его центра масс на заданный момент времени может выполняться методами численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Преимущества численных методов по сравнению с аналитическими заключаются в относительной простоте их реализации в виде алгоритмов и вычислительных программ для компьютеров. Во многих случаях численные методы обладают большей точностью предвычисления координат небесных тел. Указанные преимущества обычно достигаются при высокой требуемой

точности вычислений. Недостатками методов численного решения уравнений движения являются большие затраты вычислительного времени, быстрый рост погрешности решения с ростом интервала предвычисления движения и невозможность достоверной оценки точности решения. При заданных уравнениях движения, начальных значениях координат тел и заданном моменте предвычисления точность решения оказывается ограниченной, сколь совершенным бы ни был применяемый численный метод решения.

Численные методы незаменимы в задачах, для которых невозможно получить аналитическое решение. Методы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений служат также для проверки правильности и оценки точности найденного аналитического решения.

4.2. Общие свойства методов численного интегрирования уравнений движения

Постановка задачи о решении уравнений движения методами численного интегрирования распадается на два независимых этапа. Во-первых, составляются дифференциальные уравнения движения. Во-вторых, разрабатывается новый или выбирается один из известных методов их численного интегрирования. Чтобы связать эти два этапа, необходимо принять некоторый стандартный вид уравнений движения.

Рассматривается одно небесное тело или система тел при взаимном гравитационном взаимодействии. В уравнениях движения может учитываться влияние многих других факторов. В частности, в рассмотрение могут включаться притяжение других тел с известными законами движения, отличие гравитирующих тел от материальных точек, сопротивление среды, в которой происходит движение тел.

Уравнения движения представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого или второго порядка относительно координат небесного тела. Обычно употребляется прямоугольная система координат. Если составляется система уравнений второго порядка, ее всегда можно свести к системе уравнений первого порядка. Это приходится делать, в частности, если действующие силы непосредственно зависят от скорости движения небесного тела.

Итак, в задачах численного интегрирования уравнений движения небесных тел примем следующую наиболее общую форму дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (4.1)$$

где $x_i(t)$ являются искомыми функциями времени. Обязательным условием является задание функций $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ таким образом, чтобы их можно было вычислять при любых заданных значениях аргументов. Эти функции могут содержать также постоянные параметры, значения которых заданы.

К настоящему времени разработано множество методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Они различны по своей эффективности и области приложений. Хороший обзор методов численного интегрирования дифференциальных уравнений движения, применяемых в небесной механике, дан в работе (Бордовицына, 1984). Существует даже теория методов численного решения уравнений, обобщающая множество таких методов и дающая путь разработки наиболее оптимальных схем интегрирования (Butcher, 1963, 1964a, 1964b; Холл, Уатт, 1979).

Разнообразные методы численного интегрирования при их применении обладают некоторыми общими свойствами. Эти свойства необходимо знать при решении конкретных задач для достижения наилучшего результата и эффективности исследований.

Основную идею методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений легко объяснить на простейшем из них — методе ломаных линий Леонарда Эйлера (Leonhard Euler, 1707–1783). При этом можно ограничиться рассмотрением одного дифференциального уравнения общего вида.

Допустим, что мы имеем одно дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t),$$

в котором t есть независимая переменная — время. Требуется найти функцию $x(t)$, удовлетворяющую этому дифференциальному уравнению и начальному условию:

$$x(t_0) = x_0,$$

где t_0 — начальный момент времени, а x_0 — заданная константа.

Для начала важно понять то, что никакой метод численного интегрирования не позволит найти саму функцию $x(t)$, а только ряд ее значений на конечное число моментов времени. Рассмотрим некоторый момент времени t_1 , недалеко отстоящий от момента t_0 . Разность $t_1 - t_0$ обозначим через h , то есть

$$h = t_1 - t_0.$$

Точное значение $x(t_1)$ нам неизвестно, но если величина h достаточно мала, а функция $f(x, t)$ непрерывна, то приближенное значение x в момент времени t_1 можно определить по формуле

$$x_1 = x_0 + f(x_0, t_0) h.$$

Очевидно, что отличие x_1 от точного значения $x(t_1)$ будет тем меньше, чем меньше h . Погрешность обусловлена возможной нелинейностью функции $x(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$.

Далее мы можем определить приближенное значение функции $x(t)$ на момент времени $t_2 = t_1 + h$ по формуле

$$x_2 = x_1 + f(x_1, t_1) h.$$

Погрешность найденного значения искомой функции в момент t_2 будет складываться из погрешности x_1 и погрешности, вызванной нелинейностью функции $x(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$.

Теперь алгоритм определения значений искомой функции на последовательные моменты $t_i = t_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$) можно записать так:

$$x_i = x_{i-1} + f(x_{i-1}, t_{i-1}) h. \quad (4.2)$$

В этом алгоритме величину h называют постоянным шагом численного интегрирования. Ошибка значения x_i будет содержать сумму ошибок, совершенных на всех предыдущих шагах интегрирования. Эти ошибки могут иметь различные величины и знаки, но при достаточно произвольной функции $f(x, t)$ суммарная ошибка, как правило, возрастает. Очевидно, что возрастание суммарной ошибки происходит с нарастанием числа выполненных шагов интегрирования. Чем больше шагов при постоянной величине шага, тем больше ошибка такого решения.

Любая задача численного интегрирования уравнений движения небесного тела обычно ставится так, что в конечном итоге требуется найти координаты тела на заданный конечный момент времени t_k . Если шаг интегрирования уже выбран, то можно подсчитать количество шагов k , необходимое для решения задачи. Очевидно, что

$$k = E\left(\frac{t_k - t_0}{h}\right) + 1,$$

где $E(\dots)$ означает целую часть.

Метод ломаных относится к группе так называемых одношаговых методов численного интегрирования. Кроме них существуют еще экстраполяционные и многошаговые методы (Бодовицына, 1984). Все эти методы имеют некоторые общие свойства. При их применении возникают общие проблемы. Одна из проблем — это выбор шага интегрирования. На первый взгляд ясно, что если шаг интегрирования уменьшить, то ошибка, допускаемая на каждом шаге, уменьшится, а следовательно повысится точность решения уравнений движения небесного тела. При заданном интервале времени предвычисления движения, то есть интервале интегрирования $t_k - t_0$, количество выполняемых шагов возрастет, что вызовет увеличение затрат вычислительного времени, то есть времени работы компьютера. В некоторых случаях максимальная точность решения определяется только допустимыми затратами времени вычислений.

На первый взгляд кажется, что если увеличение вычислительных затрат еще допустимо, то улучшения точности всегда можно достигнуть уменьшением шага интегрирования. Можно провести такой эксперимент. Задать конкретные уравнения движения, численное решение которых можно проверить. Это могут быть уравнения, имеющие точное аналитическое решение, или уравнения, допускающие известное частное решение. Далее можно задать интервал интегрирования $[t_0, t_k]$, взять какой-нибудь метод численного интегрирования и решать задачу многократно, уменьшая каждый раз шаг интегрирования. Изучая зависимость точности решения от шага интегрирования мы увидим, что сначала при уменьшении шага погрешность численного решения уменьшается. Но при некоторых весьма малых значениях шага интегрирования точность начнет ухудшаться, сколь бы мы ни уменьшали шаг. Что же происходит?

Дело в том, что все вычисления делаются всегда с фиксированной точностью выполнения простых арифметических операций. Ее

можно улучшить с помощью специальных способов отображения чисел в памяти компьютера и применением соответствующих алгоритмов арифметических действий. Это приведет к еще большим вычислительным затратам. Важно то, что в любом компьютере с соответствующим программным обеспечением максимальная точность представления чисел и точность выполнения арифметических операций фиксирована. При каждой операции совершается некоторая ошибка. Ее называют ошибкой округления чисел. При последовательном выполнении арифметических действий ошибки округления накапливаются.

Чем меньше шаг интегрирования, тем меньше погрешность формулы (4.2), меньше ошибка, совершаемая на каждом шаге, и меньше ее накопление на конечный момент времени. С другой стороны, число шагов растет, и ошибки округления накапливаются. Таким образом, существует некоторый оптимальный шаг интегрирования, при котором погрешность вычисления значения искомой функции на конечный момент времени минимальна. Для выбранного метода интегрирования и заданной конкретной задачи точность, лучшая, чем при оптимальном шаге, недостижима. Путем совершенствования методов численного интегрирования можно добиться некоторого улучшения точности. Однако современные методы уже столь совершенны, что дальнейшее повышение точности почти не происходит. На практике вычисления с оптимальным шагом, как правило, не производят — слишком велики при этом вычислительные затраты.

Следующую проблему вызывает тот факт, что степень нелинейности искомой функции может быть различна на разных участках интервала $[t_0, t_k]$. При заданном постоянном шаге интегрирования суммарная ошибка порождается, в основном, на тех участках, где нелинейность максимальна. Нет смысла выбирать такой же малый шаг на других участках и тратить напрасно время на вычисления с излишней точностью. Оптимально было бы выбирать на каждом участке свой шаг интегрирования в зависимости от степени нелинейности искомой функции. В совершенных методах численного интегрирования поведение решения анализируется на предыдущем шаге, чтобы экономно выбрать следующий шаг. Для этого, конечно, перед началом интегрирования задают некоторый параметр, контролирующий точность вычислений на каждом шаге. Этот параметр называют заданной точностью интегрирования, однако эта точность

далеко не совпадает с точностью получения решения на конечный момент времени t_k . Эти две точности обычно пропорциональны при одной и той же формулировке задачи, то есть при заданных уравнениях движения, начальных условиях и конечном моменте времени. Для анализа поведения решения используют различные приемы и формулы. Один из них состоит в том, что каждый шаг делают дважды: сначала один шаг величиной h , затем два шага, величиной $h/2$. Разницу двух результатов сравнивают с заданной константой — точностью вычислений. Если разность оказывается больше, то шаг уменьшают вдвое. Если же эта разность в десять или более раз меньше, чем заданная точность, то шаг увеличивают. В наиболее совершенных алгоритмах численного интегрирования используют более сложные приемы. К сожалению, на практике не всегда автоматический выбор шага может быть эффективен. В некоторых случаях все же используют постоянный шаг интегрирования.

Наибольшую проблему в практике численного интегрирования уравнений движения небесных тел представляет оценка точности получаемого решения. Оказывается, не существует строгих формул или условий, позволяющих выполнить такие оценки. На деле используют некоторые приемы, которые все же нельзя считать вполне надежными. Один из них — это интегрирование «вперед-назад». То есть после получения значения искомой функции на конечный момент времени это значение принимают за исходное и выполняют интегрирование с отрицательным шагом до начального момента. В конце сравнивают полученный результат с начальным условием. Полученную разность значений и считают точностью выполненного интегрирования. Иногда такие оценки получаются удовлетворительными, но чаще всего реальная точность оказывается хуже. Существуют и другие методы оценки точности численного интегрирования, но все они, на самом деле, ненадежны.

4.3. Метод Рунге-Кутты интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод ломаных, изложенный в предыдущем разделе, почти не применяется на практике. Существуют более точные методы. Одним из них является метод Рунге-Кутты (Бордовицына, 1984; Дубошин, 1976). Этот метод далеко не самый совершенный, однако в свое время он широко применялся в астрономических задачах.

Формулы метода Рунге-Кутты достаточно просты (Дубошин, 1976). Их можно легко запрограммировать на любом подходящем языке программирования. В задачах, где не требуется получать предельно высокую точность численного решения уравнений движения, метод Рунге-Кутты может быть эффективно применен.

Опишем этот метод и формулы, по которым выполняются вычисления. Рассмотрим задачу численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (4.1) с начальными условиями $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$, ..., $x_n = x_n^{(0)}$ при $t = t_0$. Переменные x_1, x_2, \dots, x_n для удобства будем называть координатами, а независимую переменную t — временем.

Формулы Рунге-Кутты, приводимые ниже, позволяют определить координаты на момент времени $t_{k+1} = t_k + h$, если они известны на момент времени t_k . Формулы составлены на основе метода интерполяции полиномами относительно шага интегрирования h , в которых пренебрегают членами некоторого порядка малости относительно величины шага. В данном случае сохраняются все члены до 4-го порядка включительно. Формулы Рунге-Кутты имеют вид

$$\begin{aligned}
 x_i^{(k)} &= x_i(t_k), \\
 p_i^{(k)} &= f_i \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, t_k \right), \\
 q_i^{(k)} &= f_i \left(x_1^{(k)} + \frac{1}{2}hp_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \frac{1}{2}hp_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} + \frac{1}{2}hp_n^{(k)}, t_k + \frac{1}{2}h \right), \\
 r_i^{(k)} &= f_i \left(x_1^{(k)} + \frac{1}{2}hq_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \frac{1}{2}hq_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} + \frac{1}{2}hq_n^{(k)}, t_k + \frac{1}{2}h \right), \\
 s_i^{(k)} &= f_i \left(x_1^{(k)} + hr_1^{(k)}, x_2^{(k)} + hr_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} + hr_n^{(k)}, t_k + h \right), \\
 x_i^{k+1} &= x_i^{(k)} + \frac{1}{6}h \left(p_i^{(k)} + 2q_i^{(k)} + 2r_i^{(k)} + s_i^{(k)} \right) \\
 &\quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).
 \end{aligned}$$

Из приведенных формул легко видеть схему алгоритма одношаговых методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений вида (4.1). Алгоритм состоит из двух относительно независимых блоков. В первом блоке производятся вычисления по формулам Рунге-Кутты. Входными данными для этого блока являются значения искомых функций на момент времени t_k .

Результат работы блока — значения искомых функций на момент времени t_{k+1} . Разумеется, исходными параметрами являются сами моменты t_k и t_{k+1} , а также шаг интегрирования h . Реализация этого блока не зависит от конкретной задачи небесной механики. Второй блок — вычисления правых частей уравнений (4.1) при любых заданных аргументах x_1, x_2, \dots, x_n, t . Этот блок полностью определяется постановкой задачи о движении или вращении небесных тел и не зависит от метода интегрирования.

4.4. Алгоритм решения задач о движении небесного тела методами численного интегрирования

Рассмотрим следующий класс задач о движении системы небесных тел. Пусть даны дифференциальные уравнения относительно координат тел. Координатами могут быть как прямоугольные координаты центров масс каждого тела, так и углы поворота каждого тела относительно его центра масс в некоторой заданной системе координат. Уравнения должны быть выражены в форме (4.1), а их правые части заданы так, что известны правила, по которым их можно вычислять для любых заданных значений искомых координат и, возможно, времени. Кроме того, должны быть заданы значения координат на некоторый начальный момент времени t_0 . Обозначим эти начальные значения через $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$. Требуется определить значения координат на некоторый также заданный другой момент времени t_k . Практические цели решения задачи о движении тел системы диктуют необходимость последовательного вычисления координат также и на другие заданные моменты t_2, t_3, \dots, t_k . Чаще всего моменты времени выбираются равноотстоящими так, что

$$t_i = t_{i-1} + H \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (4.3)$$

где H — заданный шаг по времени (но не шаг интегрирования). Таким образом, результатом решения задачи будут значения искомых функций на моменты t_1, t_2, \dots, t_n , то есть $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Поставленная задача является типичной не только в практической небесной механике, но также при различных исследованиях теоретического характера.

Соответственно сформулированной постановке задачи можно составить алгоритм ее решения. Он будет состоять из следующих блоков:

- (1) задание начального момента времени, начальных значений координат и шага следования моментов H ;
- (2) задание следующего момента времени;
- (3) выполнение численного интегрирования уравнений и получение значений искомых функций на следующий момент времени;
- (4) запоминание полученных значений в файле для последующего использования;
- (5) проверка достижения последнего заданного момента времени и переход к пункту (2), если последний момент еще не достигнут;
- (6) прекращение работы алгоритма.

Пункт (1) выполняется путем ввода чисел из файла исходных данных или заданием значений прямо в тексте вычислительной программы.

Пункт (2) выполняется по формуле (4.3).

Реализация пункта (3) в вычислительной программе должна быть независима от поставленной задачи, чтобы любую конкретную задачу можно было решать любым методом численного интегрирования. Поэтому сам метод интегрирования как правило оформляют в виде отдельной процедуры на выбранном языке программирования. Эту процедуру обычно составляют специалисты по методам численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Для использования процедуры в конкретной задаче нужно знать только форму обращения к этой процедуре и способы обмена данными с ней. Необходимая информация обычно содержится в инструкции, которой снабжается процедура при ее передаче или публикации. Пункт (3) алгоритма реализуется согласно инструкции к процедуре. Пример такой инструкции приводится в следующем разделе.

На первый взгляд в описанном выше алгоритме совершенно отсутствует блок вычисления правых частей решаемых уравнений. На самом деле этот блок включен в пункт (3), но реализуется он в виде независимой процедуры, которую составляет специалист, поставивший и решающий задачу. Эта процедура используется в процессе

численного интегрирования, который не зависит от вида правых частей уравнений. Чтобы организовать составление алгоритма и программы, устанавливаются некоторые правила, по которым происходит обращение к процедуре вычисления правых частей уравнений движения. Эти правила также являются частью инструкции к процедуре интегрирования. Алгоритм вычисления правых частей уравнений не зависит от метода интегрирования, однако заголовок этой процедуры должен быть согласован с инструкцией к программе.

Пункты (4), (5) и (6) алгоритма достаточно просты для программирования. Заметим только, что пункт (4) может быть реализован более замысловатым способом. Например, можно запрограммировать построение графических изображений на экране компьютера в зависимости от полученных значений искомых функций. В итоге, последовательная смена картинок в процессе решения задачи даст наглядное представление о движении системы тел.

Заметим также, что при использовании некоторых программ численного интегрирования необходимо задать определенные параметры работы. Это могут быть, например, параметры, задающие точность интегрирования. В то же время результатом выполнения процедуры могут быть различные вспомогательные данные, которые также можно использовать в программе решения задачи.

4.5. Инструкция к вычислительной программе численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эверхарта

В практической небесной механике применяются много различных методов численного интегрирования уравнений движения. Эта наука дает стимул для развития и совершенствования таких методов. В то же время задачи небесной механики являются своеобразным полигоном для испытания новых разработок в этой области. Одним из наиболее применяемых в последнее время в небесной механике методов численного интегрирования является метод Эверхарта (Everhart, 1974). Показательно, что его автором является специалист в области небесной механики. Метод еще подробно описан в книге (Бордовицына, 1984).

Первоначально процедура интегрирования была составлена на языке программирования Фортран самим Эверхартом, поэтому ее

так и называют процедурой Эверхарта. Эта версия программы была затем адаптирована для компьютеров, в памяти которых числа с плавающей запятой занимают 8 байт памяти. Программа свободно передается между исследователями разных научных институтов. Она имеется также и в ГАИШ МГУ, где программа была переписана на язык программирования Си. При этом в форме обращения к ней сохранились свойства параметров, характерные для языка программирования Фортран.

Основным достоинством метода Эверхарта является высокая достижимая точность интегрирования. Платой за точность оказываются большие затраты «машинного» времени вычислений. Процедура интегрирования по методу Эверхарта составлена так, что с помощью двух параметров может быть задана необходимая точность вычислений. В зависимости от заданной точности изменяются необходимые затраты времени вычислений. При низкой требуемой точности вычислительные затраты будут небольшими, однако наилучшее соотношение точности вычислений и затрат времени достигается именно при высокой заданной точности. Основным параметром ε , определяющий точность вычислений на каждом шаге, выражают в виде

$$\varepsilon = 10^{-l}, \quad (4.4)$$

где l — некоторое заданное целое число.

В методе Эверхарта используются специальные аппроксимирующие полиномы по степеням шага интегрирования. Степень этих полиномов N_{order} может быть выбрана из следующего списка целых чисел: 7, 11, 15, 19, 23, 27. В процедуре можно взять любое из этих значений. Однако при невысокой заданной точности интегрирования бесполезно задавать высокую степень полиномов. Это может привести лишь к неоправданным затратам времени вычислений. Поэтому N_{order} выбирают в зависимости от заданной точности вычислений в пределах

$$\frac{3}{4}l \leq N_{order} \leq 2l, \quad (4.5)$$

где l — целое число, фигурирующее в формуле (4.4).

Процедура Эверхарта позволяет решать дифференциальные уравнения движения как в режиме автоматического выбора шага интегрирования, так и при постоянном заданном шаге. Поскольку в

небесной механике большинство задач описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, то для удобства программирования задачи процедура Эверхарта позволяет решать сразу уравнения второго порядка, не разлагая их на удвоенное число уравнений первого порядка вида (4.1).

Наибольшую часть времени интегрирования занимают вычисления правых частей уравнений. Поэтому эффективность программы характеризуется количеством производимых обращений к процедуре вычисления правых частей уравнений в процессе вычислений в конкретной задаче. Для оценки эффективности процедуры оказывается интересным также количество выполненных шагов интегрирования в случае автоматического выборе шага. Обе количественные характеристики выдаются процедурой через ее выходные параметры.

Метод Эверхарта содержит процесс итераций при построении полиномов по степеням шага интегрирования на первом шаге. Обычно оказывается достаточным выполнить две итерации, но в некоторых задачах увеличение числа итераций на этом этапе алгоритма может привести к небольшому повышению эффективности процедуры без существенного увеличения затрат времени вычислений. Поэтому входным параметром процедуры является указанное число итераций, с помощью которого можно управлять эффективностью в некоторых небольших пределах. На начальной стадии решения конкретной задачи мало что известно о свойствах уравнений с точки зрения применения процедуры Эверхарта. Поэтому без сомнений можно задать число итераций равным 2.

В зависимости от того, уравнения какого вида нужно решать методом Эверхарта, задают класс уравнений. Уравнения разделяются на три класса.

Уравнения первого класса имеют вид (1). Ко второму классу относятся системы уравнений второго порядка вида

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}, t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (4.6)$$

Уравнения третьего класса отличаются от уравнений (4.6) только тем, что правые части не зависят от компонент скорости, то есть от первых производных по времени от искомых функций. Это наиболее встречаемые в небесной механике уравнения. Класс таких урав-

нений по странной традиции обозначается как -2. Уравнения класса минус 2 имеют вид

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (4.7)$$

После описания всех особенностей процедуры Эверхарта приведем здесь инструкцию для ее использования. Инструкция, конечно, зависит от используемого языка программирования. Обычно это один из языков процедурного типа, например, Фортран, Паскаль или Си. Формы вызова процедуры на разных языках весьма похожи. Предположим, что программа вычислений составляется на языке программирования Си. Описание некоторых параметров сохраняет свойства, характерные для старых версий языка Фортран. В частности, индексирование переменных в массивах начинается с единицы.

Приведем здесь сначала описание параметров процедуры, а затем сам вызов процедуры. Необходимо описать в программе используемые переменные и задать их значения. Соответствующие фрагменты программы пользователя имеют вид

```
...
#define NV 3
...
double X[NV+1],V[NV+1];
double TI,TF,XL;
int LL, NI, NF,NS, NCLASS, NOR;
...
Rada27(X, V, TI, TF, XL, LL, NV,
        NI, &NF, &NS, NCLASS, NOR);
```

Опишем тип и смысл каждого параметра. Удобно начать с входного параметра NV. Это параметр типа **int**. Он вызывается процедурой по значению, то есть при обращении к процедуре на месте этого параметра может стоять любое выражение типа **int**. Параметр NV задает число искомых функций n . В приведенном выше фрагменте программы пользователя этот параметр задан символьной константой NV.

Следует учитывать тот важный факт, что внутри текста процедуры Rada27 имеются описания внутренних массивов (индексированных переменных) заданной длины. Эта длина зависит от числа

переменных NV. Следует проверять, достаточно ли зарезервировано места для этих внутренних массивов при заданном NV.

Параметр NCLASS задает класс решаемых уравнений. Он может иметь значения 1, 2 или -2 соответственно описанной выше классификации уравнений. Параметр NCLASS типа **int**. Он вызывается процедурой по значению.

Параметры X, V — одномерные массивы (индексированные переменные), в которых индексы используются, начиная с единицы. Эти массивы используются для хранения и передачи значений искомым функциям. В массиве X задаются координаты, а в массиве V — компоненты скорости. Перед обращением к процедуре в этих массивах должны содержаться начальные значения на момент t_0 . После обращения массивы X, V будут содержать значения искомым функций на конечный момент t_k .

Массив V используется только для уравнений классов 2 и -2 для хранения и передачи значений первых производных от искомым функций по времени.

Параметры TI и TF — простые переменные типа **double** задают начальный и конечный моменты времени t_0 и t_k , соответственно. Эти параметры передаются по значению.

Параметр LL типа **int** задает точность вычислений. Он соответствует величине l в формуле (4.4). Этот параметр передается по значению. Автоматический выбор шага интегрирования делается в случае, если значение параметра LL задано положительным. Для включения режима постоянного шага интегрирования следует задать значение LL равным любому отрицательному числу. В этом режиме для задания величины постоянного шага интегрирования используется параметр XL типа **double**. Этот входной параметр передается по значению. При автоматическом выборе шага интегрирования параметр XL не используется.

Для задания степени аппроксимирующих полиномов N_{order} служит входной параметр NOR типа **int**. Он передается в процедуру по значению. Для выбора значения этого параметра следует использовать неравенства (4.5).

Параметр NI типа **int** задает число итераций при определении аппроксимирующего полинома. Это входной параметр, он передается в процедуру по значению. Как уже указано выше, значение этого параметра может быть выбрано равным 2, если наиболее оптимальное значение этого параметра неизвестно.

После вычислений выходные параметры NF и NS типа **int** передают в программу пользователя количество сделанных обращений к вычислению правых частей уравнений и количество выполненных шагов интегрирования, соответственно. Эти параметры передаются в процедуру по наименованию (адресу).

Теперь рассмотрим, как процедура численного интегрирования Эверхарта взаимодействует с процедурой вычисления правых частей уравнений, которую должен составлять пользователь. В соответствии с формой обращения к этой процедуре внутри процедуры Эверхарта ее описание (прототип) в программе пользователя должен иметь вид

```
void FORCE(double *Xc, *Vc, double TM, double *Fc);
```

Массивы Xc и Vc при входе в процедуру содержат значения аргументов функций, определяющих правые части решаемых уравнений. В массиве Xc хранятся значения координат, а в массиве Vc — значения производных от координат по времени. Аргументы располагаются в массивах согласно их номерам, при этом элементы массивов Xc[0] и Vc[0] никогда не используются. Кроме того, параметр Vc используется только тогда, когда решаются уравнения класса 2.

Входной параметр TM типа **double** задает текущий момент времени — аргумент правых частей уравнений. Он передается в процедуру по значению. Если правые части не зависят от времени, то параметр TM не используется.

Результат вычислений правых частей уравнений пользователь должен поместить в элементах выходного массива Fc. Для этого последовательно используются элементы этого массива, начиная с первого. Нулевой элемент массива Fc не используется.

При составлении вычислительной программы численного решения дифференциальных уравнений движения небесных тел могут проявляться некоторые особенности, связанные с применяемым языком программирования и другими средствами программирования, например, компилятором. В частности, необходимо знать, что процедура Эверхарта, записанная на языке программирования Паскаль, использует для своей работы несколько рабочих массивов, которые должны быть описаны вне тела процедуры как глобальные переменные с фиксированными именами. Длина этих рабочих массивов зависит от количества искомых функций, то есть от значе-

ния n в формулах (4.1), (4.6) и (4.7). Проще всего зарезервировать некоторую длину этих массивов и помнить максимальное допустимое число искомых функций, которое нельзя превышать.

При программировании процедуры FORCE вычисления правых частей уравнений могут потребоваться параметры, которые вводятся или задаются в основной программе. Передачу значений этих параметров можно сделать только через глобальные переменные, объявленные в одном из модулей программы и связанные через интерфейсы модулей.

4.6. Программа М.В. Беликова численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

Другая весьма эффективная вычислительная программа численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений была разработана М.В. Беликовым (Belikov, 1993). Метод интегрирования основан на аппроксимации решения на каждом шаге интегрирования отрезками рядов по полиномам Чебышева, близкими к наилучшей равномерной полиномиальной аппроксимации. Используется квадратурная формула Радо-Эрмита наивысшего класса точности при вычислении коэффициентов рядов по смещенным полиномам Чебышева.

Реализация примененного метода в виде вычислительной программы была передана в 90-е годы Институтом теоретической астрономии (С.-Петербург) в ГАИШ МГУ. Процедура, составленная первоначально М.В. Беликовым на языке программирования Фортран, была впоследствии адаптирована Н.В. Емельяновым (ГАИШ МГУ) для языка программирования Си. На языках программирования процедура имеет имя DINCH.

Значительным достоинством программы М.В. Беликова является то, что она включает в себя процедуру аппроксимации результатов численного интегрирования отрезками рядов по полиномам Чебышева. После однократного интегрирования уравнений движения в специальном файле накапливаются коэффициенты разложения координат тела по полиномам Чебышева. С использованием этого файла с помощью простой программы можно получать координаты и скорость небесного тела на любые заданные моменты времени. Подробнее этот прием описан ниже в специальном разделе.

Не вдаваясь в подробности метода, рассмотрим некоторые аспекты использования этой вычислительной программы. Идентификаторы параметров здесь те, которые используются в тексте передаваемой процедуры.

Форма вызова процедуры численного интегрирования `DINCH` схожа с вызовом процедуры Эверхарта (см. выше). Используется такая же терминология класса уравнений. Начальные значения координат и компонент скорости, а также их результирующие значения, размещаются в индексированных переменных также, как и в процедуре Эверхарта. Задается параметр (`NORD`), определяющий степень полиномов аппроксимации на шаге интегрирования. Управление точностью интегрирования производится специальным параметром, аналогично процедуре Эверхарта. Имеется возможность интегрирования с постоянным заданным шагом (`XL`).

Дополнительно задаются некоторые параметры, управляющие процессом интегрирования. Смысл этих параметров можно выяснить в описании метода (Belikov, 1993). В частности, задается некоторый параметр `NNN`, управляющий выбором величины шага интегрирования. При `NNN=0` осуществляется выбор переменного шага по абсолютной величине последнего коэффициента в разложении правых частей уравнений. При `NNN=1` используется относительный критерий — последний к нулевому и первому. В общем случае, когда нет информации о том, как выбрать этот параметр, можно положить `NNN=1`. Задаются параметры выбора числа итераций для определения коэффициентов ряда по смещенным полиномам Чебышева: `ITS` — на стартовом шаге, `ITC` — на последующих. При отсутствии дополнительной информации рекомендуется выбрать `ITS = 6`, `ITC = 2`.

Форма обращения к процедуре `FORCE` вычисления правых частей уравнений точно такая же, как и для процедуры Эверхарта.

Важно учесть, что в тексте программы имеются описания массивов (индексированных переменных), длина которых зависит от числа искомых функций. Следует согласовать эти описания с программой пользователя.

Некоторые необходимые детали процедуры М. В. Беликова можно выяснить при передаче программы пользователю.

В заключение отметим, что программа численного интегрирования, разработанная М. В. Беликовым, успешно применялась автором настоящей книги и показала высокую эффективность.

4.7. Проверка и сравнение некоторых процедур численного интегрирования

При моделировании движения небесных тел методами численного интегрирования дифференциальных уравнений движения возникает актуальный вопрос о выборе той или иной процедуры интегрирования. Обычно делается поиск наиболее эффективного метода. Понятие эффективности должно быть сформулировано строго и однозначно. Эффективность характеризуют два фактора: точность решения и вычислительные затраты (время вычислений). Правильное сравнение двух методов и выяснение эффективности делается так: определяются вычислительные затраты при равной точности, либо оценивается достигнутая точность при равных вычислительных затратах. В некоторых случаях трудно подобрать параметры интегрирования так, чтобы приравнять один из показателей в двух методах. Это можно сделать лишь приближенно.

Как уже было отмечено выше в специальном разделе, точность решения дифференциальных уравнений движения небесного тела принципиально зависит от следующих обстоятельств:

- числа искомых переменных,
- вида правых частей уравнений,
- начальных условий решения,
- интервала времени между начальным и конечным моментами.

Разумеется, сравнение методов следует делать при равных условиях. При этом нужно задавать такие управляющие параметры процедур, которые обеспечивают максимальную точность. Однако в некоторых случаях невозможно реализовать максимально достижимую точность решения из-за недопустимо большого времени вычислений.

4.8. Аппроксимация прямоугольных координат планет и спутников отрезками рядов по полиномам Чебышева

В процессе численного интегрирования дифференциальных уравнений движения небесного тела вычисляются прямоугольные координаты на ряд моментов времени, разделенных шагом численного интегрирования. Возникает проблема хранения и последующего использования полученных результатов. Поскольку шаг чис-

ленного интегрирования бывает весьма малым, то запоминать получаемые координаты на каждом шаге оказывается сложным делом и нецелесообразно. В практических задачах применяют приближенное представление результатов численного интегрирования с помощью отрезков рядов по полиномам Чебышева $T_j(\tau)$. В принципе, для этого подошли бы любые ортогональные функции, например, степенные функции. Однако, преимущество разложения функции по полиномам Чебышева состоит в том, что при таком разложении абсолютная ошибка вычислений знакопеременна и распределена более или менее равномерно по всему интервалу $[-1,1]$ аргумента полиномов Чебышева.

Любую функцию времени на конечном интервале можно представить отрезком ряда по полиномам Чебышева длиной в N слагаемых так, что в N моментов времени на этом интервале такое приближенное представление будет точно совпадать со значением функции. При этом в промежуточные моменты времени значение отрезка ряда будет отличаться от самой функции. Отличия зависят от свойств функции и от максимальной степени полиномов $N - 1$.

Весь интервал времени, для которого выполняется численное интегрирование уравнений движения, делится на равные подынтервалы некоторой длины $\Delta t = t_2 - t_1$, где t_1 и t_2 — моменты начала и конца одного такого подынтервала. На каждом таком подынтервале отдельно строится представление для каждой из координат, например, для координаты x . Задается новая переменная τ по формуле

$$\tau = \frac{2t - t_2 - t_1}{t_2 - t_1}, \quad (4.8)$$

которая будет аргументом полиномов Чебышева. Ясно, что при $t = t_1$ имеем $\tau = -1$, а при $t = t_2$ будет $\tau = 1$. Таким образом, на подынтервале времени (t_1, t_2) аргумент τ изменяется в пределах $[-1, 1]$.

Функцию $x(t)$ можно приблизить формулой

$$x(t) \approx \sum_{j=0}^{N-1} C_j T_j(\tau) - \frac{1}{2} C_0,$$

в которой зависимость τ от времени задана формулой (4.8), а коэффициенты C_j вычисляются из соотношения

$$C_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(\tau_k) T_j(\tau_k) \quad (j = 0, 1, 2, N-1),$$

в котором значения аргумента τ_k определяются по формуле

$$\tau_k = \cos \left(\frac{\pi(k + \frac{1}{2})}{N} \right) \quad (k = 0, 1, 2, N-1).$$

Такое представление будет точно совпадать с самой функцией для значений аргумента τ , равных корням полинома $T_N(\tau)$, которыми и являются числа τ_k .

Из приведенных выше соотношений видно, что нам нужно знать значения координат на ряд определенных моментов времени

$$t_k = \frac{t_2 + t_1 + \tau_k(t_2 - t_1)}{2}$$

внутри интервала (t_1, t_2) .

На практике процесс вычислений программируется следующим образом. В памяти заводится массив коэффициентов C_j ($j = 0, 1, 2, N-1$). Перед входом численного интегрирования в интервал (t_1, t_2) всем элементам этого массива присваиваются нули. Производится численное интегрирование последовательно до каждого момента t_k . При достижении момента t_k мы имеем значения τ_k и $x(\tau_k)$. Здесь осуществляется проход цикла по номеру коэффициента C_j . Каждому коэффициенту C_j дается приращение $(2/N)x(\tau_k)T_j(\tau_k)$. В этом цикле значения $T_j(\tau_k)$ вычисляются с помощью рекуррентного соотношения для полиномов Чебышева

$$T_{j+1}(\tau_k) = 2\tau_k T_j(\tau_k) - T_{j-1}(\tau_k). \quad (4.9)$$

Для начальных значений индекса имеем

$$T_0(\tau) = 1, \quad T_1(\tau) = \tau.$$

Одновременно вычисления выполняются для трех координат x, y, z . При этом для каждой координаты небесного тела вычисляется свой массив коэффициентов C_j . После выхода численного интегрирования из интервала (t_1, t_2) полученные для каждой координаты коэффициенты запоминаются в файле. На каждом следующем подынтервале для коэффициентов C_j используется один и тот же массив

памяти. В итоге, если весь интервал интегрирования был разделен на K равных подынтервалов, то результирующий файл будет содержать $3KN$ чисел.

Если результирующий файл имеется в распоряжении пользователя, то вычисление прямоугольных координат планеты или спутника на заданный момент времени t можно сделать по следующей процедуре. Находим тот подынтервал времени, которому принадлежит заданный момент t . Считываем из файла для каждой координаты массив значений коэффициентов C_j ($j = 0, 1, 2, N - 1$). Вычисляем координаты по формуле

$$x = \sum_{j=0}^{N-1} C_j T_j(\tau) - \frac{1}{2} C_0.$$

Здесь аргумент τ находится из соотношения (4.8), а полиномы Чебышева вычисляются с помощью рекуррентных соотношений (4.9).

4.9. Обзор задач и методов численного интегрирования. Книга В.А.Авдюшева

Обширная информация о методах численного интегрирования дифференциальных уравнений движения небесных тел содержится в монографии (Авдюшев, 2015). В этой книге дается много сведений, необходимых для моделирования движения небесных тел. Приведем здесь краткий реферат этой монографии.

Рассматриваемой областью занимается множество исследователей в мире. Для хорошего взаимопонимания между ними необходима общая терминология. Монография (Авдюшев, 2015) начинается именно с уточнения терминологических моментов.

Важный начальный этап моделирования движения — это составление дифференциальных уравнений движения небесных тел. Трудности получения решения, в частности, в случаях тесных сближений тел, привели к необходимости преобразовывать уравнения. В монографии (Авдюшев, 2015) дается обширный ряд вариантов дифференциальных уравнений движения, позволяющих преодолеть возникающие проблемы. Рассматриваются так называемые методы стабилизации системы уравнений движения. Приводится сравнительный анализ эффективности различных уравнений.

Далее в монографии (Авдюшев, 2015) дается изложение различных методов численного интегрирования. Кроме одношаговых ме-

тодов рассмотрены экстраполяционные методы, многошаговые методы, симплектические методы. В итоге дается сравнительный анализ эффективности различных методов.

Третья часть монографии (Авдюшев, 2015) посвящена обратной задаче орбитальной динамики — определению орбит из наблюдений. Кроме уточнения параметров движения с использованием метода наименьших квадратов, рассмотрен ряд других методов решения задачи. Важным достоинством этого материала является то, что все методы изложены так, как это нужно для их практического применения. В монографии (Авдюшев, 2015) дается сравнительный анализ и оценена эффективность разных методов.

Фактически монография (Авдюшев, 2015) восполняет те важные аспекты, которые были опущены в Главах 4 и 6 настоящей книги из-за ограничения объема.

Литература к Главе 4

Авдюшев В.А., Баньщикова М.А. Определение орбит близких спутников Юпитера. *Астрономический вестник*. 2008. Т. 42. № 4. С. 317–340.

Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит небесных тел. Томск: Издательский дом Томского государственного университета, 2015.

Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. М.: Мир, 1979.

Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н.Дубошина. М.: Наука, 1976.

Belikov M. V. Methods of numerical integration with uniform and mean square approximation for solving problems of ephemeris astronomy and satellite geodesy. *Manuscripta Geodaetica*. 1993. V. 18. P. 182–200.

Butcher J.C. Coefficients for the Study of Runge-Kutta Integration

Processes. Journal of the Australian Mathematical Society. 1963. V. 3. P. 185–201.

Butcher J.C. On the Runge-Kutta Processes of High Order. J. Journal of the Australian Mathematical Society. 1964a. V.4. P. 179–195.

Butcher J.C. Implicit Runge-Kutta Processes. Mathematics of Computation. American Mathematical Society. 1964b. V.18. P. 50–64.

Everhart E. Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits. Celestial Mechanics. 1974. V. 10. Issue 1. P. 35–55.

НАБЛЮДЕНИЯ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

Резюме

Цель этой главы — представить методы для построения условных уравнений, с помощью которых делается уточнение параметров движения спутников на основе наблюдений, как описано ниже в Главе 6. Нужно вычислить теоретическое значение измеряемой величины и ее частные производные по уточняемым параметрам. Это делается по-разному для разных методов наблюдений. Рассматриваются случаи абсолютных измерений координат спутников на небе, относительные измерения координат спутника и планеты или двух спутников. Рассматриваются специальные методы наблюдений спутников, описана техника наземных наблюдений. В конце главы уделяется внимание шкалам времени и системам координат, сопутствующим данным наблюдений.

Отметим, что в настоящей главе описан метод уточнения массы спутника по астрометрическим наблюдениям других спутников, а в Главе 11 приводится решение этой задачи, выполненное автором данной книги.

5.1. Общие принципы наблюдений

На небесные тела мы смотрим «глазами» приборов, с помощью которых наблюдаем. Естественно, что когда мы говорим «наблюдения», подразумеваем «измерения». Что же мы измеряем? Наши приборы могут измерять углы направлений на небесные тела, расстояния до них, а также скорость изменения расстояния. В любом случае мы имеем дело с вектором, начало которого расположено в

точке наблюдения, а конец — на небесном теле, которое наблюдаем. Будем называть этот вектор *вектором наблюдения*.

Известно, что распространение света в пределах Солнечной системы описывается общей теорией относительности. Согласно этой теории, в частности, происходит искривление лучей света из-за массы Солнца. В нашем рассмотрении процессов наблюдений мы будем пренебрегать эффектами общей теории относительности.

Каждому наблюдению приписывают момент наблюдения. Это момент регистрации в фотоприемнике тех фотонов, которые были излучены наблюдаемым спутником или планетой. Следует учитывать тот факт, что из-за конечности скорости света момент старта фотонов с наблюдаемого небесного тела предшествует моменту наблюдения.

Для практических действий необходимо связать вектор наблюдения с одной стороны с прямоугольными координатами небесных тел, с другой стороны — с теми величинами, которые мы измеряем с помощью приборов и которые мы будем называть *измеряемыми величинами*.

Параметры движения спутников определяются на основе наблюдений с использованием измеряемых величин. Однако оказывается, что вывести прямую зависимость этих параметров от измеряемых величин невозможно. Для определения параметров применяется специальный метод дифференциального уточнения, который рассмотрен в следующей главе. Согласно этому методу, необходима обратная операция — вычисление измеряемой величины по заданным параметрам движения.

Прямоугольные координаты могут вычисляться с помощью процедур, разработанных при построении теорий движения. При заданных параметрах движения процедура дает координаты на любой заданный момент времени, который называют входным моментом теории. Под временем здесь имеется в виду аргумент времени, фигурирующий в дифференциальных уравнениях движения небесного тела.

В следующих разделах мы сначала выведем соотношения между векторами наблюдений и прямоугольными координатами небесных тел. Затем получим связь векторов наблюдений с измеряемыми величинами.

В конце настоящей главы мы рассмотрим некоторые детали техники наблюдений спутников планет.

Полезную информацию по рассматриваемым здесь вопросам можно найти в работе (Емельянов, 2017).

Важное замечание. Следует обратить внимание на широко используемую терминологию, связанную с наблюдениями спутников планет. Когда мы говорим «наблюдения», то подразумеваем уже не процесс, а сами результаты измерений. Очень часто наблюдениями называют данные, которые порождаются в процессе наблюдения небесных тел. Также и в настоящей книге во многих случаях под наблюдениями подразумеваются данные: числа, сопровождаемые объяснениями.

Заметим, что наблюдения, представляя собой реально существующие значения некоторых реально измеряемых величин, неминуемо связаны с понятием времени и с таким абстрактным понятием, как система координат. Время на самом деле также измеряется с помощью приборов, а системы координат моделируются путем связывания координат с некоторыми реально существующими объектами. Подробнее эти обстоятельства рассмотрены ниже в конце данной главы.

Очевидно, что время не имеет ни начала ни конца. Однако его нужно измерять. Для этого необходимо задать некоторый момент, от которого будут отсчитываться все другие моменты времени. Таким начальным моментом принято считать 12 часов 1 января 2000 года в той же шкале, в которой отсчитываются другие моменты. Этот начальный момент называют и обозначают эпохой J2000. Юлианский день эпохи J2000 равен 2451545.0.

5.2. Определение топоцентрических положений планет и спутников

Наблюдения небесных тел проводятся с поверхности Земли или с орбиты искусственного спутника Земли. Особый случай наблюдений с борта межпланетного космического аппарата мы здесь не рассматриваем.

Точку земной поверхности, в которой проводятся наблюдения, обычно называют топоцентром. Положение топоцентра относительно геоцентра определяется его положением в земной системе координат. В рассматриваемых здесь задачах это можно делать приближенно. Здесь же мы будем полагать, что топоцентр совпадает с геоцентром.

Модели движения тел в их орбитальном движении вокруг Солнца обычно рассматривают в гелиоцентрической системе координат или в барицентрической системе координат с началом, расположенном в барицентре Солнечной системы.

Теории и модели движения спутников планет строятся в системе координат с началом, расположенном либо в центре планеты, либо в барицентре системы планета-спутники. В общем случае будем называть эту точку просто планетой.

Таким образом, в настоящем разделе будут фигурировать следующие точки: центр Солнца, барицентр Солнечной системы, топоцентр, планета, спутник.

Барицентрические векторы Солнца, топоцентра и планеты будем обозначать через $\mathbf{H}(t)$, $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{P}(t)$, соответственно. Гелиоцентрические координаты топоцентра и планеты будут обозначены через $\mathbf{T}_h(t)$, $\mathbf{P}_h(t)$. Введенные здесь векторы рассматриваются как функции времени. Для их вычисления служат специально разрабатываемые модели движения. Заданной входной величиной таких вычислительных процедур является величина t — независимая переменная, условно называемая аргументом времени. Аргументом времени в разных теориях может быть время, отсчитываемое в разных шкалах, например, TT, TDB. Мы будем предполагать, что перед постановкой в процедуру вычисления вектора положения небесного тела время выражено в необходимой шкале.

5.3. Наблюдения планеты

Предположим для начала, что мы наблюдаем планету. Рассмотрим, как определяется в этом случае вектор наблюдения. Допустим, что наблюдение выполняется в момент времени t_0 . Вектор наблюдения имеет начало в топоцентре, а конец — в наблюдаемом небесном теле при том его положении, которое оно имело в момент, когда с него стартовали те фотоны, которые попали в фотоприемник наблюдателя в момент t_0 . Обозначим вектор наблюдения планеты через \mathbf{P}_T .

Моменту старта фотонов будем приписывать разные индексы в зависимости от объекта наблюдения. Если мы наблюдаем планету, то момент старта фотонов можно обозначить через t_1 .

На рис. 5.1 показана схема расположения планеты и топоцентра в соответствующие моменты времени. Буквой B помечен бари-

центр, буквой T — топоцентр, а буквой P — планета. На рисунке видно, что вектор наблюдения определяется равенством

$$\mathbf{P}_T = \mathbf{P}(t_1) - \mathbf{T}(t_0). \quad (5.1)$$

Моменты времени t_0 и t_1 не совпадают. Их разность, называемая световым временем, задается соотношением

$$t_0 - t_1 = \frac{|\mathbf{P}_T|}{c}, \quad (5.2)$$

где c — скорость света. Поскольку момент наблюдения t_0 задан, то уравнения (5.1) и (5.2) можно решить итерациями, полагая для начала $t_1 = t_0$.

Наиболее точные из существующих в настоящее время теорий движения планет позволяют определять их прямоугольные координаты в системе координат с началом в барицентре Солнечной системы. Обычно теория дает также координаты Солнца в этой системе. Всегда можно сделать соответствующее преобразование и определять гелиоцентрические координаты планет.

Замечание.

Здесь сделаем одно важное замечание. В некоторых работах можно встретить утверждение, что система координат берется гелиоцентрической, то есть начало системы координат помещено в центр Солнца. Положение топоцентра и положение планеты при этом задается гелиоцентрическими координатами. Требуется определить вектор наблюдения \mathbf{P}_T . Применение здесь гелиоцентрических координат приводит к неточности, которая обнаруживается при сравнении наблюдений с теорией. Поясним, в чем источник этой неточности. Покажем далее, что для вычисления вектора наблюдения необходимо брать барицентрические координаты Солнца и планет.

Обозначим через $\mathbf{P}_h(t_1)$, $\mathbf{T}_h(t_0)$ гелиоцентрические векторы планеты и топоцентра в соответствующие моменты времени. По аналогии с предыдущими рассуждениями вектор наблюдения может быть построен как разность

$$\mathbf{P}'_T = \mathbf{P}_h(t_1) - \mathbf{T}_h(t_0),$$

где для вектора наблюдения здесь использовано другое обозначение. На самом деле такое построение оказывается неправильным.

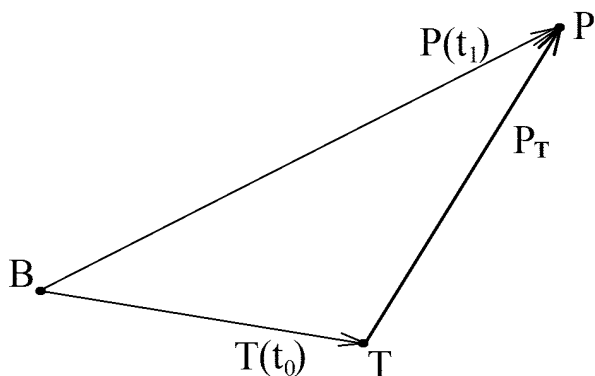


Рис. 5.1. Расположение Земли и планеты при наблюдениях.

Для объяснения введем в рассмотрение барицентрические векторы Солнца в соответствующие моменты времени $\mathbf{H}(t_0)$, $\mathbf{H}(t_1)$. При этом очевидны равенства

$$\mathbf{P}_h(t_1) = \mathbf{P}(t_1) - \mathbf{H}(t_1), \quad \mathbf{T}_h(t_0) = \mathbf{T}(t_0) - \mathbf{H}(t_0).$$

Подстановка этих равенств в предыдущую формулу дает

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_T &= [\mathbf{P}(t_1) - \mathbf{H}(t_1)] - [\mathbf{T}(t_0) - \mathbf{H}(t_0)] = \\ &= \mathbf{P}(t_1) - \mathbf{T}(t_0) - [\mathbf{H}(t_1) - \mathbf{H}(t_0)] = \\ &= \mathbf{P}_T - [\mathbf{H}(t_1) - \mathbf{H}(t_0)]. \end{aligned}$$

Расположение рассматриваемых векторов иллюстрирует рис. 5.2. Для построения вектора \mathbf{P}'_T мы должны совместить начало вектора $\mathbf{T}_h(t_0)$ с началом вектора $\mathbf{P}_h(t_1)$. Теперь видно, что \mathbf{P}'_T отличается от \mathbf{P}_T на разность $\mathbf{H}(t_1) - \mathbf{H}(t_0)$. Это можно интерпретировать так, что за время $t_1 - t_0$ Солнце успевает сместиться на величину $\mathbf{H}(t_1) - \mathbf{H}(t_0)$, что и приводит к разности рассматриваемых векторов. Если бы скорость света была бы бесконечной, то оказалось бы, согласно соотношению (5.2), что $t_1 - t_0 = 0$, следовательно $\mathbf{H}(t_1) - \mathbf{H}(t_0) = 0$ и $\mathbf{P}'_T = \mathbf{P}_T$.

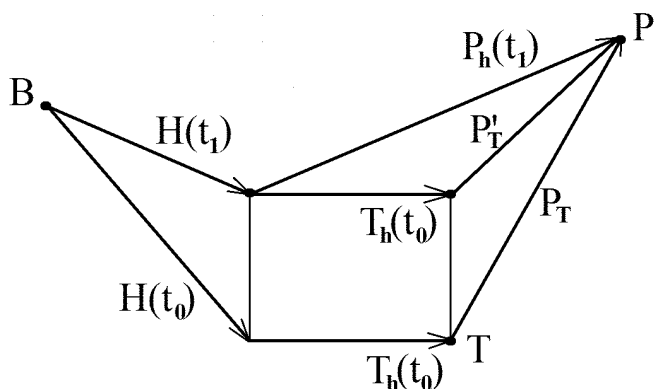


Рис. 5.2. Ошибочное построение вектора наблюдения на основе гелиоцентрических векторов планеты и Земли.

5.4. Наблюдения спутника планеты

Теперь рассмотрим ситуацию, когда мы наблюдаем одновременно планету и спутник планеты. Необходимо определить векторы наблюдений этих тел.

Аналитическая теория или численная модель движения спутника планеты позволяет определять его прямоугольные планетоцентрические координаты на любой заданный момент времени t . Вектор наблюдения спутника в этом случае имеет начало в топоцентре, а конец — в центре масс спутника на тот момент t_1 , в который с него стартовали фотоны, попавшие затем в фотоприемник в момент времени t_0 . Обозначим вектор наблюдения спутника через $\mathbf{S}_T^{(1)}$, а через $\mathbf{S}_p^{(1)}(t_1)$ — планетоцентрический вектор спутника в момент t_1 . Теперь для определения $\mathbf{S}_T^{(1)}$ можно записать соотношение

$$\mathbf{S}_T^{(1)} = \mathbf{S}_p^{(1)}(t_1) + \mathbf{P}(t_1) - \mathbf{T}(t_0).$$

Для определения момента t_1 теперь следует использовать уравнение

$$t_0 - t_1 = \frac{|\mathbf{S}_T^{(1)}|}{c}. \quad (5.3)$$

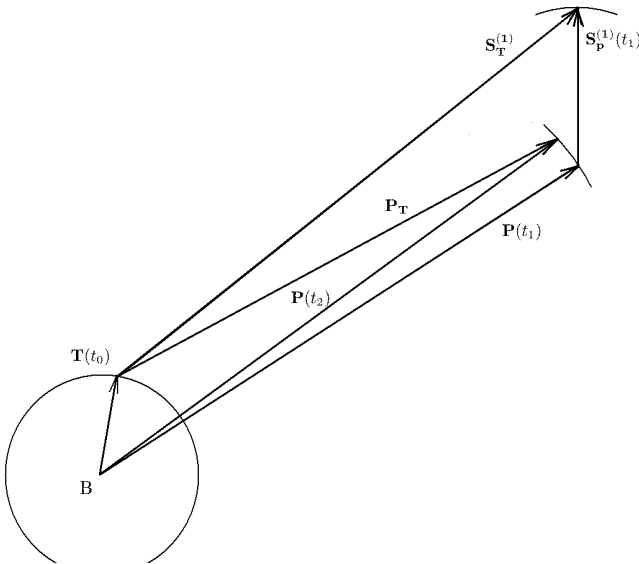


Рис. 5.3. Расположение Земли и планеты при наблюдениях.

Поскольку расстояние от топоцентра до планеты другое, чем расстояние от топоцентра до спутника, то момент старта фотонов от планеты, который мы обозначим здесь через t_2 , отличается от t_1 . Вектор наблюдения планеты в этом случае определится из соотношений

$$\mathbf{P}_T = \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{T}(t_0), \quad (5.4)$$

$$t_0 - t_2 = \frac{|\mathbf{P}_T|}{c}. \quad (5.5)$$

5.5. Наблюдения двух спутников планеты

Рассмотрим случай, когда мы наблюдаем одновременно планету и два ее спутника. Аналитическая теория или численная модель движения спутников позволяет определять их прямоугольные планетоцентрические координаты на любой заданный момент времени t . Вектор наблюдения каждого спутника имеет начало в топоцентре, а конец — в центре масс спутника в тот момент, в который с него стартовали фотоны, попавшие затем в фотоприемник в момент

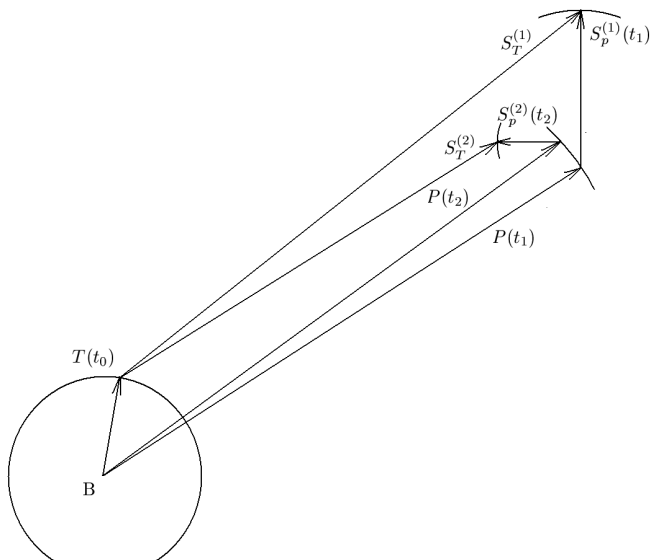


Рис. 5.4. Расположение Земли, планеты и спутников в моменты времени, соответствующие моменту наблюдения. Индекс 1 относится к спутнику номер 1, индекс 2 — к спутнику номер 2.

времени t_0 . Обозначим этот вектор первого спутника через $\mathbf{S}_T^{(1)}$, а вектор наблюдения второго — через $\mathbf{S}_T^{(2)}$.

Фотоны, попавшие в фотоприемник в момент наблюдения t_0 , стартовали с первого спутника в некоторый момент времени t_1 , а со второго — в момент времени t_2 .

Обозначим через $\mathbf{S}_p^{(1)}(t_1)$ планетоцентрический вектор первого спутника в момент t_1 . Бариецентрический вектор планеты в этот момент был $\mathbf{P}(t_1)$. Соответствующие векторы для второго спутника будут $\mathbf{S}_p^{(2)}(t_2)$ и $\mathbf{P}(t_2)$.

Все рассматриваемые здесь векторы показаны на рис. 5.4.

Теперь для определения векторов наблюдения $\mathbf{S}_T^{(1)}$ и $\mathbf{S}_T^{(2)}$ можно использовать следующие уравнения:

$$\mathbf{S}_T^{(1)} = \mathbf{S}_p^{(1)}(t_1) + \mathbf{P}(t_1) - \mathbf{T}(t_0),$$

$$\mathbf{S}_T^{(2)} = \mathbf{S}_p^{(2)}(t_2) + \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{T}(t_0),$$

$$t_0 - t_1 = \frac{|\mathbf{S}_T^{(1)}|}{c},$$

$$t_0 - t_2 = \frac{|\mathbf{S}_T^{(2)}|}{c}.$$

Решать эти уравнения можно последовательными приближениями, полагая сначала $t_1 = t_0$, $t_2 = t_0$.

5.6. Определение угловых измеряемых величин при наблюдениях спутников планет

Аналитическая теория или численная модель движения спутника планеты позволяет определять его прямоугольные планетоцентрические координаты на любой заданный момент времени. При уточнении орбитальных параметров на основе наблюдений необходимо вычислять угловые измеряемые величины на моменты наблюдений. В предыдущих разделах рассмотрены методы определения векторов наблюдений по прямоугольным планетоцентрическим координатам спутников и барицентрическим координатам планет. Теперь необходимо связать измеряемые величины с векторами наблюдений планеты и спутников.

При уточнении параметров движения спутников в качестве измеряемых величин используются угловые топоцентрические координаты. Угловые координаты отсчитываются в геоэквиаториальной системе координат, связанной с экватором и эклипстикой некоторой эпохи. В публикациях прошлых десятилетий встречаются координаты в системе среднего экватора и точки весны различных эпох. Использовались и системы истинного экватора и равноденствия. При этом моделировались прецессия и нутация земной оси. В современных работах экваториальная система координат относится к экватору и эклиптике эпохи J2000. Однако фиксация осей координат уже не связана с вращением Земли. Система опирается на положения внегалактических источников радиоизлучения и называется международной небесной системой координат — International Celestial Reference Frame (ICRF).

В настоящем разделе мы будем предполагать, что оси всех рассматриваемых систем прямоугольных координат соответственно параллельны осям некоторой невращающейся геоэквиаториальной системы, например, ICRF. Угловые координаты планеты и спутников, определенные по векторам наблюдений, рассмотренным в

предыдущих разделах, называют *астрометрическими*. В отличие от астрометрических, использовались также так называемые видимые координаты. Для видимых координат векторы наблюдений определяются иначе, чем рассмотрено выше. Это объяснено, например, в книге Introduction aux Ephémérides Astronomiques, 1997). Здесь же мы рассматриваем только астрометрические координаты.

В геоэквиаториальной системе, наряду с прямоугольными, используют сферические координаты. Широта в геоэквиаториальной системе называется склонением, а долгота — прямым восхождением. Для любого вектора наблюдения с компонентами x, y, z прямое восхождение α и склонение δ определяются из соотношений

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Прямое восхождение и склонение небесного тела, которые называют еще *абсолютными* координатами, могут быть измеряемыми величинами.

Наряду с абсолютными используются также относительные координаты. Это разности небесных координат каких-либо двух тел: спутника и планеты, двух спутников. Если прямые восхождения первого и второго тел обозначить соответственно через α_1, α_2 , а склонения через δ_1, δ_2 , то разности

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \Delta\delta = \delta_2 - \delta_1$$

называют дифференциальными координатами и используют в качестве измеряемых величин. Чаще применяются измеряемые величины

$$X_d = (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_1, \quad Y_d = \delta_2 - \delta_1.$$

Наряду с дифференциальными угловыми координатами X_d, Y_d рассматривают также так называемые тангенциальные координаты X_t, Y_t , определяемые следующим образом. Это всегда координаты одного тела относительно другого. Если небесное тело номер 1 отображается в фокальной плоскости телескопа на оптической оси, то X_t и Y_t есть линейные координаты тела номер 2 на фокальной плоскости, выраженные в долях фокусного расстояния. При этом считается, что ось Y_t параллельна проекции оси вращения Земли в эпоху J2000 и направлена в северный полюс мира. Как вычислять тангенциальные координаты, рассмотрено ниже.

Для запуска процесса уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений необходимо выразить измеряемые угловые координаты через компоненты векторов наблюдений. Выражение абсолютных координат через компоненты вектора наблюдения дано выше. Рассмотрим здесь, как вычислять относительные дифференциальные угловые координаты двух небесных тел.

Дифференциальные координаты можно было бы найти как разности абсолютных координат двух тел. Однако такой способ не является оптимальным. Дело в том, что наблюдаемые пары тел чаще всего располагаются на небе очень близко одно к другому. Тогда вычитание топоцентрических угловых координат тел состоит в вычитании двух близких чисел, что приводит к некоторой потере точности. Разности планетоцентрических координат двух спутников не связаны с вычитанием двух близких чисел. Именно эти разности следовало бы использовать для вычислений.

По этим причинам поступим следующим образом. Обозначим через X, Y, Z компоненты вектора наблюдения первого спутника. Тогда имеем

$$\{X, Y, Z\} = \mathbf{S}_T^{(4)}.$$

Компоненты разности векторов наблюдения второго и первого спутника обозначим через $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$. Тогда имеем

$$\{\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z\} = \mathbf{S}_T^{(2)} - \mathbf{S}_T^{(1)} = \mathbf{S}_p^{(2)}(t_2) - \mathbf{S}_p^{(1)}(t_1) + \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1).$$

Здесь векторы $\mathbf{S}_p^{(2)}(t_2), \mathbf{S}_p^{(1)}(t_1)$ сами по себе малы, а векторы $\mathbf{P}(t_2)$ и $\mathbf{P}(t_1)$ вычисляются для весьма близких моментов времени. Поэтому вычитание двух близких чисел не приводит к потере точности при вычислении $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$.

Заметим, что если первым телом является не спутник, а сама планета, то в последнем соотношении нужно просто положить $\mathbf{S}_p^{(1)}(t_1) = 0$.

Для вычисления дифференциальных координат $\Delta\alpha, \Delta\delta$ в разных публикациях предлагаются простые приближенные формулы, основанные на малости отношения

$$\frac{|\mathbf{S}_T^{(2)} - \mathbf{S}_T^{(1)}|}{|\mathbf{S}_T^{(1)}|}$$

по сравнению с единицей. Однако для вычислений легко запрограммировать точные формулы, выведенные в работе (Емельянов, 1999). Вычисления выполняются по следующей цепочке формул:

$$\begin{aligned}
 R^2 &= X^2 + Y^2, \\
 \operatorname{tg} \Delta\alpha &= \frac{-Y\Delta_x + X\Delta_y}{R^2 + X\Delta_x + Y\Delta_y}, \\
 A &= 2R^2 Z\Delta_z - 2Z^2(X\Delta_x + Y\Delta_y) + R^2\Delta_z^2 - Z^2(\Delta_x^2 + \Delta_y^2), \\
 B &= R\sqrt{(X + \Delta_x)^2 + (Y + \Delta_y)^2} + Z(Z + \Delta_z), \\
 C &= R(Z + \Delta_z) + Z\sqrt{(X + \Delta_x)^2 + (Y + \Delta_y)^2}, \\
 \operatorname{tg} \Delta\delta &= \frac{A}{BC}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

5.7. Вычисление углового расстояния между спутниками и позиционного угла

При уточнении орбит естественных спутников планет помимо разностей угловых координат небесных тел в качестве измеряемой величины используется также угловое расстояние s между спутниками. Преимущества использования такой измеряемой величины заключается в том, что она не зависит от ошибки определения ориентации изображения по отношению к направлению на северный полюс мира.

Мы предлагаем для вычисления углового расстояния между спутниками s следующую формулу:

$$\operatorname{tg} s = \frac{\sqrt{(Y\Delta_z - Z\Delta_y)^2 + (Z\Delta_x - X\Delta_z)^2 + (X\Delta_y - Y\Delta_x)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2 + X\Delta_x + Y\Delta_y + Z\Delta_z}.$$

Здесь вычисление разностей не приводит к увеличению ошибки при вычитании двух близких чисел.

В качестве измеряемой величины может использоваться также позиционный угол P . Это угол на небесной сфере с вершиной в точке, соответствующей первому спутнику, между большим кругом, соединяющим направления на спутники, и линией склонений (большой круг на небесной сфере, соединяющий первый спутник и полюс мира). Для вычисления позиционного угла нужно сначала вычислить абсолютные координаты первого спутника, которые мы

здесь для краткости запишем без индексов как α, δ , затем вычислить дифференциальные координаты $\Delta\alpha, \Delta\delta$ по формулам, которые приведены выше. Тогда позиционный угол P найдется из точного соотношения

$$\operatorname{tg} P = \frac{\cos(\delta + \Delta\delta) \sin \Delta\alpha}{\sin \Delta\delta + 2 \cos(\delta + \Delta\delta) \sin \delta \sin^2 \frac{\Delta\alpha}{2}}. \quad (5.7)$$

Приближенно позиционный угол можно определить, пользуясь формулой

$$\operatorname{tg} P = \frac{X_d}{Y_d}.$$

5.8. Определение тангенциальных координат спутников

Заметим, что в практике обработки астрометрических наблюдений естественных спутников планет, кроме дифференциальных угловых координат, используют также так называемые тангенциальные координаты небесных тел. Как было указано выше, это линейные координаты в плоскости изображения. Начало координат совпадает с оптическим центром поля зрения, одна из осей, X_t , направлена по изображению небесной параллели в сторону востока, а другая, Y_t , — перпендикулярно первой оси к северу. Линейной единицей измерений является фокусное расстояние телескопа. Приближенно разности тангенциальных координат двух спутников совпадают с их дифференциальными угловыми координатами, однако точные формулы для вычисления разностей тангенциальных координат отличаются от формул для дифференциальных угловых координат.

Обычно задаются тангенциальные координаты одного небесного тела относительно другого. Тогда считают, что изображение этого другого тела находится точно на оптической оси, а плоскость изображения перпендикулярна этой оси. Допустим, что нужно вычислить тангенциальные координаты спутника 1 относительно спутника 2. Пусть, как и выше, топоцентрический радиус-вектор второго спутника есть

$$\mathbf{S}_T^{(2)} = \{X, Y, Z\},$$

а разность векторов положения спутников обозначена через $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$. Тогда тангенциальные координаты можно определить по следующим формулам:

$$X_t = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}(-\Delta_x Y + \Delta_y X)}{\sqrt{X^2 + Y^2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + \Delta_x X + \Delta_y Y + \Delta_z Z)},$$

$$Y_t = \frac{-\Delta_x X Z - \Delta_y Y Z + \Delta_z(X^2 + Y^2)}{\sqrt{X^2 + Y^2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + \Delta_x X + \Delta_y Y + \Delta_z Z)}.$$

Тангенциальный позиционный угол P_t находится из соотношения

$$\operatorname{tg} P_t = \frac{X_t}{Y_t}, \quad (5.8)$$

а тангенциальное расстояние s_t по формуле

$$s_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}.$$

5.9. Определение разности координат двух спутников планеты в случае фотометрических наблюдений взаимных затмений спутников

Рассмотрим здесь специальный случай определения векторов наблюдений спутников при определении астрометрических координат спутников планеты на основе фотометрии спутников во время их взаимных затмений. Фотометрические наблюдения взаимных затмений двух спутников планеты позволяют с высокой точностью определять взаимные расположения спутников. Рассматриваемое явление состоит в том, что один из спутников частично или полностью попадает в тень, отбрасываемую другим спутником. При этом его яркость во время наблюдений с Земли уменьшается. Уменьшение яркости затмеваемого спутника можно измерить с помощью фотометра или ПЗС-матрицы. Яркость затмеваемого спутника в первую очередь зависит от гелиоцентрического углового расстояния двух спутников. Она зависит также от угла между направлениями с затмеваемого спутника на Солнце и на Землю, то есть от угла солнечной фазы спутника. Что касается гелиоцентрического углового расстояния двух спутников, то именно эта величина определяет изменения яркости затмеваемого спутника во времени, то есть кривую яркости спутника. При обработке рассматриваемых фотометрических наблюдений необходимо точно моделировать процесс

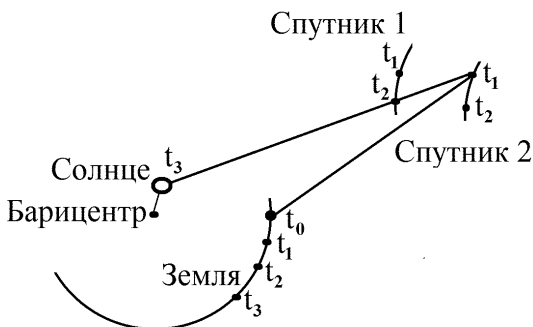


Рис. 5.5. Распространение света при наблюдениях взаимных затмений спутников планет. Последовательность моментов: $t_3 < t_2 < t_1 < t_0$.

распространения света, учитывая конечность скорости его распространения.

Модель рассматриваемого явления поясняет рис. 5.5. Фотоны, излученные Солнцем в момент t_3 , двигаясь прямолинейно, в момент t_2 достигли спутника 2. Бариецентрический вектор Солнца в момент t_3 обозначим через $\mathbf{H}(t_3)$. Часть излученных фотонов попала на поверхность спутника 2. Другие проследовали далее. Бариецентрический радиус-вектор спутника 2 в момент времени t_2 обозначим через $\mathbf{S}^{(2)}(t_2)$. Используя планетную и спутниковую теории, его можно вычислить по формуле

$$\mathbf{S}^{(2)}(t_2) = \mathbf{P}(t_2) + \mathbf{S}_p^{(2)}(t_2). \quad (5.9)$$

Рассматриваемая группа фотонов достигла спутника 1 в некоторый момент t_1 , была рассеяна его поверхностью и проследовала далее в сторону наземного наблюдателя. В момент времени t_0 они достигли Земли и сформировали изображение затмеваемого спутника в фотоприемнике телескопа.

Бариецентрический радиус-вектор спутника 1 в момент времени t_1 мы обозначим через $\mathbf{S}^{(1)}(t_1)$. Его можно вычислить по формуле

$$\mathbf{S}^{(1)}(t_1) = \mathbf{P}(t_1) + \mathbf{S}_p^{(1)}(t_1). \quad (5.10)$$

Разности моментов t_0 , t_1 , t_2 и t_3 задаются соотношениями

$$t_2 - t_3 = \frac{|\mathbf{S}^{(2)}(t_2) - \mathbf{H}(t_3)|}{c},$$

$$t_1 - t_2 = \frac{|\mathbf{S}^{(1)}(t_1) - \mathbf{S}^{(2)}(t_2)|}{c}, \quad (5.11)$$

$$t_0 - t_1 = \frac{|\mathbf{T}(t_0) - \mathbf{S}^{(1)}(t_1)|}{c}.$$

Для определения векторов $\mathbf{H}(t_3)$, $\mathbf{S}^{(2)}(t_2)$ и $\mathbf{S}^{(1)}(t_1)$ необходимо знать моменты времени t_3 , t_2 и t_1 . Искомые векторы и соответствующие моменты времени можно найти, решая итерациями систему уравнений (5.9), (5.10) и (5.11). В нулевом приближении полагаем $t_3 = t_2 = t_1 = t_0$.

Очевидно, что степень затененности спутника 1 зависит от угла между векторами $\mathbf{S}_{\mathbf{H}}^{(2)}(t_2)$ и $\mathbf{S}_{\mathbf{H}}^{(1)}(t_1)$, определяемыми соотношениями

$$\mathbf{S}_{\mathbf{H}}^{(2)}(t_2) = \mathbf{S}^{(2)}(t_2) - \mathbf{H}(t_3), \quad \mathbf{S}_{\mathbf{H}}^{(1)}(t_1) = \mathbf{S}^{(1)}(t_1) - \mathbf{H}(t_3).$$

Этот угол мы назовем эффективным гелиоцентрическим угловым расстоянием двух спутников и обозначим его через s^* .

Компоненты векторов $\mathbf{S}_{\mathbf{H}}^{(2)}(t_2)$ и $\mathbf{S}_{\mathbf{H}}^{(1)}(t_1)$ обозначим следующим образом:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{H}}^{(1)}(t_1) = \{\xi, \eta, \zeta\}, \quad \mathbf{S}_{\mathbf{H}}^{(2)}(t_2) = \{\xi + \Delta_\xi, \eta + \Delta_\eta, \zeta + \Delta_\zeta\}.$$

Тогда s^* определится формулой

$$\operatorname{tg} s^* = \frac{\sqrt{(\eta\Delta_\zeta - \zeta\Delta_\eta)^2 + (\zeta\Delta_\xi - \xi\Delta_\zeta)^2 + (\xi\Delta_\eta - \eta\Delta_\xi)^2}}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \xi\Delta_\xi + \eta\Delta_\eta + \zeta\Delta_\zeta},$$

где малые приращения Δ_ξ , Δ_η , Δ_ζ следует определять по формуле

$$\{\Delta_\xi, \Delta_\eta, \Delta_\zeta\} = \mathbf{S}_{\mathbf{H}}^{(2)}(t_2) - \mathbf{S}_{\mathbf{H}}^{(1)}(t_1) = \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) + \mathbf{S}_{\mathbf{P}}^{(2)}(t_2) - \mathbf{S}_{\mathbf{P}}^{(1)}(t_1).$$

Заметим, что при вычислениях s^* по приведенным выше формулам не происходит потери точности из-за вычитания двух близких чисел.

Если, кроме углового гелиоцентрического расстояния, необходимо вычислять разности угловых гелиоцентрических координат двух спутников, можно воспользоваться формулами, аналогичными формулам (5.6).

5.10. Заключение относительно измеряемых величин при наблюдениях спутников планет

Для определения параметров движения спутников из наблюдений необходимо применять метод дифференциального уточнения, который описан в следующей главе. Для применения этого метода требуется вычислять измеряемые при наблюдениях величины по заданным параметрам движения. Вычисления проводятся по следующей цепочке операций: параметры \Rightarrow планетоцентрические прямоугольные координаты \Rightarrow векторы наблюдений \Rightarrow измеряемые величины. Первый этап выполняется на основе моделей движения спутников. Этому посвящен вышеизложенный материал. Второй и третий этапы операций описаны выше в настоящей главе. Теперь мы имеем все необходимое для применения метода определения параметров движения спутников из наблюдений.

Полезную информацию по рассматриваемым здесь вопросам можно найти в работе (Емельянов, 2017).

5.11. Момент видимого сближения спутников планет как измеряемая величина при наблюдениях

Одним из типов измеряемых величин при наблюдениях спутников планет является измерение взаимных угловых расстояний d двух спутников. Поскольку это расстояние зависит от параметров движения обоих спутников, можно уточнять орбиты по базе данных наблюдений с включением таких измерений. Преимуществом оказывается независимость таких измерений от ориентации полученного при наблюдениях изображения относительно полюса мира. Так исключается обычная в таких случаях ошибка ориентации.

Преобразование результата измерения на изображениях спутников в угловое расстояние между спутниками требует знания масштаба изображения, то есть соотношения между линейными расстояниями на изображении, получаемом в фотокамере, и угловыми расстояниями на небесной сфере. Этот масштаб определяется различными способами. Однако в любом случае масштаб сопровождается ошибкой, которая бывает неизвестной и разной для разных кадров изображений, полученных в одну ночь на одном и том же телескопе. Эта ошибка даст ошибку полученного углового расстояния между спутниками, которое и участвует в определении параметров, а в конечном счете ошибку эфемерид спутника.

Чтобы избежать этой ошибки, а именно, исключить ее совсем, в работе (Morgado et al. 2016) был предложен специальный метод измерений. В этом методе сначала определяются угловые расстояния между двумя спутниками на ряд моментов времени на таком интервале, в течение которого происходит какое-нибудь видимое сближение в паре спутников. На этом интервале существует минимум видимого расстояния. Момент минимума t_0 не зависит от самого расстояния. Однако этот момент зависит от движения спутников и, следовательно, зависит от параметров движения. Идея метода, предложенного в работе (Morgado et al. 2016), состоит в том, чтобы использовать этот момент минимума видимого расстояния t_0 между спутниками в качестве измеряемой величины при уточнении параметров движения спутников. Момент минимума определяется путем аппроксимации зависимости видимого расстояния от времени какими-нибудь подходящими функциями. Можно использовать полиномы достаточно высокой степени.

Поскольку момент минимума не зависит от самого расстояния, то полностью исключается ошибка масштаба изображения. Однако измеренные расстояния содержат случайные ошибки измерений на изображениях. Поэтому найденный момент минимума также будет включать в себе некоторую ошибку.

В работе (Morgado et al. 2016) опубликован ряд таких измерений, а именно, ряд моментов видимых сближений в парах Галилеевых спутников Юпитера.

Такой подход требовал тщательного анализа. Дело в том, что точность эфемерид зависит не только от точности наблюдений, но также от состава и типа измеряемых величин. Необходимо было выяснить, как использование моментов видимых сближений спутников в качестве измеряемых величин повлияет на точность эфемерид. Именно эфемериды являются конечным результатом создания модели движения спутников.

Для такого анализа автором настоящей книги еще ранее был подготовлен необходимый инструментарий. Он описан в Главе 8. Необходимый анализ идеи авторов работы (Morgado et al. 2016) был выполнен в работе (Emelyanov, 2017). С этой целью были сформированы массивы эфемерид Галилеевых спутников Юпитера. Эти эфемериды использовались в качестве наблюдений для вычисления на конечном этапе эфемерид спутников на моменты времени, следующие после интервала времени наблюдений. Моменты таких ис-

кусственных наблюдений выбирались небольшими интервалами, на которых взаимные расстояния в парах спутников имели минимум. Наблюдения моделировались на большом множестве таких интервалов. Для анализа ошибок эфемерид к искусственным измерениям прибавлялись случайные ошибки с заданными дисперсиями и нормальным распределением плотности вероятности ошибок. В вычислительной программе использовался датчик случайных чисел. Сравнивались два варианта состава измерений по типам. В первом варианте (d) в качестве измерений моделировались видимые взаимные расстояния. Во втором варианте (t_0) использовались моменты видимых сближений спутников, вычисленные по взаимным расстояниям.

Случайные ошибки в этом эксперименте задавались следующим образом. Всем моделируемым взаимным расстояниям придавались случайные ошибки с дисперсией, соответствующей точности современных реальных наблюдений. Кроме того, на каждом интервале времени сближения пары спутников к модельным расстояниям прибавлялась одна и та же ошибка, моделирующая ошибку масштаба, присутствующую в реальных наблюдениях. Для разных интервалов сближений выбирались разные значения ошибки масштаба. Для всей совокупности интервалов ошибки выбирались случайным образом с заданной дисперсией ошибки масштаба (scale) σd_s . Так моделировалась ситуация, существующая при реальных наблюдениях.

По так смоделированным наблюдениям сначала определялись параметры орбит, а потом вычислялись эфемериды на ряд моментов времени, следующих после интервала времени наблюдений. Процесс повторялся много раз, каждый раз с новым набором случайных ошибок наблюдений. Значения эфемеридных координат оказывались разными в разных наборах случайных ошибок наблюдений. Точность эфемерид оценивалась по среднеквадратичным значениям отклонений эфемерид от некоторой опорной эфемериды, полученной при нулевых ошибках наблюдений.

Эксперимент проводился несколько раз при разных значениях ошибки масштаба σd_s . Каждый раз оценивалась точность эфемерид. Сравнивались между собой два набора состава наблюдений, различающихся по типам измерений. В первом наборе (варианте) использовались взаимные расстояния d , во втором варианте — моменты видимых сближений t_0 . Получились следующие результа-

ты. При нулевой ошибке масштаба ($\sigma d_s = 0$) ошибка эфемерид во втором наборе (t_0) оказалась существенно большей, чем в первом (d). При увеличении ошибки масштаба σd_s ошибка эфемерид в первом варианте (d) увеличивалась, а во втором варианте (t_0) оставалась неизменной. Это естественно, поскольку во втором варианте моменты взаимных сближений спутников вообще не зависят от ошибки масштаба. После увеличения σd_s при некотором значении $\sigma d_s = \sigma d_s^{(eg)}$ ошибки эфемерид в двух вариантах сравнялись. После дальнейшего увеличения σd_s ошибка эфемерид в первом варианте (d) продолжала увеличиваться.

Из результатов проведенного эксперимента следует вывод, что новая идея авторов работы (Morgado et al. 2016) дает преимущество только при достаточно больших ошибках масштаба. К сожалению, критическое значение $\sigma d_s^{(eg)}$, определяющее выбор типа наблюдений, найти весьма затруднительно в задачах, основанных на реальных наблюдениях. В работе (Emelyanov, 2017) только лишь установлено существование такого критического значения $\sigma d_s^{(eg)}$.

Проведенный в работе (Emelyanov, 2017) эксперимент показывает, что применение новых типов наблюдений всегда требует тщательного анализа точности получаемых при этом эфемерид.

5.12. Средства и техника наземных наблюдений спутников планет

Техника астрометрических наблюдений спутников планет совершенствовалась в течение веков. До XX века наблюдатели смотрели в окуляр телескопа и видели там, кроме изображений звезд, крест паутинных нитей и еще одну нить, положение которой можно было изменять, вращая микрометрический винт. Крест в окуляре поворачивался наблюдателем так, чтобы одно небесное тело попадало на центральное перекрестие нитей, а другое — на перекрестие с дополнительной нитью. При таких наблюдениях измерялось угловое расстояние между двумя небесными телами s и позиционный угол P с вершиной в одном светиле и лучами, направленными на другое светило и на северный полюс мира. При этом чаще всего эти две величины измерялись в разные моменты времени. Такие наблюдения называются в литературе *микрометрическими*.

В XX веке наблюдатели больше смотрели в микроскоп, рассматривая изображения небесных тел, запечатленных на фотопластин-

ках. Такие наблюдения называются фотографическими. Относительные координаты измерялись под микроскопом сначала в миллиметрах, затем их значения переводились в угловые величины. Координаты планет и спутников под микроскопом отсчитываются относительно звезд. Из звездных каталогов брались необходимые небесные экваториальные координаты звезд сравнения. По этим данным выводились экваториальные координаты планет и спутников, называемые в этом случае абсолютными. Ошибки координат звезд из звездных каталогов напрямую попадали в абсолютные координаты наблюдаемых небесных тел. Для уточнения моделей движения спутников могут использоваться относительные угловые координаты, то есть разности координат двух спутников. По таким данным одновременно в одной системе уравнений уточняются параметры орбит обоих тел. Относительные измерения избавлены от ошибок звездных каталогов, однако проблема точности этих данных связана с неопределенностью на практике в знании масштаба и ориентации изображения.

В конце XX века вместо фотопластинок стали применяться светочувствительные матрицы приборов с зарядовой связью (ПЗС). В англоязычном написании это Charged Coupled Device (CCD). Эти фотоприемники оказались намного более чувствительными и дающими лучшее разрешение изображения. Проблемы ограничения точности наблюдений остались те же, что и для фотопластинок. Однако обработка результатов упростилась с применением мощных компьютеров. Такие наблюдения называются просто ПЗС-наблюдениями.

Проблема внесения ошибок звездных каталогов в измеренные координаты планет и спутников решается путем создания новых более точных звездных каталогов. В последнее время значительный прогресс в этом деле был достигнут созданием мощного астрометрического инструмента, запущенного на орбиту вокруг Земли. Это проект GAIA.

Прогресс в точности звездных каталогов привел к новой необычной задаче. Дело в том, что фотографические астрометрические наблюдения планет и спутников производились с начала XX века. На основе имевшихся тогда в распоряжении звездных каталогов были определены и опубликованы координаты наблюдавшихся небесных тел. Фотопластинки этих эпох до сих пор хранятся в так называемых «стеклянных библиотеках». Теперь появилась возможность

произвести заново измерения координат планет и спутников на сохранившихся фотопластинках и получить новые астрометрические координаты этих небесных тел с помощью современных звездных каталогов. Эта деятельность развивается в последнее время в разных институтах мира. Руководят работами сотрудники парижского Института небесной механики и вычисления эфемерид (IMCCE), Франция (Robert et al., 2016).

Спекл-интерферометрические наблюдения.

Следует особо рассмотреть один особый метод астрометрических наблюдений. Прогресс в астрономической технике привел к появлению спекл-интерферометрических наблюдений. Методика таких измерений состоит в следующем. Дифракционная картина, создаваемая в фокусе телескопа светом от планеты и спутника, регистрируется приемником света (ПЗС-матрица) с очень короткой экспозицией порядка 10 мс (время «замороженности» турбулентности атмосферы). При таком способе регистрации изображение планеты получается в фокальной плоскости телескопа в виде группы пятнышек – спекул, случайно разбросанных внутри небольшой области, определяемой атмосферным кружком размытости изображения. Каждая спекула соответствует некоторой флуктуации света в турбулентной атмосфере Земли. Свет от спутника, попадающий в телескоп под небольшим углом к направлению на планету, при условии, что он проходит через те же флуктуации атмосферы (изопланатизм), создает в фокальной поверхности группу спекул, подобную группе спекул от планеты, но смещенную в соответствии с угловым расстоянием между планетой и спутником и их позиционным углом. Точность регистрации расположения спекул определяется размером дифракционного пятна для данного телескопа. Обычно регистрируют длинный ряд последовательных по времени кадров. Измеренные линейные координаты спекул со всех кадров вводятся в компьютер и подвергаются корреляционному анализу. Каждой спекуле, соответствующей планете, находится спекула, соответствующая спутнику. Статистическая обработка результатов таких измерений дает средние значения углового расстояния и их позиционного угла. В итоге точность спекл-интерферометрических наблюдений в сотни раз превосходит точность, которую дают обычные фотографические наблюдения.

5.13. Источники данных наблюдений спутников планет

Пути результатов наблюдений от наблюдателя до исследователя, который использует эти данные для получения новой информации или для создания эфемерид, бывают весьма различные. В прошлые века очень часто исследователи наблюдали, и сами же определяли орбиты спутников. Однако довольно быстро выработался обычный прием — публиковать наблюдения в научных журналах. При этом, во-первых, возникала возможность сохранить данные на многие годы, и, во-вторых, результаты наблюдений становились доступными любому желающему. Этот прием применяется до сих пор. Например, все наблюдения далеких спутников больших планет поступают в научное издание *Minor Planet Circular* (MPC), к текстам которого в наше время имеется доступ через Интернет на сайте MPC по адресу <https://minorplanetcenter.net/iau/mpc.html>.

До какого-то времени результаты наблюдений помещались прямо на страницы научного журнала. Больше всего наблюдений в течение веков публикуется в журналах *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (MNRAS), *Astronomische Nachrichten* (AN), *Astronomy and Astrophysics* (AA), *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* (AAS), *Astronomical Journal* (AJ). В последнее время некоторые журналы создали свои электронные базы данных, доступные через Интернет. При этом в тексте статьи дается подробное описание наблюдений, а сами данные размещены в электронном виде в базе данных. Часто авторы приводят в статье небольшой фрагмент таблицы с наблюдениями, размещенными в электронной базе данных.

Случалось в разные времена, что наблюдатели публиковали свои наблюдения в весьма малодоступных изданиях. Примерами могут служить Труды Казанской городской астрономической обсерватории и «Рукописи, депонированные в ВИНТИ». В таких случаях труды наблюдателей могли быть забыты, а ценные научные данные потеряны. К счастью, создатели некоторых общих баз данных наблюдений спутников планет занимаются «спасением наблюдений», разыскивая данные в малодоступных научных изданиях и помещая их в базу данных. В частности, так поступали создатели базы данных наблюдений естественных спутников планет *Natural satellites Database* (NSDB), о которой подробнее написано в Главе

12 данной книги. Приведем здесь адреса NSDB в Интернете:
<http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/obspos/>
<http://nsdb.imcce.fr/obspos/>

Любое наблюдение состоит, как минимум, из двух значений: момент наблюдения и значение измеряемой величины. Однако этих двух чисел на самом деле не достаточно. Дело в том, что время всегда отсчитывается в той или иной шкале времени, а измеряемая величина определяется в той или иной системе координат. Без указания на шкалу времени и на систему координат данные могли бы оказаться бесполезными. Еще одним необходимым атрибутом наблюдения является указание того, в каком месте выполнено наблюдение. На деле нужны координаты обсерватории. В некоторые эпохи все наблюдатели использовали одну и ту же шкалу времени и одну и ту же систему координат. При этом в публикациях эти детали не указывались. Подобные обстоятельства иногда затрудняли или исключали совсем использование таких наблюдений. Исследователям приходилось привлекать косвенную информацию, чтобы восстановить недостающие данные.

Иногда в публикациях результаты наблюдений снабжаются указаниями на используемые средства наблюдений: диаметр телескопа, тип фотоприемника, метеорологические условия. Эта информация бывает полезна для предварительной оценки точности наблюдений или для отбраковки наблюдательных данных.

Отметим один из особых источников данных наблюдений спутников планет. Данные, публикуемые в журнале *Astronomy and Astrophysics* (AA), очень часто размещаются в специальной электронной базе данных *VizieR On-line Data Catalog*. Это часть большой базы астрономических данных *Centre de Donnees astronomiques de Strasbourg – Strasbourg astronomical Data Center*. Найти результаты наблюдений в этой базе данных можно, если знать номера тома и первой страницы соответствующей статьи, опубликованной в журнале. Адрес данных в Интернете будет <http://vizier.cfa.harvard.edu/viz-bin/VizieR?-source=J/A+A/NV/NP> где NV – это номер тома, а NP – номер страницы. В последнее время вместо номера страницы используется номер статьи. Примером адреса может служить следующая строка:
<http://vizier.cfa.harvard.edu/viz-bin/VizieR?-source=J/A+A/582/A36>

Кроме наблюдений, выполняемых в наземных обсерваториях, астрометрические наблюдения спутников планет велись и ведут-

ся также с помощью телескопов, расположенных на искусственных спутниках Земли. Много наблюдений, выполненных с помощью космического телескопа «Хаббл» (Hubble Space Telescope — HST) приведены в упомянутой выше базе данных NSDB. В базы данных поступают также наблюдения далеких спутников планет, выполняемые с помощью телескопа на ИСЗ WISE.

В итоге, можно заключить, что в настоящее время для поиска наблюдений естественных спутников планет следует прежде всего обращаться к какой-нибудь электронной базе данных. Подробнее о таких базах данных написано в Главе 12 настоящей книги.

5.14. Шкалы времени и системы координат при наблюдениях спутников планет

Сразу отметим, что разработкой шкал времени и систем координат занимается служащая для этого наука астрометрия. Воспроизвести все необходимые сведения в рамках данной книги невозможно. Для решения всех астрометрических проблем, возникающих при изучении динамики естественных спутников планет, следует обращаться к соответствующим статьям и книгам по астрометрии. Однако самые необходимые сведения мы здесь рассмотрим.

Шкалы времени.

Шкалы времени определяются двумя обстоятельствами. Первое — это тип физического датчика времени. Примеры: атомные часы, пульсары. Второе — это эффекты общей теории относительности, из-за которых часы, расположенные в разных местах Солнечной системы, идут не одинаково.

Основной и самой универсальной шкалой времени, используемой при изучении движения тел Солнечной системы, является шкала TDB (Barycentric Dynamical Time). Это время равномерно идущих часов, расположенных в барицентре Солнечной системы. Поскольку на самом деле там никаких часов нет, то шкала TDB — это модель. Другой универсальной шкалой является TT (Terrestrial Time). Это время равномерно идущих часов, расположенных на геоиде (совсем вблизи поверхности Земли). К сожалению, в жизни людей на Земле шкалы времени TDB и TT были бы неудобны. Наша жизнь связана с восходом и заходом Солнца, что определяется вращением Земли. Для нас могла бы быть удобной шкала вре-

мени UT1, связанная с вращением Земли. Все могло быть хорошо со шкалой UT1, но к сожалению, Земля вращается не только неравномерно, но и непредсказуемо неравномерно. Земля не может быть подходящим датчиком времени. Оказывается, отличным датчиком равномерного времени являются атомные часы. Соответствующую шкалу времени назвали TAI (Time Atomic International). Шкалу времени TT связали со шкалой TAI простым соотношением

$$TT = TAI + 32.184 \text{ с.}$$

Для удобной жизни на Земле придумали шкалу времени UTC (Universal Time Coordinated), которое никогда не отличается от UT1 более, чем на одну секунду, но в какие-то периоды постоянно идет по шкале атомного времени TAI, отличаясь от него на известную постоянную величину. Однако, из-за неравномерного хода UT1 иногда приходится прибавлять целую секунду к шкале UTC так, чтобы разность UTC-UT1 не превысила 0.9 секунды. Такие поправки приходится вносить примерно один раз в год, чаще или реже, в зависимости от причуд вращения Земли. В итоге, например, с 1 июля 2015 года до 1 января 2017 разность TT-UTC постоянно составляла 68.184 секунд. При этом разность UTC-UT1 ни разу не превысила 0.9 секунды.

Решение о внесении односторонней поправки в UTC принимает Международная служба вращения Земли (International Earth Rotation Service – IERS). Сообщение об этом решении за несколько месяцев заранее появляется на странице IERS в Интернете по адресу <https://hpiers.obspm.fr/iers/bul/bulc/bulletinc.dat>

Таблица разностей TT-UTC и соответствующий график размещены в Приложении 4 настоящей книги.

В настоящее время почти все наблюдения естественных спутников планет проводятся и публикуются с использованием шкалы времени UTC. Однако так было не всегда. В прошлом применялось много различных шкал времени. Если попытаться воспользоваться данными наблюдений, выполненных и опубликованных в прошлые века, то нужно знать связь применявшихся тогда шкал времени со шкалой UTC. Связи различных шкал времени, которые использовались в прошлом, приводятся в Приложении 4 настоящей книги.

Теперь выясним, как быть со шкалой времени, в которой строятся модели движения спутников. При решении дифференциальных уравнений движения предполагается, что время течет равно-

мерно. Поэтому в качестве шкалы времени теории движения спутника можно использовать только TDB или TT. Выясним, в чем разница. Между этими шкалами существует соотношение

$$TDB = TT + P,$$

где P представлено суммой периодических по времени слагаемых. Максимальную амплитуду 0.001656 секунды имеет член с периодом 1 год. Остальные слагаемые значительно меньше. Для очень точного представления P можно взять ряд, опубликованный в работе (Fairhead, Bretagnon, 1990). Так что, если нас устраивает точность времени в 0.001656 секунды, то безразлично, какую из указанных двух шкал выбрать.

Таким образом, из предыдущего изложения следует, что моменты наблюдений, опубликованные в шкале UTC, нужно сначала перевести в шкалу TT с помощью таблицы, данной в Приложении 4, а затем, если нужно, перевести их в шкалу TDB с помощью ряда, опубликованного в работе (Fairhead, Bretagnon, 1990).

При интерпретации и использовании результатов астрометрических наблюдений, опубликованных в прошлых столетиях, нужно учитывать следующую особенность. При датировании наблюдений до 1925 года началом суток считался полдень, то есть 12 часов. В полдень начинается каждый юлианский день.

Дата наблюдений может задаваться в форме календарной даты по григорианскому календарю или юлианским днем JD. Используется также Модифицированный юлианский день MJD, связанный с JD соотношением

$$JD = MJD + 2400000.5.$$

Комментарии о шкалах времени даны также в Приложении 4.

Системы координат.

Результаты астрометрических наблюдений спутников — это либо угловые геоэваториальные координаты прямое восхождение α и склонение δ , либо разности этих координат для двух объектов: спутника и планеты или двух спутников. Если получаются непосредственно α , δ , то наблюдения называются абсолютными, если разности координат, то наблюдения считаются относительными.

Абсолютные координаты получаются путем измерения линейных координат объекта на фотопластинке или на графическом

изображении, полученным с помощью ПЗС-камеры. Затем измеряются линейные координаты опорных звезд. Берутся координаты опорных звезд из того или иного каталога. Далее путем моделирования связи линейных координат на изображении и угловых координат на небе получаются прямое восхождение и склонение объекта. При таких наблюдениях получаемые координаты спутников непосредственно зависят от использованного звездного каталога.

Относительные координаты получаются путем измерения разностей линейных координат двух объектов на изображении. Для перевода этих измеренных разностей координат в разности небесных координат необходимо знать ориентацию и масштаб изображения. Для определения этих параметров применяются разные способы. Масштаб находят калибровкой камеры по изображениям звездных скоплений с известными относительными координатами, либо по измерению фокусного расстояния телескопа различными техническими методами. Ориентацию определяют иногда по часовому ходу объектов на кадре изображения, полученному при остановленном механизме ведения телескопа. Применяются и другие методы. В силу ограниченности нашего изложения мы здесь другие методы не рассматриваем.

Обычно координаты отсчитываются в некоторой невращающейся геоэваториальной системе координат какой-то фиксированной эпохи экватора и равноденствия. В публикациях наблюдений естественных спутников планет встречаются три такие системы. Одна из них — это ICRF (International Celestial Reference Frame), основанная на внегалактических радиоисточниках. Вторая — динамическая система координат, связанная с движением планет. Динамическая система реализована планетными эфемеридами DE200/LE200, разработанными ранее в JPL (США). Третья — система координат звездного каталога FK5. Очень часто результаты наблюдений снабжаются простым указанием на то, что используется система координат эпохи J2000. При этом дается название звездного каталога, который использовался при редукции наблюдений. В этом случае подразумевается система координат этого звездного каталога.

При совместном использовании наблюдений, редуцированных с помощью разных звездных каталогов, необходимо преобразовывать координаты спутников из одной системы в другую. Для этого необходимо знать связь систем координат. Известна матрица перехода между системой звездного каталога FK5 и динамической систе-

мой координат. Она опубликована в статье (Standish, 1982). Связь системы координат каталога FK5 и ICRF дана в работе (Feissel, Mignard, 1998).

В прошлом наблюдения обрабатывались с использованием координат звезд из особенного звездного каталога FK4. Его особенность заключается в специальной упрощенной модели годичной aberrации. В силу этой особенности переход от координат в системе FK4 к координатам в системе FK5 не может быть сделан с помощью простой матрицы поворота. Преобразование зависит как от времени отсчета координат, так и от самих координат объекта. Как сделать такое преобразование, описано в работе (Aoki et al., 1983).

Заметим, что система координат звездного каталога FK4 связана с геоэклиптикой и экватором эпохи B1950. Поэтому в публикациях наблюдений часто указывается система координат эпохи B1950. На самом деле имеется в виду система координат звездного каталога FK4. Вообще-то, в астрометрических наблюдениях XX века встречаются различные специальные случаи систем координат. При использовании наблюдений необходимо детально рассматривать используемые системы координат, чтобы не допустить ошибки.

Все рассмотренные выше системы имеют определение как астрографические системы координат. С 1984 года с астрографической системой становится идентичной астрометрическая система координат. Это именно та система, которая принята в разделах 5.2–5.9 настоящей главы.

Кроме этой системы, при наблюдениях прошлых лет использовались также и другие системы. Прежде всего, следует рассмотреть систему координат также астрометрическую, но относящуюся к подвижным геоэкватору и точке весны. Рассматривают истинные экватор и равноденствие на тот же момент, что и момент наблюдения. Тогда говорят об истинных экваторе и равноденствии «эпохи даты». Осреднение координат полюса и точки весны в процессе нутации приводит к средним экватору и равноденствию «эпохи даты». Геоэквадориальные координаты могут быть измерены в системе истинных или средних экватора и равноденствия, соответственно. При преобразованиях от этих систем к системам с неподвижными экватором и точкой весны могут использоваться различные модели прецессии и нутации. Одна из последних версий — это модель прецессии, принятая решением Международного Астрономическо-

го Союза (МАС) в 1976 году, и модель нутации, принятая Международной службой вращения Земли (IERS) (Seidelmann, 1982). Ссылку на публикацию модели прецессии МАС 1976 можно найти в работе (Seidelmann, 1982).

Несмотря на прогресс в астрометрии, модель прецессии МАС 1976 применяется и сейчас. Однако модель нутации постоянно уточняется. Фактически в Международной службе вращения Земли (IERS) отказались от такой упрощенной модели. Вместо нее используются параметры, задающие ориентацию оси вращения Земли. На сайте IERS публикуется постоянно обновляемая таблица, в которой с шагом в 1 сутки на прошлые эпохи приводятся параметры ориентации Земли (Earth Orientation Parameters — EOP). Даются параметры, которые нужны для получения поправок к координатам оси вращения, определяемых моделью нутации МАС 1980 и параметры, прямо определяющие ориентацию оси. Адрес в Интернете этой таблицы следующий:

https://datacenter.iers.org/data/latestVersion/223_EOP_C04_14.62-NOW.IAU1980223.txt

Кроме астрометрических координат, в практике наблюдений в прошлые годы встречались и другие определения систем координат. В частности, вводилось понятие *видимые координаты*. Это координаты, определяющие направление вектора от точки положения наблюдателя в момент старта фотонов до точки положения объекта также в момент старта фотонов с наблюдаемого объекта, тех фотонов, которые достигли фотоприемника в момент наблюдения. Разность моментов — это световое время от наблюдателя до объекта. При использовании видимых координат дополнительные предположения принимались «по умолчанию». В частности, использовалось истинное положение экватора и истинное положение точки весны. В каждом случае нужно тщательно изучать, какие применялись предположения при обработке наблюдений прежде, чем они были опубликованы.

В понятие видимых координат может входить учет искривления луча зрения, вызванного гравитационным действием Солнца. Это эффект общей теории относительности. В частности, эффект искривления луча учитывается при вычислении видимых координат в эфемеридном сервере HORIZONS (JPL), доступном в Интернете по адресу <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

Описание рассмотренных здесь систем координат и соответствующих методов можно найти в книгах (Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, 1992; Introduction aux Ephémérides Astronomiques, 1997).

Литература к Главе 5

- Емельянов Н. В.* Связь астрометрических и теоретических координат спутников планет. *Астрономический вестник*. 1999. Т. 33. № 2. С. 154–158.
- Емельянов Н. В.* Актуальные задачи динамики спутников планет и двойных астероидов на основе наблюдений. *Астрономический вестник*. 2017. Т. 51. № 1. С. 24–43.
- Aoki S., Soma M., Kinoshita H., Inoue K.* Conversion matrix of epoch B 1950.0 FK 4-based positions of stars to epoch J 2000.0 positions in accordance with the new IAU resolutions. *Astronomy and Astrophysics*. 1983. V. 128. No. 2. P. 263–267.
- Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac. Edited by P.K. Seidelmann. University Science Books. Mill Valley, California. 1992.
- Emelyanov N. V.* Precision of natural satellite ephemerides from observations of different types *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2017. V. 469. Issue 4. P. 4889–4898.
- Fairhead L., Bretagnon P.* An analytical formula for the time transformation TB-TT. *Astronomy and Astrophysics*. 1990. V. 229. № 1. P. 240–247.
- Feissel M., Mignard F.* The adoption of ICRS on 1 January 1998: meaning and consequences. *Astronomy and Astrophysics*. 1998. V. 331. P. L33–L36.
- Introduction aux éphémérides Astronomiques. Supplément explicatif à la connaissance des temps. (eds. Simon J.-L., Chapront-Touzé M., Morando B., Thuillot W.). Bureau des Longitudes. Paris. Publisher: Les éditions de physique, France. 1997. 450 pp.
- Morgado B. E., Assafin M., Dias-Oliveira A., Gomas Jr. A.* Astrometry of mutual approximations between natural satellites. Application

to the Galilean moons *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2016. V. 460. P. 4086–4097.

Robert V., Pascu D., Lainey V., Arlot J.-E., De Cuyper J.-P., Dehant V., Thuillot W. New astrometric measurement and reduction of USNO photographic observations of the main Saturnian satellites: 1974-1998. *Astronomy and Astrophysics*. 2016. V. 596. Id. A37, 10 pp.

Seidelmann P. K. 1980 IAU theory of nutation - The final report of the IAU Working Group on Nutation. *Celestial Mechanics*. 1982. V. 27. P. 79–106.

Standish E. M. Jr. Orientation of the JPL Ephemerides, DE 200/LE 200, to the dynamical equinox of J2000. *Astronomy and Astrophysics*. 1982. V. 114. P. 297–302.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ НАБЛЮДЕНИЙ

Резюме

Эта глава представляет главную процедуру изучения динамики естественных спутников — построение модели движения на основе наблюдений. Исходными данными являются значения измеряемой величины, получаемые из наблюдений. Необходимо определить параметры движения: постоянные элементы орбиты или начальные условия интегрирования уравнений движения спутника.

В условиях наличия ошибок наблюдений и ошибок теории методы решения задачи основаны на теории вероятностей. Вся совокупность этих методов называется алгоритмами фильтрации. В данной главе подробно описан один из них — метод наименьших квадратов (МНК). За обоснованием МНК читателя отправляем к соответствующей литературе. Здесь же даем алгоритм его применения к поставленной задаче. В силу приближенности оценок, получаемых по МНК, определение параметров заключается в их последовательном дифференциальном уточнении.

Один из этапов решения — вычисление частных производных от измеряемых величин по уточняемым параметрам. В данной главе этому уделено много внимания, особенно для случаев, когда модель движения строится численным интегрированием дифференциальных уравнений движения спутника. В этих случаях искомые производные называются изохронными, поскольку вычисляются на моменты наблюдений.

В конце главы рассмотрены две очень трудные проблемы: назначение весов наблюдениям и отбраковка грубых наблюдений.

6.1. Метод дифференциального уточнения параметров движения небесных тел на основе наблюдений. Применение метода наименьших квадратов

В небесной механике существует ряд задач, различных по изучаемым объектам, но сходных по способу их решения. Эти задачи можно сформулировать как «Уточнение параметров движения небесных тел из наблюдений». Детальное объяснение того, что мы понимаем под параметрами и наблюдениями дано в предыдущих разделах. Здесь опишем эти понятия кратко.

Параметрами движения небесных тел называются величины, от которых зависит движение тел, и которые по крайней мере на некотором этапе изучения или на некотором интервале времени считаются постоянными. Мы рассматриваем три типа параметров. Первый тип — параметры, которые входят в уравнения движения. Они существуют еще до решения уравнений. Второй тип параметров появляется в процессе решения дифференциальных уравнений движения. Это либо произвольные постоянные в общем аналитическом решении уравнений, либо начальные условия численного интегрирования, то есть координаты и компоненты скорости тел в начальный момент времени. Параметры третьего типа входят в соотношения, связывающие результаты наблюдений и координаты небесного тела. Они не связаны с движением изучаемого объекта, но зависят от того, как мы наблюдаем, и называются параметрами условий наблюдений.

Примерами параметров первого, второго и третьего типов могут служить гравитационный параметр небесного тела, элементы его орбиты и геоцентрические координаты обсерватории, соответственно.

В процессе наблюдений измеряются какие-либо величины, зависящие от положения или скорости небесного тела. Они так и называются — **измеряемые величины**. Наблюдения дают нам значения измеряемых величин на моменты измерений. Одновременно могут измеряться несколько величин. Для простоты изложения без нарушения общности изложения будем полагать, что все величины измеряются независимо, каждая в один момент времени. Моменты измерений разных величин могут совпадать. Примерами измеряемых величин являются угловые топоцентрические экваториальные

координаты небесного тела, топоцентрическая дальность небесного тела, разность угловых координат двух небесных тел. Измеряемая величина всегда является реальной физической величиной, получаемой с помощью измерительных приборов в определенный момент времени в определенном месте. Моменты измерений отсчитываются по часам, расположенным в пункте наблюдений. При этом должна быть известна связь шкалы времени наблюдений со шкалой времени, которое фигурирует в модели движения, то есть в дифференциальных уравнениях движения.

Задачу уточнения модели движения небесного тела сформулируем следующим образом: даны результаты наблюдений, требуется найти параметры движения.

Пусть ξ — одна из измеряемых величин, а p_1, p_2, \dots, p_n — истинные, но неизвестные значения параметров движения небесного тела. Измерение делается в некоторый момент времени t . Измерений обычно делается много, каждому приписывается номер i . В итоге мы имеем ряд значений измеряемых величин ξ_i на ряд моментов времени t_i , $i = 1, 2, \dots, m$, где m — число измерений.

При построении модели или теории движения небесного тела неизбежно используются те или иные системы координат. Обычно это координаты, которые фигурируют в дифференциальных уравнениях движения. В отличие от измеряемых величин, которые всегда реальны, ибо они получаются из реальных измерительных приборов, координаты — это некоторые абстрактные понятия. В большинстве случаев их ничем невозможно измерить. Например, мы не можем непосредственно измерить прямоугольные геоцентрические координаты спутника Земли. Оси любой системы координат связывают с каким-либо реальным объектом. Например, оси земной системы координат связывают с положениями ряда опорных обсерваторий на поверхности Земли. Оси небесной системы координат связывают с положениями звезд или внегалактических радиисточников. В любом случае строится некоторая модель системы координат. Эта модель может со временем изменяться, совершенствоваться.

Теория движения небесного объекта дает нам модельные значения некоторых координат на заданный момент времени. Чаще всего предполагается, что оси системы координат неврацающиеся, то есть всегда взаимно параллельны осям некоторой инерциальной системы координат. Относительно времени предполагается, что оно

равномерное. Однако эти свойства координат и времени обеспечиваются только моделью связи с некоторыми реальными небесными телами или реальными периодическими процессами.

Теория и модель движения дают нам на любой заданный момент времени t значения координат, которые здесь для определенности будем считать декартовыми прямоугольными и обозначим их через x, y, z . Координаты зависят еще от параметров движения, которые обозначим здесь через p_1, p_2, \dots, p_j . Здесь число параметров j для одного небесного тела может быть равно 6 или больше, в зависимости от используемой теории. Таким образом, из теории мы имеем параметрические функции времени

$$\begin{aligned}x &= x(t, p_1, p_2, \dots, p_j), \\y &= y(t, p_1, p_2, \dots, p_j), \\z &= z(t, p_1, p_2, \dots, p_j),\end{aligned}\tag{6.1}$$

называемые законом движения.

При проведении наблюдений мы обязательно должны знать, как связана измеряемая величина ξ_i с координатами небесного тела. Эта связь задается некоторой моделью измерений. Модель может включать в себя некоторые параметры. Обозначим такие параметры через $p_{j+1}, p_{j+2}, \dots, p_n$. Модель наблюдений дает нам функцию

$$\xi = \xi(t, x, y, z, p_{j+1}, p_{j+2}, \dots, p_n).\tag{6.2}$$

Подставляя теперь функции (6.1) для координат в правую часть соотношения (6.2), получим модельное значение измеряемой величины ξ^c , как известную функцию времени t и параметров движения:

$$\xi^c = \xi(t, p_1, p_2, \dots, p_n).\tag{6.3}$$

Любая модель содержит ошибки. Обозначим ошибку модели через δ_{th} . Тогда истинное значение измеряемой величины ξ определится путем исключения ошибки δ_{th} :

$$\xi = \xi(t, p_1, p_2, \dots, p_n) - \delta_{th}.$$

В действительности измеряемые величины получаются из наблюдений и поэтому содержат ошибки наблюдений. Пусть ξ^o — наблюдаемое значение измеряемой величины, а δ_{obs} — ее ошибка. Вычитая ошибку наблюдения, снова получим истинное значение измеряемой величины

$$\xi = \xi^o - \delta_{obs}.$$

Приравнивая правые части последних равенств, получим

$$\xi^o = \xi(t, p_1, p_2, \dots, p_n) + \delta_{obs} - \delta_{th}.$$

После выполнения измерений в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_m получим систему уравнений

$$\xi_i^o = \xi(t_i, p_1, p_2, \dots, p_n) + \delta_{obs}^{(i)} - \delta_{th}^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (6.4)$$

относительно истинных значений искомых параметров p_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Величины

$$\delta_{sum}^{(i)} = \delta_{obs}^{(i)} - \delta_{th}^{(i)}$$

называют суммарными ошибками наблюдений и теории.

При решении такой задачи точные значения ошибок $\delta_{obs}^{(i)}$ и $\delta_{th}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) остаются неизвестными. Их обычно рассматривают как случайные величины с заданными вероятностными характеристиками (законами распределения, моментами и т.п.).

Таким образом, мы имеем систему m уравнений относительно $m + n$ неизвестных

$$\delta_{sum}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad p_1, p_2, \dots, p_n,$$

в которой число неизвестных больше числа уравнений.

В такой ситуации уравнения (6.4) заменяют так называемой системой *условных уравнений*

$$\xi_i^o = \xi(t_i, p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (6.5)$$

представляющей собой систему из m уравнений с n неизвестными p_1, p_2, \dots, p_n . Система условных уравнений (6.5) несовместна, она не имеет решения, поскольку получена путем вычитания из правых частей точных уравнений (6.4) случайных независимых суммарных ошибок $\delta_{sum}^{(i)}$.

Можно пытаться найти некоторую приближенную оценку искомых параметров. При этом получаемые значения должны по возможности мало отличаться от истинных. Алгоритм нахождения приближенной оценки называют *алгоритмом фильтрации*. Основной задачей этого алгоритма является возможное уменьшение (фильтрация) влияния ошибок теории и ошибок наблюдений. Выбор алгоритма фильтрации неоднозначен, его структура зависит от

имеющихся сведений о суммарной ошибке $\delta_{sum}^{(i)}$. На практике таких сведений очень мало или они вообще отсутствуют. Поэтому приходится довольствоваться теми или иными предположениями о свойствах суммарной ошибки и алгоритмом фильтрации, основанным на этих предположениях.

Соотношения (6.5) можно рассматривать как уравнения относительно искомым параметров p_1, p_2, \dots, p_n . Решить эти уравнения непосредственно на практике не представляется возможным еще и по другой причине. Дело в том, что $\xi(t_i, p_1, p_2, \dots, p_n)$ — сугубо нелинейная функция своих аргументов. Чаще всего ее бывает невозможно даже записать в явном виде. Тем более нельзя получить в явном виде решение уравнений (6.5).

Решение задачи будем выполнять по схеме, которая уже представлена в Главе 1.

Практически на любом этапе исследований бывают известны некоторые приближенные значения искомым параметров. Назовем эти значения предварительными и обозначим их через $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}$.

Пусть точные значения параметров p_1, p_2, \dots, p_n отличаются от предварительных приближенных на величины поправок

$$\Delta p_1 = p_1 - p_1^{(0)}, \quad \Delta p_2 = p_2 - p_2^{(0)}, \quad \dots, \quad \Delta p_n = p_n - p_n^{(0)}.$$

Тогда (6.5) можно записать в виде

$$\xi_i^o = \xi(t_i, p_1^{(0)} + \Delta p_1, p_2^{(0)} + \Delta p_2, \dots, p_n^{(0)} + \Delta p_n). \quad (6.6)$$

Для большинства небесных тел модели движения постоянно развиваются. Поэтому на очередном этапе уточнения предварительные значения параметров уже достаточно близки к истинным. Это позволяет считать поправки $\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n$ малыми и разложить правую часть соотношения (6.6) в ряд Тейлора по степеням поправок:

$$\xi_i^o = \xi(t_i, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \xi}{\partial p_k} \right)_i \Delta p_k + \dots \quad (6.7)$$

Производные в правых частях вычисляются при значениях

$$t = t_i, \quad p_1 = p_1^{(0)}, \quad \dots, \quad p_n = p_n^{(0)}.$$

Ограничимся величинами первого порядка малости относительно поправок Δp_k и введем обозначения

$$\xi_i^{c(0)} = \xi(t_i, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}) , \quad (6.8)$$

$$a_k^{(i)} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial p_k} \right)_i , \quad (6.9)$$

$$\Delta \xi_i = \xi_i^o - \xi_i^{c(0)} . \quad (6.10)$$

В результате получим

$$\Delta \xi_i = \sum_{k=1}^n a_k^{(i)} \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6.11)$$

Приближенные соотношения (6.11) называются *условными уравнениями* для определения поправок к уточняемым параметрам. Они являются линейными неоднородными алгебраическими уравнениями относительно искоемых поправок Δp_k , ($k = 1, 2, \dots, n$).

Условные уравнения являются приближенными по двум причинам. Во-первых, в левых частях отброшены ошибки наблюдений и ошибки теории. Во-вторых, в правых частях отброшены все члены порядка квадратов поправок и выше. Уравнения (6.11) иногда называют линеаризованными по отношению к условным уравнениям (6.5).

Принимая те или иные допущения относительно ошибок теории и ошибок наблюдений, можно выбрать один из разработанных алгоритмов фильтрации и найти приближенное решение условных уравнений (6.11). Существующие методы позволяют также оценить погрешность решения.

После того, как поправки найдены, прибавляем их к предварительным значениям параметров и получаем новые и, как мы надеемся, более точные их значения. Такой метод определения параметров движения небесных тел называется **дифференциальным уточнением** параметров.

В силу приближенности условных уравнений и приближенности их решения новые значения параметров будут недостаточно точными. Однако уточнение можно провести повторно несколько раз. Если процесс уточнения сходится, то есть поправки от шага к шагу убывают, то вычисления можно прекратить, когда поправки

станут существенно меньше их погрешностей. В этом случае мы получим значения параметров движения небесного тела $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$, соответствующие всем используемым при этом наблюдениям. Это соответствие однозначно определяется заданной моделью движения (6.3) и выбранным алгоритмом фильтрации.

Теоретически сходимость дифференциального уточнения почти не исследована. Можно привести примеры, в которых процесс не сходится или сходится к ложным значениям искомых параметров. При использовании метода дифференциального уточнения параметров следует учитывать, что с некоторого шага уточнения поправки начинают колебаться из-за неизбежных ошибок вычислений. После появления таких колебаний дальнейшие попытки уточнения параметров становятся бесполезными.

С другой стороны, когда описанный процесс хорошо сходится, не возникает необходимости в точном вычислении производных $\left(\frac{\partial \xi}{\partial p_k}\right)_i$, так как в процессе уточнения они используются для определения все уменьшающихся поправок $\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n$. В этих условиях лежащие в разумных пределах погрешности вычисления указанных производных могут лишь несколько увеличить число шагов уточнения, практически не отражаясь на точности окончательного результата.

На первом и последующих шагах уточнения после вычисления поправок $\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n$ можно найти так называемые невязки условных уравнений

$$\delta_i = \Delta \xi_i - \sum_{k=1}^n a_k^{(i)} \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6.12)$$

После того, как процесс уточнения завершен, и поправки к параметрам стали пренебрежимо малыми, невязки условных уравнений станут окончательными рассогласованиями или невязками уточненной теории с наблюдениями

$$\delta_i = \xi_i^o - \xi(t_i, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6.13)$$

В литературе и на практике эти рассогласования символически обозначают как О–С (observatum minus calculatum, лат.).

Совокупность невязок часто используют для оценки качества полученного решения. Однако для установления близости решения к истинному этого оказывается недостаточно.

Из всех имеющихся алгоритмов фильтрации в практической небесной механике чаще всего применяется *метод наименьших квадратов* (МНК). Этот метод обладает рядом преимуществ по сравнению с другими алгоритмами фильтрации. Основное преимущество заключается в его простоте.

Для краткости описания метода наименьших квадратов введем матричные обозначения

$$\Delta p = \begin{pmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p_n \end{pmatrix}, \quad \Delta \xi = \begin{pmatrix} \Delta \xi_1 \\ \Delta \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \xi_m \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_m \end{pmatrix},$$

$$A_p = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(m)} & a_2^{(m)} & \dots & a_n^{(m)} \end{pmatrix}, \quad \delta_{\text{sum}} = \begin{pmatrix} \delta_{\text{sum}}^{(1)} \\ \delta_{\text{sum}}^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{\text{sum}}^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Тогда систему условных уравнений (6.11) и их невязки (6.12) можно записать в виде

$$\Delta \xi = A_p \Delta p, \quad (6.14)$$

$$\delta = \Delta \xi - A_p \Delta p. \quad (6.15)$$

Здесь элементы матрицы A_p вычисляются по формулам (6.9).

Метод наименьших квадратов основан на выводах теории вероятностей. Он оправдан при соблюдении следующих условий (Эльясберг, 1976).

1. Задана модель движения (6.3).
2. Вектор ошибок δ_{sum} является случайным.
3. Ковариационная матрица ошибок является невырожденной, т.е. определитель этой матрицы не равен нулю.
4. Математическое ожидание $\mathbf{E}(\delta_{\text{sum}})$ суммарной ошибки равно нулю, т.е.

$$\mathbf{E}(\delta_{\text{sum}}) = 0.$$

5. Ковариационная матрица $\mathbf{D}(\delta_{\text{sum}})$ задана с точностью до некоторого произвольного множителя, т.е.

$$\mathbf{D}(\delta_{\text{sum}}) = \sigma^2 \mathbf{K}.$$

Произвольный множитель σ^2 уточняется в процессе применения метода наименьших квадратов.

При сделанных допущениях алгоритм фильтрации по методу наименьших квадратов сводится к отысканию вектора Δp из условия абсолютного минимума квадратичной формы

$$S(\Delta p) = \delta^T \mathbf{K}^{-1} \delta = [\Delta \xi - \mathbf{A}_p \Delta p]^T \mathbf{K}^{-1} [\Delta \xi - \mathbf{A}_p \Delta p]. \quad (6.16)$$

Заметим, что на практике проверка соблюдения данных условий оказывается невозможной. В частности, ковариационная матрица \mathbf{K} почти всегда неизвестна.

Свойство случайности вектора ошибок и понятие его ковариационной матрицы следует пояснить для лучшего понимания следующего изложения. В теории вероятности рассматривается понятие «испытания». Это одна из реализаций случайной величины. Если, например, под случайной величиной рассматривать результат бросания монетки, то каждое такое бросание является испытанием, а результат — «орел» или «решка» — реализацией случайной величины. В методе наименьших квадратов набор произведенных наблюдений является одним единственным «испытанием» случайных ошибок наблюдений. И других испытаний этой случайной величины у нас нет и быть не может. Поэтому ковариационная матрица ошибок $\mathbf{D}(\delta_{\text{sum}})$ нам недоступна. Однако, рассматривая набор ошибок как случайную величину, мы подразумеваем существование ковариационной матрицы и принимаем по отношению к ней ту или иную гипотезу. Чаще всего принимается, что ковариационная матрица ошибок диагональна, значит ошибки между собой не коррелированы, т.е. взаимно независимы.

Широкое распространение и известность метода наименьших квадратов часто приводят к некритическому отношению к получаемым по этому методу результатам. Во многих случаях из результатов делаются неверные выводы. Причиной этого является обычно несоответствие реальных условий, в которых решается данная практическая задача, условиям, принятым при обосновании метода. Однако нередко МНК приводит к удовлетворительным результатам даже при невыполнении указанных условий.

На практике ковариационная матрица ошибок неизвестна. В большинстве задач и механических моделей можно принять, что ошибки наблюдений некоррелированы. Тогда матрица \mathbf{K} окажется диагональной. Если имеется какая-то информация о точности одних наблюдений по отношению к точности других, то матрицу \mathbf{K} можно сделать единичной. Для этого каждому наблюдению присваивается некоторый вес w_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Каждое условное уравнение умножают почленно на установленный вес. При этом ошибки также оказываются умноженными на этот вес. Подбирая соответствующим образом веса наблюдений, можно привести наблюдения к равноточным. Тогда матрица \mathbf{K} становится единичной. Как на практике подбирать веса наблюдений рассмотрено ниже. В случае единичной матрицы \mathbf{K} соотношение (6.16) принимает вид

$$S(\Delta p) = \sum_{i=1}^m \delta_i^2 = \sum_{i=1}^m \left(\Delta \xi_i - \sum_{k=1}^n a_k^{(i)} \Delta p_k \right)^2. \quad (6.17)$$

Отыскание минимума функции $S(\Delta p)$ сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial S(\Delta p)}{\partial \Delta p_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (6.18)$$

Как видно из (6.17), уравнения (6.18) содержат только нулевые и первые степени искомым поправок Δp_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Поэтому система (6.18) оказывается системой линейных неоднородных уравнений. Эту систему принято называть *системой нормальных уравнений*.

После выполнения дифференцирования в (6.18) систему нормальных уравнений можно записать в виде

$$\mathbf{L} \Delta p = \mathbf{d},$$

где \mathbf{L} и \mathbf{d} суть квадратная матрица и матрица-столбец

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

элементы которых вычисляются по формулам

$$l_{kj} = \sum_{i=1}^m a_k^{(i)} a_j^{(i)} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n), \quad (6.20)$$

$$d_k = \sum_{i=1}^m a_k^{(i)} \Delta \xi_i \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (6.21)$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится еще величина:

$$d_0 = \sum_{i=1}^m (\Delta \xi_i)^2. \quad (6.22)$$

Рассмотрим матрицу коэффициентов нормальных уравнений \mathbf{L} . Как видно из (6.20), матрица \mathbf{L} — симметричная, с положительными диагональными элементами. Найдем одним из известных способов матрицу \mathbf{L}^{-1} , обратную матрице \mathbf{L} . Тогда решение системы нормальных уравнений получим из матричного соотношения

$$\Delta p = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{d}. \quad (6.23)$$

Для того, чтобы существовало решение системы нормальных уравнений и его можно было найти, матрица \mathbf{L} должна удовлетворять определенным условиям. В частности, ее ранг должен быть равен n . На практике часто оказывается, что определитель матрицы нормальных уравнений близок к нулю, и вычислить обратную матрицу \mathbf{L}^{-1} можно с весьма ограниченной точностью.

Если поправки все же найдены, можно определить среднеквадратичные ошибки искомых поправок следующим образом. Сначала вычислим так называемую среднеквадратичную ошибку на единицу веса σ_0 по формуле

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{m - n} [d_0 - (\mathbf{d}\Delta p)], \quad (6.24)$$

где Δp найденный вектор поправок. Умножим теперь все элементы матрицы \mathbf{L}^{-1} на σ_0^2 . Полученная таким образом матрица

$$\mathbf{D} = \sigma_0^2 \mathbf{L}^{-1} \quad (6.25)$$

называется ковариационной матрицей ошибок поправок, которую часто называют просто ковариационной матрицей параметров. Запишем ее в виде

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}.$$

Согласно методу наименьших квадратов любой диагональный элемент матрицы \mathbf{D} с номером k равен квадрату среднеквадратичной ошибки σ_k поправки Δp_k , то есть

$$\sigma_k = \sqrt{D_{kk}}. \quad (6.26)$$

Из (6.24), (6.25), (6.26) видно, что ошибки поправок уточняемых параметров убывают с ростом числа наблюдений m . Приблизительно они пропорциональны $\frac{1}{\sqrt{m}}$, так как на практике число наблюдений намного больше числа уточняемых параметров.

Следствием метода наименьших квадратов является стремление к нулю среднеквадратичной ошибки решения с увеличением числа наблюдений.

Сделанные здесь выводы справедливы при определенных условиях, налагаемых не только на ошибки теории и наблюдений, но также на принятую модель движения небесного тела. Подробнее эти условия рассмотрены в книге (Эльясберг, 1976).

Величины r_{kj} , определенные соотношением

$$r_{kj} = \frac{D_{kj}}{\sigma_k \sigma_j},$$

называются коэффициентами корреляции между ошибками поправок, а матрица

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется корреляционной матрицей.

После нескольких шагов уточнения, когда поправки становятся достаточно малыми, ошибки поправок характеризуют ошибки улучшенных значений параметров, обусловленные как ошибками теории, так и ошибками наблюдений.

Качество согласования теории с наблюдениями после уточнения параметров движения небесного тела будет характеризоваться величиной

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{d_0}{m}}, \quad (6.27)$$

которая после успешного уточнения параметров является среднеквадратичной величиной невязок δ_i (6.13).

Более подробно и вместе с обоснованием МНК изложен в монографии (Эльясберг, 1976), в ней также подробно исследована зависимость обусловленности в МНК от состава наблюдений. Метод дифференциального уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений с вопросами его практического применения рассмотрен в книге (Емельянов, 1983). Упрощенное описание МНК дано в учебном пособии (Щиголев, 1969).

Существенной частью алгоритма уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений является вычисление значений измеряемой величины на заданные моменты времени, а также ее производных по улучшаемым параметрам. Для этой цели можно применять как формулы аналитической теории движения небесного тела, так и методы численного интегрирования уравнений его движения. При этом количество вычислительных операций может сильно различаться. При использовании аналитической теории время вычислений будет пропорционально количеству используемых наблюдений. Оно в этом случае не зависит от интервала времени, на котором велись наблюдения. При численном интегрировании наоборот: затраты времени на вычисления пропорциональны интервалу времени наблюдений и не зависят от числа наблюдений. Порядок всех таких вычислений объяснен в следующих разделах.

6.2. Плохая обусловленность и неоднозначность решения

Определение параметров движения на основе наблюдений получается просто и точно только в простых показательных примерах. В практических задачах с использованием реальных наблюде-

ний, как правило, возникают трудности, а определение параметров оказывается неточным. Рассмотрим здесь наиболее часто встречающиеся проблемы.

Применение МНК на практике часто приводит к неожиданным проблемам. Дело в том, что в условиях исследований на основе реальных наблюдений небесных тел с использованием ограниченных по точности теорий не всегда строго выполняются те допущения, при которых правомерно применение МНК.

Если ошибки теории превалируют над ошибками наблюдений, то суммарная ошибка не будет случайной величиной. Это приведет к тому, что с увеличением числа наблюдений точность результата не будет улучшаться, а решение в свою очередь приобретет зависимость от состава измерений, то есть от того, в какие моменты делались измерения. Наличие такой зависимости делает результат не вполне достоверным.

В конкретных задачах по уточнению параметров движения небесных тел часто оказывается, что определитель матрицы \mathbf{L} близок к нулю. В этих случаях мы имеем дело с так называемыми плохо обусловленными системами нормальных уравнений. При решении таких систем поправки к параметрам могут получаться столь грубыми, что процесс уточнения не будет сходиться. Причина плохой обусловленности заключается не в самом методе наименьших квадратов, а в свойствах применяемой механической модели.

Примером случая с плохой обусловленностью является процесс уточнения долготы восходящего узла кеплеровской орбиты небесного тела при очень малом ее наклоне. Другой пример — совместное уточнение долготы перигея орбиты и средней аномалии в эпоху при малых эксцентриситетах орбиты. Показателем плохой обусловленности может служить близость к единице модуля одного или нескольких коэффициентов корреляции. От плохой обусловленности избавиться нельзя, поскольку ее причина лежит в условиях задачи. Можно только заменить задачу на другую. Чтобы уменьшить плохую обусловленность, можно исключить из списка уточняемых параметров тот из них, который дает сильную корреляцию, фиксируя его предварительное значение. Это фиксированное значение можно выбрать приближенно. Как правило, измеряемая величина слабо зависит от параметра, дающего сильную корреляцию. Поэтому приближенность зафиксированного параметра может не сказываться на измеряемой величине.

Успех уточнения параметров движения из наблюдений существенно зависит от состава наблюдений. В частности, если наблюдения покрывают лишь незначительную часть орбиты небесного тела, то возникает плохая обусловленность системы нормальных уравнений, а определение параметров может стать невозможным.

Плохая обусловленность из-за состава наблюдений может возникать, например, при определении углового расстояния перицентра от узла ω для кеплеровской орбиты небесного тела. Если все наблюдения сосредоточены в перицентре и апоцентре орбиты, то возникает неопределенность в определении ω . Можно изменять ω , то есть поворачивать орбиту вокруг притягивающего центра, при постоянном значении долготы небесного тела, при этом смещения положений точек на орбите вблизи перицентра и вблизи апоцентра будут незначительными. Это и даст слабую зависимость измеряемых величин от угла ω при постоянной долготе. При фиксации ω на некотором приближенном значении, эта приближенность мало повлияет на различия вычисленных и наблюдаемых положений небесного тела вблизи перицентра и вблизи апоцентра орбиты.

Подробнее зависимость точности найденных значений параметров от состава наблюдений описана в книге (Эльясберг, 1976).

Рассмотрим другую проблему, возникающую при некоторых составах наблюдений.

Функцию $S(\Delta p)$ (6.17) иногда называют целевой функцией. Для получения оценки параметров ищут ее минимум. Выше целевая функция была построена для линеаризованных условных уравнений (6.11). Однако ее можно построить и для уравнений (6.5). В этом, более общем случае, целевая функция запишется в виде

$$S(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^m [\xi_i^o - \xi(t_i, p_1, p_2, \dots, p_n)]^2, \quad (6.28)$$

и задача состоит в нахождении минимума этой функции на множестве значений параметров p_1, p_2, \dots, p_n . В реальных задачах функция $\xi(t_i, p_1, p_2, \dots, p_n)$ нелинейна по отношению к своим аргументам. Тогда целевая функция $S(p_1, p_2, \dots, p_n)$ может иметь несколько минимумов. Если мы найдем все минимумы, то выберем наименьший из них и будем надеяться, что получили самую точную оценку. Однако такой формальный выбор может вызвать сомнения. Может оказаться, что ошибки наблюдений распределились таким образом, что

точная оценка соответствует не наименьшему из упомянутых минимумов. С другой стороны, решая линеаризованные условные уравнения (6.11), можно попасть на такое начальное приближение параметров $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}$, которое приведет последовательные приближения к неверному результату.

В работе (Авдюшев, Баныщикова, 2008) показано, что проблема неоднозначного определения орбит может иметь место в задачах динамики близких спутников планет при малочисленном составе наблюдений, рассредоточенных в нескольких группах на достаточно большом интервале времени. Проблема множества решений подробно рассмотрена в книге (Авдюшев, 2015). Показано, что график функции (6.28) может иметь «овражную» структуру, так что целое семейство значений искомых параметров может давать одинаково малые значения функции. В других случаях функция (6.28) может иметь несколько изолированных минимумов. Тогда задача определения параметров может оказаться неоднозначной.

Проблема неоднозначного определения орбит может также возникать и в иных случаях, а именно, когда наблюдения сгруппированы на малом временном интервале и покрывают короткую орбитальную дугу. Очевидно, что такой состав наблюдений имеют почти все новые открываемые спутники. Впрочем, возникновение этой проблемы возможно лишь при определенных условиях наблюдения, что хотя и сужает класс проблемных объектов, их, тем не менее, остается еще достаточно много и большая часть из них — это новые далекие спутники больших планет. Именно эти случаи рассмотрены в работе (Авдюшев, Баныщикова, 2009). Для разрешения этой проблемы, очевидно, нужны дополнительные наблюдения.

6.3. Обзор сведений об алгоритмах фильтрации

Прежде, чем говорить о других алгоритмах фильтрации, уточним некоторые понятия.

Прежде всего напомним, что поставленная задача состоит в поисках значений искомых параметров на основе имеющихся измерений. При этом получаемые значения должны по возможности мало отличаться от истинных. На практике оказывается, что точное значение искомых параметров найти невозможно. Поэтому мы говорим о приближенной *оценке параметров*. Алгоритм нахождения приближенной оценки называют *алгоритмом фильтрации*. Ос-

новой задачей этого алгоритма является возможное уменьшение (фильтрация) влияния ошибок теории и ошибок наблюдений.

Одной из характеристик оценки, получаемой алгоритмом фильтрации, является *состоятельность оценки*, под которой понимается сходимости оценки к истинным значениям при стремлении числа измерений к бесконечности.

Обширная и детальная информация об алгоритмах фильтрации в настоящее время содержится в книгах (Эльясберг, 1976) и (Авдюшев, 2015).

Под наблюдениями в практической небесной механике подразумевают измерения. Книга Эльясберга (1976) так и называется «Определение движения по результатам измерений», в книге рассматриваются различные традиционные и нетрадиционные подходы к оцениванию параметров, в частности, гарантированный подход, когда находятся пределы возможных значений искомых параметров при заданных наборах измерений. Ценность книги Эльясберга (1976) заключается в сочетании ее направленности на практическое решение задач с математическими обоснованиями используемых методов. Рассматриваются примеры решения задач. Удобно то, что первая глава содержит необходимые сведения по теории вероятности. Далее рассматриваются характеристики ошибок измерений. Большая часть книги посвящена математическому обоснованию применения МНК. Даются и условия его применимости.

В книге Эльясберга (1976) рассматривается ряд известных алгоритмов фильтрации: метод максимального правдоподобия, метод наименьших модулей, метод максимума апостериорной вероятности, фильтры Калмана (дискретный и непрерывный).

В некоторых практических ситуациях бывает возможность выбирать состав проводимых измерений или выбрать какой-то их набор из имеющихся данных. Здесь возникает задача поиска оптимального состава измерений. Этой задаче уделено много внимания в книге Эльясберга (1976). В частности, указано, что в реальных условиях увеличение числа измерений может оказаться бесполезным, а в некоторых случаях даже ведет к ухудшению точности получаемых результатов.

Другая книга, монография Авдюшева (2015) — хороший источник сведений об алгоритмах фильтрации. Две главы этой книги посвящены определению орбит из наблюдений и оценке точности определяемых параметров.

Кроме МНК рассматриваются следующие методы: метод Ньютона, метод Гаусса – Ньютона, метод Левенберга – Марквардта, овражные методы. Также дается сравнительный анализ эффективности методов.

Стоит отметить оригинальный подход к алгоритмам фильтрации, принятый в работе (Бахшиян, Назиров и др., 1980). В ней рассматривается определение движения и управление им при дискретном характере измерительной информации и корректирующих воздействий. Особое внимание обращается на оценку точности получаемых результатов и оптимизацию стратегии решения рассматриваемых задач. При этом используется подход, гарантирующий достижение требуемой точности и надежности получаемых решений при условии, что функции распределения ошибок исходных данных точно не известны, а заданы лишь некоторые множества, которым могут принадлежать эти функции. Этим обеспечивается устойчивость получаемых результатов. Описывается аппарат математического программирования, используемый при решении рассматриваемых задач оптимизации.

Для знакомства с некоторыми обобщениями МНК можно обратиться к книге (Губанов, 1997). Она содержит систематическое изложение основ теории МНК и его обобщений – средней квадратичной коллокации и фильтрации Калмана. Рассмотрены основные типы параметрических и стохастических моделей данных измерений. Даны примеры применения обобщенной теории МНК к обработке радиоинтерферометрических наблюдений со сверхдлинными базами, к анализу вращательного движения Земли и др.

6.4. Вычисление измеряемых величин и частных производных от измеряемых величин по уточняемому параметрам

6.4.1. Общий порядок вычислений

В процессе дифференциального уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений требуется вычислять значения измеряемых величин и частных производных от измеряемых величин по уточняемому параметрам на моменты наблюдений. Эти вычисления делаются на основе принятого закона движения небесных тел. Закон движения описывается в какой-либо системе координат. Ча-

ще всего это декартовы прямоугольные координаты x, y, z . Закон движения задается функциями

$$x = x(t, p_1, p_2, \dots, p_j), \quad y = y(t, p_1, p_2, \dots, p_j), \quad z = z(t, p_1, p_2, \dots, p_j). \quad (6.29)$$

В предыдущем разделе введено понятие измеряемой величины. Наблюдения дают нам значения измеряемых величин на моменты измерений. Пусть ξ — одна из измеряемых величин.

Измеряемая величина связана с координатами небесного тела. Эта связь задается некоторой моделью измерений. Модель может включать в себя и некоторые другие параметры, обозначаемые через $p_{j+1}, p_{j+2}, \dots, p_n$. Модель наблюдений дает нам функцию

$$\xi = \xi(t, x, y, z, p_{j+1}, p_{j+2}, \dots, p_n). \quad (6.30)$$

Таким образом, в методе дифференциального уточнения параметров движения измеряемая величина ξ , как функция уточняемых параметров p_1, p_2, \dots, p_n , является сложной функцией. Первоначально она задается как функция от прямоугольных координат небесного тела, которые в свою очередь в силу закона движения являются функциями времени t и параметров движения. Зависимость $\xi(t, x, y, z, \dots)$ не связана с законом движения небесного тела, однако она включает в себя время t и параметры, которые также могут рассматриваться как уточняемые. В отличие от параметров движения небесного их называют параметрами условий наблюдений. Функция $\xi(t, x, y, z, \dots)$ определяется только выбором измеряемой величины. В астрономической практике используется большое множество величин, измеряемых в процессе наблюдений. В настоящем разделе рассматриваются некоторые из них, и даются явные выражения для функции $\xi(t, x, y, z, p_{j+1}, p_{j+2}, \dots, p_n)$.

Далее рассматриваются зависимости измеряемых величин как от параметров условий наблюдений, так и от параметров движения. В итоге эти зависимости отображаются функцией времени t и всех уточняемых параметров

$$\xi = \xi(t, p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (6.31)$$

Именно эта функция используется для составления условных уравнений при уточнении параметров методом наименьших квадратов.

Для применения метода дифференциального уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений необходимо, кроме

самих измеряемых величин, вычислять также частные производные от измеряемых величин по уточняемым параметрам. Порядок этих вычислений существенно зависит от того, как получается закон движения.

Вычисление координат небесного тела x, y, z делается либо по формулам построенной заранее аналитической теории движения, либо на основе численного интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Частные производные от измеряемых величин по уточняемым параметрам на моменты наблюдений вычисляются на основе рассмотренных выше зависимостей. Так как промежуточными величинами являются координаты небесного тела x, y, z , то для искомых производных можно записать следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial p_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial p_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \xi}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p_1} & \frac{\partial y}{\partial p_1} & \frac{\partial z}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x}{\partial p_2} & \frac{\partial y}{\partial p_2} & \frac{\partial z}{\partial p_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x}{\partial p_n} & \frac{\partial y}{\partial p_n} & \frac{\partial z}{\partial p_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

Как видно из этих соотношений, вычислительная задача разделяется на две независимые части. В первой из них находятся значения частных производных от прямоугольных координат по параметрам движения небесного тела, т.е. матрица \mathbf{A} . Во второй — производные от измеряемой величины по прямоугольным координатам небесного тела, матрица-столбец \mathbf{B} .

Вектор \mathbf{B} вычисляется по формулам, получаемым дифференцированием явного выражения для $\xi(x, y, z)$. Вычисление матрицы параметров \mathbf{A} может выполняться для каждого момента наблюдений как по формулам, следующим из аналитической теории движения, так и в процессе численного интегрирования дифференциальных уравнений, специально построенных для частных производных от координат по параметрам движения. В последнем случае элементы матрицы \mathbf{A} называют изохронными производными, поскольку их значения нам нужны на те же моменты времени, что и сами координаты. Дифференциальные уравнения для изохронных производных (они иногда называются уравнениями в вариациях) интегрируются совместно с уравнениями движения.

Заметим, что в вышеизложенных выкладках молчаливо предполагается, что измеряемая величина зависит только от координат небесного тела. Однако в практике уточнения параметров из наблюдений используются также измеряемые величины, зависящие от компонент вектора скорости \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} . Примером может служить уточнение параметров движения искусственного спутника Земли на основе наземных радиотехнических доплеровских измерений. В этом случае измеряется лучевая скорость, т.е. скорость изменения топоцентрического расстояния спутника. В этом случае вектор-столбец **B** приобретает еще три элемента

$$\frac{\partial \xi}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \dot{z}},$$

а матрица **A** еще три соответствующих дополнительных столбца. Все дальнейшие рассуждения и выкладки будут аналогичны тому, что получается в случае зависимости измеряемой величины только от координат. Поскольку в практике наземных наблюдений спутников планет доплеровские наблюдения проводятся только в исключительных случаях, мы ограничимся далее рассмотрением зависимости измеряемой величины ξ лишь от декартовых прямоугольных координат спутника.

При изучении динамики естественных спутников планет в некоторых работах строятся и применяются аналитические теории движения. Закон движения находится как общее решение дифференциальных уравнений движения. Тогда координаты небесного тела представлены аналитическими функциями времени и параметров движения. В аналитических теориях параметры движения часто называют элементами орбиты, поскольку они связаны с моделью кеплеровского движения и кеплеровскими элементами. Элементы матрицы **A** в таких задачах получаются аналитическим дифференцированием прямоугольных координат по элементам орбиты. Формулы для этих производных обычно приводятся вместе с формулами для координат и компонент скорости небесного тела. Именно так сделано в настоящей книге. Выражения для указанных производных в случае эллиптического кеплеровского движения даны в разделе 3.2.4 Главы 3.

В следующих разделах сначала рассматриваются формулы для вычисления элементов матрицы **A** в различных конкретных задачах. Затем приводятся формулы для вычисления измеряемых ве-

личин ξ и частных производных от них по прямоугольным координатам и параметрам условий наблюдений для различных типов наблюдений. Даются некоторые рекомендации относительно составления условных уравнений.

6.4.2. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче трех тел. Уточнение начальных условий уравнений движения

Рассмотрим процедуру дифференциального уточнения параметров движения в случае задачи трех тел. Поскольку точного аналитического решения задачи трех тел до сих пор не найдено, уравнения движения в этой задаче решаются методами численного интегрирования.

В качестве параметров движения в этом случае чаще всего рассматривают начальные условия, то есть значения координат на некоторый начальный момент времени t_0 . Уточняемыми параметрами могут быть также постоянные, которые входят в дифференциальные уравнения движения.

В рассматриваемой задаче определяются параметры движения второго тела относительно первого, которое считается главным, будучи наиболее массивным. Движение происходит под возмущающим действием третьего тела, движение которого задано координатами, как известными функциями времени.

В общем случае могут определяться из наблюдений параметры движения второго и третьего тела в едином процессе дифференциального уточнения. Тогда уравнения движения, а также уравнения для изменения изохронных производных второго и третьего тел интегрируются совместно.

Тела будем считать материальными точками. Начало системы невращающихся прямоугольных координат поместим в первое из тел. Координаты второго тела, движение которого изучается, в отличие от обычных обозначений, обозначим теперь через x_1, x_2, x_3 . Координаты третьего, возмущающего тела обозначим через x'_1, x'_2, x'_3 .

Уравнения движения второго тела в принятых обозначениях запишутся в виде

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -Gm \frac{x_i}{r^3} - Gm' \left(\frac{x_i - x'_i}{\Delta^3} + \frac{x'_i}{r'^3} \right) = F_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.33)$$

где G — универсальная гравитационная постоянная, m — масса первого тела, m' — масса возмущающего тела. Кроме того, мы используем следующие обозначения:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad r' = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2},$$

$$\Delta = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}.$$

Уравнения движения третьего небесного тела могут быть записаны аналогично.

На практике вместо масс небесных тел рассматривают их гравитационные параметры $\mu = Gm$, $\mu' = Gm'$.

Заметим, что приводимые ниже формулы будут пригодны и для более общего случая, когда координаты возмущающего тела вычисляются на основе более сложной модели, учитывающей влияние других тел.

Параметрами изучаемого движения второго тела будут начальные условия, то есть координаты и компоненты скорости

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dot{x}_1^{(0)}, \dot{x}_2^{(0)}, \dot{x}_3^{(0)},$$

заданные на начальный момент времени t_0 .

Искомые частные производные, необходимые для дифференциального уточнения параметров, образуют матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_1^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_1^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_3^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \dot{x}_1^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial \dot{x}_1^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial \dot{x}_1^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \dot{x}_2^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial \dot{x}_2^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial \dot{x}_2^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \dot{x}_3^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial \dot{x}_3^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial \dot{x}_3^{(0)}} \end{pmatrix}. \quad (6.34)$$

Для элементов этой матрицы можно составить дифференциальные уравнения путем дифференцирования левых и правых частей

уравнений (6.33) по параметру. Выполняя последовательно эту операцию для каждого из параметров, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^{(0)}} \right) = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_j^{(0)}}, \quad (6.35)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_j^{(0)}} \right) = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \dot{x}_j^{(0)}}, \quad (6.36)$$

$$(i, j = 1, 2, 3),$$

где

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_n} = Gm \frac{1}{r^3} \left(\frac{3}{r^2} x_i x_n - \delta_{in} \right) + Gm' \frac{1}{\Delta^3} \left[\frac{3}{\Delta^2} (x_i - x'_i)(x_n - x'_n) - \delta_{in} \right],$$

$$\delta_{in} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = n \\ 0 & \text{при } i \neq n \end{cases}.$$

Уравнения (6.35) и (6.36) можно записать в матричной форме. Для этого введем в рассмотрение матрицу

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

Тогда уравнения (6.35) и (6.36) запишутся в виде

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{F}. \quad (6.38)$$

Численное интегрирование уравнений (6.35) и (6.36) следует

выполнять совместно с уравнениями движения (6.33). Начальные условия для уравнений (6.35) и (6.36) определяются матрицами

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_0 = \dot{\mathbf{A}}|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

Здесь точка над буквами означает дифференцирование по времени.

6.4.3. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче трех тел. Уточнение массы возмущающего тела

Рассмотрим движение второго из трех тел под действием притяжения первого тела и возмущающего влияния третьего гравитирующего тела. Из наблюдений движения второго тела можно определять параметры его движения. Кроме того, совместно с начальными условиями второго тела можно определять массу возмущающего тела. Такое определение следует делать обязательно совместно, поскольку при коррекции массы возмущающего тела параметры движения второго тела будут уже другими.

В такой задаче уточняемыми параметрами будут начальные условия, то есть координаты и компоненты скорости

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dot{x}_1^{(0)}, \dot{x}_2^{(0)}, \dot{x}_3^{(0)},$$

заданные на начальный момент времени t_0 для второго тела и гравитационный параметр μ' возмущающего тела. В этом случае к матрице (6.34) нужно добавить еще одну строку

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial \mu'} & \frac{\partial x_2}{\partial \mu'} & \frac{\partial x_3}{\partial \mu'} \end{array} \right). \quad (6.41)$$

Для элементов этой строки можно составить следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \mu'} \right) = - \left(\frac{x_i - x'_i}{\Delta^3} + \frac{x'_i}{r'^3} \right) + \sum_{n=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \mu'}. \quad (6.42)$$

Тогда нужно интегрировать совместно уравнения движения (6.33), уравнения (6.35), (6.36) и (6.42). Начальными условиями для переменных (6.41) будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \mu'} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \mu'} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial x_3}{\partial \mu'} \Big|_{t=t_0} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \mu'} \right) \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \mu'} \right) \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_3}{\partial \mu'} \right) \Big|_{t=t_0} = 0. \end{aligned} \quad (6.43)$$

6.4.4. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче о движении спутника сжатой планеты

Рассмотрим процедуру дифференциального уточнения параметров движения спутника в случае учета возмущений от несферичности планеты. В этой задаче возмущения элементов промежуточной орбиты спутника могут определяться методами теории возмущений в аналитическом виде. Однако уравнения движения спутника могут также решаться численным интегрированием. В таком случае в качестве параметров движения рассматривают начальные условия, то есть значения координат на некоторый начальный момент времени t_0 .

Силовую функцию притяжения несферичной планеты используют в форме разложения в ряд по сферическим функциям. Это разложение подробно рассмотрено в Главе 3 (раздел 3.3) настоящей книги. Поскольку разложение силовой функции в этом случае записывается в системе координат, связанной с осью симметрии сжатого тела, то в разложении фигурируют прямоугольные координаты в системе с основной плоскостью, совпадающей с плоскостью экватора планеты. Обозначим эти координаты через \bar{x}_1, \bar{x}_2 ,

\bar{x}_3 . Однако в ряде задач оказывается, что необходимо решать уравнения движения относительно координат x_1, x_2, x_3 , не связанных с экватором планеты.

Связь координат в двух системах задается соотношением

$$\{x_1, x_2, x_3\}^T = \mathbf{R}_0 \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}^T,$$

где матрица \mathbf{R}_0 описана в Главе 3 (раздел 3.3).

Возьмем сначала для простоты рассмотрения в разложении силовой функции только главный член, описывающий динамическое сжатие планеты, а именно, вторую зональную гармонику. Для других членов этого разложения уравнения для изохронных производных могут быть выведены аналогично.

Уравнения движения с учетом второй зональной гармоники разложения силовой функции притяжения планеты запишем в следующей форме:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.44)$$

где

$$\{F_1, F_2, F_3\}^T = \mathbf{R}_0 \{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3\}^T,$$

причем в экваториальной системе координат $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3\}$ согласно формулам в разделе 3.3 настоящей книги имеют вид

$$\bar{F}_i = -\mu \frac{\bar{x}_i}{r^3} + \frac{3}{2} \mu J_2 \frac{r_0^2}{r^5} \bar{x}_i \left(5 \frac{\bar{x}_3^2}{r^2} - e_i \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.45)$$

где μ — гравитационный параметр планеты, J_2 — коэффициент при второй зональной гармонике разложения силовой функции притяжения планеты, r_0 — средний экваториальный радиус планеты. Кроме того, мы используем следующие обозначения:

$$r = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2},$$

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = 3.$$

Параметрами изучаемого движения спутника будут начальные условия, то есть координаты и компоненты скорости

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dot{x}_1^{(0)}, \dot{x}_2^{(0)}, \dot{x}_3^{(0)},$$

заданные на начальный момент времени t_0 .

Искомые частные производные, необходимые для дифференциального уточнения параметров, образуют матрицу вида (6.34). Для элементов этой матрицы можно составить дифференциальные уравнения путем дифференцирования левых и правых частей уравнений (6.45) по параметру. Выполняя последовательно эту операцию для каждого из параметров, получим систему уравнений, которую запишем здесь в матричной форме:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{R}_0 \bar{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{R}_0^T), \quad (6.46)$$

где матрица $\bar{\mathbf{F}}$, аналогичная матрице (6.37), имеет общий вид

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \bar{x}_1} \\ \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{x}_3} & \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{x}_3} & \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \bar{x}_3} \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

с элементами, определяемыми по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{x}_n} = & \mu \frac{1}{r^3} \left(\frac{3}{r^2} \bar{x}_i \bar{x}_n - \delta_{in} \right) + \\ & + \frac{3}{2} \mu J_2 \frac{r_0^2}{r^5} \left[\left(5 \frac{\bar{x}_3^2}{r^2} - e_i \right) \delta_{in} - 35 \frac{\bar{x}_3^2}{r^4} \bar{x}_i \bar{x}_n + 10 \frac{\bar{x}_3 \bar{x}_i}{r^2} f_n + 5 \frac{\bar{x}_i \bar{x}_n}{r^2} e_i \right], \end{aligned} \quad (6.48)$$

где введено обозначение

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 1,$$

а δ_{in} — символ Кронекера: $\delta_{in} = 1$ при $i = n$ и $\delta_{in} = 0$ при $i \neq n$.

Начальными условиями при интегрировании уравнений (6.46) следует взять (6.39), (6.40).

Заметим, что в случаях, когда главным фактором, влияющим на движение спутника, является сжатие планеты, основную систему координат x, y, z можно связать с экватором планеты. Тогда координаты $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ совпадают с координатами x, y, z , компоненты ускорения $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ совпадают с компонентами F_1, F_2, F_3 , матрица \mathbf{R}_0 оказывается единичной матрицей, и матрица (6.47) совпадает с матрицей (6.37).

Если при решении окажется, что необходимо учитывать также четвертую зональную гармонику разложения силовой функции притяжения планеты, то в правые части уравнений (6.45) и (6.48) нужно добавить соответствующие члены. В обозначениях, принятых выше, эти добавочные члены имеют вид

$$\bar{F}_i = \dots + A \left(a_i \frac{\bar{x}_i}{r^7} + b_i \frac{\bar{x}_3^2 \bar{x}_i}{r^9} + c \frac{\bar{x}_3^4 \bar{x}_i}{r^{11}} \right),$$

где

$$A = \frac{5}{8} \mu r_0^4 J_4,$$

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 15, \quad ,$$

$$b_1 = -42, \quad b_2 = -42, \quad b_3 = -70, \quad ,$$

$$c = 63$$

и для уравнений (6.48)

$$\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{x}_n} = \dots + A \left(a_i F_{in}^{(1)} + b_i F_{in}^{(2)} + c F_{in}^{(3)} \right),$$

где

$$F_{in}^{(1)} = \frac{\delta_{in}}{r^7} - \frac{7\bar{x}_i \bar{x}_n}{r^9}$$

$$F_{in}^{(2)} = \frac{\bar{x}_3^2 \delta_{in}}{r^9} - \frac{9\bar{x}_3^2 \bar{x}_i \bar{x}_n}{r^{11}} + f_n \frac{2\bar{x}_3 \bar{x}_i}{r^9}$$

$$F_{in}^{(3)} = \frac{\bar{x}_3^4 \delta_{in}}{r^{11}} - \frac{11\bar{x}_3^4 \bar{x}_i \bar{x}_n}{r^{13}} + f_n \frac{4\bar{x}_3^3 \bar{x}_i}{r^{11}}.$$

Причем δ_{in} – символ Кронекера.

6.4.5. Построение условных уравнений при угловых измерениях топоцентрических координат

Построение условных уравнений для дифференциального уточнения параметров орбит небесных тел из наблюдений связано с вычислением частных производных от измеряемой величины по координатам небесного тела. В разделе 6.4.1 эти производные составляют компоненты вектора-столбца **V**. Разумеется, эти производные зависят от типа наблюдений и типа измеряемой величины. В данном разделе рассмотрим вычисления для случаев угловых топоцентрических измерений.

В Главе 5 введено понятие вектора наблюдения. Начало этого вектора расположено в точке наблюдения — топоцентре, а конец — в центре наблюдаемого тела. Обозначим компоненты вектора наблюдения через X, Y, Z . В соответствие вектору наблюдения ставят геоэквиаториальные угловые координаты: прямое восхождение α и склонение δ . Связь угловых и прямоугольных координат описывается формулами

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

Если измеряемыми величинами являются прямое восхождение и склонение, то формулы для частных производных от измеряемых величин по прямоугольным топоцентрическим координатам имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial X} &= \frac{-\sin \alpha}{R \cos \delta}, & \frac{\partial \alpha}{\partial Y} &= \frac{\cos \alpha}{R \cos \delta}, & \frac{\partial \alpha}{\partial Z} &= 0, \\ \frac{\partial \delta}{\partial X} &= \frac{-\cos \alpha \sin \delta}{R}, & \frac{\partial \delta}{\partial Y} &= \frac{-\sin \alpha \sin \delta}{R}, & \frac{\partial \delta}{\partial Z} &= \frac{\cos \delta}{R}, \end{aligned}$$

где $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

Модель движения планеты дает нам прямоугольные барицентрические координаты планеты на заданные моменты времени. Модель движения спутника планеты представляет планетоцентрические прямоугольные координаты. Если оси всех рассматриваемых систем взаимно параллельны, то давая им общее обозначение x, y, z , можно представить выражения для частных производных от измеряемых прямого восхождения и склонения по координатам планеты или спутника в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \frac{-\sin \alpha}{R \cos \delta}, & \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \frac{\cos \alpha}{R \cos \delta}, & \frac{\partial \alpha}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \delta}{\partial x} &= \frac{-\cos \alpha \sin \delta}{R}, & \frac{\partial \delta}{\partial y} &= \frac{-\sin \alpha \sin \delta}{R}, & \frac{\partial \delta}{\partial z} &= \frac{\cos \delta}{R}. \end{aligned}$$

В этих формулах для случая наблюдения планеты x, y, z суть прямоугольные барицентрические координаты планеты, а при наблюдениях спутника x, y, z — это прямоугольные планетоцентрические координаты спутника. В любом случае R есть топоцентрическое расстояние наблюдаемого объекта.

Если измеряются разности прямых восхождений и склонений спутника и планеты, или двух спутников $\Delta \alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\Delta \delta = \delta_1 - \delta_2$,

то частные производные от измеряемых величин по координатам тел выражаются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \alpha}{\partial x_1} &= \frac{-\sin \alpha_2}{R \cos \delta_2}, & \frac{\partial \Delta \alpha}{\partial y_1} &= \frac{\cos \alpha_2}{R \cos \delta_2}, & \frac{\partial \Delta \alpha}{\partial z_1} &= 0, \\ \frac{\partial \Delta \delta}{\partial x_1} &= \frac{-\cos \alpha_2 \sin \delta_2}{R}, & \frac{\partial \Delta \delta}{\partial y_1} &= \frac{-\sin \alpha_2 \sin \delta_2}{R}, & \frac{\partial \Delta \delta}{\partial z_1} &= \frac{\cos \delta_2}{R}, \\ \frac{\partial \Delta \alpha}{\partial x_2} &= \frac{\sin \alpha_2}{R \cos \delta_2}, & \frac{\partial \Delta \alpha}{\partial y_2} &= \frac{-\cos \alpha_2}{R \cos \delta_2}, & \frac{\partial \Delta \alpha}{\partial z_2} &= 0, \\ \frac{\partial \Delta \delta}{\partial x_2} &= \frac{\cos \alpha_2 \sin \delta_2}{R}, & \frac{\partial \Delta \delta}{\partial y_2} &= \frac{\sin \alpha_2 \sin \delta_2}{R}, & \frac{\partial \Delta \delta}{\partial z_2} &= -\frac{\cos \delta_2}{R}, \end{aligned}$$

где нижний индекс означает номер объекта, а R есть топоцентрическое расстояние соответствующего объекта. Если вторым объектом является планета, то координаты x_2, y_2, z_2 в задаче не фигурируют.

Рассмотрим здесь одну модификацию формул для частных производных от измеряемых величин, которая часто применяется на практике. Запишем здесь снова условные уравнения в том виде, как они выведены в разделе 6.1 :

$$\Delta \xi_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \xi}{\partial p_k} \right)_i \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6.49)$$

Здесь ξ — общее обозначение для измеряемой величины, p_1, p_2, \dots, p_n — для уточняемых параметров, а m — число наблюдений.

Примем во внимание тот факт, что погрешность моделирования движения планет и спутников в прямоугольных координатах не зависит от того, как мы их наблюдаем. Однако на различных топоцентрических расстояниях эта погрешность будет по-разному проявляться в измеряемых угловых координатах: прямом восхождении и склонении. Чтобы вклад погрешности в левые части условных уравнений стал независимым от топоцентрического расстояния R , нужно умножить каждое условное уравнение на R . Аналогичные рассуждения относительно наблюдений на различных склонениях небесного тела приводят к выводу, что условные уравнения при измерениях прямого восхождения α нужно умножать на $\cos \delta$. Теперь, учитывая вышеуказанные обстоятельства и придавая измеряемой

величине ξ поочередно конкретный смысл $\xi = \alpha$, $\xi = \delta$, запишем условные уравнения в виде

$$R \cos \delta \Delta \alpha'_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_k} \right)'_i \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (6.50)$$

$$R \Delta \delta'_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \delta}{\partial p_k} \right)'_i \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (6.51)$$

где

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_1} \right)' \\ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_2} \right)' \\ \dots \\ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_n} \right)' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}'_{\alpha}, \quad \mathbf{B}'_{\alpha} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.52)$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \delta}{\partial p_1} \right)' \\ \left(\frac{\partial \delta}{\partial p_2} \right)' \\ \dots \\ \left(\frac{\partial \delta}{\partial p_n} \right)' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}'_{\delta}, \quad \mathbf{B}'_{\delta} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \sin \delta \\ -\sin \alpha \sin \delta \\ \cos \delta \end{pmatrix}. \quad (6.53)$$

Здесь матрица \mathbf{A} описана выше. В левых частях равенств (6.50) и (6.51) $\Delta \alpha'_i$ и $\Delta \delta'_i$ суть разности измеренных и вычисленных значений измеряемых величин, которыми могут быть как сами прямые восхождения и склонения одного небесного тела α , δ , так и их разности для двух тел, например, спутника и планеты или двух спутников $\Delta \alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\Delta \delta = \delta_1 - \delta_2$. В последнем случае, если условное уравнение строится относительно параметров второго небесного тела, то элементы векторов-столбцов \mathbf{B}'_{α} , \mathbf{B}'_{δ} , нужно взять с обратным знаком.

В практике уточнения параметров движения из наблюдений вместо измеряемой величины $\Delta \alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ часто используется величина $X_d = \Delta \alpha \cos \delta_2$. Для единообразного обозначения к ней

добавляется $Y_d = \Delta\delta$. В этом случае условные уравнения (6.50) и (6.51) записываются в следующем виде:

$$R \Delta X_d^{(i)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_k} \right)'_i \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (6.54)$$

$$R \Delta Y_d^{(i)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \delta}{\partial p_k} \right)'_i \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (6.55)$$

где $\Delta X_d^{(i)}$ и $\Delta Y_d^{(i)}$ суть разности измеренных и вычисленных значений X_d и Y_d , соответственно, на момент наблюдения t_i .

Рассмотрим теперь, как построить условные уравнения, если измеряются взаимное угловое расстояние между двумя телами s и соответствующий позиционный угол P . В этом случае условные уравнения имеют вид

$$R \Delta s_i = \sum_{k=1}^n \left[\frac{X_d^{(i)}}{s_i} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_k} \right)'_i + \frac{Y_d^{(i)}}{s_i} \left(\frac{\partial \delta}{\partial p_k} \right)'_i \right] \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (6.56)$$

$$R s_i \Delta P_i = \sum_{k=1}^n \left[\frac{Y_d^{(i)}}{s_i} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_k} \right)'_i - \frac{X_d^{(i)}}{s_i} \left(\frac{\partial \delta}{\partial p_k} \right)'_i \right] \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (6.57)$$

где Δs_i и ΔP_i суть разности измеренных и вычисленных значений s и P , соответственно, а индекс i означает, что величины берутся на момент наблюдения t_i .

В формулах (6.54), (6.55), (6.56), (6.57) частные производные вычисляются с помощью соотношений (6.52), (6.53).

Для тангенциальных координат X_t, Y_t, s_t, P_t условные уравнения строятся аналогично.

При построении условных уравнений в рассматриваемых задачах следует учитывать, что коэффициенты при поправках Δp_k , ($i = 1, 2, \dots, m$) могут вычисляться в некоторой степени приближенно, поскольку уточнение может выполняться последовательными приближениями несколько раз. Однако значения измеряемых величин должны вычисляться с максимально возможной точностью, т.к. в последовательных приближениях разности измеренных и вычисленных значений измеряемой величины должны стремиться к нулю.

6.5. Назначение весов наблюдениям и условным уравнениям

Для обоснованного применения метода наименьших квадратов необходимо, чтобы гипотеза, принимаемая по отношению к ковариационной матрице ошибок наблюдений, была максимально близкой к действительности. Недиagonальные элементы ковариационной матрицы на практике чаще всего бывают неизвестными. Поэтому их просто приравнивают нулю. Что касается диагональных элементов, то они характеризуют точность наблюдений, которая может различаться для разных наблюдений. Однако диагональные элементы можно сделать равными, если подходящим образом назначить веса наблюдениям.

Возьмем условные уравнения метода наименьших квадратов, которые были рассмотрены в разделе 6.1 для случая равноточных наблюдений :

$$\Delta \xi_i = \sum_{k=1}^n a_k^{(i)} \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6.58)$$

Здесь $\Delta \xi_i$ — разность измеренного и вычисленного значений измеряемой величины при наблюдении номер i , $\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n$ суть уточняемые параметры, а $a_k^{(i)}$ — численные коэффициенты условных уравнений. Набор уточняемых параметров можно представить вектором $\Delta p = \{\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n\}^T$.

Для решения задачи согласно методу наименьших квадратов нужно составить систему нормальных уравнений, которую запишем в виде

$$\mathbf{L} \Delta p = \mathbf{d},$$

где \mathbf{L} и \mathbf{d} суть матрица и вектор

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{pmatrix}, \quad (6.59)$$

элементы которых вычисляются по формулам

$$l_{kj} = \sum_{i=1}^m a_k^{(i)} a_j^{(i)} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n), \quad (6.60)$$

$$d_k = \sum_{i=1}^m a_k^{(i)} \Delta \xi_i \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (6.61)$$

Веса наблюдений w_i ($i = 1, 2, \dots, m$) вводятся следующим образом. Умножая условные уравнения (6.58) почленно на $\sqrt{w_i}$, получим

$$\Delta \xi_i \sqrt{w_i} = \sum_{k=1}^n \sqrt{w_i} a_k^{(i)} \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6.62)$$

Вместо (6.60), (6.61) берем формулы

$$l_{kj} = \sum_{i=1}^m w_i a_k^{(i)} a_j^{(i)} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n), \quad (6.63)$$

$$d_k = \sum_{i=1}^m w_i a_k^{(i)} \Delta \xi_i \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (6.64)$$

Далее решение получается так же, как и для равноточных наблюдений.

Ковариационная матрица ошибок наблюдений будет иметь равные диагональные элементы, если ошибки левых частей условных уравнений (6.62) будут примерно одинаковыми для всех i . Сделать так можно было бы, если погрешности величин $\Delta \xi_i$ были бы известными. Достичь указанного свойства ковариационной матрицы можно, если положить

$$\sqrt{w_i} = \frac{1}{\sigma_i},$$

где σ_i есть ошибка измерения с номером i .

Проблема в том, что обычно мы не знаем ошибок σ_i . Придется принимать какую-нибудь подходящую гипотезу относительно ошибок измерений. Предположим, что все наблюдения можно распределить на группы так, чтобы внутри каждой группы наблюдения можно было бы считать равноточными. Можно предположить, что

группа наблюдений на одной обсерватории выполняются одним наблюдателем с помощью одного и того же инструмента в течение некоторого времени, когда условия наблюдений не изменяются.

Сначала выполняем уточнение параметров, полагая все $w_i = 1$. После уточнения для каждого наблюдения величина $\Delta\xi_i$ будет характеризовать согласование теории с наблюдениями. Предполагая, что ошибки наблюдений доминируют над ошибками теории, будем считать $\Delta\xi_i$ ошибками наблюдений.

Теперь для каждой группы по предположению равнооточных наблюдений вычислим среднеквадратичную величину от всех $\Delta\xi_i$, принадлежащих группе. Обозначим ее через σ_k , где k — номер группы. Теперь для каждого наблюдения можно задать вес следующим образом:

$$\sqrt{w_i} = \frac{1}{\sigma_k},$$

где k — номер группы, к которой принадлежит наблюдение номер i .

Выполнив уточнение параметров с назначенными весами, можно заново вычислить все ошибки наблюдений и заново назначить веса. Такую итерацию можно сделать 2–3 раза. В итоге получим назначение весов в согласии с точностью наблюдений, и ковариационную матрицу ошибок наблюдений, близкую к действительной.

Метод наименьших квадратов дает возможность оценить точность получаемых значений уточняемых параметров. В разделе 6.1 объяснено, как это сделать. В случае взвешенных условных уравнений последовательность действий такая же, как и без назначения весов. Матрица нормальных уравнений и вектор правых частей находятся по формулам (6.63), (6.64). Дополнительно вычисляется величина

$$d_0 = \sum_{i=1}^m w_i \Delta\xi_i^2. \quad (6.65)$$

Вычисляем

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{m-n} [d_0 - (\mathbf{d}\Delta p)], \quad (6.66)$$

где Δp найденный вектор поправок, а компоненты вектора \mathbf{d} определяются по формуле (6.64). Умножим теперь все элементы матрицы \mathbf{L}^{-1} на σ_0^2 . Полученная таким образом матрица

$$\mathbf{D} = \sigma_0^2 \mathbf{L}^{-1} \quad (6.67)$$

своими диагональными элементами будет иметь квадраты ошибок σ_k поправок Δp_k ($k = 1, 2, \dots, n$) соответственно.

6.6. Вычисление статистических характеристик невязок

В описании метода дифференциального уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений фигурируют величины δ_i ($i = 1, 2, \dots, m$), называемые невязками. Они определены соотношениями (6.12). Здесь m — это число измерений. После успешного уточнения параметров, когда поправки к ним становятся пренебрежимо малыми, невязки оказываются равными отклонениям $\Delta \xi_i$, характеризующим согласование теории с наблюдениями. Фактически эти величины содержат ошибки наблюдений и ошибки модели движения небесного тела.

На практике всегда интересуются статистическими характеристиками невязок $\Delta \xi_i$. Они несут полезную информацию для дальнейшего совершенствования как модели движения, так и методов наблюдений. Сначала анализируется средняя арифметическая величина невязок

$$\overline{\Delta \xi} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Delta \xi_i.$$

Существенное отличие этой величины от нуля показывает наличие в результатах наблюдений систематической ошибки, которая может быть вызвана несовершенством наблюдательных приборов или неправильной процедурой предварительной обработки наблюдений. Близость величины $\overline{\Delta \xi}$ к нулю еще не говорит об общем качестве наблюдений.

Далее анализу подвергается среднеквадратичная величина отклонений $\Delta \xi_i$. Она определяется по уже приведенной выше формуле (6.27)

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{d_0}{m}}, \quad (6.68)$$

в которой величина d_0 должна вычисляться согласно ее выражению (6.22). Эта характеристика включает в себя как систематические, так и случайные ошибки наблюдений.

В наборе используемых наблюдений могут быть как точные, так и грубые наблюдения. В этом случае в величину суммы (6.22) основной вклад внесут грубые наблюдения с большими невязками.

Если же мы применяем веса наблюдений, то характеристика $\bar{\sigma}$ не будет соответствовать способу использования данных. Тогда можно анализировать так называемую средневзвешенную величину невязок $\bar{\sigma}_w$, которая вычисляется по той же формуле (6.68), но в которую подставлена величина d_0 , определяемая соотношением (6.65).

Чтобы отделить систематическую составляющую невязок от случайной, вычисляют так называемую несмещенную дисперсию случайных невязок $D(\Delta\xi)$, которая определяется по формуле

$$D(\Delta\xi) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\Delta\xi_i - \overline{\Delta\xi})^2.$$

Квадратный корень из дисперсии

$$\sigma = \sqrt{D(\Delta\xi)} \quad (6.69)$$

называется стандартным отклонением. Эта величина характеризует случайную составляющую ошибок наблюдений.

В алгоритмах, реализуемых на практике, оказывается нерацональным запасать в памяти все невязки $\Delta\xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), чтобы затем вычислить статистические характеристики $\overline{\Delta\xi}$, $\bar{\sigma}$, σ . Особенно затруднительно это делать при очень большом числе наблюдений. В процессе вычислений наблюдения просматриваются последовательно одно за другим. Память, отводимая для обработки одного наблюдения, затем используется для обработки следующего. В этом процессе можно использовать рекуррентные соотношения для искомых характеристик. Допустим, что мы вычислили $\overline{\Delta\xi}$, $\bar{\sigma}$, σ для k наблюдений. Обозначим полученные значения через $\overline{\Delta\xi}^{(k)}$, $\bar{\sigma}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, соответственно. При добавлении еще одного наблюдения с номером $k+1$, то есть невязки $\Delta\xi_{k+1}$, новые, следующие значения характеристик $\overline{\Delta\xi}^{(k+1)}$, $\bar{\sigma}^{(k+1)}$, $\sigma^{(k+1)}$ можно найти из рекуррентных соотношений

$$\overline{\Delta\xi}^{(k+1)} = \frac{1}{k+1} (k \overline{\Delta\xi}^{(k)} + \Delta\xi_{k+1}),$$

$$\bar{\sigma}^{(k+1)} = \sqrt{\frac{1}{k+1} (k \bar{\sigma}^{(k)2} + \Delta\xi_{k+1}^2)},$$

$$\sigma^{(k+1)} = \sqrt{\frac{1}{k} \left[k \bar{\sigma}^{(k)2} - \frac{1}{k+1} \left(k \overline{\Delta\xi}^{(k)} + \Delta\xi_{k+1} \right)^2 + \Delta\xi_{k+1}^2 \right]}.$$

6.7. Проблема отбраковки грубых наблюдений

Наличие ошибок наблюдений создает трудности при определении параметров движения спутников на основе наблюдений. Причем проблема состоит не столько в наличии ошибок, сколько в неопределенности их свойств. Чаще всего у нас об этом нет никакой информации. Остается только принимать те или иные гипотезы.

Среди конкретных ошибок наблюдений могут оказаться такие значительные, которые вызваны не реальной погрешностью измерений, а выдающимся редким событием, несвойственным для всего ряда наблюдений. Распознать наблюдения с такими ошибками бывает практически невозможно.

Многие исследователи поступают так. Задают уровень вероятности того, что величина ошибки наблюдения заключена в некоторых пределах. Пределы находят по среднеквадратичной величине невязок наблюдений σ . После вычисления σ по всем наблюдениям задают некоторый множитель k . Далее все наблюдения, для которых невязки превышают $k\sigma$, отбрасывают. Чаще всего берут $k = 3$. При этом обеспечивается некоторый уровень вероятности, что ошибки заключены в пределах $(-k\sigma, k\sigma)$. Эта вероятность зависит еще от количества уточняемых параметров, вовлеченных в процесс. После такой отбраковки наблюдений можно снова вычислить σ и повторить процесс отбраковки. При этом могут быть отброшены новые наблюдения. При повторении процесса несколько раз нет гарантии того, что на каком-то этапе новых отброшенных наблюдений не будет. Если такой процесс остановился (новые наблюдения не были отброшены), то нет уверенности, что были отброшены именно те грубые наблюдения, ошибки которых представляют собой исключительные нетипичные события. На практике множитель k выбирают в пределах от 3 до 6.

Давно разработана «Теория ошибок». Это научная дисциплина, которая имеет целью определение наиболее надежных результатов измерений в экспериментальных науках. Ее можно считать соответствующим приложением статистического метода. Об истории этой науки можно узнать из книги (Шейнин, 2007). Однако и эта теория не дает однозначного алгоритма отбраковки грубых наблюдений при отсутствии данных о свойствах ошибок. Процесс отбраковки наблюдений остается неопределенным.

В книге (Шейнин, 2007) подробно рассказывается, как рассуждали и поступали с отбраковкой грубых наблюдений математики-

классики. Например, приводится цитата Гаусса: «... если слишком проворно отбрасывать наблюдения, возникнет опасность преувеличить их точность. Мне представляется, что это занятие более похоже на поступки в жизни, где редко или никогда не имеется математической строгости и где приходится поступать по наилучшему продуманному усмотрению».

Так что единственная существующая рекомендация — это «поступать по наилучшему продуманному усмотрению». На практике опытные исследователи так и делают. Имея некоторую неформализованную информацию о наблюдениях, выбирают либо подходящий множитель \varkappa в вышеописанном методе, либо устанавливают некоторый предел σ_{lim} и отбрасывают все наблюдения, для которых невязка превышает σ_{lim} .

Больше нам порекомендовать нечего.

Литература к Главе 6

- Авдюшев В. А., Баньщикова М. А.* Определение орбит близких спутников Юпитера. *Астрономический вестник*. 2008. Т. 42. № 4. С. 317–340.
- Авдюшев В. А., Баньщикова М. А.* Альтернативные орбиты новых спутников Юпитера. *Известия вузов. Физика*. 2010. № 10. С. 27–30.
- Авдюшев В. А.* Численное моделирование орбит небесных тел. Томск: Издательский дом Томского государственного университета, 2015.
- Бахшиян Б. Ц., Назиров Р. Р. и др.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.
- Губанов В. С.* Обобщенный метод наименьших квадратов. СПб.: Наука, 1997.
- Емельянов Н. В.* Методы составления алгоритмов и программ в задачах небесной механики. М.: Наука, 1983.
- Шейнин, О. Б.* История теории ошибок. Берлин, 2007. 141 с.
- Щиголов Б. М.* Математическая обработка наблюдений. 3-е изд. М.: Наука, 1969.
- Эльясберг П. Е.* Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976.

ПОЛУЧЕНИЕ АСТРОМЕТРИЧЕСКИХ ДАННЫХ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ ВЗАИМНЫХ ПОКРЫТИЙ И ЗАТМЕНИЙ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

Резюме

Успех определения параметров движения спутников в первую очередь зависит от состава и точности имеющихся наблюдений. Точность наблюдений зависит от совершенства наблюдательных средств: телескопов и фотоприемников. В этом деле мы не только ждем новой аппаратуры от разработчиков наблюдательной техники, но сами ищем новые методы наблюдений. В данной главе дается яркий пример нового метода наблюдений, при котором применяется простая аппаратура, доступная даже любителям астрономии. Хитрость в том, что измерения делаются фотометрические, а результаты получаются позиционные — астрометрические.

Новый метод основан на использовании редких явлений — видимых взаимных покрытий и затмений спутников. Эти явления происходили всегда. Однако их массовое использование началось лишь в семидесятые годы двадцатого века. Главная проблема заключена в методе получения астрометрических данных на основе результатов фотометрии спутников во время явлений. Метод оказывается чрезвычайно сложным. Приходится устраивать сложный учет рассеяния света на спутниках. В мире всего несколько специалистов смогли независимо справиться с этой задачей. Автор данной книги разработал оригинальный метод получения астрометрических данных на основе фотометрии спутников планет во время их взаимных покрытий и затмений. В этой главе дается описание самих наблюдаемых явлений и подробно описывается этот метод.

При едином общем подходе учет рассеяния света делается различными путями для спутников Юпитера, Сатурна и Урана. Все эти детали описаны в данной главе.

Весьма интересное обстоятельство, связанное с рассматриваемыми явлениями, заключается в том, что они происходят отдельными периодами. Длительность одного явления составляет несколько минут. Это приводит к необходимости организовывать крупные международные кампании наблюдений. Как это делается, описано в данной главе.

В конце главы рассматриваются трудности и препятствия при попытках обеспечить потенциально возможную высокую точность такого метода наблюдений.

7.1. Описание явлений

Техника наблюдений небесных тел постоянно совершенствуется. Совершенство средств зависит от развития технологии в мире. В то же время астрономы, применяя специальные знания, ищут со своей стороны новые, более совершенные методы наблюдений. На каком-то этапе открытий и изучения естественных спутников планет было обнаружено, что главные спутники Юпитера, Сатурна и Урана движутся по орбитам, расположенным почти в одной плоскости, совпадающей с плоскостью экватора планеты, но наклоненной к плоскости ее орбиты. При этом два раза за период обращения планеты вокруг Солнца в эту плоскость попадает линия, соединяющая планету с Землей. Примерно в эти же эпохи через плоскость орбит спутников проходит линия планета-Солнце. В некоторые моменты времени изображения дисков каких-то пар спутников, видимых с Земли, пересекаются. В эти же эпохи тень от одного спутника иногда попадает на другой, и эта тень видна с Земли. В обоих случаях суммарный блеск спутников временно уменьшается. Этот спад светового потока может измеряться, даже если мы не различаем изображения дисков спутников. Происходят так называемые взаимные покрытия и затмения спутников планеты. Конфигурация Солнце — планета — спутники в случаях таких взаимных явлений показана на рис. 7.1. Длительность спада яркости спутников в большинстве случаев составляет от 4 до 15 минут. Периоды явлений длительностью в 6-9 месяцев повторяются через пол-оборота планеты вокруг Солнца. Годы, в которые происходят взаимные покрытия и затме-

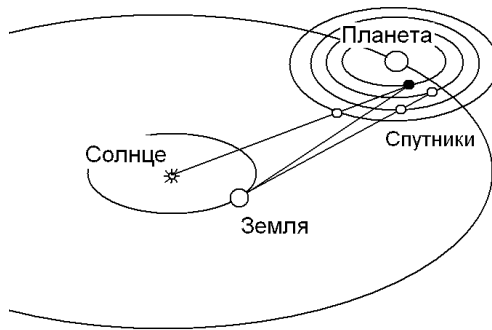


Рис. 7.1. Схема конфигурации гелиоцентрических орбит Земли, планеты и орбит ее спутников, при которой возникают взаимные покрытия и затмения спутников.

ния главных спутников, следующие. Спутники Юпитера: ..., 1997, 2003, 2009, 2015, 2021, Спутники Сатурна: ..., 1995, 2009, 2023, ... Спутники Урана: ..., 1965, 2007, 2049, Происходят от 1 до 10 явлений в неделю. Каждое явление можно наблюдать одновременно только на 30% наземных обсерваторий.

Для описания явлений вводят понятие плоскости явления. Это плоскость, проходящая через покрываемый или затмеваемый спутник перпендикулярно к лучу, направленному к этому спутнику от наблюдателя в случае взаимного покрытия, или от центра Солнца в случае взаимного затмения. На эту плоскость проектируют положение покрывающего или затмевающего спутника. Определяют координаты этой проекции в некоторой системе координат X, Y на плоскости явления. Начало координат помещают в покрываемый или затмеваемый спутник. Направление оси Y выбирают на северный полюс мира, а ось X — к востоку.

Очевидно, что световой поток, приходящий от спутников во время явления, зависит от их видимого относительного положения, измеряемого относительными координатами X, Y в плоскости явления. На рис. 7.2, 7.3 показан спад нормированной величины светового потока от спутников при изменении координат в плоскости явления во время взаимного покрытия или затмения.

В процессе фотометрического наблюдения спутников в ряд моментов времени измеряется световой поток от спутников. Получа-

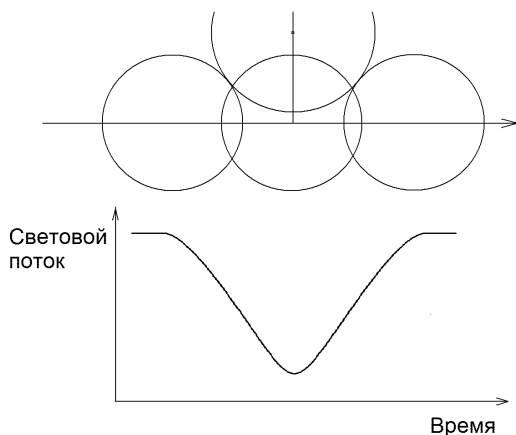


Рис. 7.2. Три конфигурации взаимного видимого расположения дисков спутников во время взаимного покрытия и соответствующая кривая суммарного блеска.

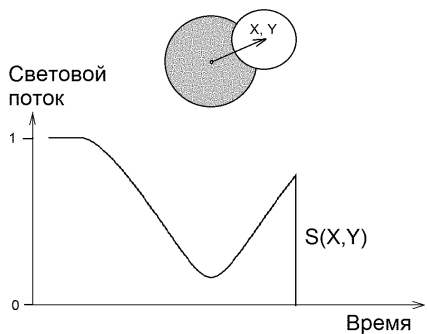


Рис. 7.3. Зависимость нормированного светового потока, приходящего от пары спутников во время взаимного покрытия, от времени.

ется кривая измеренного блеска. Пример результата такого наблюдения показан на рис. 7.4.

Поскольку спад светового потока во время явления зависит от координат спутников, можно решать обратную задачу — получать астрометрические данные по измеренным кривым блеска

спутников во время их взаимных покрытий и затмений. Такой метод наблюдений имеет несколько существенных преимуществ. Во-первых, соотношение скорости видимого движения и точности фотометрии таково, что точность получаемых астрометрических результатов в несколько раз лучше точности обычных астрометрических наблюдений. Во-вторых, необходимые фотометрические наблюдения могут выполняться скромными средствами. Главные спутники планет достаточно яркие, так что очень светосильные телескопы не нужны. Не нужны и никакие звездные каталоги. Обработка изображений с целью получения фотометрических данных выполняется известными процедурами. По этим причинам фотометрические наблюдения взаимных покрытий и затмений главных спутников планет могут выполняться как профессиональными наблюдателями, так и астрономами-любителями.

Каждое явление происходит короткое время и наблюдается одновременно только из части наземных пунктов. Участие наблюдателей-любителей в кампаниях наблюдений оказывается весьма полезным делом. Третье преимущество заключается в том, что регулярные наблюдения разных типов расширяют интервал времени наблюдений спутников и улучшают тем самым их эфемериды на будущее.

7.2. Метод получения астрометрических данных

Метод вывода астрометрических данных из фотометрии взаимных покрытий и затмений спутников планет был предложен еще в 70-е годы XX века в работах (Aksnes, Franklin, 1976; Aksnes et al., 1984) и впоследствии был развит в работах (Vasundhara, 1994; Noyelles, Vienne, Descamps, 2003). В этом методе были приняты некоторые упрощения модели явлений. Другой, оригинальный метод обработки фотометрических наблюдений и получения астрометрических результатов развит в работах (Емельянов, 2003; Emelyanov, Gilbert, 2006).

Рассмотрим основные принципы методов получения астрометрических данных из результатов фотометрии спутников во время их взаимных покрытий и затмений. Опираемся будем на подход, принятый в работе (Емельянов, 2003).

Задача формулируется следующим образом. Во время рассматриваемого явления в ряд моментов времени измеряется световой

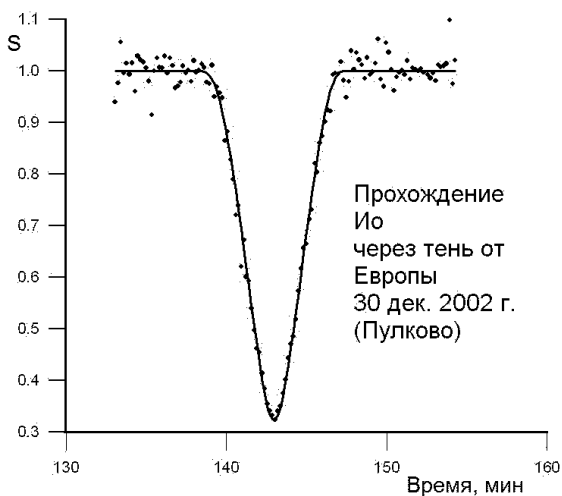


Рис. 7.4. Пример нормированного светового потока от спутника Ио во время его затмения другим спутником и соответствующей модельной кривой после уточнения параметров модели.

поток от спутников. Используя эти данные, требуется определить разности координат двух спутников на какой-нибудь один момент времени в интервале времени явления.

В процессе фотометрии спутников получается измеренное значение светового потока E в некоторой шкале значений, фиксированной для каждого данного явления. Мы не знаем заранее эту шкалу, но нам и не нужно знать абсолютную величину потока. Он может быть измерен с точностью до любого неопределенного множителя. Обозначим через S такую нормированную величину светового потока от спутников, что перед его началом и сразу после окончания эта величина равна единице. Мы предполагаем, что эти два значения совпадают. В процессе взаимного покрытия или затмения световой поток уменьшается и становится $S < 1$. Тогда можно установить соотношение

$$E = K S, \quad (7.1)$$

где K — некоторый неопределенный коэффициент, по предположению постоянный во время явления. Очевидно, что S зависит от относительных координат X, Y в системе, описанной выше, и мы

определяем функцию $S(X, Y)$. Координаты X, Y могут быть вычислены на любой момент времени t с помощью эфемерид планеты и спутников. Обозначим эти эфемеридные значения через $X_{th}(t)$, $Y_{th}(t)$. Если мы подставим их в функцию $S(X, Y)$, а затем подставим функцию в соотношение (7.1), то мы не получим реальное значение светового потока E из-за того, что эфемериды имеют погрешность. Предположим, что в течение явления истинные значения координат отличаются от эфемеридных на некоторые постоянные D_x, D_y так, что реальный световой поток определится из соотношения

$$E = K S(X_{th}(t) + D_x, Y_{th}(t) + D_y).$$

Допустим, что проведены фотометрические наблюдения, т.е. в моменты t_i ($i = 1, 2, \dots, m$) получены измеренные значения E_i . Тогда можно записать систему условных уравнений

$$E_i = K S(X_{th}(t_i) + D_x, Y_{th}(t_i) + D_y), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

относительно неизвестных параметров K, D_x, D_y . Мы линеаризируем функцию S относительно своих аргументов и решаем систему линейных условных уравнения по методу наименьших квадратов. После того, как решение найдено, астрометрический результат выражается значениями координат $X(t^*) = X_{th}(t^*) + D_x$, $Y(t^*) = Y_{th}(t^*) + D_y$, где t^* — любой момент времени внутри интервала времени явления. Для определенности мы выбираем в качестве t^* момент, когда величина $X^2 + Y^2$ достигает минимума, т.е. видимое расстояние между спутниками минимально. Координаты $X(t^*), Y(t^*)$ на момент времени t^* уже не зависят от используемых эфемерид и наилучшим образом соответствуют результатам всех фотометрических измерений, выполненных во время явления.

Естественно предположить, что когда свет от спутников отсутствует, измеренное значение E должно быть равно нулю. Для этого при фотометрической обработке наблюдений стараются по возможности исключить уровень фона неба или какие-либо инструментальные потоки света. Однако на практике это удается не совсем чисто, и некоторый уровень фона P в измерениях остается. Тогда мы должны решать условные уравнения, составленные в следующем виде:

$$E_i = K S(X_{th}(t_i) + D_x, Y_{th}(t_i) + D_y) + P \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

и включать уровень фона P в число определяемых параметров. Однако решение таких расширенных уравнений удается только в редких специальных случаях взаимных видимых движений спутников.

Для реализации метода нужно уметь вычислять $S(X, Y)$ как функцию от своих аргументов. Световой поток приходит от каждой точки спутника и суммируется в фотоприемнике. Каждая точка поверхности спутника отличается своими свойствами рассеивать свет. Во всех точках направление падения света от Солнца и направление отраженного света к наблюдателю оказываются разными по отношению к спутниковой поверхности. Разумеется, от точки, заслоненной покрываемым спутником, свет не приходит. Покрывается точка или нет — это зависит от взаимного расположения спутников и наблюдателя.

При взаимном затмении спутников свет, попадающий в каждую точку затмеваемого спутника, образуется суммой потоков от всех точек той части диска Солнца, которая не заслонена затмевающим спутником. При этом нужно учитывать, что имеется потемнение диска Солнца к краю. Если бы телескоп позволил различать диски спутников, то мы увидели бы частично покрытый или затемненный диск спутника с неравномерной яркостью и с темным краем из-за того, что Солнце освещает спутник немного сбоку. При реальных наблюдениях покрываемый и покрывающий спутники дают в фотоприемнике одно общее пятно. Именно их общий световой поток и измеряется. Любой применяемый фотоприемник имеет разную чувствительность к свету разных длин волн. Поэтому нужно учитывать зависимость рассеяния света от длины волны и характеристики применяемого светофильтра.

При практических вычислениях мы разбиваем полусферу спутника, обращенную к Земле, на конечные элементы, вычисляем входящий поток от каждого элемента отдельно и суммируем все эти потоки. На этом этапе может использоваться тот или иной закон рассеяния света точкой поверхности спутника. Необходимо знать ряд параметров, задающих светотражательные свойства поверхности конкретного спутника. Один из них — это распределенное по поверхности альbedo спутника, учитывающее детали поверхности. Здесь рассматриваются несколько параметров. В сумме все эти обстоятельства составляют фотометрическую модель явления.

Одна из наиболее точных фотометрических моделей взаимных покрытий и затмений Галилеевых спутников Юпитера описана в

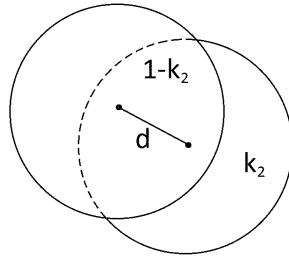


Рис. 7.5. Взаимное покрытие спутников. Непокрытая часть покрываемого спутника расположена внизу справа. Доля этой части от всего диска характеризуется величиной k_2 .

работах (Емельянов, 2003; Emelyanov, Gilbert, 2006). Аналогичные модели для главных спутников Сатурна и Урана даются в работах (Arlot et al., 2012; Arlot et al., 2013). Некоторый упрощенный вариант модели взаимных покрытий и затмений спутников рассматривается ниже.

7.3. Упрощенный вариант модели взаимных покрытий и затмений спутников планет

Рассмотрим модель взаимного покрытия двух спутников. В упрощенном варианте будем полагать, что наблюдаются однородные диски двух спутников. При этом интегральные альбедо по дискам разные. Обозначим их через p_1 для покрывающего спутника и p_2 — для покрываемого. Видимые радиусы спутников обозначим соответственно через r_1 и r_2 . Радиусы могут измеряться в секундах дуги так, как диски видны на небе, или в километрах в плоскости явления. Обозначим через d расстояние между центрами дисков, измеряемое в тех же единицах, что и радиусы спутников.

Если $d \geq r_1 + r_2$, то никакого явления не наблюдается, и мы получаем свет от полных дисков обоих спутников. Если просходит покрытие дисков, то мы видим только часть диска покрываемого спутника. Обозначим через k_2 долю видимого диска покрываемого спутника. Естественно, что k_2 зависит от расстояния между центрами дисков d . Это видно на рис. 7.5.

Таким образом, вне явления $k_2 = 1$. Если расстояние между центрами дисков $d \leq |r_1 - r_2|$, то происходит полное перекрытие дисков. При этом, если $r_1 \geq r_2$, то покрываемый спутник не виден совсем, и мы имеем $k_2 = 0$. В случае $r_1 < r_2$ видимая доля диска покрываемого спутника равна $k_2 = (r_2^2 - r_1^2)/r_2^2$.

В случае частичного взаимного покрытия, когда $r_1 + r_2 > d > |r_1 - r_2|$, величину k_2 можно вычислить с помощью последовательности формул

$$h = \sqrt{2d^2(r_1^2 + r_2^2) - d^4 - (r_1^2 - r_2^2)^2},$$

$$a_1 = d^2 - r_2^2 + r_1^2, \quad a_2 = d^2 - r_1^2 + r_2^2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{h}{a_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{h}{a_2},$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{\pi} \left[\frac{r_1^2}{r_2^2} \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{h}{2r_2^2} \right].$$

Здесь при вычислении углов φ_1, φ_2 по значениям их тангенсов следует учитывать, что знак $\cos \varphi_1$ совпадает со знаком a_1 , а знак $\cos \varphi_2$ совпадает со знаком a_2 . Эти формулы получены в работе (Емельянов, 1995).

Другой вид формул для вычисления коэффициента k_2 был предложен в работе (Asafin et al., 2009), а именно

$$\cos \alpha_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2r_1 d}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2r_2 d},$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{\pi} \left[\frac{r_1^2}{r_2^2} (\alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) + \alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \right].$$

Вычислять углы α_1 и α_2 здесь следует по значениям их тангенсов, учитывая, что синусы этих углов положительны.

В задачах обработки фотометрических наблюдений взаимных покрытий и затмений спутников с целью получения астрометрических данных приходится вычислять производную от k_2 по d , т.е. $\frac{dk_2}{d(d)}$. Это можно сделать с помощью следующей цепочки формул:

$$h' = \frac{2d}{h} (r_1^2 + r_2^2 - d^2),$$

$$\varphi_1' = \frac{a_1 h' - 2hd}{a_1^2 + h^2}, \quad \varphi_2' = \frac{a_2 h' - 2hd}{a_2^2 + h^2},$$

$$\frac{dk_2}{d(d)} = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \varphi'_1 + \varphi'_2 - \frac{h'}{2r_2^2} \right).$$

Теперь рассмотрим, как вычислять нормированный световой поток. Функция S при такой упрощенной модели явлений зависит от k_2 , которая в свою очередь зависит от d .

От покрывающего спутника приходит световой поток величиной $Rr_1^2 p_1$, а от покрываемого $Rr_2^2 p_2 k_2$, где r_1, r_2 — радиусы дисков, p_1 и p_2 — альbedo спутников, R — неопределенный коэффициент пропорциональности. При взаимном покрытии всегда измеряется световой поток от обоих спутников вместе. При этих условиях нормированный поток S можно выразить формулой

$$S(d) = \frac{p_1 r_1^2 + p_2 r_2^2 k_2(d)}{p_1 r_1^2 + p_2 r_2^2} = \frac{1 + \frac{p_2 r_2^2 k_2(d)}{p_1 r_1^2}}{1 + \frac{p_2 r_2^2}{p_1 r_1^2}}.$$

Вне явления, когда нет покрытия, виден весь покрываемый спутник, и мы имеем $k_2 = 1, S = 1, E = K$. Случаются полные покрытия. На рис. 7.6 изображена конфигурация спутников в этом случае. Ясно, что в интервале времени (t_1, t_2) покрываемого спутника совсем не видно, и $k_2 = 0$. В этот период мы имеем

$$S(d) = \frac{1}{1 + \frac{p_2 r_2^2}{p_1 r_1^2}},$$

т.е. световой поток не зависит от взаимного расстояния спутников d .

Как видно из упрощенного рассмотрения фотометрической модели, нормированный световой поток от спутников зависит от отношения интегральных альbedo по поверхности. Эта зависимость остается и в более точных фотометрических моделях. При обработке наблюдений Галилеевых спутников Юпитера (Emelyanov, 2009; Arlot et al., 2012) мы усредняем по видимому диску фотометрические свойства спутника. На этом этапе можно учесть вариации интегрального значения альbedo, зависящие от угла вращения спутника. Проще говоря, поток света от спутника зависит от того, каким боком он к нам обращен. Данные о вариациях интегрального альbedo мы берем из публикаций (Morrison, Morrison, 1977; Prokofeva-Mikhailovskaya et al., 2010; Abramenko et al., 2011). Эти данные имеют недостаточно высокую точность. Они могут быть источником погрешности в фотометрической модели взаимных покрытий

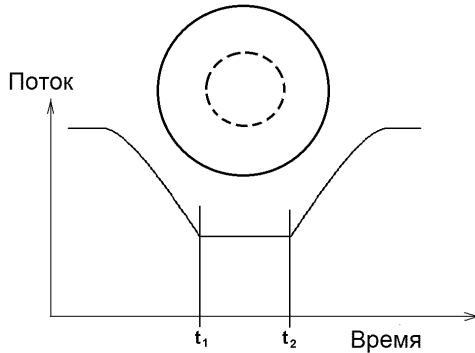


Рис. 7.6. Полное покрытие одного спутника другим в течение промежутка времени (t_1, t_2) и соответствующий участок на кривой суммарного нормированного потока от пары спутников.

и затмений Галилеевых спутников Юпитера. Очевидна необходимость проведения широких фотометрических наблюдений Галилеевых спутников Юпитера для разных значений углов вращения спутников от 0 до 360 градусов в разных спектральных полосах.

7.4. Фотометрические модели взаимных покрытий и заменей спутников планет

7.4.1. Общие фотометрические характеристики

Рассмотренная выше упрощенная модель взаимных покрытий и затмений спутников планет не обеспечивает такую точность астрономических данных, которая может быть достигнута при имеющихся фотометрических наблюдениях. Построить наиболее точную модель можно следующим путем.

Солнце и спутники — протяженные объекты. Каждая точка поверхности имеет свои свойства. Излучение и рассеяние света зависит от этих свойств. Сигнал, который измеряется в фотоприемнике, формируется светом, в него попавшим, но зависит еще от свойств самого фотоприемника. Рассмотрим подробнее эти процессы.

Нам будут нужны общие понятия и величины, характеризующие свойства рассеяния света в данной точке поверхности, и дру-

гие величины, необходимые для описания интегральной фотометрии видимого диска спутника.

Законом рассеяния света называют зависимость интенсивности света, рассеянного в данной точке в направлении наблюдателя, от параметров, описывающих обстоятельства явления и свойства рассеивающей поверхности. Величина рассматриваемой интенсивности обычно нормируется таким образом, чтобы интеграл от нее по всему видимому диску спутника деленный на площадь диска был равен геометрическому альбедо спутника при условии, что наблюдатель находится в направлении источника света. Величину интенсивности света, рассеянного в данной точке в направлении наблюдателя, называют функцией рассеяния. Обозначим эту функцию через f .

Обстоятельства рассеяния света описываются следующими параметрами: угол падения света i — угол между нормалью к поверхности и направлением распространения света от источника к точке поверхности, угол отражения e — угол между нормалью к поверхности и направлением от наблюдателя к точке рассеяния, угол фазы α — угол с вершиной в рассматриваемой точке между лучами направленными на источник света и на наблюдателя, а также азимутальный угол Ψ между проекциями этих лучей на плоскость, касательную к поверхности в данной точке. Естественно, что интенсивность рассеянного света зависит от длины волны света Λ , поскольку разные области поверхности спутника имеют разные цвета.

Функция рассеяния света имеет общий вид $f(\varphi, \lambda, i, e, \Psi, \alpha, \Lambda)$, где введены еще аргументы φ, λ — картографические координаты точки на поверхности спутника. Для учета зависимости от φ, λ можно использовать фотоснимки с космических аппаратов при условии, что снимки сделаны при тех же углах солнечной фазы, которые будут при наблюдениях с Земли.

В качестве интегральных характеристик светоотражательных свойств спутника рассматриваются геометрическое альбедо p и функция фазы $\Phi(\alpha)$ — отношение количества света, приходящего от спутника при данном угле фазы, к количеству приходящего света при угле фазы, равном нулю. Функция фазы учитывает интегральный эффект неравномерности яркости видимого диска спутника и уменьшение площади освещенной части диска. Интегральные характеристики также зависят от длины волны света Λ . Они разные для разных полос спектра.

7.4.2. Фотометрическая модель взаимного покрытия спутников

Здесь нам поможет рис. 7.7. На нем изображена схема фотометрии взаимного покрытия двух спутников. Свет от всего диска Солнца излучается в сторону спутников. Интенсивность потока зависит от длины волны Λ . Зависимость определяется функцией $F(\Lambda)$, известной из физики Солнца (Makarova et al., 1998). Свет в каждой бесконечно малой спектральной полосе $(\Lambda, \Lambda + d\Lambda)$ следует к спутникам и попадает в какую-нибудь точку покрываемого спутника. В этой точке происходит рассеяние света во все стороны, в том числе и в сторону наблюдателя. Интенсивность потока зависит от свойств точки поверхности и обстоятельств падения и отражения луча. Фактически, приходящий в точку поток от Солнца нужно умножить на некоторую функцию $f(\varphi, \lambda, i, e, \Psi, \alpha, \Lambda)$, чтобы получить величину потока, следующего к наблюдателю. Конечно, световой поток пропорционален площади бесконечно малого элемента диска покрываемого спутника dS_2 . Часть аргументов функции объяснены выше. Здесь появляются еще картографические координаты точки φ, λ на спутнике. Функция $f(\varphi, \lambda, i, e, \Psi, \alpha, \Lambda)$, введенная выше, называется еще законом рассеяния. Ее поиск — чрезвычайно сложная задача. Поверхность может быть глянцевой или пористой, с мельчайшими ямками и горками. Разные законы рассеяния мы рассмотрим ниже. Теперь же проследим далее путь света. Попадание света в фотоприемник вызывает его реакцию — он посылает сигнал в компьютер. Величина этого сигнала зависит от фоточувствительности приемника, в первую очередь — от длины волны. Здесь не надо забывать, что могут применяться различные светофильтры. Функцию спектральной чувствительности фотоприемника обозначим через $\Phi(\Lambda)$. Тогда величина сигнала от фотоприемника получится из величины приходящего потока умножением на $\Phi(\Lambda)$.

Мы не можем измерить световой поток от каждой точки поверхности спутника отдельно. Для этого обычно не хватает разрешения изображения. Нам доступно только измерение суммарного потока от пары спутников: покрываемого и покрывающего. Суммарный поток от покрываемого спутника определяется интегралом

$$G_2(X, Y) = \int_{S_2} \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \Phi(\Lambda) f(\varphi, \lambda, i, e, \Psi, \alpha, \Lambda) F(\Lambda) dS_2 d\Lambda,$$

где интегрирование ведется по всей непокрытой и освещенной

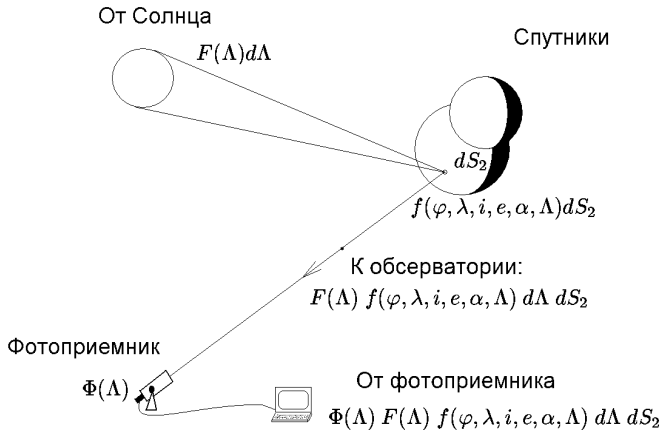


Рис. 7.7. Фотометрия взаимного покрытия спутников.

Солнцем части спутника S_2 , которая зависит от взаимных координат спутников (X, Y) , и по спектральной полосе (Λ_1, Λ_2) . Суммарный поток от покрывающего спутника определяется аналогичным интегралом

$$G_1^{(0)} = \int_{S_1} \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \Phi(\Lambda) f(\varphi, \lambda, i, e, \Psi, \alpha, \Lambda) F(\Lambda) dS_1 d\Lambda, \quad (7.2)$$

где интегрирование ведется по всей освещенной Солнцем и видимой с Земли части спутника S_1 . Верхний индекс 0 здесь указывает на то, что этот спутник ничем не покрыт. Пределы интегрирования Λ_1, Λ_2 берутся как пределы спектральной чувствительности фотоприемника. Разумеется, на практике детальные характеристики спутников задаются в виде таблиц, а вместо интегралов вычисляются конечные суммы по малым участкам, на которые разбиваются диски спутников.

Для определения нормированного светового потока S здесь не хватает величины суммарного светового потока от покрываемого спутника $G_2^{(0)}$ в предположении, что он ничем не покрыт. Этот поток определяется аналогично, как и для G_2 , но интегрирование ве-

дятся по всей освещенной Солнцем и видимой с Земли поверхности покрываемого спутника.

В итоге, величина нормированного светового потока S определится из соотношения

$$S(X, Y) = \frac{G_1^{(0)} + G_2(X, Y)}{G_1^{(0)} + G_2^{(0)}}.$$

7.4.3. Фотометрическая модель взаимного затмения спутников

Во время этого явления наблюдаемый спутник освещается не полным диском Солнца. Часть диска заслонена затмевающим спутником. Схему явления можно видеть на рис. 7.8. Некоторая незаслоненная точка диска Солнца излучает свет в сторону спутника. Интенсивность этого света зависит как от длины волны, так и от расположения точки на диске, поскольку диск Солнца имеет потемнение к краю. Это потемнение различно в разных участках спектра. Поэтому световой поток от точки диска Солнца будет определяться величиной

$$I(r, \Lambda) dS_0 d\Lambda,$$

где r — видимое расстояние точки от центра диска, dS_0 — бесконечно малый элемент диска Солнца, а $d\Lambda$ — бесконечно малая ширина спектральной полосы. Функцию $I(r, \Lambda)$ в форме таблиц можно найти в публикациях по физике Солнца. Можно взять, например, работу (Макарова et al., 1998).

Свет от точки диска Солнца, следуя к затмеваемому спутнику, попадает на его поверхность, в частности, в некоторую точку, имеющую светоотражательные свойства, описываемые законом рассеяния $f(\varphi, \lambda, i, e, \alpha, \Lambda)$. Рассеянный световой поток будет пропорционален площади элемента диска спутника dS_2 . В результате, к обсерватории будет следовать световой поток

$$f(\varphi, \lambda, i, e, \Psi, \alpha, \Lambda) dS_2 I(r, \Lambda) dS_0 d\Lambda.$$

Попадая в фотоприемник, этот свет вызовет сигнал величиной

$$\Phi(\Lambda) f(\varphi, \lambda, i, e, \Psi, \alpha, \Lambda) dS_2 I(r, \Lambda) dS_0 d\Lambda.$$

Мы измеряем световой поток от затмеваемого спутника, который определяется интегралом

$$G_2(X, Y) = \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \int_{S_2} \int_{S_0} \Phi(\Lambda) f(\varphi, \lambda, i, e, \Psi, \alpha, \Lambda) I(r, \Lambda) dS_0 dS_2 d\Lambda,$$

где интегрирование ведется по незаслоненной части диска Солнца S_0 , части диска спутника S_2 , освещенной Солнцем и видимой с Земли, и по спектральной полосе чувствительности фотоприемника (Λ_1, Λ_2).

Солнце и оба спутника во время взаимного затмения расположены почти на одной линии. Наземный наблюдатель видит затмеваемый спутник немного сбоку. То, какая часть диска Солнца не заслонена затмевающим спутником, непосредственно зависит от взаимного расположения спутников так, как они были бы видны с Солнца. Это взаимное расположение задается относительными гелиоцентрическими координатами X, Y . Поэтому суммарный световой поток от затмеваемого спутника зависит от X, Y .

При наблюдениях спутников планет во время их взаимных затмений в поле зрения может попадать вместе с затмеваемым также и затмевающий спутник. Угловое расстояние между спутниками может оказаться столь малым, что измерить отдельно световой поток от затмеваемого спутника может быть невозможно. При этом в других случаях световой поток от затмеваемого спутника может измеряться отдельно.

Суммарный поток от затмевающего спутника $G_1^{(0)}$ определяется интегралом, аналогичным (7.2). Однако в этом случае верхний индекс 0 здесь указывает на то, что свет на этот спутник поступает от полного диска Солнца.

Для определения нормированного светового потока S необходима еще величина светового потока от затмеваемого спутника $G_2^{(0)}$ в предположении, что для него Солнце ничем не заслонено. Этот поток определяется аналогично, как и для G_2 , но интегрирование ведется по всему диску Солнца.

Теперь величина нормированного светового потока S определится из соотношения

$$S(X, Y) = \frac{G_1^{(0)} + G_2(X, Y)}{G_1^{(0)} + G_2^{(0)}},$$

если измеряется световой поток от обоих спутников вместе, или из соотношения

$$S(X, Y) = \frac{G_2(X, Y)}{G_2^{(0)}},$$

если в фотоприемник попадает свет только от затмеваемого спутника.

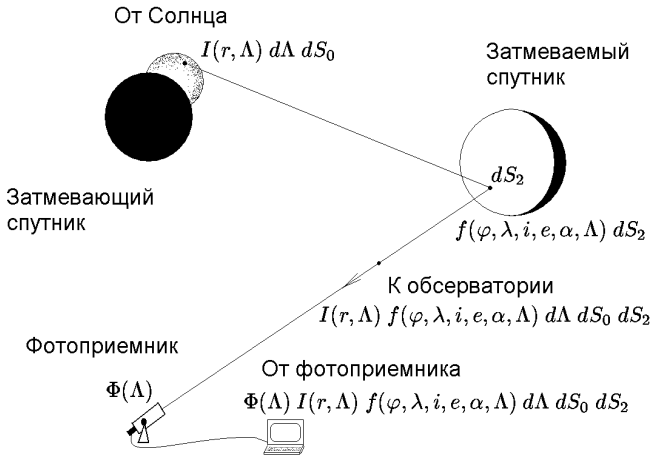


Рис. 7.8. Фотометрия взаимного затмения спутников.

7.5. Законы рассеяния света для спутников планет

7.5.1. Закон рассеяния света Ломмеля–Зеелигера

Во многих исследованиях характеристик и геометрического строения поверхностей планет и спутников применяется закон рассеяния света Ломмеля–Зеелигера. Чаще всего он применяется для шероховатых поверхностей с низким или средним альбедо.

Закон Ломмеля–Зеелигера описывается функцией рассеяния

$$f(i, e) = p \frac{2 \cos i}{\cos i + \cos e}.$$

Она зависит только от углов падения и отражения света.

При нулевом угле фазы очевидно, что $i = e$, тогда $f(i, e) = p$, и мы видим однородный диск спутника. При других углах фазы наибольшая яркость диска должна наблюдаться вблизи лимба, и будет видно потемнение диска к терминатору.

Функция фазы в случае закона Ломмеля–Зеелигера определяется выражением

$$\Phi(\alpha) = 1 - \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \quad (7.3)$$

Закон Ломмеля–Зеелигера может применяться только в весьма приближенных моделях явлений. В более точных моделях приме-

няется только общий вид зависимости рассеяния от углов падения и отражения. Формулы оказываются более сложными.

7.5.2. Закон Хапке рассеяния света для гладкой поверхности

Законы Хапке при различных свойствах рассеивающей поверхности учитывают частичное поглощение света и его многократное отражение частицами внутри некоторого слоя тела спутника.

В случае идеально гладкой матовой поверхности закон Хапке описывается следующей функцией (Нарке, 1981):

$$f(i, e, \alpha) = \frac{\omega}{4} \frac{\mu_0}{\mu_0 + \mu} \{ [1 + B(B_0, \alpha, h)] P(\alpha, g) + H(\mu, \omega) H(\mu_0, \omega) - 1 \},$$

где

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \cos i, \quad \mu = \cos e, \\ B(B_0, \alpha, h) &= \frac{B_0}{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)/h}, \\ P(\alpha, g) &= \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 + 2g \cos \alpha)^{3/2}}, \\ H(x, \omega) &= \frac{1 + 2x}{1 + 2x\sqrt{1 - \omega}}. \end{aligned}$$

Параметры ω , B_0 , h , g характеризуют свойства поверхности. Эти параметры в литературе имеют следующие названия: ω — среднее альbedo простого рассеяния, B_0 — амплитуда эффекта оппозиции, h — угловая полуширина эффекта оппозиции, g — параметр асимметрии. Параметр h связан с пористостью поверхности.

Функция рассеяния света в этом законе не содержит своим аргументом длину волны света Λ . Однако зависимость от Λ все же учитывается, так как значения параметров закона могут приниматься различными для различных спектральных полос.

Геометрическое альbedo спутника в этом случае находится по формуле

$$p = \frac{\omega}{8} [(1 + B_0)P(0, g) - 1] + \frac{1}{2} r_0 + \frac{1}{6} r_0^2, \quad (7.4)$$

где

$$r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \omega}}{1 - \sqrt{1 + \omega}}. \quad (7.5)$$

Функция фазы $\Phi(\alpha)$ определяется из соотношения

$$p \Phi(\alpha) = \left\{ \frac{\omega}{8} [(1 + B(B_0, \alpha, h))P(\alpha, g) - 1] + \frac{1}{2} r_0(1 - r_0) \right\} \times$$

$$\times \left[1 - \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} \right] + \frac{2r_0^2}{3\pi} [\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha]. \quad (7.6)$$

7.5.3. Закон Хапке рассеяния света для шероховатой поверхности

В случае шероховатой поверхности закон Хапке имеет вид (Нарке, 1984):

$$f(i, e, \alpha, \Psi) = \frac{\omega}{4} \frac{\mu'_0}{\mu'_0 + \mu'} \times$$

$$\times \{ [1 + B(B_0, \alpha, h)] P(\alpha, g) + H(\mu', \omega) H(\mu'_0, \omega) - 1 \} S(i, e, \Psi),$$

где $\mu'_0, \mu', S(i, e, \Psi)$ являются функциями от i, e, Ψ и еще одного параметра $\bar{\theta}$, называемого средним наклоном макроскопических шероховатостей поверхности. Эти функции вычисляются по различным формулам в случаях $i \leq e$ и $i > e$. При $i \leq e$ последовательно вычисляются

$$\begin{aligned} \mu'(i, e, \Psi) &= C(\bar{\theta}) \times \\ &\times \left[\mu + \sin e \operatorname{tg} \bar{\theta} \frac{\exp(-\frac{1}{\pi} \operatorname{ctg}^2 \bar{\theta} \operatorname{ctg}^2 e) - \sin^2 \frac{\Psi}{2} \exp(-\frac{1}{\pi} \operatorname{ctg}^2 \bar{\theta} \operatorname{ctg}^2 i)}{2 - \exp(-\frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \bar{\theta} \operatorname{ctg} e) - \frac{\Psi}{\pi} \exp(-\frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \bar{\theta} \operatorname{ctg} i)} \right], \\ \mu'_0(i, e, \Psi) &= C(\bar{\theta}) [\mu_0 + \\ &+ \sin i \operatorname{tg} \bar{\theta} \frac{\cos \Psi \exp(-\frac{1}{\pi} \operatorname{ctg}^2 \bar{\theta} \operatorname{ctg}^2 e) + \sin^2 \frac{\Psi}{2} \exp(-\frac{1}{\pi} \operatorname{ctg}^2 \bar{\theta} \operatorname{ctg}^2 i)}{2 - \exp(-\frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \bar{\theta} \operatorname{ctg} e) - \frac{\Psi}{\pi} \exp(-\frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \bar{\theta} \operatorname{ctg} i)}], \\ S(i, e, \Psi) &= \frac{\mu'(i, e, \Psi)}{\mu'(i, e, 0)} \frac{\mu_0}{\mu'_0(i, e, 0)} C(\bar{\theta}) \times \\ &\times \left\{ 1 - \bar{f}(\Psi) \left[1 - C(\bar{\theta}) \frac{\mu_0}{\mu'_0(i, e, 0)} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

При $i > e$ имеем

$$\begin{aligned} \mu'(i, e, \Psi) &= C(\bar{\theta}) [\mu + \\ &+ \sin e \operatorname{tg} \bar{\theta} \frac{\cos \Psi \exp(-\frac{1}{\pi} \operatorname{ctg}^2 \bar{\theta} \operatorname{ctg}^2 i) + \sin^2 \frac{\Psi}{2} \exp(-\frac{1}{\pi} \operatorname{ctg}^2 \bar{\theta} \operatorname{ctg}^2 e)}{2 - \exp(-\frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \bar{\theta} \operatorname{ctg} i) - \frac{\Psi}{\pi} \exp(-\frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \bar{\theta} \operatorname{ctg} e)}], \\ \mu'_0(i, e, \Psi) &= C(\bar{\theta}) [\mu_0 + \\ &+ \sin i \operatorname{tg} \bar{\theta} \frac{\exp(-\frac{1}{\pi} \operatorname{ctg}^2 \bar{\theta} \operatorname{ctg}^2 i) - \sin^2 \frac{\Psi}{2} \exp(-\frac{1}{\pi} \operatorname{ctg}^2 \bar{\theta} \operatorname{ctg}^2 e)}{2 - \exp(-\frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \bar{\theta} \operatorname{ctg} i) - \frac{\Psi}{\pi} \exp(-\frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \bar{\theta} \operatorname{ctg} e)}], \end{aligned}$$

$$S(i, e, \Psi) = \frac{\mu'(i, e, \Psi)}{\mu'(i, e, 0)} \frac{\mu_0}{\mu'_0(i, e, 0)} C(\bar{\theta}) \times \\ \times \left\{ 1 - \bar{f}(\Psi) \left[1 - C(\bar{\theta}) \frac{\mu}{\mu'(i, e, 0)} \right] \right\}^{-1}.$$

В этих формулах введены две новые функции

$$C(\bar{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \pi \operatorname{tg}^2 \bar{\theta}}}, \quad \bar{f}(\Psi) = \exp\left(-2 \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2}\right).$$

Функция фазы и геометрическое альbedo, которые в случае шероховатой поверхности мы обозначим через $\Phi_r(\alpha)$ и p_r , вычисляются следующим образом. Сначала из соотношений (7.4), (7.5), (7.6) определяем $\Phi(\alpha)$ и p , затем находим $\Phi_r(\alpha)$ и p_r по формулам

$$\Phi_r(\alpha) = K(\alpha, \bar{\theta}) \Phi(\alpha), \\ p_r = p + [C(\omega, \bar{\theta}) - 1] \left(\frac{1}{2} r_0 + \frac{1}{6} r_0^2 \right).$$

Здесь функции $K(\alpha, \bar{\theta})$ и $C(\omega, \bar{\theta})$ могут быть представлены эмпирическими выражениями

$$K(\alpha, \bar{\theta}) = \exp\{-0.32 \bar{\theta} \sqrt{\operatorname{tg} \bar{\theta} \operatorname{tg}(\alpha/2)} - 0.52 \bar{\theta} \operatorname{tg} \bar{\theta} \operatorname{tg}(\alpha/2)\},$$

$$C(\omega, \bar{\theta}) = 1 - (0.048 \bar{\theta} + 0.0041 \bar{\theta}^2) r_0 - (0.33 \bar{\theta} - 0.0049 \bar{\theta}^2) r_0^2,$$

где $\bar{\theta}$ выражена в радианах.

7.5.4. Параметры закона Хапке для Галилеевых спутников Юпитера

В литературе нам удалось найти лишь две работы, в которых опубликованы полные наборы параметров Хапке для Галилеевых спутников Юпитера.

В первой из них (McEwen et al., 1988) даются параметры модели Хапке шероховатой поверхности для спутника Ио в нескольких вариантах, полученных с применением ультрафиолетового (UV), фиолетового (VI), синего (BL), оранжевого (OR) фильтров и для спектральной полосы V. При этом параметры осреднялись по всей поверхности спутника. Эти данные воспроизведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1. Параметры фотометрической функции Хапке для спутника Ио.

Фильтр	ω	h	B_0	g	$\bar{\theta}$, degrees
V	0.94	0.028 ± 0.01	0.80 ± 0.2	-0.30 ± 0.06	30 ± 10
OR	0.96	0.028 ± 0.01	0.55 ± 0.4	-0.32 ± 0.04	30 ± 10
BL	0.90	0.028 ± 0.01	0.60 ± 0.4	-0.26 ± 0.04	30 ± 10
VI	0.67	0.028 ± 0.01	0.65 ± 0.4	-0.22 ± 0.04	30 ± 10
UV	0.33	0.028 ± 0.01	0.60 ± 0.4	-0.24 ± 0.04	30 ± 10

Вторая работа (Domingue, Verbiscer, 1997) посвящена усовершенствованию функции Хапке для шероховатых поверхностей. Предложено заменить функцию $P(\alpha, g)$ более универсальными ее вариантами: двухпараметрической функцией $P_2(\alpha, c_2, b_2)$ или трехпараметрической функцией $P_3(\alpha, c_3, b_3, d_3)$. Эти функции имеют вид

$$P_2(\alpha, c_2, b_2) = \frac{(1 - c_2)(1 - b_2^2)}{(1 + 2b_2 \cos \alpha + b_2^2)^{3/2}} + \frac{c_2(1 - b_2^2)}{(1 - 2b_2 \cos \alpha + b_2^2)^{3/2}},$$

$$P_3(\alpha, c_3, b_3, d_3) = \frac{(1 - c_3)(1 - b_3^2)}{(1 + 2b_3 \cos \alpha + b_3^2)^{3/2}} + \frac{c_3(1 - d_3^2)}{(1 + 2d_3 \cos \alpha + d_3^2)^{3/2}}.$$

Параметры c_2, b_2 и параметры c_3, b_3, d_3 совместно с другими параметрами функции Хапке были определены для спутников Европа, Ганимед и Каллисто на основе наземных и космических наблюдений. Данные получались отдельно для двух длин световых волн $\Lambda = 0.47 \mu m$ и $\Lambda = 0.55 \mu m$ и для двух полусфер спутника: ведущей (L) и ведомой (T). Значения приведены в табл. 7.2 и табл. 7.3.

Именно фотометрическая функция Хапке с приведенными выше параметрами была использована при получении астрометрических результатов по фотометрии Галилеевых спутников Юпитера в работах (Emelyanov, Gilbert, 2006; Emelyanov, 2008; Емельянов, Вашковьяк, 2009; Emelyanov, 2009; Arlot et al., 2014; Saquet et al., 2018).

7.6. Фотометрические характеристики спутника, интегральные по диску

Отражательные свойства разных точек поверхности спутника различны. Функция рассеяния в каждой точке зависит еще от дли-

Таблица 7.2. Фотометрические параметры Хапке при использовании функции $P_2(\alpha, c_2, b_2)$.

λ	L/T	w	B_0	h	$\bar{\theta}, ^\circ$	c_2	b_2
Европа							
$0.47\mu m$	L	0.922	0.50	0.0016	10.0	0.431	0.921
$0.55\mu m$	L	0.964	0.50	0.0016	10.0	0.429	0.887
$0.47\mu m$	T	0.897	0.45	0.0016	10.0	0.43	0.713
$0.55\mu m$	T	0.940	0.50	0.0016	10.0	0.443	0.609
Ганимед							
$0.47\mu m$	L	0.830	0.62	0.003	28.0	0.282	0.960
$0.55\mu m$	L	0.945	0.86	0.004	29.0	0.380	0.427
$0.47\mu m$	T	0.870	1.00	0.074	35.0	0.039	0.989
$0.55\mu m$	T	0.810	0.23	0.074	35.0	0.307	0.962
Каллисто							
$0.47\mu m$	L	0.740	1.00	0.031	42.0	0.729	0.024
$0.55\mu m$	L	0.540	1.00	0.031	42.0	0.132	0.949
$0.47\mu m$	T	0.470	0.27	0.0277	42.0	0.432	0.542
$0.55\mu m$	T	0.550	0.73	0.0277	42.0	0.206	0.958

ны волны света. В рассмотренных выше функциях рассеяния характеристики поверхности осреднялись либо по полусфере, либо по всей поверхности. Зависимость функции рассеяния от длины волны света учитывается путем подстановки вариантов значений параметров, различных для разных спектральных полос.

Существуют и другие пути приближенного отображения функции рассеяния. Один из подходящих способов состоит в следующем. Берем какой-либо закон рассеяния света, например закон Хапке. Параметры, входящие в этот закон, берем средними по всей поверхности спутника и относим их к определенной длине волны света. Принятая функция может учитывать зависимость от угла фазы Солнца.

Известно, что главные спутники планет вращаются почти синхронно с их орбитальным движением. Ось вращения каждого спутника с достаточно высокой точностью перпендикулярна плоскости

Таблица 7.3. Фотометрические параметры Хапке при использовании функции $P_3(\alpha, c_3, b_3, d_3)$.

Λ	L/T	w	B_0	h	$\bar{\theta}, ^\circ$	c_3	b_3	d_3
Европа								
$0.47\mu m$	L	0.934	0.49	0.0015	8.0	0.770	0.780	-0.459
$0.55\mu m$	L	0.964	0.43	0.0016	10.0	0.726	0.945	-0.416
$0.47\mu m$	T	0.897	0.51	0.0016	11.0	0.0	0.691	-0.417
$0.55\mu m$	T	0.930	0.521	0.0016	11.0	0.083	0.784	-0.386
Ганимед								
$0.47\mu m$	L	0.830	0.63	0.003	28.0	0.090	0.960	-0.280
$0.55\mu m$	L	0.930	0.91	0.003	28.0	0.200	0.450	-0.380
$0.47\mu m$	T	0.870	1.00	0.074	35.0	0.0	0.820	-0.046
$0.55\mu m$	T	0.810	0.23	0.074	35.0	0.350	0.970	-0.305
Каллисто								
$0.47\mu m$	L	0.510	0.82	0.031	42.0	0.0	0.033	-0.694
$0.55\mu m$	L	0.605	1.00	0.031	42.0	0.005	0.015	-0.687
$0.47\mu m$	T	0.530	0.50	0.0277	42.0	0.787	0.489	-0.400
$0.55\mu m$	T	0.650	0.87	0.0277	42.0	0.988	0.618	-0.238

его орбиты. Кроме того, эти оси мало отклоняются от плоскости, перпендикулярной лучу зрения наземного наблюдателя. Поэтому изменения интегрального блеска спутника существенно зависят от угла вращения спутника по отношению к наблюдателю. Проще говоря, поток света от спутника зависит от того, каким боком он к нам обращен. Однако эта зависимость может быть различной для различных длин волны света и для различных углов солнечной фазы. Умножим функцию рассеяния на некоторую функцию

$$A(\theta, \alpha, \Lambda),$$

где θ — угол вращения спутника по отношению к наблюдателю, α — угол солнечной фазы, а Λ — длина волны света. Полученная функция будет приближенно учитывать как локальные свойства рассеяния света, так и свойства, интегральные по диску.

В работах по данной теме принято отсчитывать угол вращения так, что в верхнем соединении его значение равно нулю, в восточной

элонгации — 90° , в нижнем соединении — 180° , в западной элонгации — 270° . Такое определение угла вращения полностью совпадает с определением угла вращения в Отчете рабочей группы Международного астрономического союза по картографическим координатам и элементам вращения: 2015 (Archinal et al., 2018).

Зависимость яркости спутника от угла вращения может быть получена из наземной фотометрии спутников. Такие данные для Галилеевых спутников Юпитера для спектральной полосы V опубликованы в работе (Morrison, Morrison, 1977). Только в 2011 году было выполнено повторная фотометрия этих спутников с целью получения зависимости яркости спутников от угла вращения (Prokof'eva-Mikhailovskaya et al., 2010; Abramenko et al., 2011). Данные основаны на наблюдениях в спектральной полосе V и приведены к углу солнечной фазы 6 град. Измеренные зависимости светового потока от угла вращения для Галилеевых спутников Юпитера показаны на рис. 7.9, 7.10, 7.11, 7.12. Эти данные имеют недостаточно высокую точность. Анализ, проведенный автором, показывает, что неточность знания указанной зависимости оказывается одним из основных источников погрешности в фотометрической модели взаимных покрытий и затмений Галилеевых спутников Юпитера. Очевидна необходимость проведения широких фотометрических наблюдений Галилеевых спутников Юпитера для разных значений углов вращения спутников от 0 до 360 градусов в разных спектральных полосах и при разных углах солнечной фазы, чтобы получить уточненные таблицы для функции $A(\theta, \alpha, \lambda)$.

Функция зависимости светового потока от угла вращения из работы (Morrison, Morrison, 1977) с некоторыми модификациями на основе работ (Abramenko et al., 2011; Prokof'eva-Mikhailovskaya et al., 2010) была использована при получении астрометрических результатов по фотометрии Галилеевых спутников Юпитера в работах (Arlot et al., 2014; Saquet et al., 2018).

7.7. Фотометрические модели взаимных покрытий и затмений главных спутников Сатурна и Урана

7.7.1. Фотометрическая модель взаимных покрытий и затмений главных спутников Сатурна

Восемь главных спутников Сатурна один раз в 14 лет демонстрируют для наземного наблюдателя взаимные покрытия и затме-

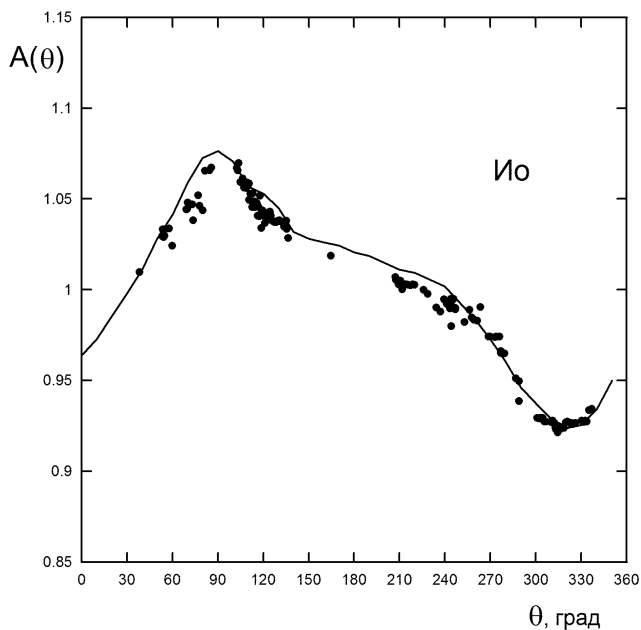


Рис. 7.9. Зависимость относительной величины светового потока, приходящего от спутника Юпитера Ио, от угла вращения θ . Линия построена по данным работы (Morrison, Morrison, 1977), а точками показаны результаты работы (Abramenko et al., 2011).

ния. В очередной раз это было в 2009 году. Параметры закона рассеяния света Хапке для главных спутников Сатурна до сих пор не получены. Свойства спутников Сатурна и обстоятельства взаимных покрытий и затмений привели к необходимости строить специальную фотометрическую модель. Такая модель была разработана (Arlot et al., 2012) на основе фотометрических исследований главных спутников Сатурна, опубликованных в работах (Buratti, 1984; Buratti, Veverka, 1984; Buratti et al., 1998). Использовался модифицированный закон рассеяния света Ломмеля–Зеелигера. Комбинировались локальные и интегральные характеристики поверхности. Некоторые параметры в этой модели принимались общими для всей поверхности спутника. Однако в модель включался коэффициент, учитывающий зависимость яркости спутника от угла

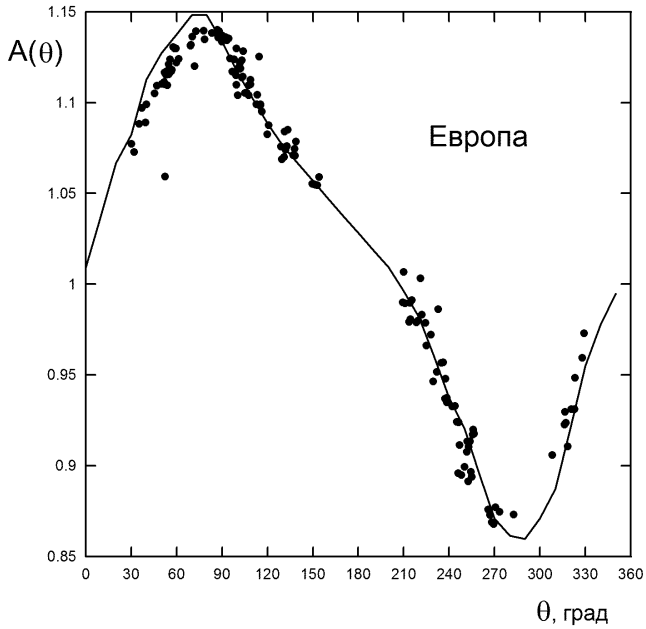


Рис. 7.10. Зависимость относительной величины светового потока, приходящего от спутника Юпитера Европа, от угла вращения θ . Линия построена по данным работы (Morrison, Morrison, 1977), а точками показаны результаты работы (Abramenko et al., 2011).

вращения. В итоге разработанная фотометрическая модель задает функцию рассеяния света, зависящую от угла падения i , угла отражения e , угла солнечной фазы α и угла вращения спутника θ . Функция описывается следующей цепочкой формул:

$$f(i, e, \alpha, \theta) = \left[A \frac{\mu_0}{\mu + \mu_0} \bar{f}(\alpha) + (1 - A)\mu_0 \right] \frac{pl}{p} 10^{-0.4\Delta m},$$

где

$$\mu_0 = \cos i, \quad \mu = \cos e,$$

$$\bar{f}(\alpha) = \frac{\Phi(\alpha)p - q}{D},$$

$$p = \frac{2}{3}(1 - A) + \frac{A\bar{f}(0)}{2},$$

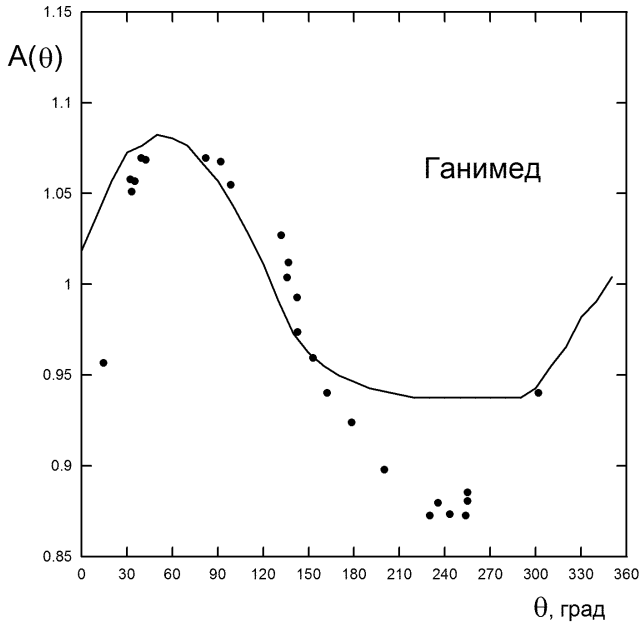


Рис. 7.11. Зависимость относительной величины светового потока, приходящего от спутника Юпитера Ганимед, от угла вращения θ . Линия построена по данным работы (Morrison, Morrison, 1977), а точками показаны результаты работы (Prokofeva-Mikhailovskaya et al., 2010).

$$q = \frac{2}{3\pi}(1 - A)[\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha],$$

$$D = \frac{A\bar{f}(0)}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} \right),$$

$$\Phi(\alpha) = 10^{-0.4\beta\alpha},$$

$$\Delta m = -\frac{A_R}{2} \cos(\theta - \theta_0).$$

В этих формулах A , $\bar{f}(0)$, β , p_l , A_R , θ_0 — параметры, присущие спутнику. Их значения даны в табл. 7.4 для пяти главных спутников Сатурна. Значения параметров взяты из работ (Buratti, 1984; Buratti, Veverka, 1984; Buratti et al., 1998), за исключением параметров A_R , θ_0 для спутников S2 Энцелад, S3 Тефия, S4 Диона, S5 Рея, которые были взяты из работы (Kulyk, 2008). Для трех остальных главных

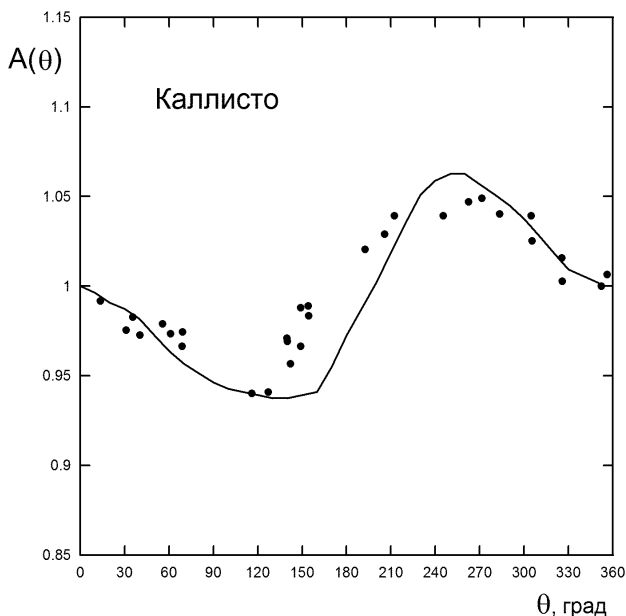


Рис. 7.12. Зависимость относительной величины светового потока, приходящего от спутника Юпитера Каллисто, от угла вращения θ . Линия построена по данным работы (Morrison, Morrison, 1977), а точками показаны результаты работы (Prokof'eva-Mikhailovskaya et al., 2010).

спутников эти параметры не понадобились, поскольку во всех явлениях, которые наблюдались в эпоху 2009 года, участвовали только первые пять спутников. Фотометрические параметры спутников были получены в работах (Buratti, 1984; Buratti, Veverka, 1984; Buratti et al., 1998) для длины световой волны $0.9 \mu\text{m}$. Показано также, что светоотражательные свойства спутников слабо различаются в спектральных полосах V , R , I . Поскольку большинство наблюдений было сделано в полосах R и I , зависимость функции рассеяния от длины волны не учитывалась.

С применением разработанной фотометрической модели взаимных покрытий и затмений главных спутников Сатурна в работе (Arlot et al., 2012) на основе результатов всемирной кампании наблюдений 2009 года были получены астрометрические результаты. Обработаны 26 кривых блеска спутников.

Таблица 7.4. Параметры для фотометрической модели взаимных покрытий и затмений спутников Сатурна в 2009 году.

Спутник	A	$\bar{f}(0)$	β	p_l	A_R	θ_0 , град.
S1 Мимас	0.70	1.10	0.021	0.720	0.100	270
S2 Энцелад	0.40	2.40	0.017	1.040	0.060	270
S3 Тетфия	0.70	1.45	0.016	0.830	0.070	90
S4 Диона	1.00	1.00	0.023	0.625	0.364	103
S5 Рея	0.95	1.10	0.024	0.705	0.210	100

7.7.2. Фотометрическая модель взаимных покрытий и затмений главных спутников Урана

В 2007 году происходили взаимные покрытия и затмения главных спутников Урана. Эти события происходят один раз в 42 года. В итоге всемирной кампании наблюдений была получена 41 кривая блеска спутников во время наблюдавшихся явлений. В публикации (Arlot et al., 2013) сообщается о разработке специальной фотометрической модели этих явлений для получения астрометрических результатов. Все наблюдения всемирной кампании были обработаны с использованием этой модели. Получены новые астрометрические результаты.

За основу был взят закон Ломмеля-Зеелигера для учета распределения яркости по диску. Множителем к функции рассеяния света была подобрана функция $A(\alpha, \Lambda)$, учитывающая зависимость интегральной яркости спутника от угла солнечной фазы α и от длины волны света Λ . Вид функции был заимствован из работы (Karkoschka, 2001)

$$A(\alpha, \Lambda) = A_0[1 + \gamma(\Lambda - 0.55)] \times 10^{-0.4(\beta\alpha + 0.5\alpha/(\alpha_0 + \alpha))},$$

где Λ измеряется в μm , а $A_0, \gamma, \beta, \alpha_0$ — фотометрические параметры спутника.

Значения параметров были заново найдены методом наименьших квадратов в работе (Arlot et al., 2013) на основе фотометрических данных, опубликованных в работе (Karkoschka, 2001). Эта фотометрия спутников была выполнена с помощью космического телескопа «Хаббл».

Таблица 7.5. Точность астрометрических данных, получаемых из наблюдений различных типов. Даны внутренние оценки погрешностей, вызванных случайными ошибками наблюдений. Точность в секундах дуги относится к наземным наблюдениям. С учетом топоцентрического расстояния планеты даны оценки точности положения спутников в километрах.

Тип наблюдений	Точность	
	в сек. дуги	в км
Галилеевы спутники Юпитера		
Затмения спутников Юпитером	0.150	450
Фотопластинки	0.100	300
Меридианный круг	0.060	180
ПЗС камеры	0.040	120
Взаимные явления	0.015	45
Главные спутники Сатурна		
Фотопластинки	0.100	600
Меридианный круг	0.030	200
ПЗС камеры	0.030	200
Взаимные явления	0.005	30
Главные спутники Урана		
ПЗС камеры	0.040	400
Взаимные явления	0.006	60

7.8. Соотношение точности астрометрических результатов наблюдений различных типов

Различные способы позиционных наблюдений спутников планет дают разную точность астрометрических данных. Наблюдения проводятся уже очень давно. В опубликованных работах приводятся различающиеся оценки точности. На основе многочисленных данных можно дать лишь некоторые экспертные заключения. В Табл. 7.5 приводятся приближенные оценки точности астрометрических данных. Оценки получены из анализа случайных ошибок наблюдений. Они показывают соотношение между точностью наблюдений различных типов.

7.9. Всемирные кампании наблюдений спутников во время их взаимных покрытий и затмений

Во время каждой эпохи взаимных покрытий и затмений спутников Юпитера, Сатурна и Урана в течение 9–14 месяцев происходит около 400 явлений. Каждое явление длится 5–15 минут и наблюдается только на небольшой части Земли, обращенной к планете. Чтобы пронаблюдать возможно больше явлений, приходится организовывать всемирные кампании фотометрических наблюдений спутников. Координатором кампаний с 1985 года является Институт небесной механики и вычисления эфемерид (Institut de Mécanique céleste et de calcul des éphémérides - IMCCE), Франция. Все фотометрические результаты после очередной кампании собираются в единую базу данных. Через некоторое время после проведенных наблюдений производится астрометрическая обработка всех данных. Полученные относительные координаты спутников представляют собой базу данных астрометрических результатов кампании наблюдений. Через 2–3 года после проведения наблюдений публикуются статьи, содержащие описание полученных кривых блеска спутников и окончательные астрометрические результаты. Все наблюдатели, участвовавшие в наблюдениях, становятся соавторами этих публикаций. В некоторых случаях астрометрические результаты публиковались отдельно. Астрометрическая обработка результатов кампании наблюдений выполнялась, как правило, каким-то одним исследователем своим собственным методом. В табл. 7.6 даны характеристики проведенных всемирных кампаний наблюдений спутников Юпитера, Сатурна и Урана во время их взаимных покрытий и затмений.

В конце этой главы дано расписание будущих сезонов явлений, когда можно проводить новые кампании наблюдений.

7.10. Препятствия перед улучшением точности астрометрических результатов

Есть серьезные нерешенные проблемы при обработке фотометрических наблюдений взаимных явлений спутников с целью получения наиболее точных астрометрических данных. Имеются два источника ошибок результирующих астрометрических координат спутников: случайные ошибки фотометрии и неточность фотометрической модели. Анализ показывает, что ошибки, вызванные

Таблица 7.6. Характеристики всемирных кампаний наблюдений спутников Юпитера, Сатурна и Урана во время их взаимных покрытий и затмений. В первой колонке указана планета с системой спутников и годы наблюдений. Обозначения: N_c — число полученных кривых блеска спутников, N_o — число обсерваторий-участников.

Система, эпоха наблюдений	N_c	N_o	Авторы методов и ссылки на публикации
Юпитер, 1973	46	18	Aksnes K. (Aksnes et al., 1984)
Юпитер, 1979	19	11	Aksnes K. (Aksnes et al., 1984)
Сатурн, 1979-1980	14	6	Aksnes K. (Aksnes et al., 1984)
Юпитер, 1985	166	28	Arlot J.-E. (Arlot et al., 1992)
Юпитер, 1991	374	56	Arlot J.-E. (Arlot et al., 1997)
Сатурн, 1995	66	16	Noyelles B. (Noyelles, Vienne, Descamps, 2003)
Юпитер, 1997	292	42	Vasundhara R. (Vasundhara et al. 2003, Arlot et al., 2006) Емельянов Н. В., Вашковьяк С. Н. (Емельянов, Вашковьяк, 2009)
Юпитер, 2002-2003	377	42	Емельянов Н. В. (Emelyanov, 2009; Arlot et al., 2009)
Уран, 2007	41	19	Емельянов Н. В. (Arlot et al., 2013)
Юпитер, 2009	457	74	Емельянов Н. В., Варфоломеев М. И. (Arlot et al., 2014)
Юпитер, 2015	609	75	Емельянов Н. В. (Saquet et al., 2018)

неточностью модели, в 3–4 раза больше, чем ошибки из-за случайных погрешностей фотометрии. Чтобы проще было понять причины, возьмем упрощенную фотометрическую модель взаимного покрытия спутников, рассмотренную выше. В этой модели фигурируют однородные диски спутников.

При взаимном покрытии всегда измеряется световой поток от

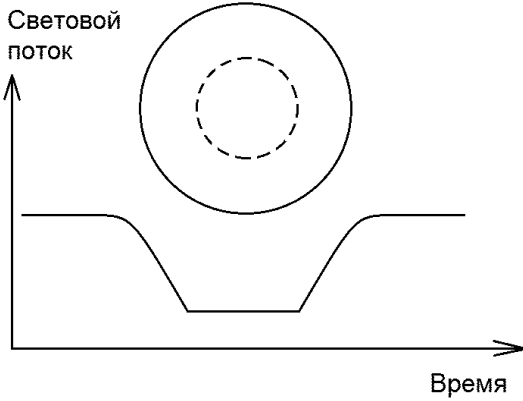


Рис. 7.13. Полное покрытие одного спутника другим в течение промежутка времени (t_1, t_2) и соответствующий участок на кривой суммарного нормированного потока от пары спутников.

обоих спутников вместе. При этих условиях нормированный поток S выражается формулой

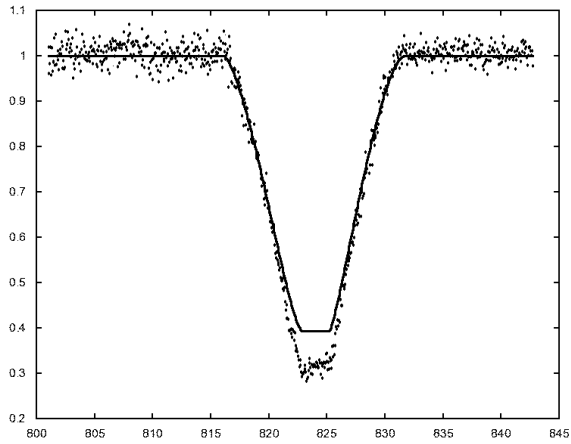
$$S(d) = \frac{1 + \frac{p_2 r_2^2 k_2(d)}{p_1 r_1^2}}{1 + \frac{p_2 r_2^2}{p_1 r_1^2}},$$

где r_1, r_2 — радиусы дисков, p_1 и p_2 — альbedo спутников. Через k_2 обозначена доля видимого диска покрываемого спутника, зависящая от взаимного расстояния спутников d .

Вне явления, когда нет покрытия, виден весь покрываемый спутник, и мы имеем $k_2 = 1, S = 1$. Случаются полные покрытия. На рис. 7.13 изображена конфигурация спутников в этом случае. Ясно, что в интервале времени (t_1, t_2) покрываемого спутника совсем не видно, и $k_2 = 0$. В этот период мы имеем

$$S = \frac{1}{1 + \frac{p_2 r_2^2}{p_1 r_1^2}},$$

то есть световой поток не зависит от взаимного расстояния спутников d .



E201411020000_4o1_0_UMA

Рис. 7.14. Пример кривой измеренного нормированного светового потока от спутника Ио во время его полного покрытия другим спутником и соответствующей модельной кривой после уточнения параметров модели. Дата явления 02 ноября 2014 года. По оси абсцисс отложено время в минутах.

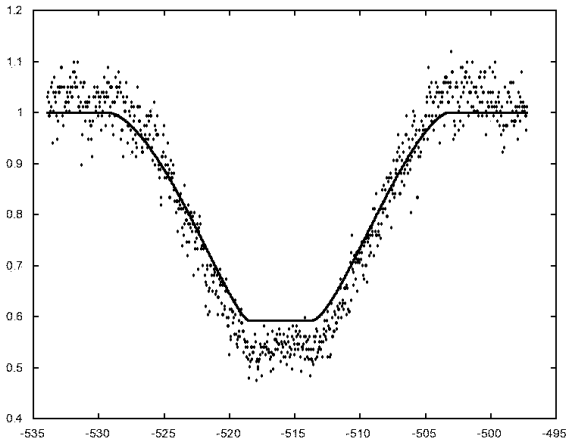
Проблема появляется из-за того, что во многих случаях наблюдаемое значение потока во время полного покрытия не равно вычисленному значению, т.е.

$$E_{\text{наблюдаемое}} \neq K \frac{1}{1 + \frac{p_2 r_2^2}{p_1 r_1^2}},$$

где K равно потоку вне явления. На рис. 7.14, 7.15, 7.16 показаны примеры таких ситуаций. Здесь даны значения $E_{\text{наблюдаемое}}/K$, полученные из измеренных значений потока (точки), и модельные изменения S . На рисунках видно, что во время полного покрытия в измеренных значениях присутствует дополнительный поток, причем отрицательный.

Поправить модель можно двумя способами. Первый способ – положить

$$E_{\text{наблюдаемое}} = K \frac{1}{1 + \frac{p_2 r_2^2}{p_1 r_1^2}} + P,$$



E201412291506_3o1_0_TAN

Рис. 7.15. Пример кривой измеренного нормированного светового потока от спутника Ио во время его полного покрытия другим спутником и соответствующей модельной кривой после уточнения параметров модели. Дата явления 28 декабря 2014 года. По оси абсцисс отложено время в минутах от начала суток 29 декабря. Налицо отрицательный уровень фона в измеренном потоке.

где P — паразитный световой поток от неучтенного фона. Второй способ — положить

$$E_{\text{наблюдаемое}} = K \frac{1}{1 + m \frac{p_2 r_2^2}{p_1 r_1^2}},$$

где m — некоторый дополнительный множитель, появляющийся из-за того, что мы неточно знаем отношение альbedo спутников, и исправляющий эту неточность. Возникает неопределенность, какой способ из двух выбрать. Эквивалентность способов приводит к равенству

$$K \frac{1}{1 + \frac{p_2 r_2^2}{p_1 r_1^2}} + P = K \frac{1}{1 + m \frac{p_2 r_2^2}{p_1 r_1^2}}.$$

Тот факт, что в большинстве таких случаев паразитный поток в наблюдениях получается отрицательным, позволяет предположить

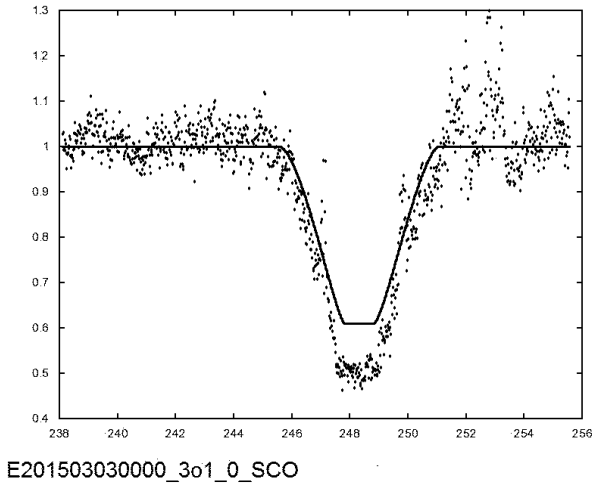


Рис. 7.16. Пример кривой измеренного нормированного светового потока от спутника Ио во время его полного покрытия другим спутником и соответствующей модельной кривой после уточнения параметров модели. Дата явления 03 марта 2015 года. По оси абсцисс отложено время в минутах от начала суток. Налицо отрицательный уровень фона в измеренном потоке.

его реальное присутствие, нежели влияние неточности знания альbedo спутников.

При обработке частичных взаимных покрытий спутников мы не подозреваем о присутствии паразитного фона в измерениях и не знаем о неточности принятых значений альbedo спутников. Поэтому для совпадения модели с наблюдениями приходится прибавлять фальшивую поправку Δ во взаимное видимое расстояние между спутниками, что и приводит к систематическим ошибкам в астрометрических результатах. Этот факт иллюстрируется следующим соотношением:

$$E_{\text{наблюдаемое}} = K \frac{1 + \frac{p_2 r_2^2 k_2 (d + \Delta)}{p_1 r_1^2}}{1 + \frac{p_2 r_2^2}{p_1 r_1^2}}.$$

Здесь в нашем рассмотрении для лучшего понимания ситуации мы упростили фотометрическую модель явления. Однако проблема также воспроизводится и при наших обработках наблюдений с

применением совершенной модели, описанной в работах (Емельянов, 2003; Emelyanov, Gilbert, 2006). Такая же проблема возникает и при обработке наблюдений взаимных затмений спутников.

Мы вынуждены искать источники рассмотренных выше погрешностей. Паразитный свет может попасть на фотоприемник от паразитного фона неба. Это может быть свет, рассеянный в телескопе и камере. Паразитный фон может создать сам фотоприемник. Вычисление светового потока от спутников по их изображениям на ПЗС кадрах выполняется одним из специальных методов фотометрической обработки. Погрешность такого метода может дать некоторый уровень фона. Только этот источник может породить отрицательный уровень фона. Поэтому он наиболее вероятен. Именно в методе фотометрической обработки следует искать источник паразитного фона. Ссылки на описания существующих методов фотометрической обработки изображений заняли бы слишком много места в данной книге. Мы ограничимся только перечислением названий методов, встречающихся в объяснениях, сопровождающих данные, поступающие в IMCCE: Source Extractor, DAOPHOT(IDL), Audela, Tangra, LiMovie. В разных обсерваториях применяются свои собственные специальные методы. Очевидна необходимость ревизии применяемых методов с выяснением источников систематических ошибок.

Как видно из приведенного выше упрощенного рассмотрения фотометрической модели, нормированный световой поток от спутников зависит от отношения интегральных по поверхности альбедо. Эта зависимость остается и в более точных фотометрических моделях. В наших обработках наблюдений Галилеевых спутников Юпитера (Emelyanov, 2009; Arlot et al., 2012) мы усредняем по видимому диску фотометрические свойства спутника, но учитываем вариации интегрального значения альбедо, зависящие от угла вращения спутника. Проще говоря, поток света от спутника зависит от того, каким боком он к нам обращен. Данные о вариациях интегрального альбедо мы берем из публикаций (Morrison, Morrison, 1977; Prokof'eva-Mikhailovskaya et al., 2010; Abramenko et al., 2011). Эти данные имеют недостаточно высокую точность. Они могут быть источником погрешности в фотометрической модели взаимных покрытий и затмений Галилеевых спутников Юпитера. Очевидна необходимость проведения интенсивных фотометрических наблюдений Галилеевых спутников Юпитера для разных значений углов враще-

ния спутников от 0 до 360 градусов в разных спектральных положениях. Специальная обработка таких наблюдений даст уточненные зависимости световых потоков от угла вращения спутника.

7.11. Периоды явлений в будущем

Автором этой книги проведены вычисления эфемерид взаимных покрытий и затмений спутников планет на период времени до 2027 года включительно. Поскольку для спутников Юпитера явления повторяются каждые 6 лет, то в дальнейшем их следует ожидать только к 2021 году.

Расписание взаимных покрытий и затмений Галилеевых спутников Юпитера и главных спутников Сатурна таково:

- взаимные покрытия и затмения Галилеевых спутников Юпитера в 2021 году,
- затмения внутренних (близких) спутников Юпитера Галилеевыми спутниками в 2021 году,
- взаимные покрытия и затмения Галилеевых спутников Юпитера в 2026–2027 годах,
- затмения внутренних (близких) спутников Юпитера Галилеевыми спутниками в 2026–2027 годах,
- взаимные покрытия и затмения главных спутников Сатурна в 2024–2026 годах.

Эфемериды всех этих явлений с подробными описаниями обстоятельств, моментами начала и конца каждого события и другими характеристиками можно найти в Интернете на сайтах ГАИШ МГУ и французского Института небесной механики и вычисления эфемерид (IMCCE) по адресам

<http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/multisat/nssephmr.htm>

<http://nsdb.imcce.fr/multisat/nssephmr.htm>.

Эфемериды были вычислены с помощью средства «Поиск взаимных покрытий и затмений спутников и затмений планетой», доступного на этих же сайтах. Этим средством можно воспользоваться для вычисления эфемерид явлений после 2027 года.

Вероятно, в будущие периоды взаимных покрытий и затмений спутников планет будут проводиться всемирные кампании наблюдений. Предшествующий опыт показал высокую эффективность таких кампаний для добычи новых высокоточных позиционных данных.

Обзор достижений в этом деле в прошлом и планы на будущее даны в статье (Arlot, Emelyanov, 2019).

Литература к Главе 7

Емельянов Н. В. Особенности взаимных покрытий и затмений в системе спутников Сатурна. *Астрономический журнал*. 1995. Т. 72. № 4. С. 604–608.

Емельянов Н. В. Метод обработки фотометрических наблюдений взаимных покрытий и затмений спутников планет. *Астрономический вестник*. 2003. Т. 37. № 4. С. 344–355. (Emelianov N.V. A Method for Reducing Photometric Observations of Mutual Occultations and Eclipses of Planetary Satellites. *Sol. Syst. Res.* 2003. V. 37. № 4. P. 314–325.)

Емельянов Н. В., Вашковьяк С. Н. Астрометрические результаты наблюдений взаимных покрытий и затмений галилеевых спутников Юпитера в 1997 году. *Астрономический вестник*. 2009. Т. 43. № 3. С. 251–264. (Emel'yanov N. V., Vashkov'yak S. N. Mutual Occultations and Eclipses of the Galilean Satellites of Jupiter in 1997: Astrometric Results of Observations. *Sol. Sys. Res.* 2009. V. 43. № 3. P. 240–252.)

Abramenko A.N., Baida G.V., Zakrevskii A.V., Karachkina L.G., Prokof'eva-Mikhailovskaya V.V., Sergeeva E.A. Photometry of Io and Europa at the Crimean Astrophysical Observatory and Reasons for Differences between Ground-Based and Space Observations. *Bulletin of the Crimean Astrophysical Observatory*. 2011. V. 107. P. 113–121.

Aksnes K., Franklin F. Mutual phenomena of the Galilean satellites in 1973. III – Final results from 91 light curves. *Astronomical Journal*. 1976. V. 81. P. 464–481.

Aksnes K., Franklin F., Millis R., Birch P., Blanco C., Catalano S., Piironen J. Mutual phenomena of the Galilean and Saturnian satellites in 1973 and 1979/1980. *Astronomical Journal*. 1984. V. 89. P. 280–288.

Archinal B. A., Acton C. H., A'hearn M. F., Conrad A., Consolmagno G. J., Duxbury T., Hestroffer D., Hilton J. L., Kirk R. L., Klioner S. A., McCarthy D., Meech K., Oberst J., Ping J., Seidelmann P. K.,

Tholen D. J., Thomas P. C., Williams I. P. Report of the IAU Working Group on cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2015. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2018. 130:22.

Arlot J.E., Thuillot W., Barroso J. Jr., Bergeal L., Blanco C., Boninsegna R., Bouchet P., Briot D., Bulder H., Bourgeois J. A catalogue of the observations of the mutual phenomena of the Galilean satellites of Jupiter made in 1985 during the PHEMU85 campaign. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*. 1992. V. 92. P. 151–205.

Arlot J.E., Ruatti C., Thuillot W., Arsenijevic J., Baptista R., Barroso J. Jr., Bauer C., Berthier J., Blanco C., Bouchet P. and 61 coauthors. A catalogue of the observations of the mutual phenomena of the Galilean satellites made in 1991 during the PHEMU91 campaign. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*. 1997. V. 125. P. 399–405.

Arlot J.-E., Thuillot W., Ruatti C. and 61 co-autors. The PHEMU97 catalogue of observations of the mutual phenomena of the Galilean satellites of Jupiter. *Astronomy and Astrophysics*. 2006. V. 451. P. 733–737.

Arlot J.-E., Thuillot W., Ruatti C., Ahmad A., Amosse A., Anbazhagan P., Andreyev M., Antov A., Appakutty M., Asher D. and 109 coauthors. The PHEMU03 catalogue of observations of the mutual phenomena of the Galilean satellites of Jupiter. *Astronomy and Astrophysics*. 2009. V. 493. P. 1171–1182.

Arlot J.-E., Emelyanov N.V., Lainey V., Andreev M., Assafin M., Braga-Ribas F., Camargo J.I.B., Casas R., Christou A., Colas F., Da Silva Neto D. N., Dechambre O., Dias-Oliveira A., Dourneau G., Farmakopoulos A., Gault D., George T., Gorshanov D.L., Herald D., Kozlov V., Kurenya A., Le Campion J.F., Lecacheux J., Loader B., Massalle A., Mc Brien M., Murphy A., Parakhin N., Roman-Lopes A., Schnabel C., Sergeev A., Tsamis V., Valdes Sada P., Vieira-Martins R., Zhang X. Astrometric results of observations of mutual occultations and eclipses of the Saturnian satellites in 2009. *Astronomy and Astrophysics*. 2012. V. 544. Id. A29. 7 pp.

Arlot J.-E., Emelyanov N.V., Aslan Z., Assafin M., Bel J., Bhatt B. C.,

- Braga-Ribas F., Camargo J.I.B., Casas R., Colas F., Coliac J. F., Dumas C., Ellington C.K., Forne E., Frappa E., Khamitov I., Miller C., Modic R.J., Sahu Dk., Sicardy B., Tanga P., Valdes Sada P., Vasundhara R., Vieira-Martins R.* Astrometric results of observations of mutual occultations and eclipses of the Uranian satellites in 2007. *Astronomy and Astrophysics*. 2013. V. 557. Id. A4. 6 pp.
- Arlot J.-E., Emelyanov N., Varfolomeev M.I., Amosse A., Arena C., Assafin M., Barbieri L., Bolzoni S., Bragas-Ribas F., Camargo J. I. B., Casarramona F., Casas R., Christou A., Colas F., Collard A., Combe S., Constantinescu M. and 77 coauthors.* The PHEMU09 catalogue and astrometric results of the observations of the mutual occultations and eclipses of the Galilean satellites of Jupiter made in 2009. *Astronomy and Astrophysics*. 2014. V. 572. Id. A120. 9 pp.
- Arlot J.-E., Emelyanov N.* Natural satellites mutual phenomena observations: achievements and future. *Planetary and Space Science*. 2019. V. 169. P. 70–77.
- Assafin M., Vieira-Martins R., Braga-Ribas F., Camargo J. I. B., Neto D. N. da Silva, Andrei A. H.* Observations and analysis of mutual events between the Uranus main satellites. *Astronomical Journal*. 2009. V. 137. P. 4046–4053.
- Buratti B.* Voyager Disk Resolved Photometry of the Saturnian Satellites. *Icarus*. 1984. V. 59. P. 392–405.
- Buratti B., Veverka J.* Voyager Photometry of Rhea, Dione, Tethys, Enceladus and Mimas. *Icarus*. 1984. V. 58. P. 254–264.
- Buratti B. J., Mosher J. A., Nicholson P. D., McGhee C. A., French R. G.* Near-Infrared Photometry of the Saturnian Satellites during Ring Plane Crossing. *Icarus*. 1998. V. 136. P. 223–231.
- Domingue D., Verbiscer A.* Re-Analysis of the Solar Phase Curves of the Icy Galilean Satellites. *Icarus*. 1997. V. 128. P. 49–74.
- Emelyanov N.V., Gilbert R.* Astrometric results of observations of mutual occultations and eclipses of the Galilean satellites of Jupiter in 2003. *Astronomy and Astrophysics*. 2006. V. 453. P. 1141–1149.
- Emelyanov N. V.* Astrometric results of observations of mutual occulta-

- tions and eclipses of the Galilean satellites of Jupiter in 2002–2003. *Planetary and Space Science*. 2008. V. 56. P. 1785–1790.
- Emelyanov N.V.* Mutual occultations and eclipses of the Galilean satellites of Jupiter in 2002-2003: final astrometric results. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2009. V. 394. P. 1037–1044.
- Hapke B.* Bidirectional reflectance spectroscopy: 1. Theory. *Journal of Geophysical Research*. 1981. V. 86. P. 3039–3054.
- Hapke B.* Bidirectional reflectance spectroscopy: 3. Correction for Macroscopic Roughness. *Icarus*. 1984. V. 59. P. 41–59.
- Karkoschka E.* Comprehensive Photometry of the Rings and 16 Satellites of Uranus with the Hubble Space Telescope. *Icarus*. 2001. V. 151. P. 51–68.
- Kulyk I.* Saturnian icy satellites: Disk-integrated observations of the brightness opposition surge at low phase angles. *Planetary and Space Science*. 2008. V. 56. P. 386–397.
- Makarova, E. A., Kharitonov, A. V., Kazachevskaya, T. V., et al.* Observable Characteristics of Solar Radiation (revised Tables). *Baltic Astronomy*. 1998. V. 7. P. 467–494.
- McEwen A.S., Johnson T.V., Matson D.L.* The Global Distribution, Abundance and Stability of SO₂ on Io. *Icarus*. 1988. V. 75. P. 450–478.
- Morrison D., Morrison N.D.* Photometry of the Galilean satellites. In: *Planetary satellites*. Tucson, University of Arizona Press. 1977. P. 363–378.
- Noyelles, B., Vienne, A., Descamps, P.* Astrometric reduction of light-curves observed during the PHESAT95 campaign of Saturnian satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 2003. V. 401. 1159–1175.
- Prokof'eva-Mikhailovskaya V.V., Abramenko A. N., Baida G. V., Zakrevskii A.V., Karachkina L. G., Sergeeva E.A., Zhuzhulina E.A.* On the Cause of the Discrepancy between Groundbased and Spaceborne Lightcurves of Ganymede and Callisto in the V Band. *Bulletin of the Crimean Astrophysical Observatory*. 2010. V. 106. P. 68–81.

Saquet E., Emelyanov N., Robert V., Arlot J.-E., Anbazhagan P., Baillie K., Bardecker J., Bereznoy A. A., and 111 coauthors. The PHEMU15 catalogue and astrometric results of the Jupiter's Galilean satellite mutual occultation and eclipse observations made in 2014-2015. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2018. V. 474. Issue 4. P. 4730–4739.

Vasundhara R. Mutual phenomena of the Galilean satellites: an analysis of the 1991 observations from VBO. *Astronomy and Astrophysics*. 1994. V. 281. 565–575.

Vasundhara R., Arlot J. E., Lainey V., Thuillot W. Astrometry from mutual events of Jovian satellites in 1997. *Astronomy and Astrophysics*. 2003. V. 410. P. 337–341.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЭФЕМЕРИД СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

Резюме

При публикации в астрономических ежегодниках вообще не упоминалось о точности эфемерид. На самом деле точность эфемерид ограничена, поскольку они вычисляются по модели движения спутника, основанной на результатах наблюдений, содержащих ошибки.

Оценка точности эфемерид представляет собой непростую задачу. Именно этой задаче посвящена данная глава.

Трудность в решении поставленной задачи порождена тем обстоятельством, что точность наблюдений нам заранее неизвестна. Как выкручиваться в этих условиях и дать достоверные оценки точности эфемерид, описано в этой главе.

Автором настоящей книги разработаны методы, основные идеи которых взяты из работ других авторов. Оригинальными являются конкретные алгоритмы действий в случае эфемерид естественных спутников планет. В этой главе описаны алгоритмы для трех методов. Рассказывается об их преимуществах и недостатках.

Важно то, что здесь описаны конкретные применения методов при реальных наблюдениях для всех далеких спутников больших планет. Важность задачи подчеркивается тем фактом, что точность эфемерид нескольких спутников в настоящее время оказывается столь низкой, что эти спутники следует считать потерянными.

8.1. Факторы, определяющие точность эфемерид

Прежде всего отметим, что под эфемеридами подразумеваются координаты спутника, вычисленные на заданный момент времени. В понятие эфемерид мы включаем также средство вычисления координат. Основой эфемерид всегда являются наблюдения. Создание эфемерид на основе наблюдений делается согласно схеме и методам, изложенным в предыдущих главах.

Вопрос о том, какова точность эфемерид, оказывается не простым. Заметим, что люди, использующие эфемериды, не всегда задают себе такой вопрос. Эфемериды, публикуемые в астрономических ежегодниках, не снабжаются данными о точности. Часто подразумевается, что данные ежегодника совершенно точны, а сомнению подвергается точность того, что мы сравниваем с эфемеридами. На самом деле точность эфемерид ограничена и во многих случаях просто неизвестна.

Рассмотрим причины ошибок предвычисления координат спутников. Погрешности допускаются на разных этапах получения эфемерид. Прежде всего, мы имеем ошибки наблюдений, происходящие из неточности измерений. Далее, данные, которые мы рассматриваем как результаты наблюдений, на самом деле получают в процессе некоторой обработки измеренных величин. На этом этапе вносятся определенные погрешности, порождаемые неточностью метода обработки. Потом строится модель движения спутника. Если выполняется численное интегрирование дифференциальных уравнений движения, то возникает вычислительная погрешность интегрирования. При построении аналитической теории движения в разложениях решения по степеням различных малых параметров берут ограниченной число членов, остальные отбрасывают. Так вносится погрешность теории. Для связи измеряемых величин с координатами спутника создается некоторая модель, в которой принимаются те или иные упрощения, порождающие дополнительные ошибки. Зависимость измеряемых величин от параметров движения может быть близка к вырожденным случаям, когда одинаковую близость теоретических положений спутника к реальным наблюдаемым обеспечивает целое семейство возможных значений параметров. В этих ситуациях достоверность оценки точности эфемерид становится невысокой.

Орбитальное движение небесных тел имеет одну особенность. Движение происходит вблизи некоторой плоскости. В проекции

траектории на эту плоскость радиус-вектор вращается с почти постоянной угловой скоростью. Угол между радиусом-вектором и некоторым фиксированным направлением λ называется орбитальной долготой. Этот угол монотонно и почти равномерно увеличивается со временем, постоянно «накручивая» обороты. Допустим, что на некотором интервале времени (t_1, t_2) выполняются наблюдения, из которых можно определить значения λ на эти крайние моменты времени с некоторой погрешностью σ_λ . По этим значениям можно определить эфемеридное значение орбитальной долготы на некоторый момент t_f с какой-то погрешностью Δ_λ . Свойства орбитального движения позволяют вывести приближенную формулу зависимости точности эфемериды Δ_λ от интервалов времени между начальным t_1 и конечным t_2 моментами наблюдений и моментом t_f , для которого вычисляется эфемерида. Эта формула имеет вид:

$$\Delta_\lambda = \frac{t_f - \frac{t_1+t_2}{2}}{t_2 - t_1} \sigma_\lambda. \quad (8.1)$$

Очевидно, что мы не можем измерять орбитальную долготу непосредственно при наблюдениях. Мы наблюдаем лишь проекцию орбитального движения на картинную плоскость. Однако приведенная здесь приближенная формула относительно долготы позволяет сделать некоторые выводы. Точность эфемерид пропорциональна точности наблюдений, но также обратно пропорциональна интервалу времени наблюдений.

Из приведенного анализа ясно, что именно нужно делать для улучшения точности эфемерид. Необходимо повышать точность наблюдений. Необходимо продолжать регулярные наблюдения, пусть даже с прежней точностью.

Формула (8.1) дает лишь общее приближенное представление о главных факторах, от которых зависит точность эфемерид. На практике нас интересует более детальное описание точности эфемерид именно для тех величин, которые мы измеряем или тех координат спутников, которые мы используем. При этом необходимы статистически обоснованные оценки.

Только в конце прошлого и начале текущего века были проведены специальные исследования точности эфемерид небесных тел. Оказалось, что методы, дающие более-менее достоверные и точные оценки, довольно сложны. Здесь процитируем некоторые значительные работы по данной задаче. Muinonen and Bowell (1993)

предложили специальный статистический подход к проблеме определения орбит из наблюдений. Milani (1999) предложил новый алгоритм для определения области возможного нахождения потерянных астероидов. Virtanen et al. (2001) изучили апостериорное распределение орбит астероидов и предложили метод для поиска потерянных астероидов в главном поясе и астероидов, сближающихся с Землей.

В работе (Desmars, 2009) были получены некоторые результаты оценки точности эфемерид для двух главных спутников Сатурна на основе искусственно сформированного массива наблюдений. Примерно в это же время Emelyanov (2010) исследовал точность эфемерид всех далеких спутников больших планет. В этой работе применялись три различных статистических метода оценки точности эфемерид. Все они основаны на вариациях данных наблюдений. Можно считать эти методы основными в данной проблеме. Рассмотрим их подробнее в следующих разделах.

8.2. Оценка точности эфемерид путем вариации ошибок наблюдений методом Монте-Карло

Прием в предлагаемом методе достаточно прост. Общая схема такова. Формируем большое число вариантов одних и тех же наблюдений, отличающихся от реально выполненных набором погрешностей, которые генерируются методом Монте-Карло. Для каждого варианта заново определяем орбиту, по которой вычисляем эфемериду на заданный момент времени. Статистические оценки вариаций эфемерид среди этих вариантов дают оценку точности.

Рассмотрим метод подробнее. Пусть имеется набор реальных наблюдений спутника. Требуется оценить точность эфемериды, построенной на основе этих наблюдений и вычисленной на заданный момент времени. Алгоритм состоит из следующих этапов.

1. Выполняем уточнение параметров движения на основе имеющихся наблюдений.
2. После уточнения параметров получается среднеквадратичная величина σ отклонений измеренных значений от вычисленных на основе модели движения.
3. По найденным параметрам вычисляем эфемериду спутника на заданный момент времени, то есть координаты, точность которых требуется определить. Назовем эту эфемериду опорной.

4. По найденным значениям параметров вычисляем значения измеряемых координат на моменты наблюдений. Назовем этот набор опорными наблюдениями.
5. Создаем набор искусственных наблюдений, путем прибавления к опорным наблюдениям случайных ошибок, распределенных по нормальному закону, с заданной среднеквадратичной величиной σ . Случайные величины получаем в вычислительной программе с помощью датчика случайных чисел. Назовем этот набор наблюдениями с вариациями ошибок.
6. Определяем методом дифференциального уточнения параметры движения спутника на основе набора наблюдений с вариациями ошибок.
7. По найденным параметрам вычисляем эфемериду на заданный момент времени, то есть координаты, точность которых требуется определить. Вычисляем и запоминаем отклонения Δ_x этих координат от опорной эфемериды.
8. Переходим к пункту 5 с новым набором случайных чисел.
9. После выполнения перехода к пункту 5 большое число раз выходим из этого цикла и делаем статистический анализ вычисленных отклонений Δ_x по всем вариантам вариаций ошибок наблюдений.
10. Среднеквадратичную величину отклонений Δ_x принимаем за точность эфемериды.

В этом методе набор опорных наблюдений получен на моменты реальных наблюдений по параметрам движения, заранее найденным по реальным наблюдениям. Этот набор опорных наблюдений рассматривается как вариант точных наблюдений. К точным значениям измеряемых величин прибавляются искусственно созданные случайные ошибки.

Схема описанного алгоритма изображена на рис. 8.1. Вычисление опорной эфемериды выполняется одновременно с вычислением опорных наблюдений. Операции «прибавление к опорным наблюдениям вариаций ошибок», «уточнение параметров», «вычисление эфемериды» делаются в цикле много раз. Вычисление отклонения от опорной эфемериды и среднеквадратичной величины отклонений производится одновременно с вычислением эфемериды. Среднеквадратичная величина отклонений вычисляется по рекуррентной формуле, которая приведена в разделе 6.6 (Глава 6). При выходе из цикла точность эфемериды как среднеквадратичная величина отклонений оказывается уже вычисленной. Оценку

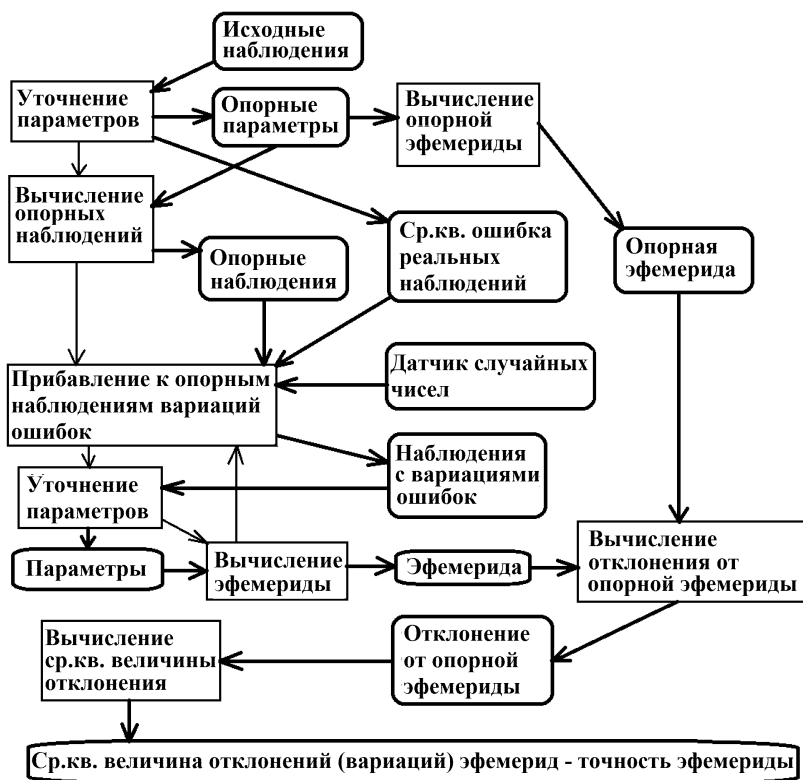


Рис. 8.1. Схема алгоритма вариации ошибок наблюдений. Толстыми линиями показаны данные и потоки данных. Тонкими линиями обозначены действия алгоритма и переходы между операциями.

точности эфемерид можно делать одновременно на целый ряд моментов времени. Затем можно построить график зависимости точности эфемерид от времени. Запоминая отклонения эфемериды от опорной на некоторый момент времени в процессе вычислений в отдельном файле, можно построить распределение отклонений по их значениям.

Рассмотренный алгоритм имеет две существенные особенности. Необходимо выполнить оценки точности наблюдений, чтобы задать вариации ошибок. Эти оценки могут оказаться не совсем достоверными, особенно если наблюдения неравноточные. Вторая особен-

ность состоит в значительных затратах времени вычислений, поскольку для хорошей статистической оценки точности эфемериды следует вычислить отклонение эфемериды от опорной достаточно много раз.

8.3. Оценка точности эфемерид методом вариации состава наблюдений с помощью «бутстреп»-выборки

Общая схема этого метода похожа на схему вариации ошибок наблюдений методом Монте-Карло. Формируем большое число вариантов случайных выборок из набора реальных наблюдений. Выборки делаются «бутстреп»-методом с помощью датчика случайных чисел. Для каждого варианта заново определяем орбиту, по которой вычисляем эфемериду на заданный момент времени. Статистические оценки вариаций эфемерид среди этих вариантов дают оценку точности.

Рассмотрим метод подробнее. Пусть имеется набор реальных наблюдений спутника. Требуется оценить точность эфемериды, построенной на основе этих наблюдений и вычисленной на заданный момент времени. Алгоритм решения задачи состоит из следующих этапов.

1. Выполняем уточнение параметров движения на основе имеющихся наблюдений.
2. По найденным параметрам вычисляем эфемериду спутника на заданный момент времени, то есть координаты, точность которых требуется определить. Назовем эту эфемериду опорной.
3. Делаем случайную выборку наблюдений из набора реальных наблюдений методом «бутстреп». Назовем этот набор «бутстреп»-выборкой наблюдений.
4. Методом дифференциального уточнения определяем параметры движения спутника на основе «бутстреп»-выборки наблюдений.
5. По найденным параметрам вычисляем эфемериду на заданный момент времени, то есть координаты, точность которых требуется определить. Вычисляем и запоминаем отклонения Δ_x этих координат от опорной эфемериды.
6. Переходим к пункту 3 с новым набором случайных чисел.
7. После выполнения перехода к пункту 3 большое число раз выходим из этого цикла и делаем статистический анализ вычисленных

отклонений Δ_x по всем вариантам вариаций ошибок наблюдений. 8. Среднеквадратичную величину отклонений Δ_x принимаем за точность эфемериды.

В этом методе набор опорных наблюдений рассматривается как вариант выборки. При статистическом анализе отклонений Δ_x сначала вычисляют среднее значение и среднеквадратичную величину отклонения от среднего. Можно не вычислять среднее значение предварительно, а определять эти две величины по ходу вычислений с помощью рекуррентных соотношений, приведенных в разделе 6.6 (Глава 6).

Схема описанного алгоритма изображена на рис. 8.2. Вычисление опорной эфемериды выполняется одновременно с вычислением опорных наблюдений. Операции «формирование бутстреппы выборки наблюдений», «уточнение параметров», «вычисление эфемериды» делаются в цикле много раз. Вычисление отклонения от опорной эфемериды и среднеквадратичной величины отклонений производится одновременно с вычислением эфемериды. Среднеквадратичная величина отклонений вычисляется по рекуррентной формуле, приведенной в разделе 6.6 (Глава 6). При выходе из цикла точность эфемериды как среднеквадратичная величина отклонений оказывается уже вычисленной. Оценку точности эфемерид можно делать одновременно на целый ряд моментов времени. Затем можно построить график зависимости точности эфемерид от времени. Запоминая отклонения эфемериды от опорной на некоторый момент времени в процессе вычислений в отдельном файле, можно построить распределение отклонений по их значениям.

Рассмотренный алгоритм имеет одно преимущество по сравнению с вариацией ошибок наблюдений. Для реализации метода не нужны никакие данные о точности наблюдений.

Поясним здесь, что такое «бутстреп»-выборка. Пусть имеется набор каких-либо пронумерованных элементов в количестве N штук. Представим себе случайную величину, которая может принимать значения от 1 до N с постоянной плотностью вероятности. Будем задавать эту случайную величину N раз. В каждом случае получаем некоторое значение n случайной величины в диапазоне от 1 до N , затем выбираем из исходного набора элемент с номером n . Помещаем этот элемент в результирующий набор. В итоге получим снова N элементов. Однако в результирующем наборе некоторые элементы из исходного набора могут оказаться выбранными

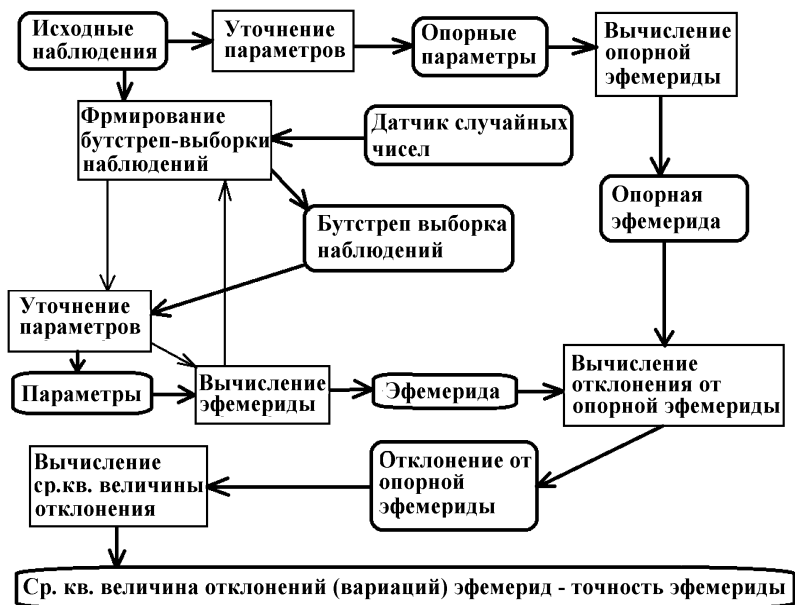


Рис. 8.2. Схема алгоритма оценки точности эфемериды с помощью «бутстреп»-выборки наблюдений. Толстыми линиями показаны данные и потоки данных. Тонкими линиями обозначены действия алгоритма и переходы между операциями.

несколько раз, а некоторые — ни разу. Такой способ еще называют выборкой с возвращением. В нашем случае каждая «бутстреп»-выборка из N исходных наблюдений спутника дает нам снова набор из N наблюдений, который и участвует в алгоритме оценки точности эфемериды.

При применении описанного здесь метода «бутстреп»-выборки наблюдений следует учитывать его специфическое свойство — варьируются не отдельные ошибки наблюдений, а полностью их состав. Поскольку в некоторых выборках могут отсутствовать наблюдения на краях интервала времени наблюдений, сокращенный интервал может приводить к ухудшению точности параметров и точности эфемерид. Исправление этого недостатка метода можно сделать следующим путем. Нужно вычислить сначала все ошибки на

блюдений, то есть отклонения реальных наблюдений от опорных, полученных путем вычисления эфемерид на моменты наблюдений по уточненным параметрам. Затем в процессе вычислений делать «бутстреп»-выборки не самих наблюдений, а только их ошибок. Таким образом, все моменты наблюдений будут сохранены. Однако ошибки одних наблюдений могут быть присвоены другим. При этом некоторые ошибки наблюдений могут быть увеличены в несколько раз, а некоторые будут положены равными нулю. Такой прием был испытан автором данной книги и привел к положительным результатам.

8.4. Оценка точности эфемерид методом вариации параметров движения

Основная идея этого метода заключается в следующем. На основе исходного набора наблюдений выполняем определение параметров движения небесного тела методом дифференциального уточнения. При этом получаются вектор-столбец найденных параметров \mathbf{P}_0 и соответствующая ковариационная матрица ошибок параметров \mathbf{D} , как описано в Главе 6. Вектор определяемых параметров содержит n элементов. Матрица \mathbf{D} имеет размерность $(n \times n)$. По значениям параметров \mathbf{P}_0 вычисляем опорную эфемериду. С помощью датчика случайных чисел создаем вариант значений параметров \mathbf{P} , отличающийся от \mathbf{P}_0 на некоторый вектор случайных величин. Формируем таким образом большое число вариантов случайных значений параметров движения. Для каждого варианта вычисляем эфемериду на заданный момент времени. Статистические оценки вариаций эфемерид среди этих вариантов дают оценку точности.

Здесь возникает важный вопрос о том, как сформировать случайную вариацию параметров. Метод, обоснованный теорией вероятностей, состоит в следующем. Для известной ковариационной матрицы ошибок параметров \mathbf{D} определяем матрицу декомпозиции Холецкого \mathbf{L} на основе соотношения

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{D}.$$

С помощью датчика случайных чисел формируем случайный вектор η , состоящий из n компонент. Каждая компонента должна независимо от других принимать случайные значения с плотностью

вероятности, распределенной по нормальному закону, с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной единице. Набор случайных значений параметров вычисляем затем по формуле

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{L}\eta.$$

Заметим, что матрица \mathbf{L} оказывается нижней треугольной матрицей. Для ее вычисления имеются специальные программы в известных математических пакетах программ MATLAB, Maple, Mathematica и других. Можно использовать программу, составленную на языке программирования Си и приведенную в Приложении 5.

Рассмотрим подробнее алгоритм решения этой задачи. Пусть имеется набор реальных наблюдений спутника. Требуется оценить точность эфемериды, построенной на основе этих наблюдений и вычисленной на заданный момент времени.

1. Выполняем уточнение параметров движения на основе имеющихся наблюдений. Получаем вектор параметров \mathbf{P}_0 и соответствующую ковариационную матрицу ошибок параметров \mathbf{D} .
2. По найденным параметрам вычисляем эфемериду спутника на заданный момент времени, то есть его координаты, точность которых требуется определить. Назовем эту эфемериду опорной.
3. Находим случайный вариант вектора параметров \mathbf{P} описанным выше способом с помощью датчика случайных чисел.
5. По найденным параметрам вычисляем эфемериду на заданный момент времени, то есть координаты, точность которых требуется определить. Вычисляем и запоминаем отклонения Δ_x этих координат от опорной эфемериды.
6. Переходим к пункту 3 с новым набором случайных чисел.
7. После выполнения перехода к пункту 3 большое число раз выходим из этого цикла и делаем статистический анализ вычисленных отклонений Δ_x по всем вариантам вариаций ошибок наблюдений.
8. Среднеквадратичную величину отклонений Δ_x принимаем за точность эфемериды.

При статистическом анализе отклонений Δ_x опорная эфемерида рассматривается как точная, поскольку она была вычислена на основе набора реальных наблюдений. Среднеквадратичную величину отклонений Δ_x можно определять по ходу вычислений с помощью рекуррентного соотношения, приведенного в разделе 6.6 (Глава 6).

Схема описанного алгоритма изображена на рис. 8.3. Вычисление опорной эфемериды выполняется одновременно с вычисле-

нием опорных наблюдений. Операции «вычисление варианта параметров с вариациями» и «вычисление эфемериды» делаются в цикле много раз. Вычисление отклонения от опорной эфемериды и среднеквадратичной величины отклонений производится по рекуррентной формуле одновременно с вычислением эфемериды. При выходе из цикла точность эфемериды как среднеквадратичная величина отклонений оказывается уже вычисленной. Оценку точности эфемерид можно делать одновременно на целый ряд моментов времени. Затем можно построить график зависимости точности от времени. Запоминая отклонения эфемериды от опорной на некоторый момент времени в процессе вычислений в отдельном файле, можно построить распределение отклонений по их значениям.

Рассмотренный алгоритм имеет преимущество по сравнению с другими рассмотренными выше методами. Значительно сокращается время вычислений, поскольку уточнение параметров из наблюдений нужно сделать только один раз. Другое преимущество заключается в том, что статистические характеристики ошибок наблюдений автоматически принимаются во внимание, благодаря использованию ковариационной матрицы ошибок параметров.

8.5. Точность эфемерид далеких спутников больших планет

Далекие спутники больших планет представляют большой интерес для динамики Солнечной системы. Знание орбит этих спутников помогает установить картину эволюции системы и дает информацию для подтверждения гипотез о происхождении спутников.

Далекие спутники планет подвержены сильным возмущениям со стороны Солнца. Определение этих возмущений аналитическими методами весьма затруднено, хотя в прошлых веках такие попытки делались.

Много новых далеких спутников планет было открыто в конце XX века и начале XXI. Общее число известных далеких спутников увеличилось за последнее время с 10 до 128. Эфемериды этих спутников необходимы для контроля выполненных и проведения новых наблюдений. Для этих целей надо знать априори точность эфемерид.

Расстояния далеких спутников от планеты заключаются в пределах от 10 до 30 млн км, а периоды обращения составляют от 2 до 4

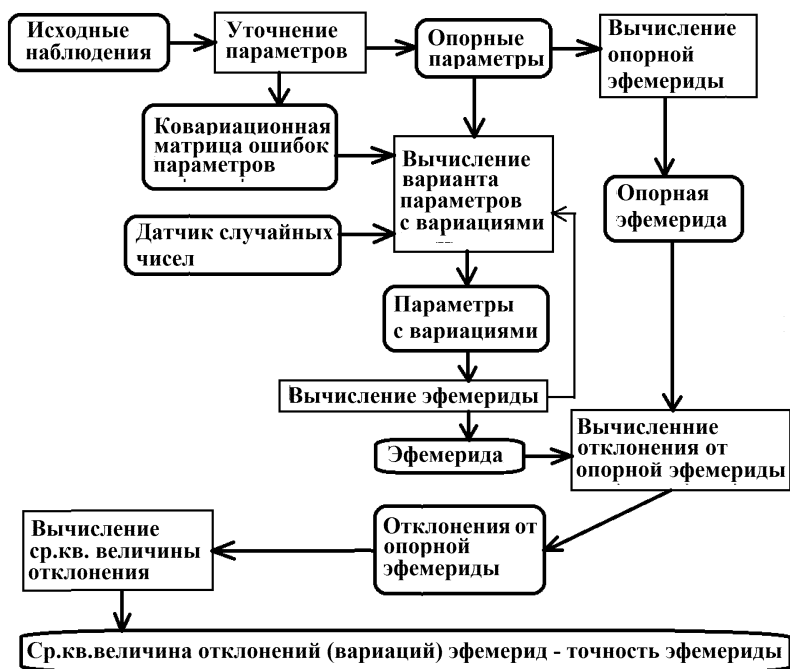


Рис. 8.3. Схема алгоритма оценки точности эфемериды с помощью вариаций ошибок параметров. Толстыми стрелками показаны данные и потоки данных. Тонкими стрелками обозначены действия алгоритма и переходы между операциями.

лет. Лишь два далеких спутника Нептуна движутся на расстоянии 46 млн км от своей планеты.

Эфемериды далеких спутников планет разрабатываются в нескольких мировых научных центрах. Результаты работ (Jacobson, 2000; Brozovic, Jacobson, 2009) использовались для производства эфемерид, доступных на сервере эфемерид JPL (Giorgini et al., 1997). Модели движения и эфемериды далеких спутников больших планет строились в работах (Emelyanov, 2005, 2007; Емельянов, Кантер, 2005). Наиболее точная модель движения и эфемериды спутника Сатурна Фебы были построены в работе (Desmars et al., 2013). Для далекого спутника Нептуна Нереиды модель движе-

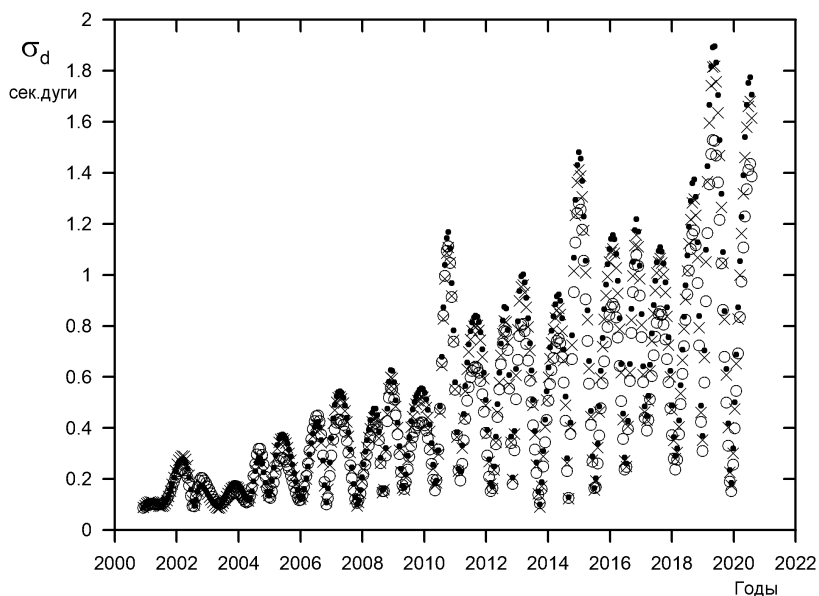


Рис. 8.4. Оценки точности эфемерид спутника Юпитера J23 Калике тремя методами: точки — вариации ошибок наблюдений, кружки — «бутстреп»-выборки, крестики — вариации ошибок параметров. Отношение интервала наблюдений к периоду обращения спутника равно 1.52.

ния построена в работе (Emelyanov, Arlot, 2011). Все эти эфемериды доступны на сервере эфемерид спутников планет MULTI-SAT (Emelyanov, Arlot, 2008).

Все новые спутники, открытые после 1997 года, имеют малую яркость. Их звездные величины заключаются в пределах 21–24. Спутники эти могут наблюдаться только с помощью очень мощных телескопов.

Анализ показывает, что по всем спутникам и по всем наземным обсерваториям точность наблюдений в основном составляет 0.2–0.6 секунд дуги. (Emelyanov, 2005, 2007; Емельянов, Кантер, 2005).

Впервые точность эфемерид всех далеких спутников больших планет была определена на основе наблюдений в работе (Emelyanov, 2010). В этой работе подробно описаны методы и даны результаты оценок. Для многих из далеких спутников орбиты были уточнены

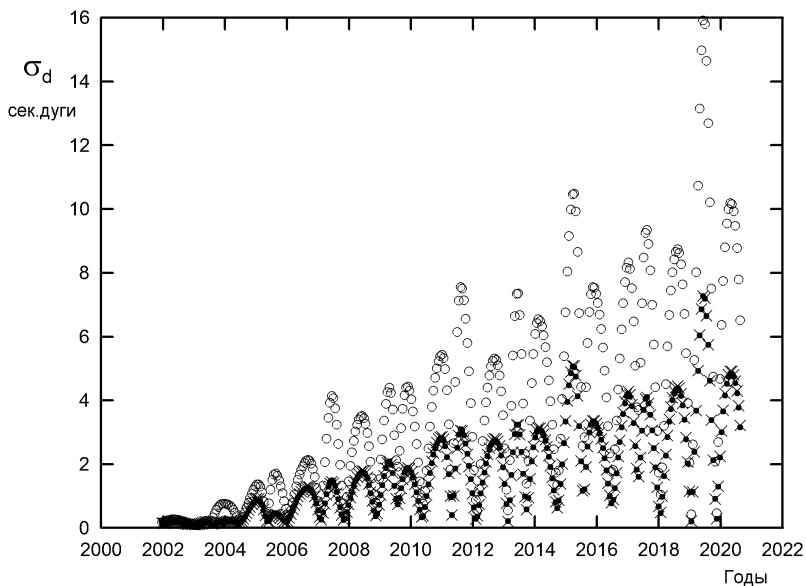


Рис. 8.5. Оценки точности эфемерид спутника Юпитера J31 Этне тремя методами: точки — вариации ошибок наблюдений, кружки — «бутстреп»-выборки, крестики — вариации ошибок параметров. Отношение интервала наблюдений к периоду обращения спутника равно 1.02 .

на основе более длинного ряда наблюдений по сравнению с теми, что использовались в предыдущих опубликованных работах.

Оказалось, что для далеких спутников, открытых в начале и середине XX века, точность эфемерид сохраняется на уровне 0.06 секунд дуги до 2020 года. Для других спутников точность эфемерид значительно хуже и резко падает с уменьшением интервала времени наблюдений. Есть спутники, для которых интервал времени наблюдений равен 30 суток, что составляет 0.04-0.07 периода их орбитального обращения. Для некоторых из таких спутников точность эфемерид сравнима с видимыми размерами орбиты. Это означает, что эти спутники можно считать потерянными. Их нужно искать и открывать заново. Согласно результатам работы (Emelyanov, 2010) таких спутников оказалось 21.

Точность эфемерид спутников в работе (Emelyanov, 2010) определялась для большого ряда моментов времени до 2020 года и в большинстве случаев включала интервал времени наблюдений. Для

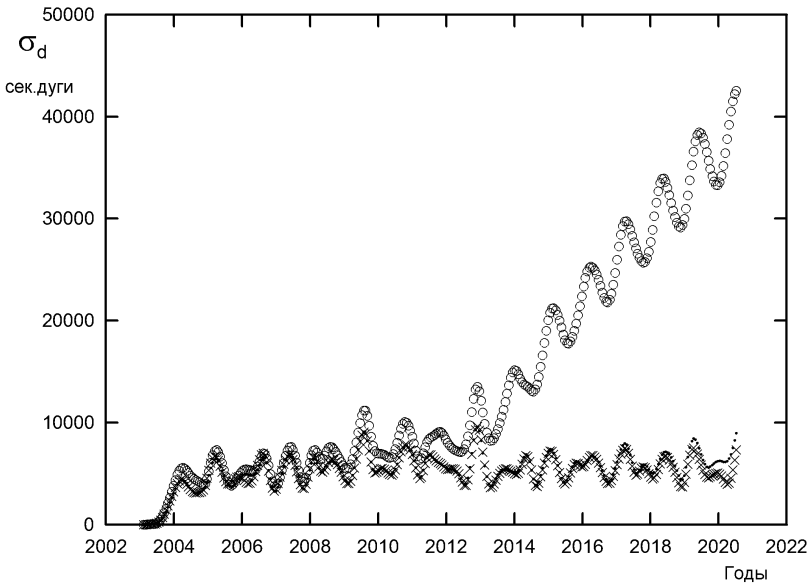


Рис. 8.6. Оценки точности эфемерид спутника Юпитера S/2003 J 3 тремя методами: точки — вариации ошибок наблюдений, кружки — «бутстреп»-выборки, крестики — вариации ошибок параметров. Отношение интервала наблюдений к периоду обращения спутника равно 0.04. На этом графике в большинстве случаев точки сливаются с крестиками.

всех спутников применялись три рассмотренных выше метода. Сделано сравнение оценок точности эфемерид по трем использованным методам. Оказалось, что для спутников с достаточно большим интервалом времени наблюдений три метода дают совершенно идентичные результаты. Однако в случаях малых интервалов времени наблюдений метод «бутстреп»-выборок наблюдений дает совершенно нереальные оценки. При этом методы вариации ошибок наблюдений и метод вариации параметров сохраняют взаимное согласие.

Несколько примеров оценок точности эфемерид показаны на рис. 8.4, 8.5, 8.6. В подписях к рисункам даются отношения интервала наблюдений к периоду обращения спутника. Графики на рисунках подтверждают сделанные выводы.

В работе (Jacobson et al., 2012) на основе всех имеющихся к тому времени наблюдений были уточнены орбиты и эфемериды всех да-

леких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Выполнены оценки точности эфемерид спутников. Получены результаты, аналогичные результатам работы (Emelyanov, 2010). Для ряда спутников эфемериды получились более точными, поскольку использовались более длинные ряды наблюдений. Важно то, что авторы работы (Jacobson et al., 2012) выполнили новые наблюдения и осуществили поиск спутников, ранее потерянных из-за неточности эфемерид. Несколько спутников было вновь найдено. Однако авторы работы (Jacobson et al., 2012) констатировали, что 16 ранее открытых далеких спутников Юпитера и Сатурна остаются потерянными. Новые работы по уточнению орбит далеких спутников планет продолжались. Авторы статьи (Brozovic, Jacobson, 2017) произвели новое определение орбит далеких спутников Юпитера с использованием новых наблюдений. Но и после этой работы 11 из 71 далеких спутников Юпитера так и остаются потерянными.

Литература к Главе 8

- Emelyanov N. V., Kanter A. A.* Орбиты новых внешних спутников планет на основе наблюдений. *Астрономический вестник*. 2005. Т. 39. № 2. P. 128–140. (*Emelyanov N. V., Kanter A. A.* Orbits of new outer planetary satellites based on observations. *Solar System Research*. 2005. V. 39. P. 112–123.)
- Brozovic M., Jacobson R. A.* The orbits of the outer Uranian satellites. *Astronomical Journal*. 2009. V. 137. P. 3834–3842.
- Brozovic M., Jacobson R. A.* The orbits of Jupiter’s irregular satellites. *Astronomical Journal*. 2017. V. 153. Issue 4. Article id. 147, 10 pp.
- Desmars J., Arlot S., Arlot J.-E., Lainey V., Vienne A.* Estimating the accuracy of satellite ephemerides using the bootstrap method. *Astronomy and Astrophysics*. 2009. V. 499. P. 321–330.
- Desmars J., Li S. N., Tajeddine R., Peng Q. Y., Tang Z. H.* Phoebe’s orbit from ground-based and space-based observations. *Astronomy and Astrophysics*. 2013. V. 553. Id. A36. 10 pp.
- Emelyanov, N. V.* Ephemerides of the outer Jovian satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 2005. V. 435. P. 1173–1179.

- Emelyanov N. V.* Updated ephemeris of Phoebe, ninth satellite of Saturn. *Astronomy and Astrophysics*. 2007. V. 473. P. 343–346.
- Emelyanov N. V., Arlot J.-E.* The natural satellites ephemerides facility MULTI-SAT. *Astronomy and Astrophysics*. 2008. V. 487 P. 759–765.
- Emelyanov N.* Precision of the ephemerides of outer planetary satellites. *Planetary and Space Science*. 2010. V. 58. P. 411–420.
- Emelyanov N. V., Arlot J.-E.* The orbit of Nereid based on observations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2011. V. 417. Issue 1. P. 458–463.
- Jacobson R. A.* The Orbits of the Outer Jovian Satellites. *Astronomical Journal*. 2000. V. 120. P. 2679–2686.
- Jacobson R., Brozovic M., Gladman B., Alexandersen M., Nicholson P. D., Veillet C.* Irregular satellites of the outer planets: orbital uncertainties and astrometric recoveries in 2009-2011. *Astronomical Journal*. 2012. 144:132. 8pp.
- Giorgini J.D., Yeomans D.K., Chamberlin A.B., Chodas P.W., Jacobson R.A., Keesey M.S., Lieske J.H., Ostro S.J., Standish E.M., Wimmerly R.N.* JPL's On-Line Solar System Data Service. *Amer. Astron. Soc. DPS meeting N.28, N.25.04*. 1997. *Bull. Amer. Astron. Soc.* 1997. V. 28. P. 1158–1158.
- Milani, A.* The Asteroid identification problem. I. Recovery of lost asteroids. *Icarus*. 1999. V. 137. P. 269–292.
- Muinonen K., Bowell E.* Asteroid orbit determination using Bayesian probabilities. *Icarus*. 1993. V. 104. P. 255–279.
- Virtanen J., Muinonen K., Bowell E.* Statistical ranging of asteroid orbits. *Icarus*. 2001. V. 154. P. 412–431.

ВРАЩЕНИЕ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

Резюме

Первые два раздела этой главы содержат основные определения понятий, связанных с вращением спутников планет. Эти сведения необходимы при изучении динамики спутников планет из наблюдений. В третьем разделе дается модель движения полюса Нептуна на основе двух работ, включая работу автора книги.

Четвертый и следующие разделы повествуют о работах по исследованию вращательной динамики отдельно по каждой группе спутников.

Поскольку автор данной книги непосредственно практически не занимался изучением вращения естественных спутников планет, настоящая глава содержит лишь обзоры основных результатов, сделанные по публикациям последних двадцати лет.

9.1. Общие свойства вращения спутников планет

Двигаясь по орбитам вокруг своих планет, спутники вращаются и относительно своих центров масс. Динамика вращения весьма сложна. Вращательное и орбитальное движения взаимно связаны. На вращение действуют в основном консервативные гравитационные силы, но также и силы диссипативной природы.

По вращению спутники можно разделить на три группы.

Первая группа спутников имеет вращение, синхронное с орбитальным движением. Это означает, что спутник всегда обращен к планете одной и той же своей стороной. Так вращаются почти все главные спутники планет. Исключение составляет спутник Сатурна Гиперион, вращение которого необычно. Спутники, имеющие син-

хронное вращение, как правило, имеют вытянутую форму, и ось вытянутости всегда направлена в сторону планеты. Вращаясь синхронно, спутники не всегда точно ориентированы в направлении планеты. Они совершают небольшие колебания своих тел относительно этого направления — так называемые либрации. Это происходит из-за притяжения планеты и взаимного притяжения спутников. Точные теории либрации этих спутников весьма сложны.

Вторая группа — это спутники с необычным вращением, которое принято называть хаотичным. К таким спутникам относится Гиперион — один из главных спутников Сатурна. В теоретической работе (Wisdom, Peale, Mignard, 1984) был представлен анализ, в результате которого обнаруживается большая зона возможных состояний хаотического вращения вокруг резонансного спин-орбитального состояния Гипериона. Еще ранее в работе (Goguen et al., 1983) из анализа кривых блеска этого спутника, полученных из фотометрических наблюдений 1983 года, было установлено его хаотичное вращение. Хаотичное вращение спутников планет и вращение Гипериона рассмотрены ниже в отдельном разделе.

К третьей группе относятся спутники, о вращении которых нам ничего не известно. Это в основном далекие спутники больших планет, весьма малые объекты.

Знание параметров вращения естественных спутников планет весьма востребовано при решении многих практических задач динамики Солнечной системы. Поэтому важно иметь некоторый стандартный источник данных, отражающий современные знания, постоянно обновляемые по мере появления новых результатов наблюдений. Этим делом занята Рабочая группа по картографическим координатам и параметрам вращения планет и спутников Международного астрономического союза (IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements — IAU WG CCRE). До последнего времени эта рабочая группа регулярно один раз в три года публиковала свой отчет, в котором давалась сводка последних сведений о вращении планет и спутников. Последний рассматриваемый нами отчет — это публикация (Archinal et al., 2018). Впрочем, после публикации такого отчета снова выполняются исследования, уточняющие предыдущие модели.

Параметры вращения естественных спутников и планет, взятые из последнего отчета Рабочей группы IAU WG CCRE, приводятся в Приложении 6. Новые данные, появившиеся после публикации

отчета, также приводятся и снабжаются специальными комментариями.

При описании вращения планеты или спутника могут возникнуть различия в принятых определениях таких понятий, как северный полюс и начальный меридиан. Поэтому в следующем разделе мы даем определение основных понятий, принятых Международным астрономическим союзом (МАС).

Вращения спутников наблюдаются с помощью космических аппаратов (КА). Фотометрические проявления вращения обнаруживаются и при наземных наблюдениях. Вращение существенно зависит от внутреннего строения спутников. По наблюдениям вращения можно строить гипотезы о внутреннем строении, можно моделировать распределение масс внутри спутников. Обычно моделируют гравитационное поле спутника путем разложения силовой функции притяжения в ряд по сферическим функциям. На основе этих данных составляют дифференциальные уравнения вращения спутника вокруг его центра масс. В правых частях уравнений учитываются факторы, влияющие на вращение. Это в основном притяжение центральной планеты и других спутников. Используются наиболее точные модели орбитального движения спутников.

С помощью КА получают изображения спутников. По изображениям определяют формы их тел. Эти данные согласовываются с моделями вращения.

Для решения дифференциальных уравнений вращательного движения необходимы начальные условия. Их определяют из наблюдений. Положения тел спутников определяются по изображениям, получаемым с помощью КА. Для изучения вращения спутников используют также наземные фотометрические измерения интегральной яркости спутника. При этом используют ту или иную модель распределения отражательной способности по поверхности спутника. В итоге получается модель вращения спутника, позволяющая определить на любой заданный момент времени углы либрации. При моделировании вращения используют модели абсолютно твердого тела, деформируемого упругого или вязко-упругого тела.

Все эти модели составляют предмет многочисленных работ, публикуемых в научных журналах. Ниже дается краткий обзор работ и результатов по исследованию вращения естественных спутников больших планет на основе наблюдений. Разделы изложения соот-

ветствуют отдельным спутникам, имеющим определенные особенности вращения.

9.2. Основные понятия о вращении планет и спутников

Чтобы избежать возможной путаницы, Рабочая группа IAU WG CCRE выработала рекомендации в определении основных понятий о вращении планет и спутников.

Системы координат на планетах и естественных спутниках определяются относительно средней оси вращения. Понятие долготы зависит от типа небесного тела. Для большинства тел, имеющих наблюдаемые детали на поверхности, долгота определяется относительно какой-либо детали. Применяются и другие определения долготы, которые мы рассмотрим ниже. Приближенные выражения для углов вращения даются относительно Международной небесной системы координат (International Celestial Reference Frame — ICRF). Время отсчитывается в шкале TDB. Эпохой отсчета времени является эпоха J2000, т.е. $JD = 2451545.0$ (12 часов 1 января 2000 г.) TDB. Время измеряется в сутках (86400 секунд системы SI) или в столетиях по 36525 суток по шкале TDB.

Северным полюсом оси вращения считается тот из двух полюсов, который расположен в северной полусфере относительно неизменной плоскости вращения Солнечной системы. Таким образом, угол между северным направлением оси вращения и неизменным вектором момента вращения Солнечной системы всегда не превышает 90 градусов.

Координаты северного полюса вращения задаются прямым восхождением α_0 и склонением δ_0 в системе ICRF.

При таком определении северного полюса мы имеем две точки пересечения экватора тела и основной плоскости ICRF. Назовем восходящим узлом Q ту из этих точек, которая имеет прямое восхождение $\alpha_0 + 90^\circ$. Наклон плоскости экватора тела к экватору системы ICRF равен $90^\circ - \delta_0$.

Принимается, что нулевой меридиан тела вращается монотонно и почти равномерно во времени. Определим положение нулевого меридиана в заданный момент времени углом W , отсчитываемым на экваторе тела к востоку от восходящего узла Q до точки B пере-

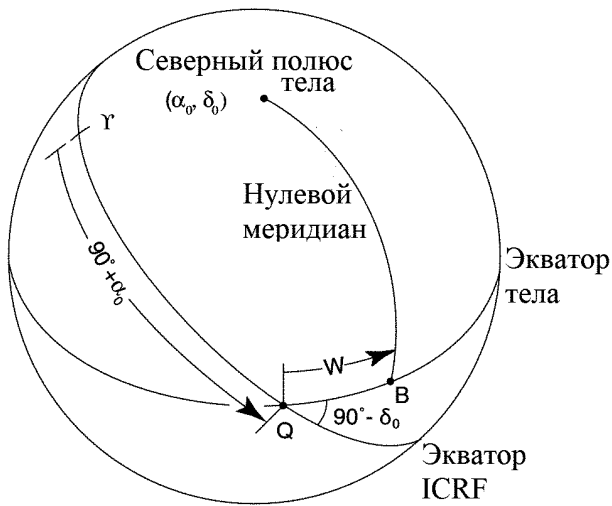


Рис. 9.1. Система координат, используемая для определения ориентации планеты или спутника.

сечения нулевого меридиана с экватором тела. Рассмотренные здесь понятия поясняются на рис. 9.1.

Если W увеличивается со временем, то говорят, что планета или спутник имеют прямое (prograde) вращение. Если W уменьшается, то вращение считается обратным (retrograde). Угол W определяет эфемеридное положение нулевого меридиана. Для планет или спутников, не имеющих выраженных деталей на поверхности, именно выражение для W , как функции времени, может задавать нулевой меридиан.

В некоторых работах оси координат, жестко связанные с телом, относятся не к оси вращения, а к главным центральным осям инерции. Такие случаи особо отмечаются в публикациях.

Для некоторых спутников планет положение нулевого меридиана связывается со средним направлением на центр планеты.

В публикации (Archinal et al., 2018) подробно описывается, с чем может быть связан нулевой меридиан, и в каких случаях может измениться его задание.

При данном выше определении северного полюса планеты, оказывается, что Уран имеет обратное вращение вместе со своими глав-

ными спутниками. В некоторых работах в качестве основного направления оси используется направление вектора угловой скорости вращения планеты. Однако, если это не оговаривается особо, то считается, что принимаются определения, рекомендованные Рабочей группой IAU WG CCRE.

Заметим, что принятое выше определение для северного полюса тела оказывается непригодным для некоторых малых планет и комет. Дело в том, что из-за быстрой прецессии оси вращения полюс может измениться на противоположный.

По указанной причине для малых планет, карликовых планет и комет определяют так называемый «положительный полюс», связанный с вектором угловой скорости вращения по известному правилу «правой руки» Такой полюс может оказаться никак не связанным с понятием северного или южного положения.

В связи с этим, положение полюса Плутона, как отнесенного к карликовым планетам, было изменено на обратный уже в отчете Рабочей группы IAU WG CCRE 2011-го года. по сравнению с направлением полюса Плутона, принятого в предыдущих отчетах Рабочей группы IAU WG CCRE. И теперь в отчете (Archinal., 2018) положение полюса Плутона и его спутника Харона принимается согласно правилу, принятому для карликовых планет.

Напомним здесь еще раз, что параметры вращения естественных спутников и планет, взятые из последнего отчета Рабочей группы IAU WG CCRE (Archinal, 2018), приводятся в Приложении 6. Новые данные, появившиеся после публикации отчета, также приводятся и снабжаются специальными комментариями.

Особо отметим новую модель вращения спутников Марса, опубликованную в 2017 году (Jacobson, 2017). Параметры вращения из этой работы даны отдельно в Приложении 6.

9.3. Вращение Нептуна и орбита Тритона

Система спутников Нептуна имеет особые свойства. Нептун имеет один весьма массивный спутник Тритон, а также несколько совсем небольших далеких и близких спутников. Один из них — далекий спутник Нереида. Он обращается по очень вытянутой орбите с эксцентриситетом около 0.745. Влияние малых спутников на движение массивного Тритона довольно слабое. В последних опуб-

ликованных моделях вращательного движения этим влиянием еще пренебрегают.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из вращающегося вокруг своей оси Нептуна и обращающегося по орбите вокруг него спутника Тритона. Влиянием притяжения Солнца и других спутников можно пренебречь, а Тритон можно рассматривать как точечную массу. Центр масс системы будет неподвижен, а неизменный момент количества движения системы относительно центра масс будет равен сумме момента количества движения вращающейся планеты и момента количества движения Тритона вокруг центра масс системы.

Из-за динамического сжатия Нептуна орбита Тритона будет прецессировать. Пренебрегая короткопериодическими возмущениями от этого сжатия, можно заключить, что прецессия орбиты будет происходить с постоянной угловой скоростью и постоянным наклоном к неизменной плоскости, перпендикулярной к вектору момента количества движения системы.

Конфигурацию вращения Нептуна и орбитального движения Тритона поясняет рис. 9.2. Начало координат помещено в центр масс системы, ось z направлена вдоль вектора суммарного момента количества движения. Показаны линии пересечения плоскостей с некоторой сферой произвольного радиуса. Вектор момента вращения Нептуна обозначен через \mathbf{N} , а вектор момента орбитального движения Тритона — через \mathbf{T} . Оба вектора и ось z лежат в одной плоскости. Угол ϵ между вектором \mathbf{N} и осью z составит 0.461627 градуса, а наклон орбиты Тритона к неизменной плоскости $I = 156.870$ градуса (Jacobson, 2009). На рисунке для наглядности угол ϵ намеренно увеличен. Через Ω на рис. 9.2 обозначено направление на восходящий узел орбиты Тритона. Стрелками указаны направления прецессии векторов и плоскости орбиты.

Рассмотренная здесь конфигурация системы Нептуна аналогична конфигурации вращения Луны и ее орбитального движения. Для Луны такие свойства открыл французский ученый Жан-Доминик Кассини (1625-1712). Теперь они называются законами Кассини.

В работе (Jacobson, 1990) дается подробное количественное описание рассмотренной динамической системы и приводятся соотношения между величинами, характеризующими движение. На основе такой модели в работе (Jacobson, 2009) выводятся приближенные формулы для экваториальных координат полюса Нептуна — пря-

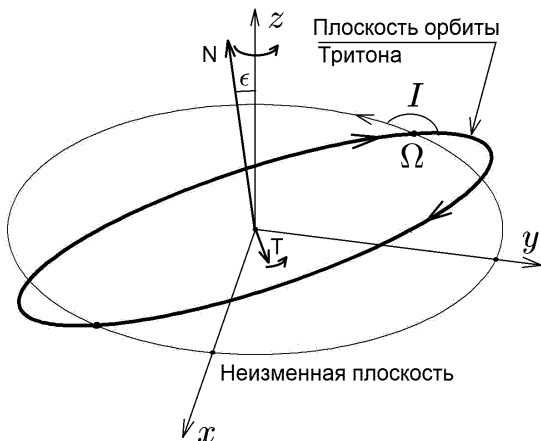


Рис. 9.2. Конфигурация вращения Нептуна и орбитального движения Тритона. Через \mathbf{N} обозначен вектор момента вращения Нептуна. Вектор \mathbf{T} — вектор момента орбитального движения Тритона. Ось z направлена по суммарному вектору $\mathbf{N} + \mathbf{T}$.

мого восхождения α_0 и склонения δ_0 , как функций времени. Постоянными параметрами в этих формулах являются: угол ϵ , прямое восхождение α_r и склонение δ_r суммарного вектора момента количества движения системы. Время входит в формулы через долготу восходящего узла орбиты Тритона Ω относительно неизменной плоскости. Линейное по времени изменение $\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0)$ задается параметрами $\dot{\Omega}$, Ω_0 . В работе (Jacobson, 2009) все эти параметры определяются непосредственно из наблюдений. Использовались все наблюдения, выполненные вплоть до 2008 года. В уравнениях движения, которые решались методом численного интегрирования, учитывались также возмущения от других небесных тел.

Формулы для экваториальных координат полюса Нептуна имеют вид (Jacobson, 2009)

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_r + \epsilon \sec \delta_r \sin \Omega_T - \frac{1}{2} \epsilon^2 \sec \delta_r \operatorname{tg} \delta_r \sin 2\Omega_T, \\ \delta_0 &= \delta_r - \epsilon \cos \Omega_T - \frac{1}{4} \epsilon^2 \operatorname{tg} \delta_r (1 - \cos 2\Omega_T), \end{aligned} \quad (9.1)$$

где Ω_T есть долгота восходящего узла экватора Нептуна относительно неизменной плоскости. Из условия, что ось вращения пла-

неты и вектор момента орбитального движения Тритона расположены по разные стороны относительно оси z , следует соотношение между Ω_T и Ω :

$$\Omega_T = \Omega + 180^\circ.$$

В формулах (9.1) отброшены члены разложения, содержащие степени ϵ большие, чем 2.

Подставим теперь в формулы (9.1) значения параметров, полученные в работе (Jacobson, 2009) из наблюдений: $\alpha_r = 299.460861$, $\delta_r = 43.404811$, $\epsilon = 0.461627$. Здесь принята система координат ICRF, а значения углов даны в градусах. Получим для координат полюса Нептуна следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 299.460861 + 0.635397 \sin \Omega_T - 0.002421 \sin 2\Omega_T, \\ \delta_0 &= 43.403932 - 0.461627 \cos \Omega_T + 0.000879 \cos 2\Omega_T.\end{aligned}\quad (9.2)$$

Выражение для Ω_T , взятое из работы (Jacobson, 2009), мы привели к начальной эпохе J2000. Получилось

$$\Omega_T = 358.177292 + 52.383621844611 T,$$

где углы измеряются в градусах, а T есть интервал времени между текущим моментом и эпохой J2000, выраженный в юлианских столетиях по 36525 суток.

Отметим, что угловые величины взяты из статьи в том виде, как они там приводятся, с излишним числом значащих цифр. На самом деле в работе (Jacobson, 2009) точность определения угла α_r составляет 0.14, а угла δ_r — 0.03 градуса. Такую же точность имеют соответственно и координаты полюса в соотношениях (9.2).

Модель движения Тритона построена независимо также в работе (Emelyanov, Samorodov, 2015). Разработана аналитическая теория движения этого спутника. Возмущения от притяжения Солнца учтены аналитическим методом. Преимущество по сравнению с работой (Jacobson, 2009) заключается в том, что период времени используемых наблюдений расширен до 2012 года. В работе (Emelyanov, Samorodov, 2015), кроме параметров орбиты Тритона, непосредственно из наблюдений уточняются экваториальные координаты неизменного вектора количества движения системы α_r , δ_r (Они в этой работе обозначены через α_0 , δ_0). При этом угол ϵ не уточняется. Линейное изменение долготы восходящего узла

$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega} T$ также определено из наблюдений. Параметры определены для двух вариантов состава наблюдений: без использования наблюдений, выполненных с помощью космического аппарата Вояджер-2, и с включением этих наблюдений в общую базу данных.

Мы можем теперь взять значения параметров, полученные в работе (Emelyanov, Samorodov, 2015), и записать для них формулы для координат полюса Нептуна. Значение угла ϵ можно при этом взять из работы (Jacobson, 2009). Поскольку в этой работе используются наблюдения с КА Вояджер-2, мы возьмем из работы (Emelyanov, Samorodov, 2015) вариант результатов, также полученных с использованием этих наблюдений. Согласно этим результатам имеем $\alpha_r = 299.090$, $\delta_r = 43.019$ (углы здесь измерены в градусах). Для координат полюса Нептуна в системе ICRF получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 299.090 + 0.631391 \sin \Omega_T - 0.002373 \sin 2\Omega_T, \\ \delta_0 &= 43.018132 - 0.461627 \cos \Omega_T + 0.000868 \cos 2\Omega_T.\end{aligned}\quad (9.3)$$

Выражение для Ω_T по результатам работы (Emelyanov, Samorodov, 2015), приведенное к начальной эпохе J2000, имеет вид

$$\Omega_T = 359.460800221 + 53.05102845 T.$$

Полученные из работ (Jacobson, 2009) и (Emelyanov, Samorodov, 2015) выражения для координат полюса Нептуна можно считать альтернативными по отношению к формулам, рекомендуемым в отчете Рабочей группы IAU WG CCRE (Archinal et al., 2018).

9.4. Теория вращения Фобоса

Из двух известных спутников Марса естественный спутник Фобос наиболее изучен. Детальное исследование его вращения опубликовано в работе (Rambaux et al., 2012). Это исследование мотивировано концепциями новых космических миссий для высокоточных измерений вращения Фобоса. Основная задача этих миссий состоит в получении сведений о внутренней структуре спутника. Вариации вращения зависят от внутренней структуры. С помощью КА Mars Express (MEX) получены многочисленные изображения Фобоса с высоким разрешением. В работе Willner et al. (2010) по этим изображениям выведены новые данные о либрациях спутни-

ка. Либрации имеют амплитуду 1.2 градуса и определены с точностью 0.15 градуса. Перспективы повышения точности этого анализа и предполагаемые новые миссии к Марсу потребовали разработки новой, более точной теории вращения Фобоса. Была поставлена задача определить, какую информацию можно получить по планируемым измерениям либраций с точностью до 0.0001 градуса.

Фобос в своем вращении относительно центра масс находится в синхронном резонансе с орбитальным движением вокруг Марса. Из-за ненулевого эксцентриситета орбиты имеются вариации скорости орбитального движения. В результате спутник показывает в сторону Марса 52% своей поверхности. Планета создает своим притяжением момент силы, зависящий от времени и влияющий на вращение. Ответом Фобоса на это воздействие являются физические либрации, т.е. отклонения от равномерного вращения. Либрационный ответ зависит от распределения масс внутри тела спутника. Еще в 90-х годах развивались аналитические теории либрации Фобоса на основе данных, полученных с помощью КА *Viking* и в итоге выполнения проекта *Фобос-2*. Такие теории опубликованы в работах (Borderies, Yoder, 1990; Chapront-Touze, 1990; Pesek, 1991).

В работе (Rambaux et al., 2012) вращение Фобоса относительно центра масс моделируется путем численного интегрирования дифференциальных уравнений Эйлера вращения спутника. Углы Эйлера задают положение невращающейся системы координат, связанной с экватором Марса фиксированной эпохи J2000, в системе координат, связанной с главными центральными моментами инерции спутника.

Использовались значения моментов инерции Фобоса, основанных на изображениях с КА MEX (Willner et al. 2010). Для моделирования вращения Фобоса (Rambaux et al., 2012) взяли значения моментов инерции $A = 0.3615$, $B = 0.4265$, $C = 0.5024$ из работы (Willner et al. 2010), где они были определены по топографии спутника. Средний радиус Фобоса R_0 был взят равным 11.27 км. Применяется разложение гравитационного потенциала Фобоса в ряд по сферическим функциям с точностью до 3-го порядка.

Обычно Фобос рассматривается как однородное тело. Однако либрации, измеренные в работе (Willner et al. 2010), не исключают неоднородностей внутри Фобоса. Знание вариаций плотности вдоль поверхности могло бы дать ключ к пониманию происхождения спутника.

Используется модель орбитального движения и эфемериды Фобоса из работы (Lainey, Dehant, Patzold, 2007). Точность этих эфемерид составляет 1 км. В теории движения принимаются во внимание возмущения со стороны Солнца, Юпитера, Сатурна, системы Земля-Луна, нецентральность гравитационного поля Марса и приливные эффекты в системе Марс-Фобос.

Для учета влияния притяжения Марса на вращение спутника необходимо было дать аналитическое описание орбитального движения Фобоса в системе координат, связанных со средним экватором Марса эпохи даты, поскольку основным фактором, определяющим прецессию орбиты и вращение спутника, является динамическое сжатие планеты. В работе (Rambaux et al., 2012) для такого описания использовались элементы Делоне, отсчитываемые в системе среднего экватора Марса эпохи даты. В качестве аргументов тригонометрических функций, входящих в теорию, были добавлены также углы, описывающие движение перицентра орбиты Марса и его вращение. Численные значения частот, соответствующих этим углам, даны в этой работе.

Преимущества применения численного интегрирования по сравнению с аналитическим решением заключается в возможности учета комбинированных эффектов от различных возмущающих факторов. Так упрощался учет нелинейных изменений, обусловленных близостью частот собственных либраций и частот внешних сил.

В работе (Rambaux et al., 2012) показано, что влияние членов третьего порядка в разложении гравитационного потенциала Фобоса и влияние динамического сжатия Марса имеют примерно один и тот же порядок малости.

Начальные условия при решении уравнений вращения Фобоса были взяты из условия, что собственные моды вращения Фобоса, называемые также свободной либрацией, равны нулю. Таким образом, предполагалось, что приливная диссипация достаточна, чтобы погасить свободную либрацию, и нет механизмов, способных ее возбудить. Классический способ такого поиска начальных условий здесь оказался непригоден из-за близости частот свободной либрации и вынужденных колебаний. Поэтому в численное интегрирование было включено искусственное гашение свободной либрации, а время затухания подбиралось итерациями.

Углы вращения Фобоса были представлены с помощью сумм тригонометрических функций от известных аргументов. Амплиту-

ды и фазы тригонометрических членов были найдены с помощью частотного анализа результатов численного интегрирования.

В результате цитируемой работы было получено описание либраций Фобоса в долготе и вращения тела Фобоса в пространстве. Угол либрации в долготе описывает отличие реального вращения спутника от равномерного. Основная гармоника либрации в долготе имеет период 0.3190 суток и амплитуду 1.0998 градуса.

Движение полюса Фобоса, связанного с главным моментом инерции, относительно среднего экватора Марса эпохи даты происходит по слабо эллиптической траектории с небольшими дополнительными колебаниями. Радиус окружности, близкой к эллиптической траектории конца оси вращения на расстоянии 11.3 км от центра спутника, составляет примерно 220 метров. Период вращения оси равен драконическому периоду орбитального движения спутника (от узла к узлу). Таким образом, ось (главный момент инерции) движется по конусу с угловым расстоянием от среднего положения примерно 1.078 градуса.

В работе (Rambaux et al., 2012) даны десять найденных тригонометрических членов в представлении либрации в долготе и двенадцать членов в движении полюса Фобоса. Для каждого члена разложения приводится частота, фаза и амплитуда. Амплитуды других членов в разложении координат полюса, кроме основного, в сто раз меньше амплитуды главного члена. Эти члены обусловлены в основном возмущениями в наклонении орбиты Фобоса. Приводится детальный анализ углов, описывающих вращение спутника, как функций времени. В частности, анализируется вклад различных возмущений в либрационное движение.

Построенная в работе (Rambaux et al., 2012) теория вращения Фобоса применялась для исследования возможности уточнения модели либрации по наблюдениям (LeMaistre et al., 2013). Предполагались два типа измерений. Первый тип измерений (Direct-To-Earth (DTE) Doppler) заключается в наземном измерении доплеровского изменения частоты радиосигнала с КА, размещенного на спутнике Марса. При втором способе (Star Tracker) проводятся астрометрические наблюдения звезд с борта КА. Оба способа дают сигналы, прямо зависящие от углов вращения Фобоса. Поскольку такие наблюдения еще только планировались, то заранее выполнялись оценки точности параметров вращения, определяемых таким способом, на основе искусственно созданных результатов наблюде-

ний, так называемых «симуляций». Делались также оценки возможности построения модели внутреннего строения спутника в таком эксперименте. В работе (LeMaistre et al., 2013) рассматривались эффекты вязко-упругих деформаций тела Фобоса и возможности определения соответствующих параметров из наблюдений.

Интересным материалом, содержащимся в работе (LeMaistre et al., 2013), является преобразование параметров вращения Фобоса, найденных в работе (Rambaux et al., 2012), к форме представления прямого восхождения и склонения полюса оси вращения Фобоса как функций времени. Эти функции представлены суммой линейных по времени и периодических членов. Отметим, что полюс спутника в этой работе задает ось фигуры (the direction of the figure axis of the body). В работе не уточняется, как эта ось соотносится с осью вращения. Говорится только, что движением полюса пренебрегается (the polar motion of Phobos is negligible). Из контекста можно сделать вывод, что эти оси совпадают.

Если принять согласно подписям к таблицам 1 и 2 статьи (LeMaistre et al., 2013), что в таблицах представлено движение полюса вращения Фобоса, сопоставимое с данными в отчете Рабочей группы IAU WG SCRE (Archinal et al., 2018), то данные таблиц представляют альтернативный источник для представления вращения Фобоса. Параметры вращения Фобоса согласно работе (LeMaistre et al., 2013) даны в Приложении 6.

9.5. Вращение Галилеевых спутников Юпитера, спутников Сатурна и Плутона

В последних работах, посвященных вращению Галилеевых спутников Юпитера, изучался так называемый «либрационный ответ» на внутреннее строение спутников. Было обращено внимание на эффекты вращения, вызванные орбитальными движениями спутников. Рассматривались разные модели внутреннего строения спутников. Предполагалось, что на спутниках Европа, Ганимед, Каллисто под поверхностями имеются слои жидкости (океаны). В работе (Rambaux, Van Hoolst, Karatekin, 2011) построен спектр частот либраций спутников. Идентифицированы гармоники, связанные с различными внешними эффектами: орбитальным движением, притяжением других спутников, притяжением Солнца. Показано, что

амплитуды короткопериодических членов в либрации несут информацию о внутреннем строении.

В работе (Noyelles, 2010a) аналитическим и численным методами построена модель вращения Галилеевых спутников Юпитера. Углы вращения, как функции времени, не приводятся, но исследовалось влияние внутренней структуры спутников на свойства вращения. Показано, что из наблюдений вращения можно делать выводы о внутреннем строении спутников.

За последнее десятилетие опубликовано множество работ посвященных вращению спутников Сатурна. Это связано с выполнением новых высокоточных и высокоинформативных наблюдений с помощью космического аппарата *Cassini*. В частности, были получены новые данные о гравитационных полях спутников.

В работах (Noyelles, 2008; Noyelles, Lemaitre, Vienne, 2008; Van Hoolst et al., 2009; Richard, Rambaux, 2014) изучалось вращение Титана. Проведен детальный анализ частотных спектров либраций и зависимостей либрационных движений от различных внешних воздействий и физических свойств спутника, в частности, вязкости вещества.

Анализ вращения спутника Мимас и связи свойств вращения с внутренним строением выполнен в работах (Noyelles, Karatekin, Rambaux, 2011; Tajeddine et al., 2014; Noyelles, 2017).

Описание и анализ физической либрации соорбитальных спутников Янус и Эпиметей приводятся в работах (Noyelles, 2010b; Robutel, Rambaux, Castillo-Rogez, 2010; Robutel, Rambaux, El Moutamid, 2012)

Миссия *New Horizons* показала, что малые спутники Плутона P2 Никта, P3 Гидра, P4 Керберос и P5 Стикс в приливной эволюции вращений не достигли состояния синхронного вращения и имеют значительные углы наклона осей вращения относительно нормали к плоскости орбиты массивного спутника P1 Харон (Weaver et al., 2016). В системе спутников P1 Харон, P5 Стикс, P2 Никта обнаружены резонансные соотношения между их орбитальными движениями. Это послужило поводом для анализа вращения этих спутников. Такой анализ сделан в работах (Correia et al., 2015; Quillen et al., 2017a; Quillen et al., 2017b). Применялся метод построения вариантов искусственных движений («симуляций») в задаче многих тел конечных размеров с эффектом «затухающей пружины». Модели с приливной диссипацией не показали значительных вариаций на-

клона, и это объясняется большими значениями скорости вращения и малыми эксцентриситетами орбит спутников. Тем не менее, спутник P5 Стикс в приливной эволюции демонстрирует прерывистые вариации наклонности и эпизоды опрокидывания. В предполагаемом процессе миграции спутника P1 Харон с увеличением расстояния до Плутона спутники могут быть захвачены в резонансы средних движений с Хароном, что может вызывать вариации наклона осей вращения спутников P5 Стикс и P2 Никта. Причина может заключаться в резонансе между орбитальным движением Харона и прецессией оси вращения малого спутника.

9.6. Хаотическое вращение спутников планет.

Вращение Гипериона

Моделирование вращения спутников планет представляет собой особую проблему. Имеется огромное множество решений и еще больше опубликованных работ. Исследования ведутся по двум взаимосвязанным направлениям. Первое — теоретические вопросы вращения несферичных спутников, разработка методов изучения вращательной динамики, выработка критериев оценки свойств вращения. Второе направление заключается в проведении и интерпретации наблюдений. Вращение изучается на основе наземных фотометрических измерений блеска спутников, а также с использованием изображений, полученных с помощью космических аппаратов, пролетающих вблизи других планет.

Вращение происходит под действием момента сил со стороны планеты на несферичное тело спутника в условиях его неравномерного движения по эллиптической орбите. При сравнении моделей с наблюдениями в отдельных случаях учитывается также притяжение других спутников.

Вращение разных спутников планет имеет различный характер. Одним из режимов вращения является синхронный резонанс, когда средняя угловая скорость вращения точно равна средней угловой скорости орбитального движения спутника вокруг планеты. В простейшем варианте ось вращения ортогональна плоскости орбиты и совпадает с осью максимального главного центрального момента инерции спутника. В таком случае ось максимальной вытянутости тела спутника всегда находится вблизи направления от спутника к

планете. Тогда фактически спутник всегда обращен к планете одной и той же своей стороной.

В процессе долговременной эволюции вращательного движения большинство крупных спутников, по форме близких к сферическим, вошли в такой финальный режим.

При синхронном резонансе ось вытянутости тела вынужденно отклоняется от направления на планету из-за неравномерного движения спутника по эллиптической орбите. Таким образом, даже при равномерном вращении спутника в невращающейся системе координат тело спутника покачивается относительно направления на планету, поскольку вектор этого направления вращается не равномерно.

В реальных случаях ось вращения может незначительно отклоняться от перпендикуляра к плоскости орбиты, а угол вращения спутника, отсчитываемый в невращающейся системе координат, может отклоняться от угла равномерного вращения. Изменения этих отклонений во времени имеют весьма замысловатые свойства, они описываются решением довольно сложных уравнений. Эти два указанных отклонения определяют явление, которое называют физической либрацией спутников.

При регулярном вращении спутника углы вращения описываются периодическими функциями. В этом режиме при одном значении угла угловая скорость может иметь одно из нескольких фиксированных возможных значений. В других случаях вращение спутника может иметь хаотический характер, когда при одном значении угла скорость его изменения может принимать случайные значения в некотором диапазоне.

У малых спутников, имеющих сильно выраженную несферичность формы, вращение может представлять собой трехмерное кувыркание.

Из более чем 170 открытых к настоящему времени спутников состояние вращения из наблюдений определено у 33. Почти все они находятся в синхронном резонансе.

Вращению спутников планет посвящено огромное множество работ. Нет возможности написать обзор, дающий полное представление о знаниях в этой научной области. Здесь мы рассмотрим только некоторые работы по хаотическому вращению. В таком обзоре будут упомянуты лишь характерные проблемы и отдельные попытки их решения. Внимание будет уделено в основном спутникам, для

которых доказана хаотичность их вращения или они заподозрены в возможности такого хаоса.

В первых отчетах Рабочей группы IAU WG CCRE приводятся параметры вращения спутника Сатурна Гипериона, основанные на орбитальных данных. Однако в теоретической работе (Wisdom, Peale, Mignard, 1984) был представлен анализ, в результате которого обнаруживается большая зона возможных состояний хаотического вращения вокруг резонансного спин-орбитального состояния Гипериона. Хаотическое вращение вызвано сильной несферичностью спутника и существенной эллиптичностью его орбиты.

Еще ранее в работе (Goguen et al., 1983) из анализа кривых блеска этого спутника, полученных из фотометрических наблюдений 1983 года, было установлено его хаотичное вращение. Это выразилось в нестабильности периода и амплитуды блеска на восьми оборотах спутника.

Ориентация и скорость вращения Гипериона изменяются со временем хаотически. Причина хаоса заключается в «перекрытии» спин-орбитальных резонансов, возникающем из-за сильной несферичности фигуры Гипериона и существенного отличия его орбиты от круговой. О феномене и критерии перекрытия резонансов можно узнать из работ (Chirikov, 1979; Wisdom, Peale, Mignard, 1984)

В 1989 году были опубликованы наблюдательные данные (Klavetter, 1989) на интервале времени 64 суток. Амплитуда колебаний блеска Гипериона составила 0.6 звездной величины. Не было обнаружено никаких периодических модуляций колебаний, и сделан вывод о хаотичности вращения.

По этим причинам с 1986 года Гиперион был исключен из таблиц отчетов Рабочей группы IAU WG CCRE.

Численное интегрирование дифференциальных уравнений вращения Гипериона было выполнено в работе (Black et al., 1995) для обширного ряда начальных условий. Сделан вывод, что переходы Гипериона от хаотической «акробатики» к квази-регулярному вращению и обратно за короткий период времени является скорее правилом, чем исключением.

Фотометрические наблюдения Гипериона были выполнены в Главной астрономической обсерватории Российской Академии наук (Пулково) с сентября 1999 года по март 2000 года и в сентябре-октябре 2000 года (Девяткин и др., 2002). Проведен анализ кривой блеска спутника и сделаны выводы о характере его вращательной

динамики. В период, охватывающий наблюдения, Гиперион находился в хаотическом режиме вращения. Попытки найти скрытые периодичности показали, что периодические составляющие в кривой блеска отсутствуют.

Наблюдения Гипериона с помощью космического аппарата *Cassini* дали новую информацию о вращении спутника. В 2005 году аппарат три раза проходил вблизи спутника, который наблюдался на интервалах времени 40 и 67 дней. Во всех трех проходах спутник вращался с частотой в 4.2 и 4.5 раза большей, чем при вращении, синхронном орбитальному движению (Harbison, Thomas, Nicholson, 2011). При этом ось вращения перемещалась как в теле спутника, так и пространстве. но располагалась примерно (в пределах 30 градусов) одинаково в теле спутника во всех трех случаях вдоль оси максимальной вытянутости. Это противоречит результатам моделирования динамики, выполненного в этой же работе. Это означает, что вначале были неправильно подобраны значения моментов инерции Гипериона. В работе (Harbison, Thomas, Nicholson, 2011) построены модели вращения спутника на основе моментов инерции, следующих из формы спутника, и на основе их подправленных значений. Решалась также обратная задача — определение моментов инерции из наблюдений вращения и формы Гипериона. Результат зависит от модели распределения масс внутри спутника, которое остается неизвестным. Остается предположить однородность распределения плотности. Найдено несколько вариантов значений моментов инерции, откуда можно заключить, что моменты инерции определяются не уверенно. В работе (Harbison, Thomas, Nicholson, 2011) делается вывод, что для точных определений имеющихся данных недостаточно.

Заметим, что согласно данным, полученным с аппарата *Cassini*, Гиперион имеет среднюю плотность 544 ± 50 килограмм на кубический метр (Thomas et al., 2007). Он имеет много пустот внутри и похож на губку.

Есть ли в Солнечной системе, помимо Гипериона, другие спутники, хаотически кувыркающиеся относительно собственного центра масс? На этот вопрос пока нет ответа (Куприянов, Шевченко, 2006).

Авторы работы (Melnikov, Shevchenko, 2010) исследовали устойчивость возможных синхронных вращений малых спутников планеты, для которых свойства вращения еще не получены из наблюде-

ний. Показано, что большинство спутников с неизвестными состояниями вращения не могут вращаться синхронно с орбитальным движением, поскольку для них не существует устойчивых состояний синхронного вращения. Они вращаются либо быстрее орбитального движения, что менее вероятно, либо испытывают хаотическое вращение.

Теоретические исследования (Koupryanov, Shevchenko, 2005; Melnikov, Shevchenko, 2008) показали, что в состоянии хаотического вращения, возможно, находятся кроме Гипериона также спутники Сатурна Прометей и Пандора. Характер их вращения в настоящее время неизвестен. Очень важен вопрос: существует ли преимущественная ориентация спутника при хаотическом вращении или все его ориентации в этом случае равновероятны? Расчеты свидетельствуют (Melnikov, Shevchenko, 2008), что у Прометея и Пандоры в случае их хаотического вращения присутствует преимущественная ориентация наибольшей оси фигуры спутника в направлении на Сатурн. Это затрудняет извлечение выводов о характере вращения этих спутников из наблюдений, поскольку хаотический режим в определенной степени схож с обычным синхронным вращением.

Согласно численно-экспериментальным и аналитическим оценкам (Shevchenko, Koupryanov, 2002; Koupryanov, Shevchenko, 2005) хаотическое вращение малых спутников планет Солнечной системы должно проявляться на относительно малых промежутках времени, и может быть обнаружено из наблюдений. Однако хаотическое вращение до сих пор наблюдалось только в случае Гипериона.

При построении моделей реального вращения спутников предпринимались попытки исследовать вообще свойства возможных вращательных движений. Сначала изучалось так называемое плоское вращение, когда ось вращения неизменна в пространстве, и вращение описывается изменением во времени всего одного угла. В работах по этой задаче выявлено, что режимы вращения зависят от двух параметров: $\omega_0 = \sqrt{3(B-A)/C}$, где A, B, C суть главные центральные моменты инерции спутника ($A < B < C$) и эксцентриситета орбиты e . Вращение описывается углом θ между осью наименьшего главного центрального момента инерции и планетоцентрическим радиус-вектором спутника. Обнаружены два режима синхронного вращения. Они отличаются областями значений на фазовой плоскости «угол, его скорость изменения». Наличие этих двух разных типов синхронного резонанса впервые отметили Wisdom, Peale,

Mignard (1984), анализируя результаты своих численных экспериментов в исследовании вращательной динамики Гипериона. Точное описание этих типов вращения заключено в работах Мельникова и Шевченко (1998, 2000). Выявлены области значений параметров ω_0 , ϵ , при которых происходит вращение каждого из двух типов. Результаты были применены к спутнику Юпитера Амальтея. Параметры для этого спутника попадают в области обоих типов вращения. В этих же работах исследовалась устойчивость синхронных вращений по отношению к углу наклона оси вращения к плоскости орбиты. Найдено, что для Амальтея один из двух упомянутых типов представляет собой неустойчивое вращение.

В работе (Мельников, Шевченко, 2000) показано, что вероятность устойчивости синхронного резонанса по отношению к наклону оси вращения для спутников Марса Фобоса и Деймоса равна единице.

Анализ возможной динамики всех известных к 2007 году спутников планет выполнен в работе (Мельников, Шевченко, 2007). Особое внимание уделено спутнику Юпитера Амальтея и спутнику Сатурна Прометей, для которых возможны синхронные резонансы трех разных типов.

При исследовании хаотических движений применяется параметр, характеризующий степень хаотичности — это Максимальный Характеристический Показатель Ляпунова (МХПЛ). Этот параметр представляет собой коэффициент при времени в показателе экспоненты, описывающей расходимость решений уравнений движения или вращения, при малых вариациях начальных условий. Считается, что в случае регулярных движений расхождение решений происходит по линейному закону и показатель хаотичности равен нулю. Величина, обратная показателю Ляпунова, показывает время предсказуемости движения.

Вычисление МХПЛ при изучении хаотических движений представляет собой весьма трудоемкую вычислительную задачу. Библиографию по этому вопросу в случае вращательных движений можно найти в работе (Шевченко, 2002). Метод вычисления характеристических показателей Ляпунова для исследования вращательного движения спутников реализован в виде комплекса вычислительных программ в работах (Shevchenko, Kourgiarov, 2002; Kourgiarov, Shevchenko, 2005).

Главный результат работы (Шевченко, 2002) заключается в том,

что предложен и обоснован простой метод оценки МХПЛ движения в хаотическом слое в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса. С помощью этого метода для ряда естественных спутников планет получены оценки МХПЛ хаотического вращения в главном хаотическом слое в окрестности сепаратрисы синхронного резонанса. Значение этого параметра существенно зависит от эксцентриситета орбиты спутника и параметра его динамической асимметрии. Выведенные в работе (Шевченко, 2002) формулы для оценки МХПЛ хаотического вращения несферичного спутника на эллиптической орбите позволяют находить временной масштаб предсказуемости вращательного движения.

Согласно Шевченко (2002) теоретическая оценка времени предсказуемости вращения спутника Сатурна Гиперион составляет примерно 30 суток, что только в полтора раза больше периода обращения спутника по орбите. Эта оценка согласуется с прямыми вычислениями для случая хаотического вращения спутника с параметрами Гипериона в работе (Wisdom, Peale, Mignard, 1984).

Вычисление максимального показателя Ляпунова методом Шевченко (2002) при моделировании кривой блеска далекого спутника Сатурна Фебы показало, что значение МХПЛ равно нулю (Куприянов, Шевченко, 2006). Следовательно вращение Фебы является регулярным.

В работе (Мельников, Шевченко, 2007) на основе значительно большего объема данных о параметрах фигур спутников сделаны выводы о теоретической возможности трех различных типов синхронного резонанса вращения спутника Сатурна Прометей. Показано также, что устойчивость относительно наклона оси вращения для одного из этих типов вращения отсутствует.

Заметим, что большое значение эксцентриситета орбиты спутника Нептуна Нереиды служило основанием для предположения о хаотичности его вращения. Однако наблюдения этого спутника (Grav, Holman, Klavetter, 2003) показали, что вращение оказывается регулярным.

Литература к Главе 9

- Девяткин А. В., Горшанов Д. Л., Грищук А. Н., Мельников А. В., Сидоров М. Ю., Шевченко И. И.* Наблюдения и теоретический анализ кривых блеска естественных спутников планет. *Астрономический вестник*. 2002. Т. 36. № 3. С. 269–281.
- Куприянов В. В., Шевченко И. И.* О форме и вращательной динамике малых спутников планет. *Астрономический вестник*. 2006. Т. 40. № 5. С. 428–436.
- Мельников А. В., Шевченко И. И.* Об устойчивости вращательного движения несферических естественных спутников относительно наклона оси вращения. *Астрономический вестник*. 1998. Т. 32. № 6. С. 548–559.
- Мельников А. В., Шевченко И. И.* Об устойчивости вращения несферических естественных спутников в синхронном резонансе. *Астрономический вестник*. 2000. Т. 34. № 5. С. 478–486.
- Мельников А. В., Шевченко И. И.* Необычные режимы вращения малых спутников планет. *Астрономический вестник*. 2007. Т. 41. № 6. С. 521–530.
- Шевченко И. И.* О максимальных показателях Ляпунова хаотического вращения естественных спутников планет. *Космические исследования*. 2002. Т. 40. № 3. С. 317–326.
- Archinal B. A., Acton C. H., Ahearn M. F., Conrad A., Consolmagno G. J., Duxbury T., Hestroffer D., Hilton J. L., Kirk R. L., Klioner S. A., McCarthy D., Meech K., Oberst J., Ping J., Seidelmann P. K., Tholen D. J., Thomas P. C., Williams I. P.* Report of the IAU Working Group on cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2015. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2018. 130:22.
- Black G. J., Nicholson P. D., Thomas P. C.* Hyperion: Rotational dynamics. *Icarus*. 1995. V. 117. Issue 1. P. 149–161.
- Borderies N., Yoder C. F.* Phobos' gravity field and its influence on its orbit and physical librations. *Astronomy and Astrophysics*. 1990. V. 233. 235–251.
- Chapront-Touze, M.* Phobos' physical libration and complements to the ESAPHO theory for the orbital motion of PHOBOS. *Astronomy and Astrophysics*. 1990. V. 235. P. 447–458.

- Chirikov B. V.* A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems. *Physics Reports*. 1979. V. 52. No. 5. P. 263–379.
- Correia A. C. M., Leleu A., Rambaux N., Robutel P.* Spin-orbit coupling and chaotic rotation for circumbinary bodies. Application to the small satellites of the Pluto-Charon system. *Astronomy and Astrophysics*. 2015. V. 580. P. L14.
- Emelyanov N. V., Samorodov M. Yu.* Analytical theory of motion and new ephemeris of Triton from observations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. V. 454. P. 2205–2215.
- Jacobson R. A.* The orbits of the satellites of Neptune. *Astronomy and Astrophysics*. 1990. V. 231. No. 1. P. 241–250.
- Jacobson R. A.* The orbits of the neptunian satellites and the orientation of the pole of Neptune. *Astronomical Journal*. 2009. V. 137. P. 4322–4329.
- Jacobson R. A.* The Orientations of the Martian Satellites from a Fit to Ephemeris MAR097. Jet Propulsion Laboratory. Interoffice Memorandum 392R-17-004. April 20, 2017.
- Goguen J., Cruikshank D. P., Hammel H., Hartmann W. K.* The Rotational Lightcurve of Hyperion during 1983. *Bulletin of the American Astronomical Society*. 1983. V. 15. P. 854–584.
- Grav T., Holman M.J., Klavetter J.J.* The short rotation period of Nereid. *Astrophysical Journal*. 2003. V. 591. P. L71–L74.
- Harbison R. A., Thomas P. C., Nicholson P. C.* Rotational modeling of Hyperion. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. V. 110. Issue 1. P. 1–16
- Klavetter J. J.* Rotation of Hyperion. I. Observations. *Astronomical Journal*. 1989. V. 97. P. 570–579.
- Kouprianov V. V., Shevchenko I. I.* Rotational dynamics of planetary satellites: A survey of regular and chaotic behavior. *Icarus*. 2005. V. 176. P. 224–234.
- Lainey V., Dehant V., Patzold M.* First numerical ephemerides of the Martian moons. *Astronomy and Astrophysics*. 2007. V. 465. Issue 3. P. 1075–1084.
- LeMaistre S., Rosenblatt P., Rambaux N., Castillo-Rogez J. C., Dehant V., Marty J.-C.* Phobos interior from librations determination

- using Doppler and star tracker measurements. *Planetary and Space Science*. 2013. V. 85. P. 106–122.
- Melnikov A. V., Shevchenko I. I.* On the rotational dynamics of Prometheus and Pandora. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2008. V. 101. P. 31–47.
- Melnikov A. V., Shevchenko I. I.* The rotation states predominant among the planetary satellites. *Icarus*. 2010. V. 209. P. 786–794.
- Noyelles B., Lemaitre A., Vienne A.* Titan's rotation. A 3-dimensional theory. *Astronomy and Astrophysics*. 2008. V. 478. P. 959–970.
- Noyelles B.* Titan's rotational state. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2008. V. 101. P. 13–30.
- Noyelles B.* Theory of the rotation of the Galilean satellites. *Proceedings IAU Symposium No. 269, 2010*. C. Barbieri, S. Chakrabarti, M. Coradini, M. Lazzarin, ed. International Astronomical Union. 2010a. P. 240–244.
- Noyelles B.* Theory of the rotation of Janus and Epimetheus. *Icarus*. 2010b. V. 207. P. 887–902.
- Noyelles B., Karatekin O., Rambaux N.* The rotation of Mimas. *Astronomy and Astrophysics*. 2011. V. 536. A61.
- Noyelles B.* Interpreting the librations of a synchronous satellite – How their phase assesses Mimas' global ocean. *Icarus*. 2017. V. 282. P. 276–289.
- Pesek I.* Theory of rotation of PHOBOS. *Astronomical Institutes of Czechoslovakia, Bulletin*. 1991. V. 42. No. 5. P. 271–282.
- Quillen A.C., Nichols-Fleming F., Chen Y.-Y., Noyelles B.* Obliquity evolution of the minor satellites of Pluto and Charon. *Icarus*. 2017a. V. 293. P. 94–113.
- Quillen A.C., Chen Y.-Y., Noyelles B., Loane S.* Tilting Styx and Nix but not Uranus with a Spin-Precession-Mean-motion resonance. *arXiv e-print (arXiv:1707.03180)*. 2017b.
- Rambaux N., Van Hoolst T., Karatekin O.* Librational response of Europa, Ganymede and Callisto with an ocean for a non-Keplerian orbit. *Astronomy and Astrophysics*. 2011. V. 527. A118.
- Rambaux N., Castillo-Rogez J. C., Le Maistre S., Rosenblatt P.* Rotational motion of Phobos. *Astronomy and Astrophysics*. 2012. V. 548. Id. A14, 11 pp.

- Richard A., Rambaux N.* Complements to the longitudinal librations of an elastic 3-layer Titan on a non-Keplerian orbit. Proceedings IAU Symposium. No. 310, 2014. P. 21–24.
- Robutel P., Rambaux N., Castillo-Rogez J.* Analytical description of physical librations of saturnian coorbital satellites Janus and Epimetheus. *Icarus*. 2010. V. 211. P. 758–769.
- Robutel P., Rambaux N., El Moutamid M.* Influence of the coorbital resonance on the rotation of the Trojan satellites of Saturn. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2012. V. 113. P. 1–22.
- Shevchenko I. I., Kouprianov V. V.* On the chaotic rotation of planetary satellites: The Lyapunov spectra and the maximum Lyapunov exponents. *Astronomy and Astrophysics*. 2002. V. 394. P. 663–674.
- Tajeddine R., Rambaux N., Lainey V., Charnoz S., A. Richard A., Rivoldini A., Noyelles B.* Constraints on Mimas' interior from Cassini ISS libration measurements. *Science*. 2014. V. 346. P. 322–324.
- Thomas P. C., Armstrong J. W., Asmar S. W., Burns J. A., Denk T., Giese B., Helfenstein P., Iess L., Johnson T. V., McEwen A., Nicolaisen L., Porco C. C., Rappaport N. J., Richardson J., Somenzi L., Tortora P., Turtle E. P., Veverka J.* Hyperion's sponge-like appearance. *Nature*. 2007. V. 448. P. 50–50.
- Van Hoolst T., Rambaux N., Karatekin O., Balanda R.-M.* The effect of gravitational and pressure torques on Titan's length-of-day variations. *Icarus*. 2009. V. 200. P. 256–264.
- Weaver H. A.; Buie M. W.; Buratti B. J.; Grundy W. M.; Lauer T. R.; Olkin C. B.; Parker A. H.; Porte, S. B. and 43 coauthors.* The small satellites of Pluto as observed by New Horizons. *Science*. 2016. V. 351. Issue 6279. Id.aae0030.
- Willner K., Oberst J., Hussmann H. et al.* Phobos control point network, rotation, and shape. *Earth and Planetary Science Letters*. 2010. V. 294. Issue 3–4. P. 541–546.
- Wisdom J., Peale S. J., Mignard F.* The chaotic rotation of Hyperion. *Icarus*. 1984. V. 58. P. 137–152.

ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

Резюме

Описание эволюции орбит естественных спутников больших планет служит решению ряда задач, смежных по отношению к задаче моделирования движения на основе наблюдений. Это задачи выяснения происхождения спутников, задачи об эволюции и происхождении всей Солнечной системы в целом. Установление картины эволюции служит объяснению строения существующих систем спутников.

В данной главе рассмотрено несколько основных аспектов эволюции орбит естественных спутников больших планет.

В рассматриваемой теме имеется весьма интересная задача с развитым решением — это изучение эволюции орбит спутников планет при дважды осредненной возмущающей функции в случае Хилла. Здесь рассматриваются возмущения кеплеровской орбиты, обусловленные притяжением Солнца. Основной объект интереса — линия апсид орбиты спутника. Ее поведение во времени, а также, как следствие решения этой задачи, движение линии узлов описываются весьма замысловатыми функциями.

Подробное исследование этой задачи началось с открытия нового первого интеграла уравнений движения спутника. Открытие было сделано почти одновременно в 1961 году российским исследователем М. Л. Лидовым и американским ученым Y. Kozai. С тех пор все, что касается этой задачи, называется эффектами Лидова–Козаи. В данной главе подробно описаны все детали этих эффектов.

Картина эволюция орбит спутников, которая описывается эффектами Лидова–Козаи, была существенно усовершенствована в

работах российского специалиста М. А. Вашковьяка с соавторами. В данной главе подробно описаны результаты этих работ.

Другой важный аспект эволюции орбит спутников больших планет — это установление фактов пересечения орбит спутников на больших интервалах времени. Пересечения орбит чреваты сближениями спутников, что в свою очередь сильно влияет на эволюцию орбит. Такие исследования были выполнены автором настоящей книги с соавторами. В настоящей главе приводятся результаты этих исследований. Главным результатом является создание службы эфемерид орбит далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Этот сервис организован в виде вычислительной программы, запускаемой любым пользователем через Интернет. Программа дает таблицы, описывающие эволюцию орбит спутников на больших интервалах времени и позволяет детектировать пересечения орбит. В главе приводятся примеры вычислений и описываются некоторые интересные обстоятельства сближений орбит далеких спутников.

10.1. Воздействие различных факторов на эволюцию орбит спутников планет

Под эволюцией орбит спутников планет мы понимаем медленные изменения орбитальных элементов, рассматриваемые на больших интервалах времени. Изучение эволюции непосредственно связано с вопросами происхождения и судьбы Солнечной системы. Эта тема не является основной в настоящей книге. Поэтому мы ограничимся только обзором некоторых достижений в этой области. Отметим однако, что для моделирования эволюции орбит спутников планет необходимы достоверные значения параметров, которые могут быть найдены только из наблюдений. Поэтому роль наблюдений в задачах исследования эволюции орбит оказывается определяющей.

Описание эволюции движения реальных спутников планет Солнечной системы выполняется путем построения моделей эволюционирующих кеплеровских орбит спутников. Говоря о свойствах эволюции, мы подразумеваем поведение на больших интервалах времени тех моделей движения, которые мы строим на основе наблюдений. Специфика данной задачи такова, что небольшие периодические отклонения реального движения от модельного здесь менее

интересны. Основное внимание уделяется адекватности поведения осредненных значений параметров орбит реальному движению на больших интервалах времени. Гипотетически мы распространяем поведение моделей на бесконечное время, однако сознаем, что никакое решение дифференциальных уравнений движения не является точным на бесконечном интервале времени. Все выводы об эволюции орбит остаются приближенными и ограниченными во времени.

Рассмотрим, почему же вообще орбиты эволюционируют. Спутники под действием притяжения планеты обращаются вокруг нее по почти кеплеровским орбитам. На их движение оказывают влияние и другие факторы. Основные из них — это несферичность планеты, притяжение Солнца и взаимное притяжение спутников. В большинстве случаев для конкретного спутника одно из перечисленных воздействий превалирует, и можно моделировать эволюцию орбиты с учетом только одного, наиболее существенного фактора. Однако совместный учет нескольких факторов может значительно изменить эволюцию орбиты.

Рассмотрим поочередно влияние каждого фактора на эволюцию орбит естественных спутников больших планет и характерные для разных спутников процессы эволюции орбит.

10.2. Эволюция орбит спутников, подверженных преимущественному влиянию сжатия планеты

Несферичность планет заключается главным образом в их динамическом сжатии. Влияние этого сжатия описывается второй зональной гармоникой разложения силовой функции притяжения центральной планеты в ряд по сферическим функциям. Для моделирования эволюции орбит спутников обычно берут только этот член разложения.

Отметим, что динамическое сжатие планеты является решающим фактором эволюции орбит только для близких спутников планет. На эволюцию орбит главных спутников планеты ее сжатие оказывает сильное влияние наряду с влиянием взаимного притяжения спутников.

Как эволюционирует орбита, если принимается во внимание только сжатие планеты, рассмотрено выше в Главе 3. Воспроизведем здесь формулы, описывающие такую эволюцию.

Будем использовать принятые в Главе 3 обозначения для элементов кеплеровской орбиты:

- n — среднее движение, размерность радиан/ед.времени;
- e — эксцентриситет, безразмерный;
- i — наклон (двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью Oxy), рад.;
- M_0 — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии M в начальный момент времени — эпоху), рад.;
- ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;
- Ω — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости Oxy между осью x и линией узлов), рад.;
- t_0 — начальный момент времени — эпоха элементов;
- t — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

Наряду со средним движением n в качестве параметра орбиты будем рассматривать также большую полуось орбиты a , связанную с n третьим законом Кеплера

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},$$

где μ — гравитационный параметр планеты.

Рассматривая сжатие планеты как доминирующий фактор эволюции орбиты, располагаем основную координатную плоскость перпендикулярно оси динамической симметрии планеты.

При изучении эволюции орбит спутников планет выполняют операцию осреднения возмущающей функции по быстро изменяющимся аргументам. В данном случае таким аргументом является средняя аномалия M . В теории возмущений применяется разложение возмущающей функции по малым параметрам. В результате выражение для нее принимает вид разложения по кратным средней аномалии M , аргумента перицентра ω и долготы восходящего узла Ω . Операция осреднения по M фактически состоит в отбрасывании короткопериодических членов, содержащих M под знаком тригонометрических функций.

Динамическая структура больших планет такова, что в ее несферичности превалирует сжатие, и приближенно планету можно счи-

тать осесимметричным телом. Тогда мы берем в разложении возмущающей функции R только вторую зональную гармонику с коэффициентом J_2 и, после осреднения по M , имеем

$$R = -\mu \frac{r_0^2}{a^3} J_2 \sum_{p=0}^2 F_{20p}(i) X_0^{-3,2-2p}(e) \cos[(2-2p)\omega],$$

где $F_{20p}(i)$ и $X_0^{-3,2-2p}(e)$ — функции наклона и функции эксцентриситета, а r_0 — средний экваториальный радиус планеты. Природа оказалась так устроенной, что функции эксцентриситета $X_0^{3,-2}(e)$ и $X_0^{3,2}(e)$ равны нулю. Поэтому осредненная возмущающая функция, обусловленная второй зональной гармоникой, принимает вид

$$R = -\mu \frac{r_0^2}{a^3} J_2 F_{201}(i) X_0^{-3,0}(e).$$

Подставляя сюда явные выражения для функции наклона и функции эксцентриситета из Приложения 3, получим

$$R = -\mu \frac{r_0^2}{a^3} J_2 (1 - e^2)^{-3/2} \left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, в возмущающей функции остался только вековой член. Для определения возмущений его нужно подставить в уравнения Лагранжа относительно элементов орбиты спутника.

Поскольку вековой член не зависит от элементов M , ω , Ω , то правые части уравнения Лагранжа для элементов a , e , i окажутся равными нулю, а сами эти элементы не будут содержать вековых возмущений. При этом не нужно забывать про постоянную величину, которую нужно добавить к большой полуоси, как это объяснено в разделе 3.10 Главы 3.

При определении вековых возмущений полагаем

$$M = M_0 + (n + n_1)(t - t_0), \quad \omega = \omega_0 + n_2(t - t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + n_3(t - t_0) .$$

Если в теории возмущений определяются только возмущения первого порядка, то коэффициенты n_1 , n_2 , n_3 найдутся как значения правых частей уравнений Лагранжа относительно элементов M , ω , Ω , соответственно, после подстановки в них постоянных значений a , e , i .

В случае возмущений, обусловленных второй зональной гармоникой, выражения для n_1 , n_2 , n_3 имеют следующий вид:

$$n_1 = n \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{2 - 3 \sin^2 i}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad (10.1)$$

$$n_2 = n \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{4 - 5 \sin^2 i}{(1 - e^2)^2}, \quad (10.2)$$

$$n_3 = -n \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2}. \quad (10.3)$$

Напомним, что элементы i , ω , Ω мы отсчитываем относительно экватора планеты, который перпендикулярен оси ее динамической симметрии, а также относительно направления основной оси Ox и линии узлов.

Существенным свойством вековых изменений трех элементов орбиты является малость коэффициентов n_1 , n_2 , n_3 по сравнению со средним движением n .

Из приведенных выше формул видно, как эволюционирует орбита под действием только указанного здесь возмущающего фактора. Если пренебречь небольшими отклонениями от некоторой опорной кеплеровской орбиты, то получается, что плоскость орбиты спутника медленно прецессирует с почти постоянным наклоном к оси симметрии планеты, линия апсид также медленно прецессирует, а сам спутник движется по этой орбите с частотой обращения вокруг планеты, слегка измененной по сравнению с кеплеровским средним движением. Свойства прецессий таковы, что узел орбиты движется всегда в сторону, противоположную движению спутника, а линия апсид в зависимости от наклона может поворачиваться как в одну, так и в другую сторону, оставаясь неподвижной в плоскости оскулирующей орбиты при ее наклоне, близком к 63 градусам.

Несферичность планеты не ограничивается ее сжатием. Другие члены разложения силовой функции притяжения планеты также могут влиять на эволюцию орбиты. На этом этапе изучения важным фактом в теории возмущений оказывается то, что с какой бы точностью мы ни вычисляли возмущения от несферичности планеты, мы не получим ни вековых ни даже смешанных возмущений в элементах a , e , i . Доказательство можно сделать методом математической индукции. Вместо этого мы здесь просто сошлемся на уже цитированную выше работу (Аксенов, 1966).

Случай малых эксцентриситетов.

Описанные здесь свойства эволюции орбит спутников сжатой планеты остаются справедливыми только при значительных эксцентриситетах. Если эксцентриситет мал и имеет величину порядка $J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2$, то свойства эволюции орбиты качественно меняются. При уменьшении эксцентриситета короткопериодические возмущения в аргументе перицентра ω приобретают все большую амплитуду, и в итоге его изменение становится монотонным со скоростью обращения спутника вокруг планеты. В то же время короткопериодические возмущения средней аномалии M превращают ее изменение из монотонного в либрационное относительно значения $M = 0$. Этот случай движения спутника сжатой планеты впервые был подробно изучен в работе (Емельянов, 2015). Он рассмотрен также в специальном разделе Главы 3.

10.3. Эволюция орбит спутников планет под действием притяжения Солнца

10.3.1. Осреднение возмущающей функции

Учет влияния притяжения Солнца на движение спутников планеты в аналитической теории весьма затруднен, особенно если этот фактор является доминирующим. Затруднение связано с тем, что коэффициенты вековых возмущений элементов M , ω , Ω имеют тот же порядок малости, что и долгопериодические члены разложения возмущающей функции. Метод малого параметра в обычной теории возмущений перестает работать. К тому же, пока не удалось доказать отсутствие вековых и смешанных возмущений высоких порядков, как это было сделано в случае возмущений от сжатия планеты. Однако приближенную модель эволюции орбит удастся исследовать. Выявлены некоторые свойства эволюции даже без получения точных решений уравнений движения.

Разумеется, при изучении эволюции орбит под действием притяжения Солнца движение спутника планеты рассматривается в рамках ограниченной задачи трех тел. Начало координат располагают в центре планеты. Предполагается, что Солнце движется вокруг планеты по заданной невозмущенной кеплеровской орбите. Уравнения движения спутника в прямоугольных координатах можно видеть в Главе 3.

Обычный путь при решении таких задач — это методы теории возмущений. Общий ход решения методами теории возмущений описан в Главе 3. Силовую функцию U в уравнениях движения разбивают на два слагаемых $U = V + W$, где V есть силовая функция задачи Кеплера. Функцию W называют возмущающей.

Согласно теории возмущений переходят от уравнений движения в прямоугольных координатах к уравнениям Лагранжа относительно элементов оскулирующей кеплеровской орбиты. Уравнения содержат все ту же возмущающую функцию W , однако ее нужно выразить через искомые элементы оскулирующей орбиты. Это можно сделать только путем разложения возмущающей функции в ряды по степеням различных малых параметров. Общее разложение возмущающей функции, обусловленной притяжением внешнего тела, рассмотрено выше в Главе 3. Для упрощения понимания теории эволюции орбиты спутника воспроизведем здесь это разложение снова с использованием принятых обозначений для кеплеровских элементов $a, e, i, M, \omega, \Omega$, а также других, связанных с ними величин $n, \lambda = M + \omega + \Omega, \varpi = \omega + \Omega$. Такие же величины, но относящиеся к возмущающему телу, мы обозначили теми же буквами, но со штрихом. Гравитационный параметр возмущающего тела (произведение универсальной гравитационной постоянной на его массу) обозначен через μ' . Рассматриваемое разложение имеет вид (Брумберг, 1967):

$$W = \frac{\mu'}{a} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=0}^k \sum_{p=0}^k \sum_{p'=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{q'=-\infty}^{\infty} (2 - \delta_{m,0}) \left(\frac{a}{a'}\right)^{k+1} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \times$$

$$\times F_{kmp}(i) F_{kmp'}(i') X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e) X_{k-2p'+q'}^{k,k-2p'}(e') \times \quad (10.4)$$

$$\times \cos[(k-2p+q)M - (k-2p'+q')M' + (k-2p)\omega - (k-2p')\omega' + m(\Omega - \Omega')].$$

Здесь аргумент под знаком косинуса может быть выражен через средние долготы и долготы перицентров следующим образом:

$$(k-2p+q)M - (k-2p'+q')M' + (k-2p)\omega - (k-2p')\omega' + m(\Omega - \Omega') =$$

$$= (k-2p+q)\lambda - (k-2p'+q')\lambda' - q\varpi + q'\varpi' + (m-k+2p)\Omega - (m-k+2p')\Omega'.$$

В разложение входят функции наклона $F_{kmp}(i)$ и функции эксцентриситета $X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e)$. Для построения модели эволюции орбит спутников воспользуемся следующими свойствами этих функций.

1. При малых наклонах орбит справедливо такое свойство функций наклона (Брумберг, 1967), что

$$F_{kmp}(i) = O \left(\left(\sin \frac{i}{2} \right)^{|k-2p-m|}, \left(\cos \frac{i}{2} \right)^{|k-2p-m|} \right).$$

Отсюда следует, что если выбрать основную плоскость, совпадающей с плоскостью орбиты внешнего тела, то получится $i' = 0$, а в разложении возмущающей функции останутся только те члены, для которых $|k - 2p' - m| = 0$.

2. При нулевом эксцентриситете отличны от нуля только те функции эксцентриситета $X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e)$, для которых $q = 0$. Поэтому при круговой орбите внешнего тела остаются только члены с $q' = 0$.

3. При $k - 2p + q = 0$ функции $X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e)$ выражаются в конечном виде без использования разложений в ряды по степеням эксцентриситета.

Поскольку нас интересует здесь только эволюция орбиты спутника, то короткопериодическими изменениями элементов орбиты можно пренебречь. Поэтому для упрощения задачи отбросим все слагаемые, содержащие средние долготы спутника и Солнца — это самые короткопериодические (быстроосциллирующие) члены из всех содержащихся в разложении. В литературе данная операция называется еще осреднением по средним долготам. Получается так называемое «дважды осредненное значение возмущающей функции». Осреднение по средним долготам λ, λ' заставляет нас положить $k - 2p + q = 0, k - 2p' + q' = 0$.

Наряду с указанным осреднением возмущающей функции, упростим задачу рассмотрением движения спутника планеты в рамках круговой ограниченной задачи трех тел. Это означает, что движение Солнца предполагается происходящим по круговой орбите в неизменной плоскости. Поскольку мы рассматриваем эволюцию орбиты спутника только под влиянием притяжения Солнца, то ничто не мешает нам выбрать основную координатную плоскость, совпадающей с плоскостью орбиты Солнца. Из этих упрощений следует, что $i' = 0, e' = 0$. Тогда из указанных выше свойств функций наклона и функций эксцентриситета следует в свою очередь, что в разложении возмущающей функции останутся только те члены, для которых $|k - 2p' - m| = 0, q' = 0$.

Сочетая все указанные ограничения на индексы суммирования, приведем разложение возмущающей функции к следующему виду:

$$W(a, e, i, \omega) = \frac{\mu'}{a} \sum_{k=2}^{\infty'} \sum_{p=0}^k \left(\frac{a}{a'}\right)^{k+1} \times \\ \times F_{k0p}(i) F_{k,0,k/2}(0) X_0^{k,k-2p}(e) X_0^{k,0}(0) \cos[(k-2p)\omega], \quad (10.5)$$

где штрих у знака суммы означает, что суммирование производится только по четным значениям индекса k .

Полученное таким образом выражение для возмущающей функции обладает следующими свойствами:

- 1) оно зависит только от элементов a, e, i, ω ,
- 2) выражается в конечном виде относительно e, i, ω ,
- 3) остается разложенным в ряд по четным степеням отношения больших полуосей орбит спутника и Солнца a/a' .

Рассмотрим теперь, какой вид примут уравнения Лагранжа, которым должны удовлетворять как функции времени элементы a, e, i, ω , описывающие эволюцию орбиты спутника. Учитывая первое свойство возмущающей функции, получим

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial W}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial W}{\partial \omega}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial W}{\partial i}, \quad (10.6) \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial W}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial W}{\partial i}.$$

Тот факт, что теперь возмущающая функция зависит только от a, e, i, ω , позволяет вывести три первых интеграла уравнений Лагранжа (10.6).

Один из них следует из первого уравнения:

$$a = \text{const.}$$

Чтобы вывести второй интеграл сделаем следующие операции: второе уравнение умножим почленно на

$$-\frac{e \cos i}{\sqrt{1-e^2}},$$

третье — на $-\sqrt{1-e^2} \sin i$ и сложим результаты почленно. Получим

$$-\frac{e \cos i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt} - \sqrt{1-e^2} \sin i \frac{di}{dt} = 0.$$

Левая часть этого равенства представляется как полная производная по времени от произведения двух функции, раздельно зависящих от e и i , и мы имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\sqrt{1-e^2} \cos i \right) = 0,$$

откуда, интегрируя по времени, получим

$$\sqrt{1-e^2} \cos i = c'_1, \quad (10.7)$$

где c'_1 — независимая произвольная постоянная интегрирования. Физический смысл интеграла (10.7) состоит в постоянстве проекции вектора количества движения спутника (нормированной на \sqrt{a}) на нормаль к плоскости орбиты Солнца. Это является следствием осевой симметрии двукратно осредненной задачи (т.е. следствием независимости функции W от Ω).

Третий интеграл получается путем определения полной производной от возмущающей функции W по времени в силу дифференциальных уравнений Лагранжа (10.6). Поскольку W зависит от времени только посредством своих аргументов a, e, i, ω , то имеем

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial W}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial W}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt}.$$

Подставляя теперь входящие сюда выражения для производных от элементов по времени согласно уравнениям Лагранжа и суммируя, получим

$$\frac{dW}{dt} = 0,$$

откуда, интегрируя по времени, имеем еще один первый интеграл уравнений Лагранжа

$$W(a, e, i, \omega) = c_w, \quad (10.8)$$

где c_w — есть еще одна независимая произвольная постоянная, а W определена формулой (10.5). Соотношение (10.6) является двукратно осредненным видоизменением известного интеграла Якоби круговой ограниченной задачи трех тел.

Отметим, что вывод этих трех первых интегралов в данной задаче впервые выполнен в работе (Моисеев, 1945), а само двукратное осреднение получило название схемы Гаусса.

Из интеграла (10.7) можно выразить наклон i как функцию от эксцентриситета e и c'_1 . Подставляя это выражения для наклона в аргумент функции W , получим соотношение

$$\Phi(e, \omega, a, c'_1, c_w) = 0,$$

задающее при фиксированных постоянных a, c'_1, c_w эксцентриситет e как неявную функцию от ω , либо ω как функцию от e . Определяя постоянные a, c'_1, c_w из начальных условий, получим свойства изменения элементов орбиты конкретного спутника под действием притяжения Солнца, однако без привязки ко времени. Поиск зависимости элементов орбиты от времени приводит к квадратурам, обращение которых в известных элементарных или специальных функциях для произвольных значений отношения a/a' до сих пор не выполнено.

10.3.2. Частный случай — задача Хилла

В условиях такой пока нерешенной задачи естественны попытки что-нибудь упростить, заменяя более точные уравнения менее точными. Один из таких путей очевидно обуславливается тем фактом, что для всех спутников планет большие полуоси орбит значительно меньше расстояния планеты от Солнца. Делая обзор орбит спутников, находим, что самая большая величина отношения $a/a' = 0.036$ оказывается для далекого спутника Юпитера S/2003 J2. Для всех других, открытых к настоящему времени спутников, это отношение значительно меньше.

Далее мы ограничиваем разложение возмущающей функции по степеням отношения больших полуосей так, что оставляем только главный член, который содержит третью степень этого отношения. Такой вариант возмущающей функции называют случаем Хилла. Поскольку в разложении возмущающей функции (10.5) суммирование ведется только по четным значениям индекса k , то следующий член разложения после главного содержит пятую степень отношения больших полуосей орбит. Таким образом, мы пренебрегаем малой величиной $(a/a')^2$ по сравнению с единицей. Для спутни-

ка Юпитера S/2003 J2 величина $(a/a')^2 = 0.0013$. В итоге, возмущающая функция в случае Хилла имеет вид

$$W_2 = \frac{\mu'}{a} \left(\frac{a}{a'} \right)^3 F_{2,0,1}(0) X_0^{2,0}(0) \sum_{p=0}^2 F_{20p}(i) X_0^{2,2-2p}(e) \cos[(2-2p)\omega]. \quad (10.9)$$

Подставляя сюда явные выражения для функций наклона и функций эксцентриситета, которые можно взять из Приложения 3, получим

$$W_2 = \frac{\mu'}{a} \left(\frac{a}{a'} \right)^3 \frac{3}{16} \left[2e^2 - \sin^2 i (2 + 3e^2) + 5e^2 \sin^2 i \cos 2\omega + \frac{4}{3} \right]. \quad (10.10)$$

Постоянное слагаемое $4/3$ в квадратных скобках правой части соотношения (10.10) можно отбросить, поскольку возмущающая функция входит в уравнения только под знаком частных производных по e , i , ω , и это слагаемое при дифференцировании дает нуль.

Перечислим те допущения и предположения, которые были сделаны при выводе возмущающей функции (10.10):

- функция осреднена по средним долготам спутника и Солнца,
- пренебрегаем отношением $(a/a')^2$ по сравнению с единицей,
- плоскость планетоцентрической круговой орбиты Солнца считаем основной.

При сделанных допущениях остается справедливым первый интеграл уравнений Лагранжа

$$W_2 = c'_2,$$

где c'_2 — независимая произвольная постоянная интегрирования.

10.3.3. Анализ семейств возможных изменений эксцентриситета e и аргумента перицентра ω при дважды осредненной возмущающей функции в случае Хилла

Интегралы

$$a = const, \quad \sqrt{1 - e^2} \cos i = c'_1, \quad W_2 = c'_2$$

впервые и почти одновременно были подвергнуты детальному анализу в работах (Лидов, 1961; Лидов 1962; Kozai, 1962) для описания эволюции орбит, элементы которых удовлетворяют уравнениям Лагранжа (10.6). При этом в работах (Лидов, 1961; Лидов 1962)

изучалась эволюция орбит искусственных спутников Земли, а в работе (Kozai, 1962) интегралы рассматривались по отношению к уравнениям, описывающим эволюцию орбиты астероида под возмущающим влиянием Юпитера с учетом в функции (10.5) слагаемых с $k = 2, 4, 6, 8$.

В работе (Лидов, 1961) комбинацией второго и третьего интегралов, было получено соотношение:

$$e^2 \left(\frac{2}{5} - \sin^2 i \sin^2 \omega \right) = c_2, \quad (10.11)$$

где c_2 — независимая произвольная постоянная, а интеграл (10.7) был записан в виде

$$(1 - e^2)(1 - \sin^2 i) = c_1, \quad (10.12)$$

где c_1 — независимая произвольная постоянная.

Первые интегралы уравнений Лагранжа (10.11), (10.12) позволяют выразить две переменных из трех e, i, ω через одну. Подставляя их выражения в уравнения, получим дифференциальное уравнение для одной из переменных ε вида

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathcal{E}(\varepsilon),$$

где $\mathcal{E}(\varepsilon)$ — известная функция своего аргумента. Это уравнение приводится к квадратурам, а обращение квадратуры, т.е. выражение функции $\varepsilon(t)$, может быть сделано в эллиптических функциях. Кем и как это было сделано, рассмотрим ниже.

Совместно рассматриваемые соотношения (10.11), (10.12) и интеграл

$$a = const$$

позволили вывести ряд интересных свойств эволюции орбит даже без решения уравнений Лагранжа. Это было сделано впервые в обстоятельной работе (Лидов, 1961), посвященной исследованию эволюции орбит ИСЗ под действием лунно-солнечных возмущений. Воспроизведем здесь основные и наиболее интересные результаты этой работы. Воспользуемся также интерпретациями из книги (Shevchenko, 2017).

Прежде всего определим допустимые значения постоянных c_1, c_2 . Очевидно, что $0 \leq \sin^2 i \sin^2 \omega \leq 1$, откуда следует, что $-3/5 \leq$

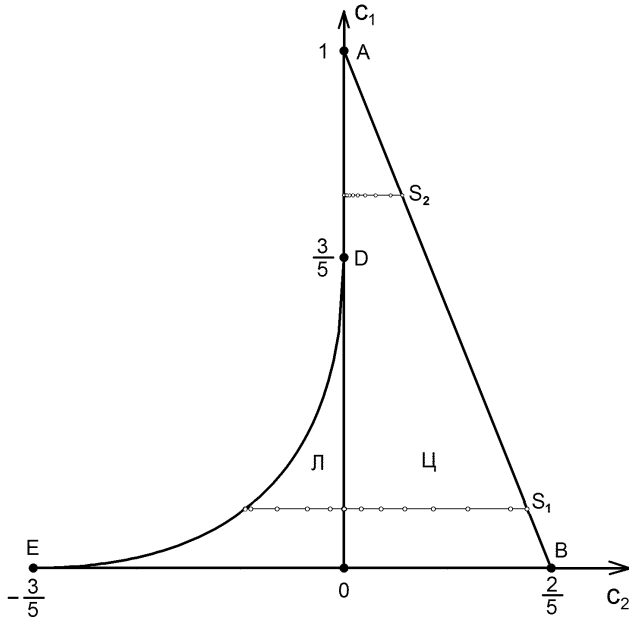


Рис. 10.1. Области возможных значений постоянных c_1, c_2 . Область Л содержит значения постоянных, соответствующие либрационным изменениям элементов орбиты e, ω , область Ц соответствует циркуляционному изменению ω . Семейства точек S_1, S_2 соответствуют семействам орбит, показанным на следующих рисунках.

$c_2 \leq 2/5$. Очевидно также, что $0 \leq c_1 \leq 1$. Однако соотношения (10.11), (10.12) накладывают более узкие ограничения. Области возможных значений c_1, c_2 показаны на рис. 10.1. Эти области ограничены треугольниками OAB и $ED0$. При этом одна из сторон ED задана кривой линией — графиком функции

$$c_1 = \frac{5}{3} \left(\frac{3}{5} - \sqrt{-\frac{3}{5}c_2} \right)^2. \quad (10.13)$$

Анализ показывает, что аргумент перицентра ω может иметь одно из двух свойств изменения во времени: монотонное *циркуляционное изменение* или колебания с ограниченной амплитудой относительно одного из значений 90 или 270 градусов. Такие колебания

называют *либрационным изменением*. Их амплитуда не превышает величины $\arccos \sqrt{2/5}$. Впервые существование либрационных изменений аргумента перицентра в данной задаче было обнаружено и изучено в работах (Лидов, 1961) и (Kozai, 1962). Поэтому такие изменения теперь принято называть резонансом Лидова–Козаи.

Среди возможных изменений аргумента перицентра ω и эксцентриситета e встречаются особые случаи, которые мы рассмотрим ниже. Наиболее интересны случаи, соответствующие граничным линиям областей возможных значений $0 \leq c_1 \leq 1$, $-3/5 \leq c_2 \leq 2/5$.

Вертикальная линия OA графика на рис. 10.1 разделяет область либрационных изменений ω при $c_2 < 0$ и область циркуляционных изменений при $c_2 > 0$. Либрационные орбиты существуют только при $0 \leq c_1 \leq 3/5$. Циркуляционные движения возможны для всего интервала возможных значений $0 \leq c_1 \leq 1$.

Кривая ED соответствует орбитам, у которых e и i постоянные, связанные соотношением $e^2 = 1 - \frac{5}{3} \cos^2 i$. При этом $\omega = \pm 90$ градусов. Эти точки равновесия соответствуют центрам так называемого резонанса Лидова–Козаи. Такие орбиты представляют собой неизменные эллипсы, которые прецессируют вокруг оси, перпендикулярной основной плоскости — плоскости орбиты внешнего тела, с постоянным наклоном к ней.

Отрезок AB соответствует эллиптическим орбитам с постоянным эксцентриситетом. Орбиты лежат в плоскости движения внешнего тела. Наклонение равно нулю или 180 градусов. Линия аписид равномерно вращается с увеличивающейся величиной ω . Для этих орбит выполняется соотношение $2c_1 + 5c_2 = 2$, откуда, используя выражения для интегралов (10.11), (10.12), выводим

$$(5e^2 \sin^2 \omega + 2 - 2e^2) \sin^2 i = 0.$$

Здесь первый множитель равен нулю только в точке B , где одновременно $e = 1$ и $\sin \omega = 0$. Кроме точки B , для всего остального отрезка AB должно быть $\sin i = 0$.

Отрезок BE соответствует орбитам при $c_1 = 0$. Это условие относится либо к полярным орбитам ($\cos i = 0$) либо к прямолинейным ($e = 1$). В случае полярной орбиты при $c_1 = 0$ связь эксцентриситета e и аргумента перицентра ω описывается соотношением

$$e^2 \left(\frac{2}{5} - \sin^2 \omega \right) = c_2. \quad (10.14)$$

В случае прямолинейной орбиты при $c_1 = 0$ связь наклона i и аргумента перицентра ω описывается соотношением

$$\frac{2}{5} - \sin^2 i \sin^2 \omega = c_2. \quad (10.15)$$

Графики этих зависимостей приводятся ниже на рис. 10.4, 10.5.

Отрезок DA ($c_2 = 0$, $3/5 < c_1 < 1$) соответствует круговым орбитам ($e = 0$).

Отрезок $0D$ ($c_2 = 0$, $c_1 < 3/5$) соответствуют так называемым сепаратрисным решениям, разделяющим области либрационных и циркуляционных изменений аргумента перицентра ω . На этих сепаратрисах эксцентриситет асимптотически стремится к нулю, возможно проходя через свое максимальное значение, если начальное значение ω меньше 90 градусов. Для этих орбит сохраняется соотношение $\sin^2 i \sin^2 \omega = 2/5$.

Точки A , B , E определяют следующие возможные изменения. Точка A ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$) соответствует круговой экваториальной орбите ($e = 0$, $\sin i = 0$). Точка B ($c_1 = 0$, $c_2 = 2/5$) соответствует прямолинейной орбите ($e = 1$) с произвольным наклоном и $\sin \omega = 0$. Точка E ($c_1 = 0$, $c_2 = -3/5$) соответствует полярным орбитам ($\cos i = 0$) с произвольным эксцентриситетом и значением ω , удовлетворяющим соотношению $e^2(5 \sin^2 \omega - 2) = 3$, причем в случае $e = 1$ имеем прямолинейную орбиту с $\sin \omega = \pm 1$.

Точка D ($c_1 = 3/5$, $c_2 = 0$) соответствует круговым орбитам ($e = 0$) с критическим наклоном, определяемым соотношением $\cos^2 i = 3/5$. Такое значение наклона i называется критическим из-за того, что точка D является *точкой бифуркации*, так что при уменьшении c_1 от значения $3/5$ при $c_2 < 0$ возникают орбиты с либрационным изменением ω .

Точка 0 ($c_1 = 0$, $c_2 = 0$) соответствует орбитам следующих трех типов:

- 1) круговые полярные орбиты ($e = 0$, $\cos i = 0$) с произвольным ω ,
- 2) эллиптические полярные орбиты ($\cos i = 0$) с произвольным e и с постоянным значением ω ($\sin^2 \omega = 2/5$),
- 3) прямолинейные ($e = 1$) с произвольным наклоном орбиты при условии $\sin^2 i \sin^2 \omega = 2/5$.

Кроме особенностей эволюции орбит на границах областей возможных значений постоянных c_1 и c_2 , имеются другие особые случаи эволюции орбит. Орбиты с наклоном, большим критическо-

го ($\cos^2 i = 3/5$), могут испытывать большие вариации эксцентриситета, особенно большие, если орбита близка к сепаратрисе. Причиной является то, что как раз при наклонах, больших критического, присутствует резонанс Лидова – Козаи. В случае, когда наклон равен 90 градусов, эксцентриситет всегда стремится к единице, каково бы ни было его начальное значение. Таким образом, расстояние перицентра стремится к нулю, и такие орбиты существуют лишь конечное время.

Заметим, что все рассмотренные здесь особые и критические случаи свойств изменений элементов орбиты спутника, соответствующие границам возможных значений постоянных c_1 и c_2 , имеют чисто теоретический интерес. Среди существующих реальных спутников и возможных состояний их движения такие ситуации не встречаются.

Соотношения (10.11), (10.12) позволяют построить линии на координатной плоскости (ω, e), описывающие эволюцию орбит. Каждой паре фиксированных значений постоянных c_1 и c_2 соответствует линия на графике. На одном рисунке можно построить семейство кривых для одного значения постоянной c_1 и ряда значений c_2 .

Рассмотрим два примера таких семейств.

На рис. 10.2 показано семейство линий, показывающих изменения ω, e . Линии соответствуют значению $c_1 = 0.114570821$ и ряду c_2 на всем интервале возможных значений. Семейство этих значений постоянных нанесено также на рис. 10.1, где оно обозначено через S_1 . Самая левая точка, лежащая на кривой ED , соответствует орбите с постоянными элементами $e = 0.750346703$, $i = 59.2$ градусов и $c_2 = -0.190195030$. На рис. 10.2 этой орбите соответствует точка – центр резонанса Лидова – Козаи. Вокруг этой точки концентрическими замкнутыми кривыми показаны либрационные изменения элементов ω, e для других орбит семейства. Этим орбитам соответствуют точки семейства S_1 на рис. 10.1, следующие слева направо. Для точки с $c_2 = 0$ на рис. 10.2 пунктирной линией показана сепаратриса двух типов орбит. Сепаратрисе соответствуют значения $e = 0.899471307$, $i = 34.608220202$ градусов. Семейство продолжается орбитами с циркуляционным изменением элементов ω, e . Наконец, для точки на рис. 10.1, лежащей на границе AB , с $c_2 = 0.354171672$ на рис. 10.2 показана горизонтальная линия изменения ω с постоянным значением $e = 0.940972465$. Это орбита, лежащая в плоскости движения внешнего тела, с $i = 0$.

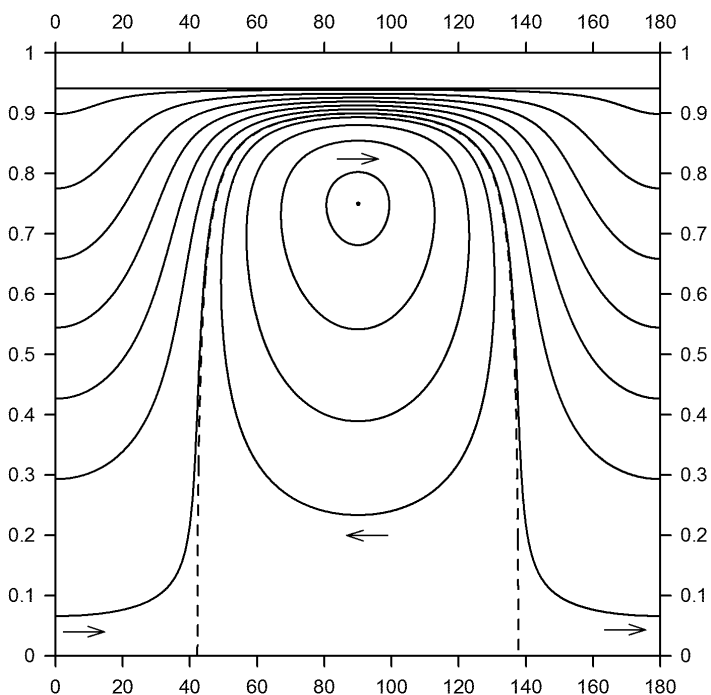


Рис. 10.2. Семейство орбит с $c_1 = 0.114570821$ и рядом значений $-0.190195030 \leq c_2 \leq 0.354171672$. По горизонтальной оси отложены значения ω в градусах, по вертикальной — значения эксцентриситета e . На рис. 10.1 этому семейству соответствуют точки на линии S_1 .

Отметим, что на рис. 10.2 показана лишь половина диапазона изменения угла ω . Вторая половина симметрично повторяет первую относительно значения $\omega = 180$ град.

Другое семейство орбит показано на рис. 10.3. Это исключительно только орбиты с циркуляционным изменением элементов ω , e . Этому семейству соответствует семейство точек S_2 на рис. 10.1 с $c_1 = 0.719185573$. Значению $c_2 = 0$ соответствует круговая орбита с $e = 0$, $i = 32.0$ градуса и линия на рис. 10.3, совпадающая с горизонтальной осью. Далее для точек семейства, следующих на рис. 10.1 слева направо, имеем семейство линий на рис. 10.3, следующих снизу вверх. Завершает семейство точка с $c_2 = 0.112325771$ на линии AB и горизонтальная линия на рис. 10.3 со значением

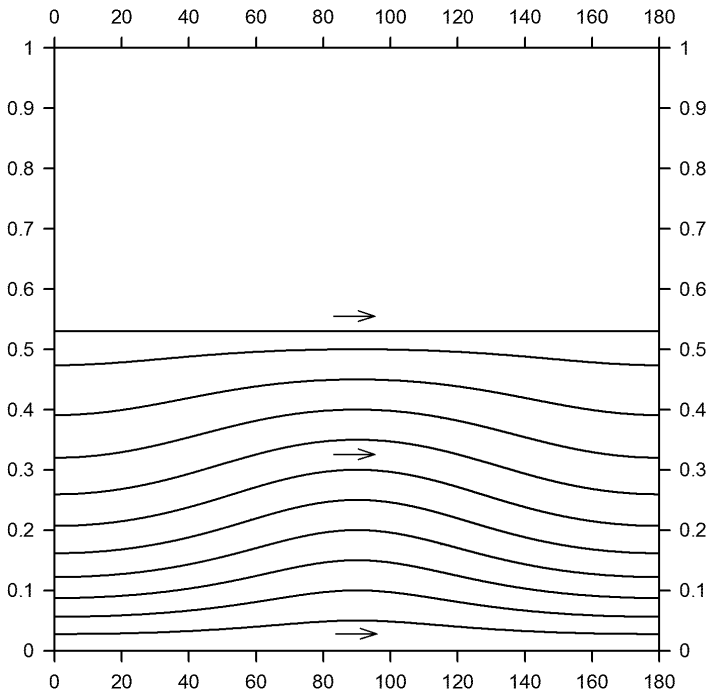


Рис. 10.3. Семейство орбит с $c_1 = 0.719185573$ и рядом значений $-0 \leq c_2 \leq 0.112325771$. По горизонтальной оси отложены значения ω в градусах, по вертикальной — значения эксцентриситета e . На рис. 10.1 этому семейству соответствуют точки на линии S_2 .

$e = 0.529919264$. Горизонтальные прямые на рис. 10.2, 10.3 отвечают граничным значениям эксцентриситета, равным $\sqrt{1 - c_1}$.

На рис. 10.3 показана лишь половина диапазона изменения угла ω . Вторая половина симметрично повторяет первую относительно значения $\omega = 180$ град.

Заметим, что можно подобрать такие начальные условия и соответствующие значения постоянных c_1, c_2 , при которых в процессе эволюции орбиты эксцентриситет e будет изменяться от весьма малых значений до близких к единице.

Особый случай представляют орбиты с начальными условиями, дающими $c_1 = 0$. Это порождает либо полярные орбиты ($\sin i = 1$), либо прямолинейные орбиты ($e = 1$). Связь e с ω в этих особых

случаях дана выше соотношениями (10.14), (10.15). Графики возможных значений e , ω для полярных орбит при разных значениях c_2 в этом случае показаны на рис. 10.4. Для каждого значения c_2 имеем три графика: один в области между сепаратрисами, другие — от значений 0 и 180 градусов в стороны сепаратрис. Как видно на графиках, все такие полярные орбиты в своей эволюции приходят к значению $e = 1$, что приводит к падению спутника на планету за конечное время, независимо от начальных значений e и ω . Это свойство полярных (и околополярных) орбит в литературе носит название «эффект Лидова – Козаи».

Для прямолинейных орбит при $c_1 = 0$ зависимости $\sin i$ от ω показаны на рис. 10.5. Прямолинейные орбиты спутников не имеют практического смысла. Такие спутники, если бы и были, то уже давно упали бы на свои планеты. Мы здесь взяли случай $c_1 = 0$ только для полноты рассмотрения данной теории.

Найденные выше зависимости e от ω не дают представления о том, в каком направлении происходит эволюция орбит. Остается выяснить, на каких участках графиков ω увеличивается, а на каких уменьшается. Для ответа необходимо привлечь последнее из дифференциальных уравнений (10.6). После подстановки в него вместо функции W упрощенного выражения этой возмущающей функции (10.10), получим явный вид уравнения для ω

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{15}{4} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n \left[(e^2 - \sin^2 i) \sin^2 \omega + \frac{2}{5}(1 - e^2) \right], \quad (10.16)$$

где $\mu = n^2 a^3$. Учитывая (10.11), это уравнение можно записать в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{15}{4} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n \left[\frac{c_2}{e^2} + e^2 \left(\sin^2 \omega - \frac{2}{5} \right) \right].$$

Определим теперь величину производной $\frac{d\omega}{dt}$ при $\omega = \pi/2$. Получим

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\omega=\pi/2} = \frac{15}{4} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n \left(\frac{c_2}{e^2} + \frac{3}{5}e^2 \right).$$

Из последнего равенства и из графиков видно, что во всех случаях циркуляционного изменения ω ($c_2 > 0$), включая сепаратрису ($c_2 = 0$), ω увеличивается. При всех $c_2 < 0$, исключая случай (10.13), эксцентриситет e может принимать два значения: минимальное и максимальное, при которых $\frac{d\omega}{dt}$ имеет разные знаки.

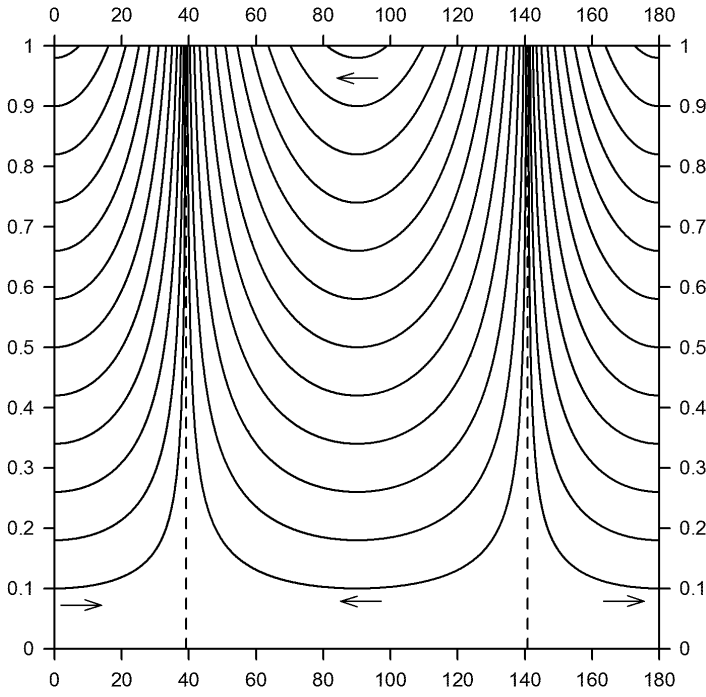


Рис. 10.4. Семейство полярных орбит при $c_1 = 0$ и разных значениях c_2 . По горизонтальной оси отложены значения ω в градусах, по вертикальной — значения эксцентриситета e . Пунктирной линией показаны сепаратрисы двух семейств.

При минимальном значении эксцентриситета ω уменьшается, при максимальном — увеличивается. Все полученные здесь направления изменения ω показаны на рис. 10.2, 10.3.

Для особого случая полярных орбит ($c_1 = 0$) имеем $\sin i = 1$, и уравнение для ω (10.16) принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{15}{4} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n (1 - e^2) \left(\frac{2}{5} - \sin^2 \omega\right).$$

Подставляя сюда последовательно $\omega = 0$ и $\omega = \pi/2$, получаем те направления изменения ω , которые показаны на рис. 10.4.

Аналогично находится направление изменения ω для прямоли-

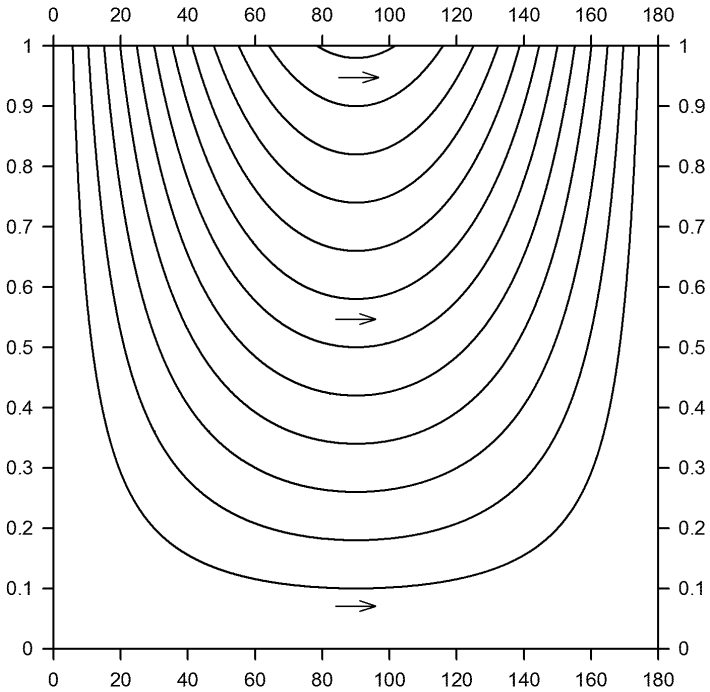


Рис. 10.5. Семейство прямолинейных орбит при $c_1 = 0$ и разных значениях c_2 . По горизонтальной оси отложены значения ω в градусах, по вертикальной — значения $\sin i$.

нейных орбит ($c_1 = 0$). Уравнение для ω в этом случае ($e = 1$) принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{15}{4} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n (1 - \sin^2 i) \sin^2 \omega > 0.$$

Направление изменения ω в этом случае показано на рис. 10.5.

10.3.4. Эволюция орбит во времени при дважды осредненной возмущающей функции в случае Хилла

Рассмотрим теперь, как получить функции, описывающие изменение элементов орбит во времени в условиях данной задачи. Выяснилось, что решение уравнений приводит к квадратурам, обращение которых может быть выполнено только с помощью эллиптические

ских функций. Еще в работе (Kozai, 1962) было продемонстрировано, что решение задачи в приближении Хилла ($k = 2$) может быть выражено через эллиптические функции Вейерштрасса. Для частного случая начальных значений $\omega = 0, \pm\pi/2$ решение для элементов e, i, ω было получено в работе (Гордеева, 1968). Общее решение для всех четырех элементов e, i, ω, Ω было построено в работе (Вашковьяк, 1999) и почти одновременно было опубликовано в работе (Kinoshita, Nakai, 1999).

Воспроизведем здесь результаты работы (Вашковьяк, 1999).

Для получения искоемых функций необходимо решить уравнения Лагранжа относительно элементов e, i, ω, Ω . Сделаем упрощающие преобразования. Подставляя выражение для возмущающей функции (10.10) в уравнения (10.6) и делая замену независимой переменной времени t на безразмерную переменную τ по формуле

$$\tau = \frac{3}{16} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n (t - t_0),$$

где $\mu = n^2 a^3$, выведем уравнения относительно элементов оскулирующей орбиты в следующем виде:

$$\frac{de}{d\tau} = 10e\sqrt{1-e^2} \sin^2 i \sin 2\omega, \quad (10.17)$$

$$\frac{di}{d\tau} = -10e^2 \sqrt{1-e^2} \sin i \cos i \sin 2\omega, \quad (10.18)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} [5 \cos^2 i - 1 + e^2 + 5(\sin^2 i - e^2) \cos 2\omega], \quad (10.19)$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = 2 \frac{\cos i}{\sqrt{1-e^2}} (5e^2 \cos 2\omega - 3e^2 - 2). \quad (10.20)$$

Уравнения (10.17), (10.18), (10.19) имеют два интеграла (10.11), (10.12). Исключая с помощью этих интегралов переменные i, ω из уравнения (10.17) и вводя новую переменную z по формуле

$$z = e^2,$$

получаем квадратуру для определения τ как функцию от z

$$\tau = \frac{\text{sign}(\sin 2\omega_0)}{8\sqrt{6}} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\sqrt{Q(\zeta)}}, \quad (10.21)$$

где

$$Q(z) = (z_1 - z)(z - z_2)(z - z_3) \geq 0,$$

z_0 — начальное значение e^2 при $\tau = 0$ ($t = t_0$),

$$z_1 = \frac{1}{2} \left[1 - c_3 + \sqrt{(1 + c_3)^2 - (20/3)c_1} \right],$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \left[1 - c_3 - \sqrt{(1 + c_3)^2 - (20/3)c_1} \right],$$

$$z_3 = \frac{5}{2}c_2,$$

$$c_3 = \frac{5}{3}(c_1 + c_2).$$

Общее решение уравнений (10.17) – (10.20) будет зависеть от четырех произвольных постоянных $e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0$ — значений соответствующих функций в начальный момент времени t_0 ($\tau = 0$). Три независимые постоянные e_0, i_0, ω_0 мы заменим далее на другие три независимые постоянные z_0, c_1, c_2 , связанные с первыми соотношениями:

$$z_0 = e_0^2, \quad (10.22)$$

$$(1 - e_0^2)(1 - \sin^2 i_0) = c_1, \quad (10.23)$$

и

$$e_0^2 \left(\frac{2}{5} - \sin^2 i_0 \sin^2 \omega_0 \right) = c_2. \quad (10.24)$$

Постоянные z_0, c_1, c_2 будут использоваться далее в решении.

Обращение квадратуры (10.21) выполняется разными путями в зависимости от значения c_2 .

Случай $0 < c_2 < 2/5$.

Это случай циркуляционного изменения ω . Корни полинома $Q(z)$ удовлетворяют неравенствам

$$z_2 < 0 < z_3 \leq z(\tau) \leq z_1,$$

где z_1 и z_3 будут соответственно максимум и минимум величины e^2 . Эксцентриситет определится формулой

$$e(\tau) = \sqrt{z(\tau)} = \sqrt{\frac{z_3 - z_2 k^2 \sin^2 u}{1 - k^2 \sin^2 u}}, \quad (10.25)$$

где

$$\begin{aligned}
 u &= 4\sqrt{6(z_1 - z_2)}\tau + u_0, \\
 k^2 &= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} < 1, \\
 u_0 &= \text{sign}(\sin 2\omega_0)F(\varphi_0, k^2), \\
 \sin^2 \varphi_0 &= \frac{(z_1 - z_2)(z_0 - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_0 - z_2)},
 \end{aligned} \tag{10.26}$$

а $\text{sn } u$ и $F(\varphi, k^2)$ есть соответственно эллиптический синус Якоби и неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем k .

Период колебаний эксцентриситета e дается формулой

$$T_e = \frac{\mathbf{K}(k^2)}{2\sqrt{6(z_1 - z_2)}}, \tag{10.27}$$

где $\mathbf{K}(k^2)$ есть полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k .

Период циркуляции ω в два раза больше периода колебаний эксцентриситета e

$$T_\omega = \frac{\mathbf{K}(k^2)}{\sqrt{6(z_1 - z_2)}}. \tag{10.28}$$

В силу интеграла (10.12) период колебаний наклона i равен периоду колебаний e .

Случай $-3/5 < c_2 < 0$.

Этот случай характеризуется либрационным изменением ω . Здесь

$$z_3 < 0 < z_2 \leq z(\tau) \leq z_1,$$

где z_1 и z_2 — максимум и минимум величины e^2 , соответственно. Эксцентриситет определяется формулой

$$e(\tau) = \sqrt{z(\tau)} = \sqrt{\frac{z_2 - z_3 \kappa^2 \text{sn}^2 u}{1 - \kappa^2 \text{sn}^2 u}}, \tag{10.29}$$

где

$$\begin{aligned}
 u &= 4\sqrt{6(z_1 - z_3)}\tau + u_0, \\
 \kappa^2 &= \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} < 1, \\
 u_0 &= \text{sign}(\sin 2\omega_0)F(\Psi_0, \kappa^2),
 \end{aligned} \tag{10.30}$$

$$\sin^2 \Psi_0 = \frac{(z_1 - z_3)(z_0 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_0 - z_3)}.$$

Здесь модулем эллиптических функций является κ .

Периоды колебаний эксцентриситета e , наклона i и аргумента перицентра ω совпадают и определяются формулой

$$T_e = T_i = T_\omega = \frac{\mathbf{K}(\kappa^2)}{2\sqrt{6}(z_1 - z_3)}. \quad (10.31)$$

Отметим здесь факт, важный для программирования вычислений. Формулы (10.29) – (10.31) получаются из формул (10.25)–(10.27) заменой z_3 на z_2 и z_2 на z_3 .

Особый случай $c_2 = 0$ и $c_1 < 3/5$.

Это пограничный вариант между двумя решениями, рассмотренными выше. Изменение элементов e и ω происходит вдоль сепаратрисы согласно уравнению

$$\frac{2}{5} - \left(1 - \frac{c_1}{1 - e^2}\right) \sin^2 \omega = 0.$$

Максимальное значение эксцентриситета

$$e_{max} = \sqrt{1 - \frac{5}{3}c_1}$$

достигается при углах ω , удовлетворяющих соотношению

$$\sin^2 \omega = 1.$$

Когда эксцентриситет достигает нуля, аргумент перицентра имеет одно из значений, удовлетворяющих соотношению

$$\sin^2 \omega = \frac{2}{5}(1 - c_1).$$

Зависимость элементов e , ω , i от времени для этого особого случая получена в работе (Вашковьяк, Лидов, 1990). Воспроизведем здесь результат. Без нарушения общности постановки задачи и для простоты формул примем, что в начальный момент t_0 элементы имеют значения $e = e_{max}$, $\omega = 90$ градусов и введем параметр:

$$\beta = -\frac{3\sqrt{6}}{4} \frac{\mu'}{na'^3} e_{max} = -\frac{3\sqrt{6}}{4} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 e_{max}.$$

Теперь зависимость эксцентриситета от времени для этого особого случая определится формулой

$$e(t) = \frac{e_{max}}{\text{ch}[\beta(t - t_0)]}.$$

Важно определить, в каком направлении изменяется аргумент перицентра ω в момент t_0 , когда эксцентриситет достигает максимального значения $e = e_{max} = \sqrt{1 - \frac{5}{3}c_1}$. В этот момент $\omega = 90$ градусов. Подставляя эти значения в уравнение (10.19), получим

$$\frac{d\omega}{dt} = 12\sqrt{\frac{3}{5c_1}} \left(1 - \frac{5}{3}c_1\right) > 0.$$

Следовательно ω увеличивается в момент, когда $e = e_{max}$. Тогда, как видно на графике сепаратрисы на рис. 10.2, ω увеличивается во все моменты времени.

Особый случай $c_1 = 0$. В этом случае орбита принадлежит к одному из двух типов: полярные ($\sin i = 1$) либо прямолинейные ($e = 1$). Возможные значения элементов при $c_1 = 0$ и разных значениях c_2 рассмотрены выше на графиках. Движение спутников на всех этих орбитах приводит к падению спутника на планету. Практического интереса такие орбиты не представляют. Поэтому зависимость элементов от времени мы здесь не рассматриваем.

Другие особые случаи.

1. Если $c_2 = 0$ и $c_1 > 3/5$, то эксцентриситет постоянно равен нулю, а аргумент перицентра не определен.
2. Если начальные условия таковы, что между постоянными c_1 и c_2 выполняется соотношение

$$c_2 = -\frac{3}{5} \left(1 - \sqrt{\frac{5}{3}c_1}\right)^2,$$

и при этом $c_1 < 3/5$, то все три элемента e , ω , i остаются постоянными: $\omega = \pm 90$ градусов, $e = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{5}{3}c_1}}$.

3. Случай $c_1 = 1$ соответствует круговой орбите, лежащей в плоскости движения внешнего тела.

4. В случае, когда $c_2 = \frac{2}{5}(1 - c_1)$, имеем наклон $i = 0$, постоянный эксцентриситет, равный $e_m = \sqrt{1 - c_1}$, и аргумент перицентра, постоянно возрастающий с угловой скоростью, которая изменяется

в пределах от $8\sqrt{c_1}$ при $\omega = k \cdot 180$ градусов до $20(1 - 3/5c_1)/\sqrt{c_1}$ при $\omega = 90 + k \cdot 180$ градусов, где k – любое целое число. Период обращения ω , как и в общем случае, находится по формуле (10.28).

На этом этапе изложения мы имеем выражения для $e(\tau)$ как функции времени при всех возможных значениях постоянных c_1 , c_2 , z_0 . Искомые функции $i(\tau)$, $\omega(\tau)$ найдутся теперь из соотношений

$$i(\tau) = \arccos \sqrt{\frac{c_1}{1 - e^2(\tau)}},$$

$$\omega(\tau) = \arcsin \sqrt{\frac{\frac{2}{5} - \frac{c_2}{e^2(\tau)}}{\sin^2 i(\tau)}}.$$

Теперь осталось найти функцию $\Omega(\tau)$. Продолжим воспроизводить здесь результаты работы (Вашковьяк, 1999).

Сначала выполним действия для случая $0 < c_2 < 2/5$.

Воспользуемся формулами (10.26) для определения связи переменной u с τ . Затем определим новую переменную \bar{u} , полагая $u = m\mathbf{K}(k^2) + \bar{u}$, где m – целое число, ближайшее к $u/\mathbf{K}(k^2)$, не превосходящее этого числа. Число m запомним для дальнейших действий.

Далее вычислим последовательно постоянные

$$l^2 = k^2 \frac{1 - c_1 - z_2}{1 - c_1 - z_3},$$

$$C = \frac{(5c_2 - 2z_2)k^2}{(1 - c_1 - z_3)\mathbf{K}(k^2)}, \quad (10.32)$$

$$\mathbf{I}(l^2, k^2) = \frac{\mathbf{\Pi}(l^2, k^2) - \mathbf{K}(k^2)}{l^2},$$

где $\mathbf{\Pi}(l^2, k^2)$ – полный эллиптический интеграл третьего рода.

Теперь определим некоторую функцию $J(x, l^2, k^2)$ от своего аргумента x следующим образом:

$$J(x, l^2, k^2) = \frac{\mathbf{\Pi}(\varphi, l^2, k^2) - F(\varphi, k^2)}{l^2}, \quad (10.33)$$

где $\varphi = \arcsin(sn x)$, где $\mathbf{\Pi}(\varphi, l^2, k^2)$, $F(\varphi, k^2)$ – неполные эллиптические интегралы третьего и первого рода, соответственно.

Далее определим функцию $J_m(\bar{u}, l^2, k^2)$, зависящую от четности числа m , формулой

$$J_m(\bar{u}, l^2, k^2) = \begin{cases} J(\bar{u}, l^2, k^2), & \text{если } m - \text{четно,} \\ \mathbf{I}(l^2, k^2) - J(\mathbf{K}(k^2) - \bar{u}, l^2, k^2), & \text{если } m - \text{нечетно.} \end{cases} \quad (10.34)$$

Наконец, функция $\Omega(\tau)$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \Omega(\tau) = & \Omega_0 - 4\sqrt{c_1} \operatorname{sign}[\cos i(\tau)] \{ [1 + C \mathbf{I}(l^2, k^2)] \tau + \\ & + \frac{C}{4\sqrt{6}(z_1 - z_2)} \{ (u_0 - \bar{u}) \mathbf{I}(l^2, k^2) + \\ & [J_m(\bar{u}, l^2, k^2) - J(u_0, l^2, k^2)] \mathbf{K}(k^2) \} \}, \end{aligned} \quad (10.35)$$

где Ω_0 — еще одна независимая произвольная постоянная.

Можно показать, что в рассматриваемом случае циркуляционного изменения ω

$$k^2 < l^2 < 1.$$

Период циркуляционного изменения Ω определяется приближенной формулой

$$T_\Omega = \frac{\pi}{2\sqrt{c_1}[1 + C\mathbf{I}(l^2, k^2)]}.$$

В случае $3/5 < c_2 < 0$ (либрация ω) зависимость $\Omega(\tau)$ определится формулами (10.32) – (10.35), в которых необходимо z_2 заменить на z_1 , z_3 на z_2 , k^2 на κ^2 , φ_0 на Ψ_0 , а для связи u с τ использовать соотношения (10.30).

В итоге, найденные зависимости $e(\tau)$, $i(\tau)$, $\omega(\tau)$, $\Omega(\tau)$ при заданных на начальный момент времени $t = t_0$ ($\tau = 0$) произвольных постоянных e_0 , i_0 , ω_0 , Ω_0 описывают эволюцию орбиты спутника.

Напомним здесь, какие допущения и предположения были сделаны в данной постановке задачи

- на спутник действуют только возмущения от притяжения Солнца,
- возмущающая функция осреднена по средним долготам спутника и Солнца,
- пренебрегаем отношением $(a/a')^2$ по сравнению с единицей,
- плоскость планетоцентрической круговой орбиты Солнца считаем основной.

На основе построенной теории Лидовым (1961) было обнаружено важное свойство эволюции спутниковых орбит: при $c_1 \approx 0$ и $i \approx \pi/2$ эксцентриситет приблизится к единице, периферическое расстояние станет равным физическому радиусу планеты, а спутник неизбежно упадет на поверхность. Существование главных спутников Урана, которые также подвержены этому эффекту, объяснено Лидовым (1963) стабилизирующим влиянием сжатия планеты (Лидов, 1963).

10.3.5. Применения построенной теории эволюции орбит при изучении динамики реальных спутников планет

Построенная модель эволюции орбит спутников под действием притяжения Солнца может быть испытана на реальных далеких спутниках планет, поскольку оно действительно является доминирующим фактором для этих спутников. Следует учитывать при этом, что построенная модель приближенная, так как использованы некоторые допущения и предположения. Поэтому выводы теории должны проверяться разными методами.

Отметим, что решение задачи определения элементов орбиты спутника как функций времени, выполненное в работе (Вашковьяк, 1999) было применено в этой же работе для исследования эволюции орбит двух далеких спутников Урана, открытых в 1997 году. Позже этим спутникам были присвоены имена U16 Калибан и U17 Сикоракса.

Приложения теории эволюции орбит, рассмотренной выше, были сделаны также в работе (Kinoshita, Nakai, 1999) для далекого спутника Урана U17 Сикоракса и далекого спутника Нептуна Нериды.

В обеих упомянутых работах по значениям элементов орбит, найденных из наблюдений, были определены амплитуды и периоды колебаний эксцентриситетов орбит этих двух спутников. В табл. 10.1 приводятся исходные данные и полученные результаты таких исследований. Начальные значения элементов орбит были взяты из циркуляра МАС (Marsden, 1998). Оказалось, что оба спутника имеют циркуляционное изменение аргумента перигея ω . В работе (Вашковьяк, 1999) указывается, что результаты, полученные по аналитической модели эволюции, «практически совпадают» с результатами контрольного численного интегрирования эволюции

онных уравнений (10.17) – (10.20), в которые были добавлены члены, соответствующие влиянию сжатия Урана.

Аналогичные результаты для спутника U17 Сикоракса были получены в работе (Kinoshita, Nakai, 1999). Эти результаты вместе с тем, что получено путем численного интегрирования уравнений, также даны в Табл. 10.1.

В работе (Kinoshita, Nakai, 1999) для далекого спутника Нептуна Нереиды были также получены параметры эволюции орбиты по формулам теории, рассмотренной выше. Спутник Нереида имеет очень большой эксцентриситет орбиты (примерно 0.76). Его движение, кроме возмущений от притяжения Солнца, подвержено также влиянию притяжения близкого массивного спутника Тритон. Полученные параметры эволюции для Нереиды сравнивались с результатами численного интегрирования и с аналитической теорией движения этого спутника, построенной в работе (Mignard, 1981). Эти результаты даны в Табл. 10.2. Орбита Нереиды имеет циркуляционный характер изменения аргумента перигея ω .

Позже, после работы (Kinoshita, Nakai, 1999), эволюция орбиты Нереиды была исследована в работе (Вашковьяк, Тесленко, 2010). Авторы этой работы построили более детальную модель эволюции Нереиды с использованием более совершенных методов.

10.4. Уточненные модели эволюции орбит спутников планет. Численно-аналитический метод

В работе (Вашковьяк, 2005) был разработан численно-аналитический метод моделирования эволюции орбит далеких спутников планет-гигантов. Этот метод предложен довольно давно, и с его помощью были решены многие задачи динамики спутников. Идея метода и соответствующие исследования, выполненные М.Л. Лидовым и его учениками, нашли свое отражение в статье (Лидов, 1978). Суть метода состоит в следующем. Берем дифференциальные уравнения относительно шести элементов кеплеровской орбиты с возмущающей функцией, обусловленной притяжением Солнца. В разложении по степеням отношения больших полуосей спутника и Солнца берем только основной член, то есть приближение Хилла. Прямоугольные координаты Солнца вычисляем по элементам кеплеровской орбиты планеты.

Уравнения для элементов орбиты спутника записывались в ра-

Таблица 10.1. Исходные параметры спутников и полученные результаты по эволюции орбит. Отметка «аналит. теория» означает, что результаты получены по описанной выше модели эволюции орбит.

Параметр	U16 Калибан	U17 Сикоракса
Эпоха элементов	1998, июль 6.0	1998, июль 6.0
Большая полуось, а.е.	0.047921	0.081643
Период обращения, град./сут.	0.047921	0.081643
Эксцентриситет	0.82347	0.509386
Наклон (геоэклипт.), град.	139.6813	152.6686
ω , град.	339.4621	18.0055
Ω , град.	174.9928	255.8085
Из работы (Вашковьяк, 1999) аналит. теория		
e_{min}	0.07686	0.4964
e_{max}	0.2861	0.5848
i_{min} , град.	139.65	151.72
i_{max} , град.	142.47	160.46
T_ω , лет	8272.1	1239.2
T_Ω , лет	6577.4	1734.1
Из работы (Kinoshita, Nakai, 1999) аналит. теория		
e_{max}	-	0.603
i_{max} , град.	-	160.5
T_ω , лет	-	1220
T_Ω , лет	-	1780
Из работы (Kinoshita, Nakai, 1999) числ. интегр.		
e_{max}	-	0.605
i_{max} , град.	-	160.8
T_ω , лет	-	1350
T_Ω , лет	-	1770

боте (Вашковьяк, 2005) в канонической форме. Исходные уравнения содержали все шесть переменных. Далее применялся метод Цейпеля для исключения из уравнений членов с периодом обращения спутника и периодом обращения Солнца. Поскольку в методе Цейпеля эти короткопериодические слагаемые заранее не отбрасы-

Таблица 10.2. Параметры эволюции орбиты спутника Нептуна Нерейды, полученные в работе (Kinoshita, Nakai, 1999) численным интегрированием уравнений (Числ. интегр.), по аналитической теории движения этого спутника в работе (Mignard, 1981) и по формулам теории эволюции в работе (Kinoshita, Nakai, 1999).

Параметр	Числ. интегр.	Mignard, 1981	K.,N., 1999
T_ω , лет	13600	13400	13670
T_Ω , лет	17690	15000	17980
Амплитуда e	0.00546	0.0060	0.00548
Амплитуда i , град.	3.123	3.09	3.137

ваются, то в результирующих уравнения возникают члены разных порядков по отношению к малому параметру, характеризующему возмущающий фактор. В вышеуказанной работе использовался малый параметр m , определяемый соотношением

$$m^2 = \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'} \right)^3 = \left(\frac{n'}{n} \right)^2.$$

После канонических преобразований оказалось, что в новых переменных большая полуось орбиты спутника остается постоянной, а искомым функций остается четыре.

Для Солнца средняя аномалия исчезает из рассмотрения, а большая полуось орбиты принята постоянной. Используется также разложение по степеням малых величин e' , i' . Элементы орбиты Солнца e' , i' , ω' , Ω' считаются некоторыми заданными функциями времени. Эти функции времени находятся из теории Лагранжа вековых возмущений, где используются элементы Лагранжа, связанные с элементами e' , i' , ω' , Ω' соотношениями

$$h' = e' \sin(\omega' + \Omega'), \quad k' = e' \cos(\omega' + \Omega'),$$

$$p' = \sin i' \sin \Omega', \quad q' = \sin i' \cos \Omega'.$$

Для каждого из этих элементов получается сумма тригонометрических функций вида

$$\varepsilon'_j = \sum_{k=1}^N A_k^{(j)} \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} (\nu_k^{(j)} t + \beta_k^{(j)}), \quad (10.36)$$

где ε'_j ($j = 1, 2, 3, 4$) — один из элементов Лагранжа, N — число планет в теории, а $A_k^{(j)}$, $\nu_k^{(j)}$, $\beta_k^{(j)}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) некоторые числа — постоянные теории движения планет, которые находятся из наблюдений. В формуле (10.36) берется функция синус для элементов h' , p' и косинус для k', q' .

Полученные таким образом эволюционные уравнения в работе (Вашковьяк, 2005) не приводятся, но говорится, что они решаются затем методом численного интегрирования на интервалах времени в несколько тысяч орбитальных периодов вышеупомянутых спутников.

В силу того, что правые части полученных уравнений для средних элементов не содержат быстро осциллирующих функций, их численное интегрирование выполняется с большим шагом, порядка нескольких орбитальных периодов обращения спутника, т.е. гораздо эффективнее, чем уравнений в прямоугольных координатах или в оскулирующих элементах.

Заметим, что в полученных таким образом уравнениях содержатся разложения по степеням малых параметров. Оставлены члены, пропорциональные следующим комбинациям малых величин: m^2 , m^3 , m^4 , $m^2 e'$, $m^2 i'$. Заметим также, что в уравнениях таким образом учены не все члены, пропорциональные m^4 , поскольку в исходном разложении возмущающей функции взят только главный член задачи Хилла.

В вышеуказанной работе и последующих работах, в которых применяется данный метод при численном интегрировании эволюционных уравнений, для представления движения Солнца использовалась теория вековых возмущений планет Брауэра-Вуркома, а численные значения постоянных теории движения планет были взяты из работы (Шараф, Будникова, 1967). Начальные значения элементов орбит спутников в работе (Вашковьяк, 2005) и в последующих работах этого автора брались из публикаций MPECs (Minor Planets Electronic Circulars).

На интервалах времени порядка $10^5 - 10^6$ лет получены экстремальные значения эксцентриситетов и наклонов ряда далеких спутников больших планет, а также периоды изменения аргументов перицентров и долгот восходящих узлов их орбит.

На временах порядка периодов циркуляции долгот узлов ($10^2 - 10^3$ лет) проведено сравнение с результатами численного интегрирования уравнений движения, записанных относительно пря-

моугольных координат спутника и Солнца. При численном интегрировании прямоугольные координаты Солнца вычислялись по средним элементам кеплеровских орбит, выраженных в виде рядов по степеням времени. Сами ряды брались из работы (Bretagnon, Franco, 1988).

Результаты такого моделирования орбит далеких спутников планет опубликованы в работах (Вашковьяк, Тесленко, 2005; Вашковьяк, Тесленко, 2008а; Вашковьяк, Тесленко, 2008б).

В двух работах (Вашковьяк, Тесленко, 2009; Вашковьяк, 2010) аналитический метод был усовершенствован путем учета дополнительных членов разложения возмущающей функции. Кроме основного слагаемого, пропорционального m^2 , учтены также члены, пропорциональные m^3 и m^4 , соответственно.

С использованием предложенного решения получены улучшенные аналитические зависимости от времени для элементов эволюционирующих орбит ряда далеких спутников планет-гигантов по сравнению с решением двукратно осредненной задачи Хилла и тем самым достигнуто их лучшее согласие с результатами численного интегрирования уравнений возмущенного движения спутников в прямоугольных координатах.

10.5. Эволюция орбит спутников планет при совместном влиянии различных факторов

Попытки построить теорию эволюции орбит спутников при совместном влиянии различных факторов приводят к весьма сложной задаче.

Будем рассматривать далее только те спутники, которые движутся по внешним орбитам по отношению к главным спутникам планеты.

В задаче об эволюции орбит таких спутников планет основными факторами являются:

- несферичность планеты (в основном это ее динамические сжатие),
- притяжение Солнца,
- притяжение главных спутников (наиболее массивных спутников, движение которых считается заданным).

Основой для получения эволюционной системы уравнений является вековая часть полной возмущающей функции W , кото-

рая находится с помощью ее независимого осреднения по всем «быстрым» переменным — средним планетоцентрическим долготам Солнца, главных спутников и исследуемого (пробного — реального или гипотетического) спутника, т.е. исключением короткопериодической части. Таким образом, функция W зависит только от пяти планетоцентрических кеплеровских элементов орбиты:

a — большой полуоси,

e — эксцентриситета,

i — наклона,

ω — аргумента перигея

Ω — долготы восходящего узла.

Как следует из уравнений Лагранжа, в элементах, в силу независимости W от средней долготы пробного спутника, большая полуось его орбиты остается постоянной, а сама эта функция дает нам первый интеграл эволюционной системы $W = const$.

В соответствии с принятыми здесь к рассмотрению возмущающими факторами разобьем полную возмущающую функцию на три слагаемых

$$W = W_0 + W_1 + W_2,$$

где W_0 обусловлена сжатием планеты (вторая зональная гармоника), W_1 — притяжением Солнца, а W_2 — притяжением главных спутников.

В системе координат с основной плоскостью, совпадающей с плоскостью орбиты Солнца либо с плоскостью экватора планеты, слагаемые W_0 и W_2 зависят от пяти элементов орбиты спутника a, e, i, ω, Ω . Поэтому уравнения Лагранжа будут иметь только два первых интеграла $a = const, W = const$. Их общее аналитическое решение относительно элементов орбиты при произвольных начальных условиях не найдено.

В работах, посвященных данной задаче, в слагаемом W_0 взят вековой член, зависящий от наклона орбиты спутника к экватору планеты и от ее эксцентриситета. В функции W_1 берется только основной член разложения по степеням отношения большой полуоси спутника к радиусу круговой орбиты Солнца (приближение Хилла). Что касается функции W_2 , то в наиболее продвинутой работе по данной теме (Вашковьяк, Вашковьяк, Емельянов, 2015) используется разложение по степеням отношения большой полуоси орбиты возмущающего главного спутника к большой полуоси спутника, движение которого исследуется.

Из-за сложности задачи и обширности работ по этой теме мы ограничимся здесь только обзором работ, выполненных с 1961 года по настоящее время, и описанием основных результатов.

В работах Лидова (1961) и Kozai (1962) выявлены главные особенности эволюции орбит спутников под влиянием вековых возмущений только от внешней притягивающей точки. Это, в частности, эффект сильного возрастания эксцентриситета орбиты при постоянной большой полуоси с одновременным уменьшением расстояния перицентра, вплоть до падения спутника на поверхность планеты. Этот эффект, получивший название механизма Лидова – Козаи, возникает, когда спутниковая орбита наклонена к плоскости движения возмущающей точки на угол, близкий к 90 градусам. Поскольку орбиты подавляющего большинства известных спутников достаточно далеки от ортогонального расположения относительно плоскости гелиоцентрической орбиты планеты, эффект падения для них проявиться не может. Исключением являются главные и близкие спутники Урана. Почти экваториальные и почти круговые орбиты этих спутников наклонены к плоскости орбиты планеты на углы, отличающиеся от прямого лишь на величину около 8 градусов.

В работе (Лидов, 1963) была рассмотрена задача об эволюции спутниковых орбит при совместном влиянии притяжения Солнца и сжатия планеты. Получены оценки минимального и максимального значений эксцентриситета при наличии обоих возмущающих факторов. Эти значения существенно зависят от соотношения между параметрами, характеризующими влияние сжатия планеты и притяжения внешнего тела. В работе (Лидов, 1963) в качестве примера взят самый удаленный из главных спутников Урана — Оберон. Для этого спутника получилось, что с учетом совместного влияния притяжения Солнца и преобладающего влияния сжатия планеты амплитуда долгопериодических колебаний эксцентриситета составляет примерно 10^{-5} . Сжатие Урана с избытком компенсирует вековые солнечные возмущения.

В работе (Лидов, 1963) замечено, что «существенное изменение характера эволюции при учете нецентральнойности основного поля не является типичным для спутников планет Солнечной системы». Рассмотрен пример гипотетического спутника Земли, подобного Луне, но с наклоном орбиты к плоскости эклиптики 90 градусов. Оценки показывают, что такой спутник мог бы совершить лишь 52 оборота, то есть просуществовал бы на орбите примерно 4

года. В точном решении этой задачи, полученным численным интегрированием уравнений движения, минимальное расстояние орбиты спутника стало меньше радиуса Земли через 55 оборотов.

Исследование эволюции спутниковых орбит при совместном влиянии притяжения Солнца и сжатия планеты продолжалось. В дальнейшем делались попытки найти частные случаи задачи, когда осредненные уравнения могли бы быть проинтегрированы. В работах (Лидов, Ярская, 1974) перечислены все частные случаи интегрируемости уравнений Лагранжа в данной задаче. Сюда включены предельные случаи взаимной ориентации орбиты Солнца, экватора планеты и плоскости орбиты спутника (компланарность, ортогональность). Рассматривался и частный случай круговой орбиты спутника.

Поиски решений при специальных соотношениях между параметрами, характеризующими влияние сжатия планеты и притяжения внешнего тела, продолжались. Указания на публикации по этим исследованиям можно начать с работ (Вашковьяк, 1996; 1998а; 1998б; Вашковьяк, Тесленко, 2001) и продолжить в ссылках, данных в этих работах. Рассмотрены частные случаи соотношений между:

- начальными элементами орбиты спутника,
- углом между плоскостями орбиты Солнца и экватора планеты,
- параметром

$$\gamma = \frac{\mu r_0^2 J_2 a'^3}{\mu' a'^5}.$$

Найдены частные стационарные решения для элементов e , ω . Найдены семейства периодических изменений этих элементов. Исследована устойчивость этих решений.

Некоторым особенностям спутниковой системы Урана посвящены работы (Вашковьяк, 2001а,в; Вашковьяк, Тесленко, 2002). Учтено совместное влияние притяжения Солнца и сжатия планеты. Выявлены причины отсутствия спутников в экваториальной плоскости в некоторых зонах вокруг планеты. Отмечено, что этими же причинами нельзя объяснить распределение орбит по расстояниям для далеких спутников Юпитера и Сатурна.

В работе (Вашковьяк, Вашковьяк, Емельянов, 2015) получены эволюционные уравнения задачи о вековых возмущениях орбиты спутника при совместном влиянии трех возмущающих факторов (сжатия центральной планеты, притяжения ее главных спутников

и притяжения Солнца), описаны интегрируемые случаи и намечены возможные пути их исследования. В этой новой эволюционной ограниченной задаче многих тел наибольший интерес представляет изучение той области околопланетного пространства, в которой влияние на спутник указанных возмущений попарно или в совокупности сравнимо по величине. На основе полученных теоретических выводов рассмотрена спутниковая система Урана. Для широкого диапазона больших полуосей орбит с помощью полученных приближенных аналитических зависимостей и численных оценок выявлено влияние главных спутников Урана на эволюцию орбит некоторых его реальных и гипотетических спутников.

10.6. Классификация орбит далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна по типам и свойствам эволюции орбит

С началом открытий в 1997 году первых далеких спутников Урана, новых далеких спутников Нептуна, Юпитера и Сатурна начались работы по классификации типов эволюции их орбит. За основу были приняты свойства решений эволюционных уравнений при осредненной возмущающей функции в случае Хилла, т.е. главного слагаемого ее разложения по отношениям больших полуосей орбит спутника и Солнца. Это тот случай, который рассмотрен подробно в разделах 10.3.2–10.3.5.

Сделаем здесь краткий обзор работ и полученных результатов по этой задаче.

После первых применений найденных решений уравнений для элементов e , i , ω , Ω в работе (Вашковьяк, 1999) автор этой работы продолжил анализ для вновь открываемых спутников. Анализировалась орбитальная эволюция новых внешних спутников Урана (Вашковьяк, 2001а, 2001в), новых внешних спутников Сатурна (Вашковьяк, 2001б), новых внешних спутников Юпитера (Вашковьяк, 2001г). В работе (Вашковьяк, 2003) выполнен анализ эволюции орбит новых далеких спутников Нептуна. Сделано сравнение орбит либрационного типа для далеких спутников Юпитера, Сатурна и Нептуна. Выявлены интересные особенности эволюции этих орбит. Особенности вековой эволюции орбит гипотетических спутников Урана. описаны в работе (Вашковьяк, 2016).

Кроме деления орбит на два типа эволюции: с либрационным

изменением аргумента перицентра и с его циркуляционным изменением, существуют и другие параметры свойств эволюции. Весьма детальный анализ типов эволюции орбит сделан в работе (Сук, Burns, 2004). Рассмотрены также приложения этого анализа к задаче о происхождении далеких спутников больших планет.

Особым оказался случай эволюции орбиты для далекого спутника Юпитера J34 Europa. Согласно классификации, основанной на решении уравнений при осредненной возмущающей функции в случае Хилла и круговой орбите Солнца (см. разделы 10.3.2–10.3.5) изменение аргумента перицентра должно иметь циркуляционный характер, поскольку значение постоянной c_2 в интеграле (10.11), вычисленной по известным из наблюдений элементам орбиты, получается положительным. Однако анализ изменений во времени оскулирующего элемента ω , полученных из численного интегрирования уравнений движения в прямоугольных координатах, показывает, что на интервале времени 1000 лет этот элемент испытывает колебания относительно значения 90 градусов с амплитудой примерно 20 градусов. В работе (Вашковьяк, Тесленко, 2007) исследован этот случай. Построена модель эволюции орбиты спутника J34 Europa с осреднением возмущающей функции только по средней долготе спутника. Получены зависимости элементов орбиты от средней долготы Солнца. Оказалось, что в элементе ω , возмущения, связанные с периодом обращения Солнца вокруг планеты, доминируют. Именно эти периодические возмущения и обнаруживаются в изменении оскулирующего элемента ω .

В работе (Brozović, Jacobson, 2017) выполнено уточнение орбит всех известных к настоящему времени далеких спутников Юпитера на основе наблюдений. Моделирование движения проводилось численным интегрированием уравнений движения. Интегрирование выполнено не только для интервала времени наблюдений и времени необходимых эфемерид, но также на интервале времени 1000 лет для определения типов эволюции орбит спутников. Оценены изменения долгот перицентров. Если скорость изменения аргумента перицентра меньше, чем скорость прецессии узла орбиты, то спутник назван обратным циркулятором (reverse circulator — RC). В противоположной ситуации спутник называют прямым циркулятором (direct circulator — DC). Рассматривается соотношение между скоростью изменения долготы перицентра спутника и долготы перицентра планеты. Если эти скорости равны, говорят о ве-

ковом резонансе спутника с планетой. В работах (Cuk, Burns, 2004; Brozovic, Jacobson, 2017) вычисляется также параметр, характеризующий степень близости состояния эволюции орбиты к вековому резонансу. Дана таблица, содержащая для всех далеких спутников Юпитера значения элементов оскулирующих орбит: средние, минимальные, максимальные, а также периоды изменений долгот перицентров и долгот узлов. Отмечен тип эволюции для каждого спутника.

Перечисление всех далеких спутников с указанием типа эволюции было бы слишком объемным для данного изложения. Мы эти данные не приводим. При необходимости их можно найти в цитированных выше работах. Отметим только, что спутники группируются в некоторые «кластеры» со сходными типами эволюции орбит.

10.7. Эволюция орбит и сближения далеких спутников планет

10.7.1. Современные знания об эволюции орбит далеких спутников планет

Изучение орбитальной эволюции и сближений далеких спутников служит цели установления их происхождения. Это важно также для понимания распространения материи на ранних стадиях эволюции Солнечной системы. Взаимное притяжение спутников весьма слабое из-за их малых размеров и масс. Однако на очень больших интервалах времени взаимные сближения могут оказаться достаточно тесными, чтобы значительно изменить орбиты спутников.

Движение далеких спутников планет вызывает большой интерес из-за ряда особенностей их орбит. Орбитальное движение далеких спутников подвержено сильному влиянию притяжения Солнца. Плоскости орбит этих спутников, непрерывно меняя своё положение в пространстве, не ассоциируются ни с плоскостью экватора, ни с плоскостью орбиты планеты. Большинство из этих спутников движутся вокруг планеты в обратном направлении по отношению к ее орбитальному движению. Эксцентриситеты орбит значительны и, вдобавок, претерпевают заметные изменения. Перечисленные свойства позволяют предположить, что далекие спутники появились вследствие их захвата планетой с гелиоцентрических орбит. В рамках модели задачи трех тел (Солнце – планета – спутник) такой

захват может быть только временным. Поэтому для подтверждения гипотезы о захвате необходимо найти причину перехода этих тел из состояния временного захвата к стабильному состоянию. В работе (Gray, Bauer, 2007) упоминаются, по крайней мере, пять процессов, которые могли привести к такому переходу.

Первая возможная причина — столкновение временно захваченного тела с другим, уже существующим спутником планеты. Вторая — захват, обусловленный увеличением массы планеты. Третья причина — тормозящее влияние межпланетного газа или газового облака вокруг планеты. Четвертая возможная причина — захват одновременно двух взаимно гравитирующих тел. Пятая причина — захват во время прохождения состояния резонанса орбитального движения спутника с орбитальным движением планеты.

В ряде работ, выполненных в последние годы, исследованы различные конкретные механизмы захвата. В том числе, механизм захвата в рамках проблемы четырёх тел — Солнце, планета, двойной астероид (Gaspar, Winter, Vieira Neto, 2011), захвата в модели трёх тел при дополнительном влиянии сопротивления газа (McGleam, Hamilton, Agnor, 2007) либо при изменении массы планеты (de Oliveira et al., 2007), захвата с учётом приливного разрушения меньшего тела (Philpott, Hamilton, Agnor, 2010), захвата в результате взаимных столкновений малых тел непосредственно после образования регулярных спутников (Ma, Zheng, Shen, 2009), захвата во время прохождения резонанса (Cuk, Gladman, 2006), захвата объектов из планетозимального диска во время близких прохождений планет юпитерианской группы (Nesvorny, Vokrouhlicky, Morbidelli, 2007a,b), захвата объектов кометного типа на ранних этапах формирования больших планет Солнечной системы (Jewitt, Haghighipour, 2007).

Здесь мы не ставим своей задачей составление исчерпывающего и подробного обзора работ, связанных с орбитальной динамикой нерегулярных спутников планет-гигантов, но считали бы целесообразным обозначить некоторые направления подобных исследований. В работе (Cuk, Burns, 2004) была предложена новая модель вековой эволюции нерегулярных спутников Сатурна, а работа (Burns et al., 2004) посвящена эволюции орбит, близких к апсидально-либрационной орбите спутника Сатурна S24 (Kiviuik). Укажем и на обстоятельную работу (Nesvorny et al., 2003), в которой, в основном численными методами, исследована «орбиталь-

ная и столкновительная эволюция» 60 тысяч фиктивных спутников планет-гигантов, а также 50 реальных далеких спутников. С помощью расчетов, выполненных на интервале времени 108 лет, в частности, выявлены области устойчивости орбит нерегулярных спутников, а также их отдельные группы, аналогичные семействам астероидов. В ряде работ исследованы небесно-механические аспекты движения нерегулярных спутников, в том числе, орбитальные и вековые резонансы (Beauge, Nesvorny, 2007; Correa et al., 2010), а также наличие областей фазового пространства с периодическими, условно-периодическими и хаотическими движениями (Hinse et al., 2010; Frouard, Fouchard, Vienne, 2009, 2010; Tsirogiannis, Perdios, Markellos, 2009).

Аналитическим методам исследования эволюции орбит нерегулярных спутников посвящены работы, уточняющие известную (Лидов, 1961; Lidov 1962, 1963; Kozai, 1962) модель двукратно осредненной задачи Хилла учетом слагаемых третьего порядка относительно малого параметра — отношения средних движений планеты и спутника (Kovalevsky, 1964; Орлов, 1965; Orlov, 1965; Beauge et al., 2006; Вашковьяк, Тесленко, 2009). Укажем, что для исследования эволюции орбит «сверхдалеких» спутников, таких как, например, спутники Нептуна N10 (Psamathe) и N13 (Neso), предложен нестандартный «конструктивно-аналитический» метод четвертого порядка (Вашковьяк, 2010).

Отметим также исследования орбитальной неустойчивости спутников в промежуточных областях околопланетного пространства между орбитой наиболее далекого из регулярных спутников и орбитой наиболее близкого из нерегулярных. В этих областях времена жизни гипотетических спутников, хотя и меняются в зависимости от эксцентриситетов и наклонов их орбит, однако космогонически весьма малы (Вашковьяк, 2001в; Вашковьяк, Тесленко, 2002; Nighipour, Jewitt, 2006). В дополнение укажем еще и обзорно-библиографическое исследование по динамике естественных спутников планет (Уральская, 2003).

Две из пяти ранее указанных причин постоянного захвата связаны с взаимным гравитационным притяжением спутников. Поскольку массы этих тел весьма малы, существенное изменение свойств движения может происходить только вследствие достаточно тесных взаимных сближений спутников. Можно рассматривать движение спутника как движение по оскулирующей кеплеровской ор-

бите. Из-за сильного влияния притяжения Солнца значительно изменяются эксцентриситет и ориентация оскулирующей орбиты в пространстве. Это может приводить к сближению и даже к пересечению траекторий движения разных спутников. Чтобы их обнаружить, необходимо моделирование движения спутников на весьма длительных интервалах времени.

Из-за ограниченной точности наблюдений и весьма малых временных интервалов наблюдений большинства далеких спутников планет оказывается невозможным вычислять эфемериды на больших интервалах времени с точностью, необходимой для достоверного детектирования сближений спутников. Это подтверждается анализом точности эфемерид далеких спутников, выполненным в работе (Emelyanov, 2010). Однако ориентация эллиптической оскулирующей орбиты в пространстве, ее эксцентриситет и большая полуось могут быть определены с приемлемой точностью на длительных интервалах времени. При этом положение спутника на планетоцентрической орбите может быть известно с точностью до 180 градусов. Поэтому моделировать на больших интервалах времени можно только размеры, форму и ориентацию орбит. Можно изучать только эволюцию орбит, не задавая вопроса о том, где на орбите находится сам спутник. Тогда в задаче о сближении спутников можно определять только минимальные расстояния между орбитами, принимая во внимание, что сближения спутников имеют место только на «сближающихся орбитах». Сближения самих спутников можно рассматривать только как случайный процесс.

Орбиты многих далеких спутников определены на столь коротких интервалах времени, что достоверность конфигураций их орбит, моделируемых на больших интервалах времени, может быть столь же низкой, как и точность вычисляемых положений спутников на орбите. В таких случаях сближения самих орбит можно также рассматривать как случайный процесс и оценивать лишь его вероятностные характеристики. Можно рассчитывать также на повышение достоверности описания конфигураций орбит при появлении новых наблюдений далеких спутников планет.

На больших интервалах времени факты сближений спутников безусловно также влияют на эволюцию конфигураций орбит. Изучение этих процессов представляет собой особую задачу.

Картину эволюции орбит спутников планет необходимо постоянно уточнять. До подтверждения гипотез еще далеко.

10.7.2. Задача предвычисления и детектирования сближения далеких спутников планет

Изложенные выше обстоятельства порождают актуальную задачу изучения эволюции орбит и возможных сближений далеких спутников планет. В работе (Емельянов, Вашковьяк, 2012) сделана попытка решения этой задачи. В частности, разработан метод и вычислительные программы, позволяющие предвычислять взаимные парные «сближения орбит» далеких спутников планет на больших интервалах времени.

Решение сформулированной задачи состояло из следующих этапов. Сначала из наблюдений нужно определить параметры движения спутников или начальные условия для решения уравнений движения. Затем по найденным параметрам нужно провести численное интегрирование уравнений движения спутников на интервале времени, приемлемом для решения задачи. Далее нужно подобрать подходящие достаточно простые аналитические функции, которые будут представлять результаты численного интегрирования и давать возможность вычислять параметры орбит на любые моменты времени на длительном интервале. И, наконец, нужно разработать метод, позволяющий вычислять минимальные расстояния между орбитами на любые моменты времени. Эти средства можно будет применять для поиска моментов «сближений» орбит далеких спутников планет и вероятных сближений спутников.

Первый этап выполнен ранее в работах (Emelyanov, 2005; Емельянов, Кантер, 2005) для всех 107 далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Найденные начальные условия для решения уравнений движения спутников размещены на сайте сервера эфемерид спутников планет MULTI-SAT (Emel'yanov, Arlot, 2008) по адресу <http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/multisat/index.html>. Чтобы найти эти данные, нужно последовательно пройти по ссылкам «инструкции», «источники», «Оригинальные численные модели движения далеких спутников планет», «Начальные условия интегрирования...». Заметим, что параметры орбит спутников регулярно обновляются по мере появления новых наблюдений. Была взята последняя версию этих данных на момент подготовки статьи (Емельянов, Вашковьяк, 2012).

Изменения элементов орбит далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна на интервалах времени несколько тысяч лет найдены численным интегрированием уравнений движения в рабо-

тах (Вашковьяк, Тесленко, 2008а,б). В этих работах эволюция орбит спутников изучена также аналитическим и полуаналитическим методами. Ввиду небольших расхождений результатов, полученных тремя различными методами, нам представляется целесообразным использовать результаты численного интегрирования. Поскольку после публикации указанных работ начальные условия движения ряда спутников были перевычислены, в работе (Емельянов, Вашковьяк, 2012) выполнено независимое численное интегрирование уравнений движения по новым значениям начальных условий.

По результатам численного интегрирования были составлены таблицы значений пяти элементов оскулирующих орбит всех 107 далёких спутников на интервалах от 300 до 15000 лет (для спутников разных планет) с постоянным шагом по времени. Интервал времени и шаг в таблицах выбирался так, чтобы на каждый период обращения спутника попадало по крайней мере несколько табличных моментов, а весь интервал заключал в себе один или более периодов движения линии узла и линии асид орбиты. В составленных таблицах содержатся следующие элементы кеплеровской оскулирующей орбиты: большая полуось, эксцентриситет, наклон к плоскости эклиптики, долгота восходящего узла и угловое расстояние перицентра от восходящего узла в эклиптической системе координат.

10.7.3. Аналитическое описание эволюции орбит спутников

Из теории движения далёких спутников планет следует, что изменения рассматриваемых оскулирующих элементов орбиты во времени могут быть представлены тригонометрическими рядами. Члены этих рядов мы называем «гармониками». Частоты гармоник являются линейными комбинациями с целочисленными коэффициентами конечного набора порождающих частот. Эти частоты происходят от вековых и периодических изменений средних долгот, долгот узлов и долгот перицентров орбит спутников, планеты и других тел, возмущающих движение спутников. Среди гармоник разложений оскулирующих элементов орбит спутников имеется небольшое число доминирующих и множество других гармоник, имеющих меньшие амплитуды, но примерно одного и того же порядка. Зависимости от времени долгот восходящих узлов и аргументов перицентров в эклиптической системе координат, как правило, имеют вековые члены. Интересно отметить, что в достаточно многочисленном ансамбле далёких спутниковых орбит планет-гигантов из-

вестно лишь несколько орбит с либрационным изменением аргументов перицентров. Первые выявленные омега-либраторы — это спутники Сатурна S24 (Kiviuq) и S22 (Ijiraq).

Характер изменений оскулирующих элементов орбит далеких спутников планет не позволяет практически представить все частоты гармоник как комбинации порождающих частот. Широко применяемый метод Фурье-анализа в этом случае не дает приемлемого результата. Поэтому в работе (Емельянов, Вашковьяк, 2012) была предпринята попытка разработать метод построения функций, аппроксимирующих изменения элементов орбит, в виде тригонометрических сумм с различными, не связанными между собой частотами. Такой метод был разработан, алгоритмизирован и применен.

Фактически в этой работе был предложен новый оригинальный метод частотного анализа. Этот метод обладает существенной особенностью. В тех случаях, когда в исследуемом сигнале присутствует ряд гармоник с точно выраженными частотами и амплитудами, эти гармоники распознаются совершенно точно. Их частоты и амплитуды вычисляются с точностью представления чисел в компьютере.

10.7.4. Определение минимальных расстояний между орбитами далеких спутников планет

Описанным выше методом частотного анализа были найдены аппроксимирующие функции пяти элементов оскулирующих орбит всех 107 далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Эти функции можно использовать для изучения эволюции орбит спутников на больших интервалах времени. Остается неизученным вопрос о точности представления элементов оскулирующих орбит за пределами интервала времени исходной последовательности значений, по которой делалась аппроксимация. Мы ограничимся лишь замечанием о том, что точность медленно ухудшается с удалением от границ этого интервала.

Одним из применений найденных функций может быть изучение обстоятельств взаимных сближений спутников. Эти сближения могут происходить весьма редко, однако на очень больших интервалах времени накапливается много сближений, они могут определять картину эволюции орбит, в частности, превращать временный захват спутника (с гелиоцентрической орбиты на планетоцентрическую) в постоянный.

Поскольку положение спутников на орбитах на больших интервалах времени не может быть вычислено достаточно точно, чтобы выделить их сближение, то остается довольствоваться установлением фактов пересечения или «сближения» орбит.

Если оскулирующие орбиты двух спутников в какой-то момент времени имеют участки, которые близки в пространстве, то существует возможность тесного сближения самих спутников. Представляет интерес задача установления всех фактов «сближения» или пересечения орбит пар спутников на некотором достаточно большом интервале времени. Так мы приходим к задаче вычисления минимального расстояния в пространстве между двумя софокусными эллипсами, заданными пятью параметрами. В литературе для обозначения этой величины установился англоязычный термин Minimum Orbital Intersection Distance (MOID).

Алгоритм приближенного вычисления искомого минимального расстояния может быть очень простым. Следует разметить равномерно каждую орбиту точками и вычислить расстояния между всеми парами точек на двух разных эллипсах. Затем выбрать минимальное из полученных значений. Ясно, что такой способ потребует значительного времени вычислений и даст ограниченный по точности результат.

Задача определения MOID рассмотрена в работе (Valuev, Kholshchepnikov, 2005). Авторами этой работы показано, что решение задачи сводится к поиску действительных корней тригонометрического полинома восьмой степени. Для практического решения задачи была использована вычислительная программа, любезно предоставленная авторами работы (Valuev, Kholshchepnikov, 2005). В качестве входных данных программы для каждого из двух спутников задаются элементы их кеплеровских орбит: большая полуось a , эксцентриситет e , наклон i , угловое расстояние перицентра от восходящего узла ω , долгота восходящего узла Ω . Результатом работы программы оказываются значения истинных аномалий для точек каждой орбиты, между которыми достигается минимальное расстояние и само вычисленное значение этого расстояния.

С помощью указанной вычислительной программы была составлена процедура определения минимального расстояния между орбитами пар спутников для последовательности моментов времени с заданным шагом на заданном интервале. Элементы орбит вычисляются по найденным аппроксимирующим функциям, как это опи-

сано выше. Процедура также выделяет случаи, когда между двумя последовательными моментами времени происходили пересечения орбит, как двух линий в пространстве.

10.7.5. Предлагаемый интернет-ресурс исследования эволюции орбит и сближений далеких спутников планет

Все описанные выше методики и процедуры реализованы в виде вычислительной программы, пользование которой организовано через Интернет. Интерфейс с программой устроен на страницах специального сайта в Интернете. Пользователю после выбора системы спутников по имени планеты предлагаются следующие действия.

1. Вывод на экран на отдельной странице параметров тригонометрических полиномов, аппроксимирующих изменение пяти элементов кеплеровской оскулирующей орбиты одного далекого спутника планеты, выбранного из предлагаемого списка. Кроме коэффициентов и частот, выдаются некоторые сопутствующие данные.

2. Вывод на экран на отдельной странице таблицы значений всех пяти элементов кеплеровской оскулирующей орбиты выбранного спутника с заданным шагом по времени на заданном интервале. По желанию пользователя, вместо элементов e, i, ω, Ω , могут выдаваться функции элементов $e \sin \omega, e \cos \omega, \sin i \sin \Omega, \sin i \cos \Omega$. В конце таблицы выводятся также минимальное, среднее и максимальное значения большой полуоси, эксцентриситета.

3. Вывод на экран на отдельной странице таблицы значений минимального расстояния между орбитами (MOID) двух выбранных спутников с заданным шагом по времени на заданном интервале. В таблице выдаются также значения взаимного наклона двух орбит. После этой таблицы выдается список моментов всех пересечений двух орбит, случившихся на заданном интервале времени. Эти моменты вычисляются с точностью до шага по времени в таблице значений минимальных расстояний.

Предлагаемый интернет-ресурс доступен в «Службе естественных спутников планет» по адресу <http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/multisat/index.html> Нужно пройти по ссылке «Outer Natural Satellites Orbits Ephemerides» в конце страницы.

10.7.6. Примеры вычисления минимальных расстояний между орбитами спутников

Рассмотрим теперь пример вычислений зависимости от времени минимального расстояния между орбитами двух спутников. Для пары спутников J6 (Himalia) и J7 (Elara) эта зависимость показана на рис. 10.6, а для спутников J6 (Himalia) и J8 (Pasiphae) — на рис. 10.7. Точками на оси времени показаны моменты пересечений орбит.

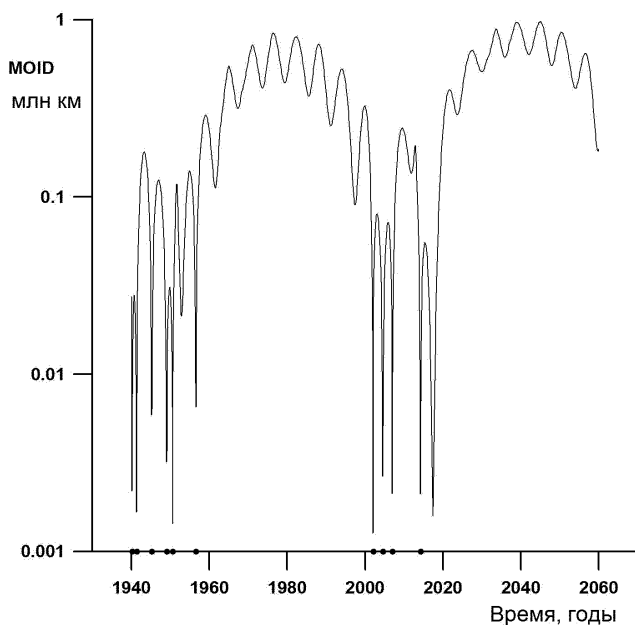


Рис. 10.6. Изменение минимального расстояния между орбитами (MOID) спутников J6 (Himalia) и J7 (Elara). Точками показаны моменты пересечений двух орбит. Линии графиков не достигают нулевых значений из-за дискретности опорных точек графика.

Заметим, что спутники J6 (Himalia) и J8 (Pasiphae) принадлежат к разным семействам орбит далеких спутников Юпитера. Большие полуоси их орбит отличаются примерно вдвое. Оказывается, что пересечения орбит этих спутников случаются так же часто, как и пересечения орбит двух спутников J6 (Himalia) и J7 (Elara), при-

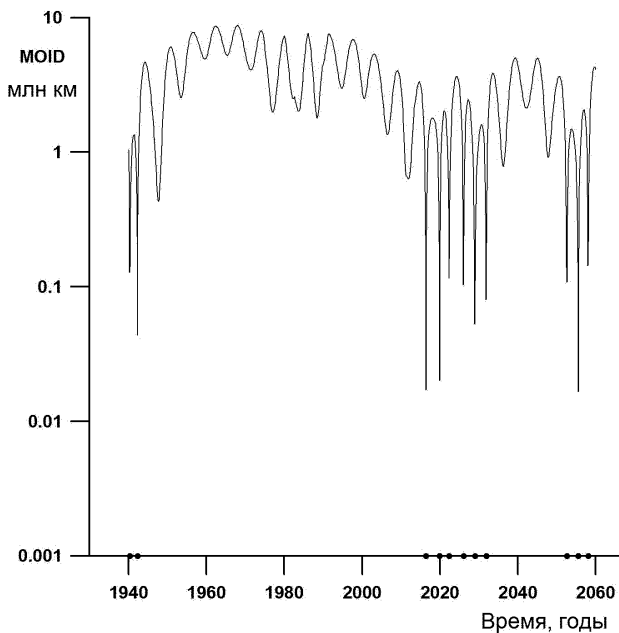


Рис. 10.7. Изменение минимального расстояния между орбитами (MOID) спутников J6 (Himalia) и J8 (Pasiphae). Точками показаны моменты пересечений двух орбит. Линии графиков не достигают нулевых значений из-за дискретности опорных точек графика.

надлежащих к одной группе и имеющих примерно равные большие полуоси орбит.

Для всех 54 открытых далеких спутников Юпитера были выполнены вычисления взаимных расстояний и моментов пересечений орбит по всем 1431 комбинациям пар спутников на интервале времени тысячу лет с 2010 по 3010 год. Только для 155 из 1431 комбинаций пар спутников не случилось ни одного пересечения орбит на этом интервале времени. Для остальных пар случилось от 2 до 330 пересечений. Максимальное количество пересечений 330 оказалось у орбит спутников J33 (Euanthe) и J40 (Mneme). Экстремальные значения элементов эволюционирующих орбит этих спутников, а также периоды циркуляции узлов и аргументов перицентров весьма близки между собой, как это можно видеть из данных, приведенных, в частности, в работе (Вашковьяк, Тесленко, 2008а). Для всех рассмотренных пар спутников были вычислены также суммарные

промежутки времени, в течение которых взаимные расстояния между орбитами не превышали 100 тыс. км. Только в 214 парах из 1431 орбиты спутников не приближались друг к другу ближе 100 тыс. км на рассматриваемом интервале в тысячу лет. В остальных парах орбиты находились на более близком расстоянии в течение суммарного времени от 2 до 313 лет. Максимальное суммарное время сближений на расстояния менее 100 тыс. км оказалось 313 лет для пары J23 (Kalyke) и S/2003 J9. Для этой пары достаточно близкими оказываются экстремальные значения наклонов, а также периоды циркуляции узлов и аргументов перицентров: $160^\circ \leq i \leq 168^\circ$, 87.4 года, 80.4 года, и $158^\circ \leq i \leq 167^\circ$, 86.8 года, 76.6 года, соответственно.

Аналогичные вычисления на том же интервале времени в тысячу лет были сделаны для 38 далеких спутников Сатурна. В 703 комбинациях пар спутников только 46 не имели пересечений орбит. Максимальное число пересечений — 124 имели орбиты спутников S19 (Ymir) и S/2007 S3. Для этой пары достаточно близкими оказываются лишь экстремальные значения наклонов: $169^\circ \leq i \leq 176^\circ$ и $171^\circ \leq i \leq 177^\circ$ соответственно (Вашковьяк, Тесленко, 2008b). В 41 паре орбиты не сближались на расстояния меньше 100 тыс. км. Максимальное суммарное время сближений орбит — 149 лет оказалось у пары спутников S/2004 S12 и S/2004 S13.

Аналогичный анализ для 9 далеких спутников Урана следует делать на большем интервале времени, поскольку периоды обращения линий узлов и линий апсид орбит этих спутников значительно больше, чем у орбит спутников Юпитера и Сатурна. Мы взяли интервал времени 4 тыс. лет, начиная с 2010 года. Из 36 комбинаций пар спутников только для 10 пар орбиты не пересекались и не «сближались» на расстояние менее 100 тыс. км. Максимальное число пересечений — 91 имели орбиты спутников U19 (Setebos) и U21 (Trinculo). Интересно отметить, что экстремальные значения большой полуоси орбиты спутника U19 более чем вдвое превышают соответствующие значения для U21. По-видимому, максимальное для системы Урана число пересечений орбит этой пары обусловлено возможностью заметного возрастания эксцентриситета орбиты U19 до значения, примерно равного 0.7. Максимальное суммарное время сближений орбит 485 лет на исследуемом интервале в 4 тыс. лет оказалось у пары спутников U16 (Caliban) и U21 (Trinculo).

Гораздо меньше пересечений и сближений испытывают орбиты

6 далеких спутников Нептуна, включая N2 (Nereid). Исследования были проведены на интервале времени 8 тыс. лет, поскольку периоды обращений линий узлов и линий апсид орбит далеких спутников Нептуна весьма велики. С орбитой Nereid было 6 пересечений только орбиты спутника N9 (Halimede). Орбиты остальных 5 далеких спутников имели взаимные пересечения и «сближения» на расстоянии менее 100 тыс. км. Максимальное число пересечений — 73 на интервале времени 8 тыс. лет имели спутники N10 (Psamathe) и N13 (Neso). Это наиболее удалённые от Нептуна спутники, для которых солнечные возмущения приводят к весьма заметной эволюции их орбит и, в частности, к возрастанию эксцентриситетов до величин, примерно равных 0.87. Отметим, что орбита спутника N13 обладает либрационным изменением аргумента перицентра, находясь в условиях известного резонанса Лидова – Козаи. Напротив, аргумент перицентра орбиты спутника N10 изменяется циркуляционно. По-видимому, подобное качественное различие в эволюции данных орбит вместе с возможностью их сильного «вытягивания» способствует относительно частым орбитальным пересечениям этой пары. Максимальное время «сближений» — 167 лет, на расстоянии менее 100 тыс. км было у орбит спутников N9 (Halimede) и N12 (Laomedeia). Интересно отметить, что в отличие от всех вышеуказанных пар спутников с обратными движениями, один из спутников этой пары N12 движется по орбите с наклоном, меньшим 90° . Это приводит к «встречному» движению узлов орбит, что, по-видимому, также способствует их частым пересечениям в процессе эволюции.

Таким образом, разработанный метод и вычислительные программы позволяют производить разнообразные и обширные исследования взаимных пространственных перемещений, а также изменений размеров и формы эволюционирующих орбит далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Приведенные примеры только демонстрируют возможности предлагаемых средств.

10.7.7. Заключение

Эволюция орбит далеких спутников планет определяется значительными возмущениями в их движении со стороны Солнца. Эти возмущения вызывают существенные изменения элементов оскулирующих кеплеровских орбит. Однако изменения эксцентриситетов и наклонов орбит ограничены известными пределами. Взаим-

ное притяжение спутников весьма мало в силу их малых размеров и масс. Однако на очень больших интервалах времени взаимные сближения спутников могут быть настолько тесными, что их орбиты могут претерпеть большие изменения. Сближения могут повлиять на статус такого небесного тела как спутника планеты. Детектирование сближений спутников весьма затруднено ввиду невозможности достаточно точного вычисления их положений на очень длительных интервалах времени. Перспективным путем исследований в этом направлении может быть предвычисление взаимных конфигураций орбит далеких спутников планет. Разработанные и предлагаемые в данной работе методы и средства вычислений призваны помочь в продвижении на этом пути.

По крайней мере, уже сейчас можно заключить, что орбиты ансамбля далеких спутников на интервалах времени в несколько тысяч лет имеют многократные пересечения и «сближения», при которых могут сближаться и сами спутники.

Классификация спутников по отдельным группам непосредственно не связана с возможными сближениями спутников, принадлежащих разным группам.

Рассматриваемая эволюционная задача требует более детальных исследований, чтобы можно было проверить существующие гипотезы о происхождении далеких спутников планет.

10.8. Уточнение теории вековых возмущений Лапласа – Лагранжа

В работе (Никончук, 2012) разработан метод вычисления вековых возмущений в задаче движения системы малых тел вокруг массивного центрального тела. По сравнению с классической теорией Лапласа – Лагранжа, основанной на линейных уравнениях, учтены члены третьей степени относительно эксцентриситетов и наклонов орбит. Соответствующее уточнение решения оказывается существенным при изучении эволюции орбит на больших интервалах времени. Предложенный метод был применен для исследования движения главных спутников Урана. Показано, что на интервалах времени больше 100 лет вклад полученных дополнительных вековых возмущений для спутника Миранда имеет порядок величины эксцентриситета орбиты, что в линейной мере составляет несколько тысяч километров. Для других спутников эффект учета нелиней-

ных членов оказывается меньшим. Очевидно, что при построении общей аналитической теории движения главных спутников Урана необходимо учитывать нелинейные члены в уравнениях для вековых возмущений. Соответствующий метод построен, исследован и предложен в работе (Никончук, 2012).

Литература к Главе 10

- Аксенов Е. П.* Один вид дифференциальных уравнений движения спутника. Труды ГАИШ. 1966. Т. 35. С. 44–58.
- Брумберг В. А.* Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. Бюллетень ИТА. 1967. Т. 11. № 2. С. 73–83.
- Вашковьяк М. А., Лидов М. Л.* Об эволюции некоторых типов орбит ИСЗ. Космические исследования. 1990. Т. 28. Вып. 6. С. 803–807.
- Вашковьяк М. А.* О специальных частных решениях двукратно осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты. Письма в *Астрономический журнал*. 1996. Т. 22. № 3. С. 231–240.
- Вашковьяк М. А.* О семействах периодически эволюционирующих орбит в осредненной задаче Хилла с учетом сжатия центральной планеты. Письма в *Астрономический журнал*. 1998а. Т. 24. № 3. С. 226–233.
- Вашковьяк М. А.* Об устойчивости стационарных решений двукратно осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты. Письма в *Астрономический журнал*. 1998б. Т. 24. № 9-10. С. 791–800.
- Вашковьяк М. А.* Эволюция орбит далеких спутников Урана. Письма в *Астрономический журнал*. 1999. Т. 25. № 7. С. 554–560.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Об устойчивости периодических решений для осредненной задачи Хилла с учетом сжатия планеты. Письма в *Астрономический журнал*. 2001. Т. 27. № 3. С. 232–240.
- Вашковьяк М. А.* Об эволюции орбит новых внешних спутников

- Урана. Письма в астрономический журнал. 2001а. Т. 27. № 6. С. 470–475.
- Вашковьяк М. А.* Эволюция орбит новых внешних спутников Сатурна и их классификация. Письма в астрономический журнал. 2001б. Т. 27. № 7. С. 533–542.
- Вашковьяк М. А.* Некоторые небесно-механические особенности системы спутников Урана. Письма в астрономический журнал. 2001в. Т. 27. № 7. С. 543–548.
- Вашковьяк М. А.* Об эволюции орбит новых внешних спутников Юпитера. Письма в астрономический журнал. 2001г. Т. 27. № 10. С. 788–794.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Об особенностях спутниковой системы Урана. Письма в астрономический журнал. 2002. Т. 28. № 9. С. 711–720.
- Вашковьяк М. А.* Эволюция орбит новых далеких спутников Нептуна и ω -либраторы в системах Сатурна и Юпитера. Письма в Астрономический журнал. 2003. Т. 29. № 10. С. 782–791.
- Вашковьяк М. А.* Численно-аналитический метод исследования эволюции орбит далеких спутников планет. Письма в Астрономический журнал. 2005. Т. 31. № 1. С. 66–75.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Об эволюции орбит некоторых далеких спутников планет-гигантов. Письма в Астрономический журнал. 2005. Т. 31. № 2. С. 154–160.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Некоторые особенности эволюции орбиты спутника Юпитера J34 (Europe). Письма в Астрономический журнал. 2007. Т. 33. № 11. С. 873–880.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Эволюционные характеристики орбит внешних спутников Юпитера. Астрономический вестник. 2008а. Т. 42. № 4. С. 301–316.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Эволюционные характеристики орбит внешних спутников Сатурна, Урана и Нептуна. Астрономический вестник. 2008б. Т. 42. № 6. С. 521–537.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Уточненная модель эволюции далеких спутниковых орбит. Письма в астрономический журнал. 2009. Т. 35. № 12. С. 934–950.

- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Об эволюции орбиты Нерейды. *Астрономический вестник*. 2010. Т. 44. № 1. С. 48–58.
- Вашковьяк М. А.* Конструктивно-аналитическое решение эволюционной задачи Хилла. *Астрономический вестник*. 2010. Т. 44. № 6. С. 560–573.
- Вашковьяк М. А., Вашковьяк С. Н., Емельянов Н. В.* Об эволюции спутниковых орбит под действием сжатия планеты, притяжения ее массивных спутников и Солнца. *Астрономический вестник*. 2015. Т. 49. № 4. С. 283–299.
- Вашковьяк М. А.* Особенности вековой эволюции орбит гипотетических спутников Урана. *Астрономический вестник*. 2016. Т. 50. № 6. С. 412–424.
- Гордеева Ю. Ф.* Зависимость элементов от времени в долгопериодических колебаниях в ограниченной задаче трех тел. *Космические исследования*. 1968. Т. 6. Вып. 4. С. 536–540.
- Емельянов Н.В., Кантер А.А.* Орбиты новых внешних спутников планет из наблюдений. *Астрономический вестник*. 2005. Т. 39. № 2. С. 128–140.
- Емельянов Н. В., Вашковьяк М. А.* Эволюция орбит и сближения далеких спутников планет. Средства изучения и примеры. *Астрономический вестник*. 2012. Т. 46. № 6. С. 460–473.
- Емельянов Н. В.* Возмущенное движение при малых эксцентриситетах. *Астрономический вестник*. 2015. Т. 49. № 5. С. 380–394.
- Лидов М. Л.* Эволюция орбит небесных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. Искусственные спутники Земли. М. АН СССР. 1961. Вып. 8. С. 5–45.
- Лидов М. Л.* О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников. Проблемы движения искусственных небесных тел. М.: Изд. АН СССР. 1963. С. 119–134.
- Лидов М. Л., Ярская М. В.* Интегрируемые случаи в задаче об эволюции орбиты спутника при совместном влиянии внешнего тела и нецентральности поля планеты. *Космические исследования*. 1974. Т. 12. Вып. 2. С. 155–170.

- Лидов М. Л.* Полуаналитические методы расчета движения спутников. Труды Института теоретической астрономии. 1978. Т. 17. С. 54–61.
- Моисеев Н. Д.* О некоторых основных упрощенных схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трех точек. 2. Об осредненных вариантах пространственной ограниченной круговой проблемы трех точек. Труды ГАИШ. 1945. Т. 15. С. 100–117.
- Никончук Д. В.* Нелинейная теория вековых возмущений спутников сжатой планеты. Письма в *Астрономический журнал*. 2012. Т. 38. № 12. С. 904–920.
- Орлов А. А.* Приближенное аналитическое представление пространственных движений в задаче Хилла. Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР. 1965. Т. 10. № 5(118). С. 360–378.
- Уральская В. С.* Динамика спутников планет в Солнечной системе. *Астрономический вестник*. 2003. Т. 37. № 5. С. 371–399.
- Шараф Ш. Г., Будникова Н. А.* О вековых изменениях элементов орбиты Земли, влияющих на климаты геологического прошлого. Бюллетень ИТА АН СССР. 1967. Т. 11. № 4. С. 231.
- Valuev R. V., Kholshchikov K. V.* Distance between two arbitrary unperturbed orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2005. V. 91. P. 287–300.
- Beauge C., Nesvorný D., Dones L.* A High-Order Analytical Model for the Secular Dynamics of Irregular Satellites. *Astronomical Journal*. 2006. V. 131. Issue 4. P. 2299–2313.
- Beauge C., Nesvorný D.* Proper Elements and Secular Resonances for Irregular Satellites. *Astronomical Journal*. 2007. V. 133. Issue 6. P. 2537–2558.
- Bretagnon P., Francou G.* Planetary theories in rectangular and spherical variables – VSOP 87 solutions. *Astronomy and Astrophysics*. 1988. V. 202. P. 309–315.
- Brozović M., Jacobson R. A.* The Orbits of Jupiter’s Irregular Satellites. *Astronomical Journal*. 2017. V. 153. Article id. 147, 10 pp.

- Burns J. A., Carruba V., Nesvorny D., Cuk M., Tsiganis K.* Chaos and Effects of Planetary Migration for the Saturnian Satellite Kiviuq. American Astronomical Society, DDA meeting № 35, № 07.06. 2004. Bulletin of the American Astronomical Society. V. 36. P. 860–860.
- Correa Otto J., Leiva A. M., Giuppone C. A., Beauge C.* Mapping the ν_{solar} secular resonance for retrograde irregular satellites. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2010. V. 402. Issue 3. P. 1959–1968.
- Cuk M., Burns J. A.* On the Secular Behavior of Irregular Satellites. Astronomical Journal. 2004. V. 128. P. 2518–2541.
- Cuk M., Gladman B. J.* Irregular satellite capture during planetary resonance passage. Icarus. 2006. V. 183. P. 362–372.
- de Oliveira D. S., Winter O. C., Neto E. V., de Felipe G.* Irregular Satellites of Jupiter: a study of the capture direction. Earth, Moon, and Planets. 2007. V. 100. № 3–4. P. 233–239.
- Emelyanov N. V.* Ephemerides of the outer Jovian satellites. Astronomy and Astrophysics. 2005. V. 435. P. 1173–1179.
- Emel'yanov N. V., Arlot J.-E.* The natural satellites ephemerides facility MULTI-SAT. Astronomy and Astrophysics. 2008. V. 487. P. 759–765.
- Emelyanov N.V.* Precision of the ephemerides of outer planetary satellites. Planetary and Space Science. 2010. V. 58. P. 411–420.
- Frouard J., Fouchard M., Vienne, A.* Chaoticity of the Jovian Irregular Satellites. American Astronomical Society. 2009. DPS meeting № 41, № 38.08.
- Frouard J., Fouchard M., Vienne, A.* The Long-term Evolution of the Jovian Irregular Satellites. American Astronomical Society. 2010. DDA meeting № 41, № 9.11. Bulletin of the American Astronomical Society. V. 41. P. 936–936.
- Gaspar H. S., Winter O. C., Vieira Neto E.* Irregular satellites of Jupiter: Capture configurations of binary-asteroids. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2011. V. 415. P. 1999–2008.
- Grav T., Bauer J.* A deeper look at the colors of the saturnian irregular satellites. Icarus. 2007. V. 191. P. 267–285.

- Haghighipour N., Jewitt D.* Stability of Jovian Irregular Satellites Between Callisto and Themisto. American Astronomical Society. 2006. DPS meeting № 38, № 64.09. Bulletin of the American Astronomical Society. 2006. V. 38. P. 613–613.
- Hinse T. C., Christou A. A., Alvarellos J. L. A., Gozdziewski K.* Application of the MEGNO technique to the dynamics of Jovian irregular satellites. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2010. V. 404. P. 837–857.
- Jewitt D., Haghighipour N.* Irregular Satellites of the Planets: Products of Capture in the Early Solar System. Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 2007. V. 45. № 1. P. 261–295.
- Kovalevsky J.* Sur la theorie du mouvement d'un satellite a fortes inclinaison et excentricite. 1964. The Theory of Orbits in the Solar System and in Stellar Systems. Proceedings from Symposium no. 25 held in Thessaloniki, August 17–22, 1964. Edited by Georgios Ioannou Kontopoulos. International Astronomical Union. Symposium no. 25, Academic Press, London, p. 326.
- Kozai Y.* Secular perturbations of asteroids with the high inclination and eccentricities. Astronomical Journal. 1962. V. 67. P. 591–598.
- Kinoshita H., Nakai H.* Analytical Solution of the Kozai Resonance and its Application. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1999. V. 75. Issue 2. P. 125–147.
- Lidov M. L.* The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. Planetary and Space Science. 1962. V. 9. P. 719–759.
- Lidov M. L.* On the approximated analysis of the orbit evolution of artificial satellites. In M. Roy (ed.) «Dynamics of satellites». 1963. Symposium Paris. May 28–30. 1962. Springer-Verlag. Berlin. P. 168–179.
- Ma Y., Zheng J., Shen X.* On the Origin of Retrograde Orbit Satellites around Saturn and Jupiter. 2009. Icy Bodies of the Solar System. Proceedings of the Int. Astron. Union. IAU Symposium. 2009. V. 263. P. 157–160.
- Marsden B.G.* Central Bureau for Astronomical Telegrams. 1998. No. 6869, 6870.

- McGleam C., Hamilton D. P., Agnor C. B.* Three-Body Capture of Irregular Satellites. American Astronomical Society. 2007. DDA meeting № 38, № 3.01.
- Mignard, F.* The mean elements of Nereid. *Astronomical Journal*. 1981. V. 86. P. 1728–1729.
- Nesvorny D., Alvarellos J. L. A., Dones L., Levison H. E.* Orbital and Collisional Evolution of the Irregular Satellites. *Astronomical Journal*. 2003. V. 126. P. 398–429.
- Nesvorny D., Vokrouhlicky D., Morbidelli A.* Capture Of Irregular Satellites During Planetary Encounters. American Astronomical Society. 2007a, DPS meeting № 39, № 32.11. *Bulletin of the American Astronomical Society*. V. 39. P. 475.
- Nesvorny D., Vokrouhlicky D., Morbidelli A.* Capture of Irregular Satellites during Planetary Encounters. *Astronomical Journal*. 2007b. V. 133. P. 1962–1976.
- Orlov A. A.* Luni-solar perturbations in the moving of the artificial Earth satellites. (In Proc. of 15th Intern. Congr. on Astronaut. Paris: Gautier-Villard). Warszawa: PWN-Polish Sci. Publ. 1965. V. 1. P. 141–157.
- Philpott C. M., Hamilton D. P., Agnor C. B.* Three-body capture of irregular satellites: Application to Jupiter. *Icarus*. 2010. V. 208. № 2. P. 824–836.
- Shevchenko I. I.* The Lidov – Kozai Effect – Applications in Exoplanet Research and Dynamical Astronomy. *Astrophysics and Space Science Library*. 2017. V. 441. ISBN 978-3-319-43520-6. Springer International Publishing Switzerland, 2017.
- Tsirogiannis G. A., Perdios E. A., Markellos V. V.* Improved grid search method: an efficient tool for global computation of periodic orbits. Application to Hill's problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2009. V. 103. № 1, P. 49–78.

ФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

Резюме

Физические параметры спутников планет определяют непосредственно, если это возможно, например, при наблюдениях с космических аппаратов (КА) с помощью оптических и радиотехнических средств измерений. Это довольно дорогостоящий путь. Здесь мы рассмотрим несколько других способов. Светоотражательные свойства поверхностей спутников определяются некоторыми физическими параметрами, например, альбедо. Для определения параметров выполняют моделирование этих свойств по результатам наземных фотометрических наблюдений. В данной главе мы рассмотрим, как это делается.

Измерение звездных величин спутников не дает нам точного представления ни о размерах, ни о массах этих загадочных тел. Однако, принимая смелые гипотезы об альбедо поверхности и о плотности вещества спутников, можно давать оценки их рамеров и масс. Из-за приближенности принимаемых гипотез можно сильно ошибиться. В разных справочных источниках информации часто именно такие данные приводятся за неимением более достоверных. Определение физических параметров можно делать косвенно, по проявлениям физических свойств спутников в их движении. Пример таких действий рассмотрен в конце этой главы.

Уаакжем здесь еще, что значения некоторых физических параметров естественных спутников планет собраны и приводятся в Приложении 7. Данные обязательно снабжаются ссылками на источники.

Совершенно особый случай детектирования вулканов на спутнике Юпитера Ио по фотометрии спутника во время его покрытий и затмений другим спутником описан кратко в следующем здесь специальном разделе.

11.1. Введение

Существует несколько источников знания физических параметров спутников планет. До начала космических миссий к другим планетам исследования велись с помощью наземных наблюдений. Наблюдения с помощью космических аппаратов (КА) дают огромное количество новой информации о физических свойствах спутников. Для этого на борту устанавливают оптические и радиотехнические средства измерений. Наземные определения положения КА выполняются с очень высокой точностью. Это позволяет определять массы спутников по их гравитационному влиянию на движение КА. Каждая новая космическая миссия дает новую версию физических параметров спутников. Недостатком таких исследований является кратковременность измерений с помощью КА. Однако некоторые данные могут быть получены только путем долговременных систематических измерений. В противоположность кратковременным измерениям с борта КА наземные наблюдения могут проводиться постоянно.

Существуют два принципиально разных способа получения данных о физических свойствах спутников. Первый — непосредственное измерение физических параметров. Так измеряют, например, яркость или звездную величину объекта. Фотометрия с использованием различных фильтров и спектральные измерения дают информацию о свойствах вещества поверхности. Другой способ определения физических параметров — косвенный, по проявлениям физических свойств спутников в их движении. Астрометрические наблюдения одного спутника позволяют определять массу другого, который влияет на движение своим гравитационным притяжением. Практически поступают так: при определении параметров движения по наблюдениям в число уточняемых параметров включают массы спутников. Необходимые для этого уравнения приводятся в Главе 6 настоящей книги. Заметим, что фактически из-за очень малых масс спутников проявление их взаимного притяжения в результатах наблюдений находится на пределе точности наблюдений.

Единственный удачный случай определения массы одного спутника по астрометрическим наблюдениям другого описан здесь ниже в специальном разделе.

Определение движения спутников по астрометрическим наблюдениям позволяет получать также физические параметры планеты: ее массу, параметры ее гравитационного поля. Это также делается путем включения искомых параметров в число уточняемых. При этом необходим учет всех существенных возмущающих факторов, чтобы влияние неучтенного возмущения не привело к искажениям в определении искомых параметров. По астрометрическим наблюдениям спутников можно определять не только параметры гравитационного поля планеты, но и параметры, характеризующие вязкоупругие свойства тел планеты и спутника. Необходимые для этого уравнения приводятся в конце Главы 3.

Светоотражательные свойства поверхностей спутников также относятся к физическим параметрам. Моделирование этих свойств по результатам фотометрических наблюдений — сложная задача. Параметры светоотражательных свойств некоторых спутников приводятся в Главе 7, где описан процесс, в котором светоотражательные свойства используются.

Физические параметры спутников планет в рамках данной книги являются справочной информацией. Эти данные должны постоянно обновляться по мере появления новых сведений. В Приложении 7 дается некоторая текущая версия параметров. Все значения снабжены ссылками на источники информации.

Определение фотометрических параметров спутников не относится непосредственно к их динамике. Однако, поскольку фотометрические данные обычно сопутствуют результатам астрометрических измерений и публикуются вместе с ними, то определение звездных величин спутников иногда сопутствует изучению динамики. Пример такой деятельности описан ниже в этой главе в отдельном разделе.

11.2. Справочник по физическим параметрам спутников планет

В Приложении 7 даются следующие физические параметры почти всех известных спутников планет: радиусы или полуоси эллипсоида, приближающего форму, гравитационный параметр спутни-

ка, звездная величина видимого с Земли спутника в среднюю оппозицию планеты. Каждое приведенное значение снабжено цитированием источника данных, а соответствующие библиографические ссылки даны в конце приложения.

Приведенные значения происходят из различных способов определения. Это наземные измерения размеров, измерения с помощью космических аппаратов, а также косвенные определения параметров по влиянию спутников на движение космического аппарата или на другой спутник. Способ измерения можно найти в цитируемой литературе.

Заметим, что для многих далеких спутников планет размеры и массы известны весьма приближенно. Они определены по звездным величинам в некоторых предположениях об альбедо и плотности вещества спутников.

Для каждой группы сходных по свойствам спутников данные приводятся в отдельных таблицах.

11.3. Детектирование вулканов на спутнике Юпитера Ио с помощью наземной фотометрии

Известен и хорошо изучен эффект уменьшения яркости спутников во время их взаимных покрытий и затмений. Этому посвящена Глава 7 настоящей книги. В результате фотометрических наблюдений спутника Юпитера Ио однажды был обнаружен необычный эффект резкого уменьшения яркости с последующим восстановлением предшествующего уровня. Это было в процессе покрытия спутника Ио другим спутником Юпитера — Европой 20 февраля 1991 года при наблюдениях на обсерватории European Southern Observatory (ESO). Измерение светового потока делалось с фильтром, пропускающим инфракрасный свет с длиной волны $3.8 \mu m$. На рис. 11.1 воспроизведен график результатов этих измерений из публикации (Descamps et al., 1992). Измерялся суммарный световой поток от спутников Ио и Европа. Интерпретация наблюдаемого явления была найдена. Предшествующие наблюдения с космического аппарата Вояджер показали, что на спутнике Ио имеются действующие вулканы. Самый крупный из них, Локи, в инфракрасном свете «сияет» на спутнике, как крупный фонарь. В моменты его заслонения другим спутником, световой поток уменьшается резко и также резко затем восстанавливается. На графике заметны так-

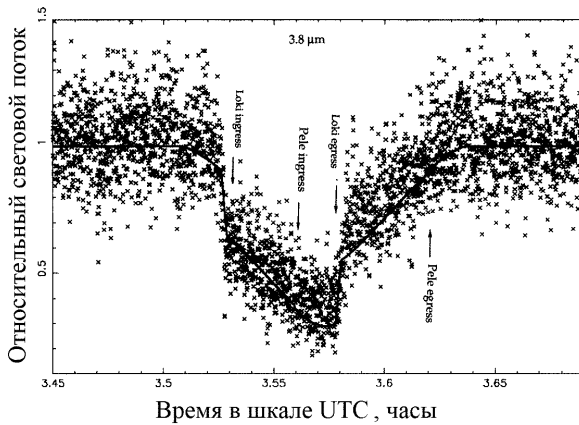


Рис. 11.1. Результаты фотометрии спутников Юпитера во время покрытия спутника Ио спутником Европа. Рисунок из работы (Descamps et al., 1992).

же изменения блеска при покрытии другого вулкана на спутнике — Пеле.

Заметим, что проявление вулканов на спутнике Ио в фотометрических наблюдениях было замечено еще ранее и опубликовано в работе (Goguen et al., 1988). В работе (Descamps et al., 1992) по построенной кривой блеска спутников были уточнены координаты вулкана Локи.

Более подробно об описанных исследованиях можно узнать из цитированных здесь работ.

11.4. Оценки физических параметров далеких спутников планет

11.4.1. Особенности далеких спутников планет

Далекие спутники планет — совершенно особенные объекты Солнечной системы. Это ясно по ряду обстоятельств. Первое: из 128 известных к настоящему времени далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна 118 (92%) открыты после 1998 года. Второе: для 11 далеких спутников планет к настоящему времени эфемериды известны с точностью до половины оборота спутника вокруг планеты (Emelyanov, 2010; Brozovic, Jacobson, 2017). Поэтому

их можно считать потерянными. Третье: за исключением спутника Сатурна Фебы и спутника Юпитера Гималии, ни к одному из далеких спутников не приближались космические аппараты настолько, чтобы можно было увидеть их размеры или определить массу спутника по его гравитационному влиянию на движение космического аппарата. Четвертое: в отличие от регулярных спутников, которые образовались из протопланетного газо-пылевого диска вместе с планетой и имеют почти круговые орбиты с малым наклоном к плоскости экватора планеты, орбиты далеких спутников имеют значительные эксцентриситеты и весьма разнообразные наклоны к плоскости орбиты планеты. Поэтому далекие спутники часто называют нерегулярными спутниками. Большинство из них имеет движение, обратное по отношению к орбитальному движению планеты. Нерегулярные спутники не могли образоваться из протопланетного облака на современных орбитах. Поэтому предполагается, что они захвачены с орбит вокруг Солнца в раннюю эпоху формирования Солнечной системы.

За исключением спутника Юпитера Гималии и спутника Сатурна Фебы, размеры и массы далеких спутников непосредственно никак не измерялись. Никакие наблюдения не дают нам таких данных. Впрочем, в некоторых справочных источниках информации, например, JPL Solar System Dynamics (<https://ssd.jpl.nasa.gov/>), можно найти значения диаметров и масс всех далеких спутников больших планет. Как же были найдены эти значения? Непосредственно из наблюдений мы имеем только измерения их яркости (звездной величины). Однако, если принять очень смелую гипотезу о светотражательных свойствах поверхности спутников (альбедо), то можно вычислить их размеры. А если принять еще более смелую гипотезу о плотности вещества, из которого они состоят, то можно вычислить и массы спутников. В итоге значения масс получаются с точностью не лучше, чем 100–200%. Если взять массу далекого спутника из справочника, то можно ошибиться в несколько раз.

Единственный случай, когда масса спутника была определена непосредственно по его гравитационному влиянию на другой спутник, движение которого наблюдалось с Земли, это определение массы спутника Юпитера Гималии, сделанное в работе (Emelyanov, 2005). Гравитационный параметр Гималии получился равным $0.28 \pm 0.04 \text{ км}^3/\text{с}^2$, что существенно отличается от значения $0.45 \text{ км}^3/\text{с}^2$, данного в JPL Solar System Dynamics (<https://ssd.jpl.nasa.gov/>). По-

дробнее эта работа изложена ниже в специальном разделе. В работе (Емельянов, Вашковьяк, Шереметьев, 2007) показано, что по наземным наблюдениям невозможно таким же образом получить массу никакого другого спутника.

Для ряда нерегулярных спутников выполнены специальные фотометрические наблюдения, в результате которых получены светоотражательные характеристики поверхностей. Эти результаты опубликованы в доступных научных журналах. Однако эти данные касаются лишь небольшой доли (31%) всех открытых к настоящему времени далеких спутников планет. Для большинства спутников, открытых после 1998 года, абсолютные звездные величины и другие фотометрические параметры, основанные на наблюдениях, в научных журналах не опубликованы.

Ввиду недостаточности опубликованных результатов фотометрии далеких спутников планет в работе (Емельянов, Уральская, 2011) была предпринята попытка определить фотометрические параметры спутников по тем фотометрическим данным, которыми снабжаются астрометрические результаты наблюдений, публикуемые в *Minor Planet Circulars* (MPC). Ценность этих данных состоит в том, что они имеются для всех далеких спутников.

В настоящей главе представлены методы и результаты определения фотометрических параметров всех далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна по данным наблюдений, опубликованным в MPC. В работе (Grav, Bauer, 2007) указывается, что эти результаты «не очень надежны для серьезных приложений», но, за неимением других источников данных для всех далеких спутников планет, можно довольствоваться тем, что получилось в работе (Емельянов, Уральская, 2011).

В следующем разделе дается краткий обзор публикаций фотометрических параметров далеких спутников планет.

11.4.2. Обзор имеющихся фотометрических данных для далеких спутников планет

Воспроизведем здесь обзор, представленный в статье (Емельянов, Уральская, 2011).

Физические характеристики 10-ти далеких спутников планет, известных еще до 1998 года, опубликованы во многих работах.

Два нерегулярных спутника J6 Гималия и S9 Феба оказались в поле зрения космических аппаратов (КА). Рассмотрим кратко

найденные физические свойства этих двух спутников. Космический аппарат «Кассини» получил изображения Гималии, из которых Группа обработки наблюдений Кассини во главе с К. Порко определила ее размеры по двум осям 150 ± 20 и 120 ± 20 км (Porco et al., 2003). Отражательная способность Гималии, альbedo, оказалась очень низкой: 0.05 ± 0.01 . Эта величина сравнима с альbedo крупных астероидов-троянец Юпитера, определенных в работе (Fernandez et al., 2003), и в сочетании с серым цветом спутника (Degewij, Zellner, Andersson, 1980; Degewij, Cruikshank, Hartmann, 1980) позволяет предположить, что поверхность богата углеродом. Это свойственно астероидам С-типа, которые распространены главным образом во внешней части Главного пояса астероидов.

Из нерегулярных спутников системы Сатурна хорошо исследован спутник Феба. Пролет космических аппаратов Voyager и Cassini позволил определить его гравитационный параметр, который оказался равным $0.5517 \pm 0.0007 \text{ км}^3/\text{с}^2$ (Rappaport et al., 2005). Поверхность Фебы достаточно темная со средним геометрическим альbedo в спектральной полосе V равным 0.081 ± 0.002 (Simonelli et al., 1999). Однако альbedo меняется вдоль поверхности примерно вдвое, показывая существенное различие материалов, из которых сложен этот спутник. Комбинируя эти данные с известными размерами, полученными с помощью космического аппарата Voyager (средний радиус 110 км), была определена плотность Фебы, которая оказалась равной $1630 \pm 45 \text{ кг/м}^3$. Это намного больше, чем плотность регулярных спутников Сатурна, которая составляет примерно 1300 кг/м^3 , но меньше плотности Тритона и Плутона 1900 кг/м^3 .

Такая средняя плотность характерна для смеси водяного льда и камня. Другие исследования показывают наличие железосодержащих и кремниевых минералов, углекислоты и органических соединений в составе Фебы (Buratti et al., 2008). На фотографиях Фебы видна сильно кратерированная древнейшая поверхность, значительно отличающаяся от поверхности астероидов, что указывает на ее происхождение вне системы Сатурна. По-видимому, захват спутника произошел из внешних областей Солнечной системы, возможно, из пояса Койпера.

В работе (Grav et al., 2003) проведена BVRI фотометрия 13 далеких спутников Юпитера, из которых только 8 являются новыми, открытыми после 1998 года. Используя полученные из наблюдений спектры, авторы цитированной работы идентифицировали Пасифе

и Гималию как астероиды С-типа, Ананке и Фемисто как астероиды Р-типа, в то время как Карме, Синопе и Каллирое подобны астероидам D-типа. Астероиды с низким альбедо и красноватым цветом, отнесенные к D- и Р-типам (D-тела более красные), являются наиболее древними, малоизмененными телами Солнечной системы. Такие свойства имеют силикаты, богатые углеродом или органическими веществами. Эти типы астероидов характерны для внешней части Главного пояса астероидов и имеют низкие альбедо $0.04 - 0.06$, так же как и астероиды-тройяцы Юпитера и «мертвые» кометы. Цвета самых ярких внешних спутников Юпитера показывают, что группа спутников с прямым движением краснее и более компактна в цвете, чем спутники с обратным движением. Инфракрасная фотометрия также показала, что 4 члена семейства Гималии (Гималия, Элара, Леда и Лиситея) имеют однородные цвета со средними показателями цветов $J - H = 0.34 \pm 0.02$, $H - K = 0.27 \pm 0.02$, $J - K = 0.65 \pm 0.02$. Для слабых спутников со звездной величиной более 24 невозможно получить точные фотометрические данные, так как для них известны только их звездные величины.

Уникальный ряд фотометрических наблюдений 7-ми далеких спутников Сатурна (S9, S19, S20, S21, S22, S26 и S29) получен в работе (Вауер et al., 2006) в январе 2005 г. на 200-дюймовом Паломарском телескопе (Palomar 200-inch telescope) и 4-метровом телескопе Бланко (Cerro Tololo Inter-American Observatory's 4-m Blanco telescope) в двух фильтрах В и R.

Результаты фотометрических наблюдений 13-ти далеких спутников Сатурна, включая Фебу, даются в работах (Grav et al., 2003; Grav, Вауер, 2007). Это спутники S9, S19, S20, S21, S22, S23, S24, S25, S26, S27, S28, S29 и S30. Исследования нерегулярных спутников Сатурна показали значительные различия в цветах от нейтрального цвета S9 Фебы и S25 Мундилфари до умеренно красного цвета S26 Альбиорикса и S22 Иджирака. В среднем они являются более красными, чем нерегулярные спутники Юпитера, но не показывают присутствия на поверхности очень красного материала, который наблюдается в Поясе Койпера. Их цвета подобны активным кометным ядрам и «мертвым» кометам.

К настоящему времени известны 9 далеких спутников Урана. Фотометрия исследована только для 6-ти из них (U16, U17, U18, U19, U20, U21). Эти нерегулярные спутники Урана имеют широкий диапазон цветов от самого синего к самому красному. В рабо-

те (Maris et al., 2001) исследованы U16 Калибан и U17 Сикоракса. Оба спутника оказались в среднем красного цвета, причем U17 Сикоракса немного голубее, чем U16 Калибан. В работе (Romon et al., 2001) показано, что спутник U17 Сикоракса более похож на транснептуновые объекты и Кентавров, чем на «троянецв» и нерегулярные спутники Юпитера. Фотометрические исследования далеких спутников Урана были продолжены также в работе (Maris, Carraro, Parisi, 2007).

В работе (Grav et al., 2004) авторы определили абсолютную звездную величину в спектральной полосе V и показатели цвета B–V и V–R для 6-ти далеких спутников Урана, которые оказались похожими на такие же величины спутников Юпитера и Сатурна. Их цвета делятся на две группы. Одна группа нейтрального цвета содержит U18 Просперо и U19 Сетевос. Другая группа слабо красная и содержит два больших спутника Урана – U17 Калибан и U17 Сикораксу.

Из 6-ти нерегулярных спутников Нептуна только для N2 Нереиды, открытой в 1949 году, имеются надежные фотометрические данные. Альbedo N2 Нереиды оказалось равным 0.2 (Thomas, Veverka, Helfenstein, 1991). Это значительно выше, чем альbedo внутренних спутников Нептуна (0.06), малых внутренних спутников Урана (0.07), J6 Гималии (0.05) и S9 Фебы (0.08). В работе (Schaefer, Schaefer, 2000) авторы на основе 224 фотометрических измерений N2 Нереиды в полосах VBRI определили цвет спутника, а Brown et al. (1999), используя инфракрасные спектры, показали, что N2 Нереида имеет водяной лед.

В работе (Grav et al., 2004) определены фотометрические параметры N2 Нереиды и одного из 5-ти новых нерегулярных спутников Нептуна N9 Галимеды. Наблюдаемые цвета N2 Нереиды и N9 Галимеды приблизительно одинаковы и позволяют предположить, что составы их поверхностей подобны. Изучение возможности столкновений между нерегулярными спутниками Нептуна показывает, что N2 Нереида и N9 Галимеда имели высокую вероятность столкновения около 4.5 млрд лет назад и, вероятно, N9 Галимеда является фрагментом N2 Нереиды (Grav, Holman, 2004). Оба спутника имеют нейтральный цвет, а цвета, альbedo и спектры подобны этим же характеристикам U4 Оберона и U2 Умбриэля и некоторым объектам пояса Койпера.

В итоге данного обзора видно, что фотометрические параметры

известны только для 8-ми из 46 (17%) новых нерегулярных спутников Юпитера, для 12-ти из 37 (32%) новых нерегулярных спутников Сатурна, для 6-ти из 9-ти нерегулярных спутников Урана и одного из 5-ти новых нерегулярных спутников Нептуна. Для 97 далеких спутников планет, не считая спутников Плутона, публикации фотометрических параметров пока не обнаружены.

Ввиду такой ограниченности имеющихся данных по фотометрии далеких спутников планет в работе (Емельянов, Уральская, 2011) была предпринята попытка определить фотометрические параметры всех спутников по фотометрическим данным, публикуемым в *Minor Planet Circulars* (MPC).

11.4.3. Фотометрическая модель для далеких спутников планет

В процессе астрометрических наблюдений спутников планет может выполняться также и фотометрия спутников. В таблицах, публикуемых в *Minor Planet Circulars* (MPC), даются астрометрические координаты спутников. Кроме того, в специальной колонке наблюдатели сообщают оценки видимых звездных величин спутников. Эти оценки даются далеко не для всех моментов времени, для которых измерены координаты. Звездные величины снабжаются также признаком той спектральной полосы, в которой велись наблюдения. В основном используются фильтры с полосой пропускания R, но для некоторых наблюдений — с полосой V.

Таким образом, из наблюдений получают звездную величину спутника m , измеренную в некоторой спектральной полосе. Эта величина зависит от расстояния наблюдателя до спутника Δ , расстояния спутника до Солнца r и угла фазы α (объектоцентрический угол между направлениями на наблюдателя и на источник света). Поэтому измеренную звездную величину спутника следует записать как функцию трех аргументов $m(r, \Delta, \alpha)$. Абсолютная звездная величина спутника $m(1, 1, \alpha)$, независимая от расстояний, может быть вычислена по формуле

$$m(1, 1, \alpha) = m(r, \Delta, \alpha) - 5 \log(r \Delta), \quad (11.1)$$

где расстояния r и Δ выражены в астрономических единицах.

Напомним здесь о соотношении между разностью звездных ве-

личин m_1 и m_2 любых двух объектов и отношением соответствующих световых потоков E_1 и E_2

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{E_1}{E_2}, \quad (11.2)$$

которое может быть полезным при фотометрических исследованиях. Заметим одно интересное свойство, следующее из соотношения (11.2). Если увеличить световой поток E_1 в $1 + \varepsilon$ раз, то при достаточно малых ε разность звездных величин $m_1 - m_2$ уменьшится на ε .

Зависимость абсолютной звездной величины спутника от угла фазы определяется долей неосвещенной части видимого диска, а также светоотражательными свойствами поверхности. Тела Солнечной системы имеют разнообразные физические свойства. Для планет и спутников, имеющих атмосферу, интенсивность отраженного света слабо зависит от угла фазы. Для шероховатых поверхностей характерен резкий всплеск яркости спутника при нулевом угле фазы.

Относительно происхождения далеких спутников планет в основном рассматривается гипотеза об их захвате с гелиоцентрических орбит (Gladman et al., 2001; Grav, Bauer, 2007). Если эта гипотеза верна, то физические свойства спутников можно считать аналогичными свойствам астероидов. Тогда для спутников можно применить двухпараметрическую фотометрическую систему, принятую Комиссией 20 Международного Астрономического Союза в 1985 году (Marsden, 1986) для астероидов. Функция, описывающая эту модель, имеет вид (Bowell et al., 1989):

$$m(1, 1, \alpha) = H - 2.5 \log[(1 - G)\Phi_1(\alpha) + G\Phi_2(\alpha)]. \quad (11.3)$$

Два параметра H и G характеризуют конкретный спутник. При этом предполагается, что светоотражательные свойства спутника не зависят от угла вращения. Если поверхность спутника неоднородна, то принимают некоторые средние по углу вращения значения параметров.

Функция $\Phi_1(\alpha)$ соответствует резкой зависимости яркости спутника от угла фазы (обычно это тела с низким значением альбедо), а функция $\Phi_2(\alpha)$ — слабой зависимости (с высоким значением альбедо). Эти функции вычисляются из следующих соотношений:

$$\Phi_i = W\Phi'_i + (1 - W)\Phi''_i \quad (i = 1, 2),$$

$$W = \exp[-90.56 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)],$$

$$\Phi'_i = 1 - \frac{C_i \sin \alpha}{0.119 + 1.341 \sin \alpha - 0.754 \sin^2 \alpha},$$

$$\Phi''_i = \exp \left\{ -A_i [\operatorname{tg}(\alpha/2)]^{B_i} \right\},$$

$$A_1 = 3.332, \quad B_1 = 0.631, \quad C_1 = 0.986,$$

$$A_2 = 1.862, \quad B_2 = 1.218, \quad C_2 = 0.238.$$

Функции Φ_1, Φ_2 определены эмпирически.

При данных параметрах H и G фотометрическая модель позволяет вычислить звездную величину спутника при любом угле фазы.

Для наглядного представления рассматриваемой фотометрической модели на рис. 11.2 даются графики зависимости приращения звездной величины как функции от угла фазы α

$$\Delta m = -2.5 \log [(1 - G)\Phi_1(\alpha) + G\Phi_2(\alpha)]$$

при различных значениях параметра G .

Если измерения звездной величины $m(r, \Delta, \alpha)$ делались в спектральных полосах R, V или B, то параметрам H и G , найденным согласно фотометрической модели (11.3), будут присвоены соответствующие индексы — H_R, G_R, H_V, G_V или H_B, G_B .

11.4.4. Определение фотометрических параметров спутников по результатам фотометрии

Параметры G и H можно определить по результатам фотометрических наблюдений спутников. Формально для этого достаточно два измерения звездной величины при разных углах фазы. На практике фотометрические измерения делаются с погрешностью. Поэтому желательно иметь как можно больше измерений при равномерном распределении по значениям угла фазы. Чтобы определить параметры G и H из множества наблюдений, по каждому измерению составляют условное уравнение относительно искомых параметров, чтобы найти оценки параметров по методу наименьших квадратов (МНК). Относительно параметров G и H условные уравнения получатся нелинейными. Можно составить линейные условные уравнения, если определять параметры a_1, a_2 , связанные с G и H соотношениями

$$H = -2.5 \log(a_1 + a_2), \quad G = \frac{a_2}{a_1 + a_2}. \quad (11.4)$$

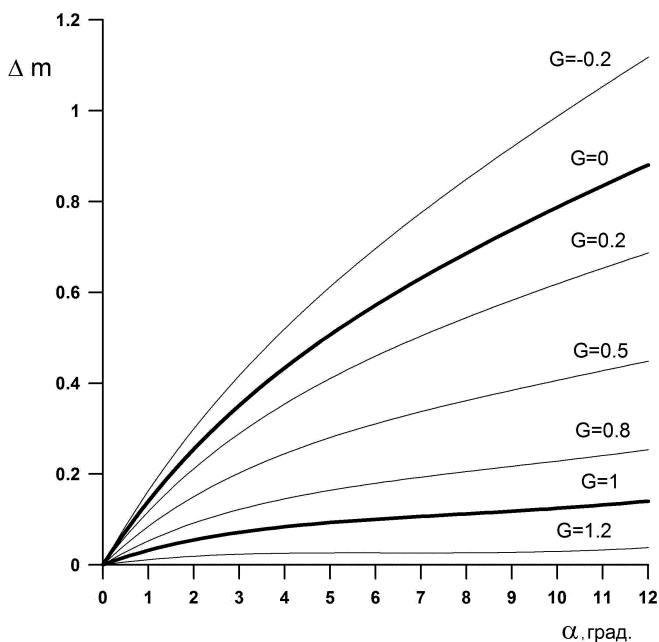


Рис. 11.2. Принятая фотометрическая модель: зависимость приращения абсолютной звездной величины спутника от угла фазы при различных значениях параметра G .

Относительно a_1, a_2 условные уравнения запишутся в виде

$$10^{-0.4m(1,1,\alpha^{(i)})} = a_1\Phi_1(\alpha^{(i)}) + a_2\Phi_2(\alpha^{(i)}) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где $m(1, 1, \alpha^{(i)})$ — абсолютная звездная величина спутника, полученная при угле фазы $\alpha^{(i)}$, а N — число измерений. Абсолютная звездная величина вычисляется по результату каждого измерения по формуле (11.1).

После того, как составлены все условные уравнения, находят оценки параметров по МНК. При этом получают не только значения параметров, но также среднеквадратичная величина отклонений измеренной абсолютной звездной величины от ее модельного значения по всем наблюдениям. Эту величину, обозначаемую через σ , можно считать точностью определения звездной величины спутника из фотометрических наблюдений для данного спутника.

После определения параметров a_1 , a_2 по МНК, фотометрические параметры спутника G и H можно вычислить по формулам (11.4). При этом σ будет характеризовать точность определения параметра H , а также получаемых из модели значений абсолютной звездной величины.

11.4.5. Исходные данные и результаты определения фотометрических параметров спутников

Астрометрические наблюдения всех далеких спутников планет опубликованы в Minor Planet Circulars (MPC). Эти наблюдения собраны также в базе данных NSDC (Natural Satellites Data Center) (Arlot, Emelyanov, 2009). База данных NSDC расположена в интернете по адресам:

<http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/obspos/index.html>,

<http://nsdb.imcce.fr/obspos/>.

Часть астрометрических измерений снабжена значениями наблюдаемой звездной величины спутника. Из данных наблюдений были выбраны оценки звездных величин спутников. Каждое значение привязано к моменту наблюдения. Оценки сделаны в основном в спектральной полосе R. Имеется небольшое количество измерений в спектральной полосе V. Однако они весьма малочисленны и поэтому непригодны для определения искомым параметров. Поэтому все наши результаты относятся к спектральной полосе R. Для каждого наблюдения по заданному моменту времени из эфемерид определялись расстояния r , Δ и угол фазы α , вычислялась абсолютная звездная величина спутника и составлялось условное уравнение, как описано выше. Затем по МНК получались оценки фотометрических параметров.

Для спутников Юпитера J6 – J13, спутника Сатурна S9 Фебы, спутника Нептуна N2 Нереиды в публикациях имеются достаточно надежные значения фотометрических параметров. Для этих спутников оценки параметров не делались.

Для части спутников определить параметры не удалось из-за недостаточного количества фотометрических измерений для разных значений угла фазы. В этих случаях мы определяли только среднюю абсолютную звездную величину спутника по имеющимся данным.

В итоге параметры G и H определены для 70 далеких спутников

Юпитера, Сатурна и Урана. Для остальных 27 далеких спутников определена средняя абсолютная звездная величина.

Анализ различных наблюдений спутников планет показывает, что максимальное количество наблюдений делается при некоторых средних значениях угла фазы α^* . Для Юпитера этот угол приближенно равен 6 град., для Сатурна — 3 град., для Урана — 1 град., для Нептуна — 0.8 град. Поэтому, с использованием построенных фотометрических моделей спутников вычислялись также абсолютные звездные величины $m(1, 1, \alpha^*)$ для указанных средних углов фазы, а также видимые звездные величины спутников, приведенные к планетным расстояниям в среднюю оппозицию $m_0(\alpha^*)$. Последнее значение удобно иметь для простой оценки наиболее вероятной видимой звездной величины спутника.

Для спутников, у которых вместо параметров была определена средняя абсолютная звездная величина, она отождествлялась с $m(1, 1, \alpha^*)$, по которой также вычислялась величина $m_0(\alpha^*)$ — значение $m(r, \Delta, \alpha)$ в среднюю оппозицию.

Все полученные фотометрические параметры 97 далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна размещены на сайте NSDC по адресам:

<http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/multisat/index.html>

<http://nsdb.imcce.fr/multisat/index.html>

в разделе «Параметры и константы».

Заметим, что указанное здесь количество спутников с определенными параметрами, как описано выше, соответствует публикации (Емельянов, Уральская, 2011). В дальнейшем, по мере обновления данных на сайте NSDC, число спутников с определенными параметрами может увеличиться.

Примеры сравнения модельных зависимостей $m(1, 1, \alpha)$ с результатами наблюдений, по которым они получены, приводятся на рис. 11.3–11.6.

Если имеются независимо определенные значения альбедо спутников, то по фотометрическому параметру H можно найти оценки их размеров. Для оценки радиусов сферических тел в работе (Bowell et al., 1989) предлагаются соотношения

$$\log p_B = 6.521 - 2 \log(2R_s) - 0.4H_B,$$

$$\log p_V = 6.259 - 2 \log(2R_s) - 0.4H_V,$$

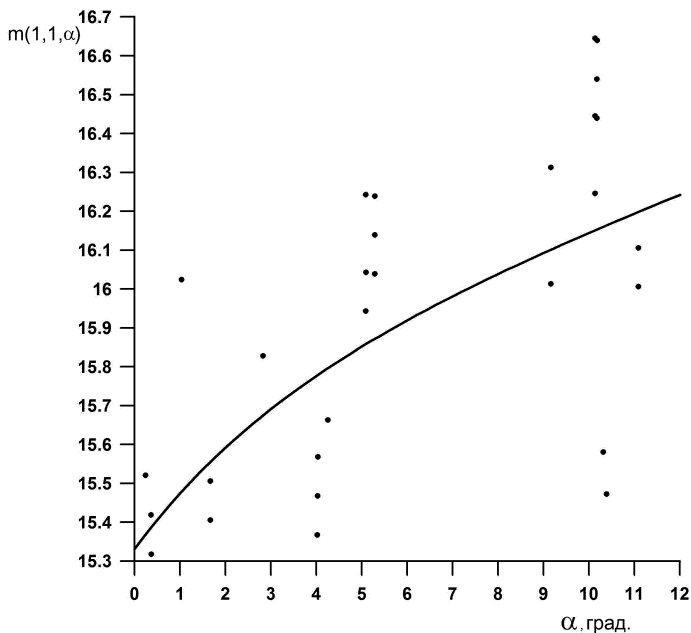


Рис. 11.3. Абсолютные звездные величины спутника J22 Гарпалике, выведенные из данных MPC (точки) для разных значений угла фазы, и уточненная фотометрическая модель этого спутника (линия).

где R_s — радиус спутника, p_B и p_V — принимаемые значения геометрического альbedo спутника в спектральных полосах В и V, а H_B и H_R — фотометрические параметры в соответствующих спектральных полосах. В этих формулах следует задавать геометрическое альbedo, определенное для нулевого угла фазы.

В случаях, когда наблюдения выполняются в спектральной полосе R, можно использовать аналогичное соотношение

$$\log p_R = 6.114 - 2 \log(2R_s) - 0.4H_R, \quad (11.5)$$

которое легко выводится из соответствующей формулы, предложенной в работе (Jewitt, Naghanipour, 2007).

По найденным значениям радиусов спутников можно определить их гравитационные параметры или массы, если принять неко-

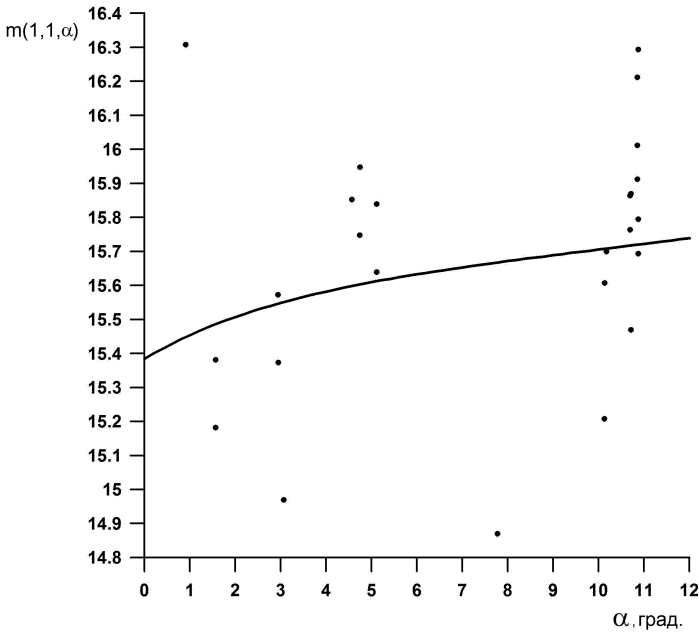


Рис. 11.4. Абсолютные звездные величины спутника J28 Автоное, выведенные из данных MPC (точки) для разных значений угла фазы, и уточненная фотометрическая модель этого спутника (линия).

торые гипотетические значения плотности вещества спутников ρ . Гравитационный параметр спутника Gm можно найти по формуле

$$Gm = \frac{4}{3}G\rho\pi R_s^3, \quad (11.6)$$

где G — гравитационная постоянная.

Следуя описанным здесь возможностям для оценки размеров и гравитационных параметров спутников, нами были предприняты соответствующие вычисления по формулам (11.5), (11.6). Поскольку значения p_R и ρ могут быть только гипотетическими, мы приняли некоторые встречающиеся в литературе значения. Для спутников Юпитера мы взяли $p_R = 0.04$, $\rho = 2.6 \text{ г/см}^3$, для спутников Сатурна $p_R = 0.06$, $\rho = 2.3 \text{ г/см}^3$, для спутников Урана $p_R = 0.04$, $\rho = 1.5 \text{ г/см}^3$, для спутников Нептуна $p_R = 0.04$, $\rho = 1.5 \text{ г/см}^3$. Если

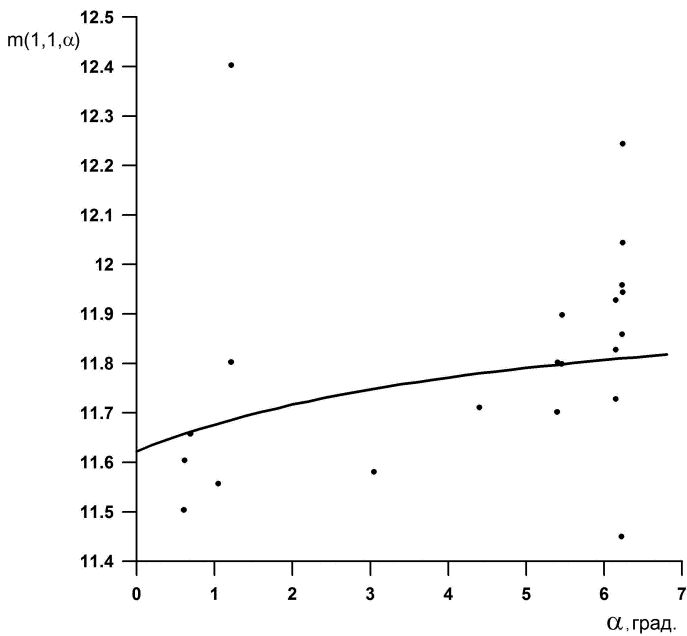


Рис. 11.5. Абсолютные звездные величины спутника S20 Палиак, выведенные из данных MPC (точки) для разных значений угла фазы, и уточненная фотометрическая модель этого спутника (линия).

возникнет необходимость получить размеры и гравитационные параметры каких-либо спутников для других гипотетических значений p_R и ρ , их можно легко перевычислить по приведенным выше формулам.

Все полученные результаты размещены в базе данных естественных спутников планет NSDC (Arlot, Emelyanov, 2009), доступной через интернет по адресам:

<http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/multisat/paramhr.htm>

<http://nsdb.imcce.fr/multisat/paramhr.htm>

11.4.6. Сравнение результатов, полученных разными авторами

Из астрометрических наблюдений далеких спутников больших планет, опубликованных в MPC, в работе (Емельянов, Уральская, 2011) были определены параметры G и H для 70 далеких спутни-

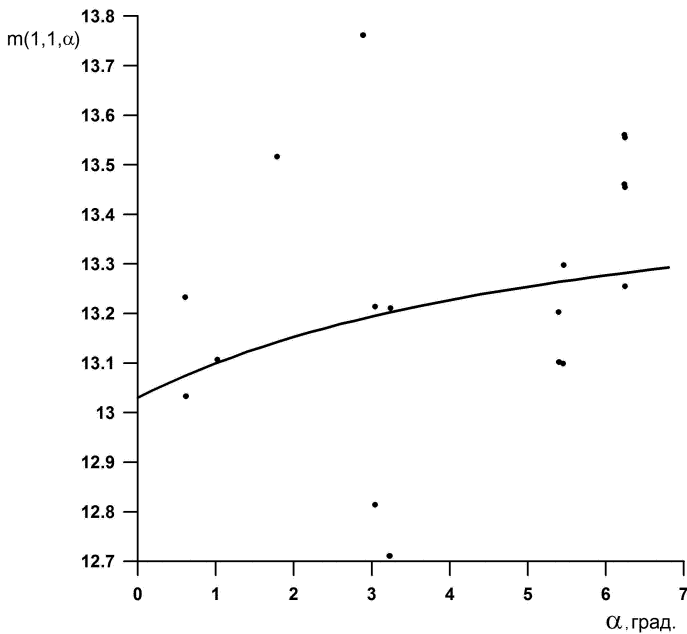


Рис. 11.6. Абсолютные звездные величины спутника S22 Иджирак, выведенные из данных MPC (точки) для разных значений угла фазы, и уточненная фотометрическая модель этого спутника (линия).

ков Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Еще для 27 далеких спутников из наблюдений найдены их средние абсолютные звездные величины.

Фотометрические параметры были найдены для 46 далеких спутников Юпитера. Только для 8 из них имеются фотометрические данные в работе (Grav et al., 2003). В этой работе параметр H определен для спектральной полосы V . Для сравнения результатов в табл. 11.1 даются значения H_V и показателя цвета $V - R$ из работы (Grav et al., 2003) и найденные в работе (Емельянов, Уральская, 2011) значения параметров H_R и G_R для 8 далеких спутников Юпитера. Приведенные в этой и следующих таблицах погрешности являются среднеквадратичными ошибками (1σ) соответствующих параметров.

Из 37 далеких спутников Сатурна, для которых были опреде-

Таблица 11.1. Фотометрические параметры восьми далеких спутников Юпитера, опубликованные в работе (Grav et al., 2003), и результаты работы (Емельянов, Уральская, 2011) для этих спутников. Для сравнения результатов значения H_V можно привести к спектральной полосе R с помощью показателей цвета $V - R$.

Спутники N название	Grav et al. 2003		Емельянов, Уральская, 2011	
	H_V	$V - R$	H_R	G_R
J17 Callirrhoe	13.92 ± 0.02	0.50 ± 0.02	14.00 ± 0.17	0.40
J18 Themisto	12.94 ± 0.01	0.46 ± 0.01	$14.30 \pm 0.40^*$	–
J19 Megaclite	15.12 ± 0.05	0.41 ± 0.07	14.65 ± 0.18	0.17
J20 Taygete	15.63 ± 0.04	0.52 ± 0.04	15.10 ± 0.25	0.21
J22 Harpalyke	16.03 ± 0.12	0.62 ± 0.22	15.33 ± 0.29	–0.03
J23 Kalyke	15.28 ± 0.04	0.70 ± 0.05	14.88 ± 0.21	–0.08
J26 Iocaste	15.27 ± 0.03	0.36 ± 0.04	14.96 ± 0.21	0.03
J27 Praxidike	15.24 ± 0.03	0.34 ± 0.03	14.44 ± 0.45	–0.20

лены фотометрические параметры, только для 12 имеются аналогичные данные в работах (Grav et al., 2003; Bauer et al., 2006; Grav, Bauer, 2007). Данные работы (Grav, Bauer, 2007) вместе с результатами работы (Емельянов, Уральская, 2011) приведены в табл. 11.2.

Из наблюдений, содержащихся в МРС, были определили фотометрические параметры для 9 далеких спутников Урана и 5 далеких спутников Нептуна. Из этих спутников только для 6 спутников Урана и одного спутника Нептуна в работе (Grav et al., 2004) даются значения H_V и показателя цвета V-R. Эти данные вместе с результатами работы (Емельянов, Уральская, 2011) даются в табл. 11.3. Для спутника N9 Галимеда в работе (Grav et al., 2004) опубликованы два варианта параметров. Первый из них получен из наблюдений, выполненных на 6.5-метровом телескопе Clay в обсерватории Magellan. Второй вариант (помечен в таблице значком **) получен с помощью 10-метрового телескопа Keck II.

В табл. 11.1 и 11.3 звездочкой помечены случаи, когда параметр G не определялся, и вместо H_R даны значения $m(1, 1, \alpha^*)$.

Из сравнения данных в Табл. 11.1, 11.2 и 11.3 можно сделать вывод, что результаты определения параметра H_R для рассмотренных

Таблица 11.2. Фотометрические параметры 12-ти далеких спутников Сатурна, опубликованные в двух работах. Для сравнения результатов значения H_V можно привести к спектральной полосе R с помощью показателей цвета $V - R$.

Спутники N название	Grav and Bauer 2007		Емельянов, Уральская, 2011	
	H_R	G_R	H_R	G_R
S19 Ymir	11.81 ± 0.02	0.01 ± 0.06	11.97 ± 0.14	0.25
S20 Paaliaq	11.27 ± 0.04	-0.04 ± 0.12	11.62 ± 0.20	0.78
S21 Tarvos	12.61 ± 0.07	0.19 ± 0.15	12.65 ± 0.22	0.77
S22 Ijiraq	12.85 ± 0.12	-0.14 ± 0.22	13.03 ± 0.27	0.64
S23 Suttungr	14.08 ± 0.08	0.68 ± 0.46	14.50 ± 0.22	1.69
S24 Kiviuq	12.43 ± 0.16	0.27 ± 0.32	12.32 ± 0.29	0.61
S25 Mundilfari	14.28 ± 0.08	0.95 ± 0.52	14.43 ± 0.29	1.48
S26 Albiorix	10.87 ± 0.01	0.42 ± 0.06	11.15 ± 0.39	0.81
S27 Skathi	14.04 ± 0.11	0.64 ± 0.52	14.26 ± 0.14	1.20
S28 Erriapo	13.27 ± 0.15	0.57 ± 0.34	13.28 ± 0.25	0.27
S29 Siarnaq	10.24 ± 0.02	0.27 ± 0.04	9.91 ± 0.10	-0.30
S30 Thrymr	13.73 ± 0.08	-0.22 ± 0.30	14.01 ± 0.19	0.48

спутников в работах разных авторов в основном согласуются в пределах ошибок 3σ . Что касается параметра G_R , то он в работе (Емельянов, Уральская, 2011) служил согласующим параметром модели. Его значения в большинстве случаев не могут использоваться для выводов о свойствах поверхностей спутников. Из графиков, показывающих примеры согласования модели с наблюдениями, видно, что точности используемых фотометрических измерений явно недостаточно для уверенного определения параметра G .

11.4.7. Выводы об оценках фотометрических параметров далеких спутников планет

В результате работы, выполненной авторами статьи (Емельянов, Уральская, 2011), из наблюдений, опубликованных в МРС, получены параметры фотометрической модели, т.е. абсолютная звездная величина H при нулевом угле фазы и согласующий параметр G для всех 97 далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Непту-

Таблица 11.3. Фотометрические параметры шести далеких спутников Урана и одного спутника Нептуна, опубликованные в работах (Grav et al., 2004) и (Емельянов, Уральская, 2011). Для сравнения значения H_V можно привести к спектральной полосе R с помощью показателей цвета $V - R$.

Спутники N название	Grav et al. 2003		Емельянов, Уральская, 2011	
	H_V	$V - R$	H_R	G_R
U16 Caliban	9.16 ± 0.04	0.57 ± 0.03	8.86 ± 0.21	1.14
U17 Sycorax	7.50 ± 0.04	0.62 ± 0.01	7.59 ± 0.19	1.45
U18 Prospero	10.56 ± 0.05	0.39 ± 0.04	10.28 ± 0.14	1.22
U19 Setebos	10.57 ± 0.05	0.35 ± 0.03	10.12 ± 0.21	-0.28
U20 Stephano	11.69 ± 0.17	0.67 ± 0.22	11.13 ± 0.20	-0.13
U21 Trinculo	11.92 ± 0.18	0.35 ± 0.19	12.42 ± 0.22	1.25
N9 Halimede	9.01 ± 0.07	0.29 ± 0.08	$9.44 \pm 0.29^*$	-
-	9.74 ± 0.08	$0.47 \pm 0.12^{**}$	-	-

на. Найденные параметры относятся к спектральной полосе R. Точность определения абсолютных звездных величин для большинства спутников составляет 0.1–0.3. Точности использованных наблюдений оказывается недостаточно для уверенного определения параметра G . Сравнение полученных значений H с результатами фотометрии, опубликованными другими авторами для 27 спутников, показывает различия, не превышающие 3σ . По найденным значениям параметра H , гипотетическим значениям альbedo и плотности вещества определены размеры спутников и их гравитационные параметры.

11.5. Определение массы Гималии по астрометрическим наблюдениям других спутников

Чтобы решать проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, нам необходимо знать физические параметры планет и спутников, а также свойства их орбитальных движений.

Далекие спутники планет — очень малые небесные тела. По наблюдениям с Земли для них можно определить только звездные

величины. Массы далеких спутников, их размеры и альbedo остаются неизвестными. Однако, если принять какую-либо гипотезу о светоотражательных свойствах поверхности спутников, то можно вычислить их размеры. Если принять еще и гипотезу о плотности вещества, из которого они состоят, то можно вычислить и массы спутников.

Знание физических свойств далеких спутников становится весьма важным, учитывая массовое открытие новых таких спутников в конце XX и начале XXI веков. Масса только одного далекого спутника Сатурна — S9 Фебы была определена непосредственно при пролете вблизи Сатурна космического аппарата «Кассини» в июне 2004 года (Jacobson, 2004).

Масса далекого спутника Юпитера Гималии была предметом особого внимания в работе (Christou, 2005). Автор этой работы продемонстрировал способность Гималии рассеивать группу спутников с близкими орбитами на большом интервале времени и показал, что это рассеивание критически зависит от массы Гималии.

Исследователям известен независимый метод для определения масс спутников, движение которых подвержено влиянию притяжения других спутников. Такой общий подход был, в частности, применен с целью определения масс астероидов во время их взаимных сближений (Michalak, 2001). Возможность определения масс таким способом существенно зависит от соотношения между точностью наблюдений и величиной взаимных возмущений небесных тел.

Попытка определения массы спутника Юпитера Гималии непосредственно по его гравитационному влиянию на другой спутник, движение которого наблюдалось с Земли, была сделана в работе (Emelyanov, 2005a).

Сначала была принципиально оценена возможность определения масс далеких спутников Юпитера рассматриваемым способом. Из рассмотрения были исключены сравнительно недавно открытые спутники, так как по оценкам их звездных величин было ясно, что они имеют весьма малые массы. Были взяты две независимые группы спутников. Первая группа — спутники на расстояниях 10–13 млн км от планеты. Это спутники Гималия (J6), Элара (J7), Лиситея (J10) и Леда (J13). Вторую группу составляют спутники на расстояниях 20–25 млн км, это Пасифе (J8), Синопе (J9), Карме (J11) и Ананке (J12). Рассматривалась задача определения массы самого массивного в каждой группе спутника по его возмущени-

ям, оказываемым на движение остальных. В первой группе это был спутник Гималия (J6), а во второй — спутник Пасифе (J8).

Далее были проведены исследования на основе результатов искусственно созданных наблюдений, так называемых «симуляций». Использовалась модель движения далеких спутников Юпитера, построенная на основе всех имеющихся наблюдений и опубликованная в статье (Emelyanov, 2005б).

Для спутников каждой из двух групп на основе модели движения были вычислены геоцентрические прямые восхождения и склонения спутников на интервале времени с 1905 по 2003 год с шагом 90 суток. К результатам таких искусственных наблюдений прибавлялись случайные ошибки, полученные датчиком случайных чисел, с нулевым математическим ожиданием и заданной дисперсией. Масса только самого массивного спутника полагалась отличной от нуля. Для Гималии (J6) было взято значение гравитационного параметра, равное $0.45 \text{ км}^3/\text{с}^2$, для Пасифе (J8) — $0.013 \text{ км}^3/\text{с}^2$. Это те значения, которые были известны в то время из публикаций.

Применялся метод дифференциального уточнения параметров движения из наблюдений, описанный в Главе 6. В число уточняемых параметров включались начальные условия решения дифференциальных уравнений движения спутников и гравитационный параметр Gm наиболее массивного из них. Совместно уточнялись параметры для четырех спутников в каждой группе. Варьировалась дисперсия ошибок наблюдений в пределах 0.2 секунды дуги. По методу наименьших квадратов (МНК) вычислялась оценка точности определения параметров.

На основе таких «симуляций» получились следующие результаты. Найденные значения масс спутников отличались от их модельных значений меньше, чем их ошибки, оцененные по МНК. Было определено соотношение между модельными ошибками наблюдений и ошибкой определения массы возмущаемого спутника. Ошибка наблюдений определялась как угловое расстояние между точным и ошибочным геоцентрическими положениями спутника. Вычислялась среднеквадратичная величина σ_d этих ошибок. По МНК определялась среднеквадратичная величина σ_{Gm} ошибок гравитационных параметров возмущающих спутников. Получились следующие численные соотношения: для Гималии (J6)

$$\sigma_{Gm} = 0.031 \sigma_d,$$

для Пасифе (J8)

$$\sigma_{Gm} = 0.32 \sigma_d.$$

Здесь σ_d выражены в секундах дуги, а σ_{Gm} в $\text{км}^3/\text{с}^2$.

Из этих соотношений следует, что если, например, ошибка наблюдений составляет 0.2 секунды дуги, то ошибка определения гравитационного параметра Гималии (J6) будет $0.0062 \text{ км}^3/\text{с}^2$, что составляет 1.4 % от модельного значения. Для Пасифе (J8) в этом случае ошибка будет $0.064 \text{ км}^3/\text{с}^2$, что в пять раз больше предполагаемого значения Gm .

Исследования, проведенные на «симуляциях», представляют идеальный случай решения проблемы. При определении параметров на основе реальных наблюдений следует ожидать более грубых результатов. Учитывая, что точность сегодняшних наземных наблюдений далеких спутников составляет примерно 0.2 секунды дуги, становится ясно, что определение массы Пасифе (J8) таким путем невозможно. Однако для Гималии (J6) остается надежда это сделать.

Далее в работе (Emelyanov, 2005a) выполнено исследование чувствительности наблюдений к вариации массы возмущающего спутника. Определена функция чувствительности $\Phi(t)$ в зависимости от времени t

$$\Phi(t) = \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial m}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial m}\right)^2}. \quad (11.7)$$

Большие значения функции чувствительности означают улучшение точности определения искомой массы. Оказалось, что резкий рост функции чувствительности возникает после случаев сближения двух спутников. Наиболее значительный рост функции возник, когда расстояние между Гималией (J6) и Эларой (J7) упало до значения 65031 км. Это произошло 15 июля 1949 года. Это значительное сближение, если учитывать, что среднее расстояние обоих спутников до планеты составляет около 12 млн км. Спутник Лиситея (J10) после его открытия в 1938 году испытывает два резких сближения с Гималией (J6): 9 июля 1954 года — на расстояние 454216 км и 19 ноября 1954 года — на расстояние 168891 км.

Эксперименты на искусственных наблюдениях показали, что наилучший состав наблюдений для определения массы возмущающего спутника получается тогда, когда интервалы времени наблюдений до и после сближения одинаковы. Точность определения

Таблица 11.4. Результаты определения гравитационного параметра Gm Гималии (J6) при различных составах наблюдений. Обозначения: $NJ7$ — общее число использованных наблюдений Эллары (J7); $N'J7$ — число использованных наблюдений Эллары (J7), выполненных до 1949 года; $NJ10$ — число использованных наблюдений Лиситеи (J10).

N	N'	N	σ_d	σ_{Gm}	Gm
J7	J7	J10	сек.дуги	км ³ /с ²	км ³ /с ²
326	38	143	0.564	0.039	0.270
326	38	-	0.551	0.041	0.310
315	36	136	0.529	0.038	0.278
315	36	-	0.521	0.039	0.297
280	24	120	0.454	0.037	0.278
280	24	-	0.442	0.039	0.284

массы улучшается с ростом величины этих интервалов. Очевидно, что при меньших расстояниях тесного сближения получается более точный результат определения массы.

Что касается определения массы Гималии (J6), то точность оказалась неизменной при добавлении наблюдений Лиситеи (J10) к наблюдениям Эллары (J7). Решающим оказалось исключительное сближение Гималии (J6) и Эллары (J7) 15 июля 1949 года.

База данных наблюдений для определения массы Гималии (J6) была та же, что и при определении параметров орбит спутников в работе (Emelyanov, 2005b). Из ряда наблюдений были исключены некоторые явно неточные данные. Было предпринято исследование зависимости результата определения массы спутника от состава используемых наблюдений. Рассматривались несколько вариантов состава данных. Результаты показаны в табл. 11.4. Здесь можно сделать вывод, что зависимость получаемого значения от состава наблюдений достаточно слабая по сравнению с ошибкой, что свидетельствует о надежности полученного результата.

По результатам работы (Emelyanov, 2005a) было сделано заключение, что наиболее достоверным значением гравитационного параметра далекого спутника Юпитера Гималии (J6), найденным из наблюдений, является следующее: 0.28 ± 0.04 км³/с². Полученное зна-

чение существенно отличается от значения $0.45 \text{ км}^3/\text{с}^2$, данного в JPL Solar System Dynamics (<https://ssd.jpl.nasa.gov/>).

В работе (Емельянов, Вашковьяк, Шереметьев, 2007) показано, что по наземным наблюдениям невозможно таким же образом получить массу никакого другого далекого спутника Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна.

После работы (Emelyanov, 2005a) спустя 12 лет появилась работа (Brozovic, Jacobson, 2017) по определению массы далекого спутника Юпитера Гималии (J6). Использован обширный набор наблюдений на значительно большем интервале времени, чем это было сделано в работе (Emelyanov, 2005a). Были взяты 129 наблюдений Эларты (J7), выполненных до 1949 года и 1876 наблюдений всего на интервале времени между 1905 и 2016 годами. Использовались 44 наблюдений Лиситеи (J10) до ее сближения с Гималией (J6) и 772 наблюдений всего на интервале времени между 1938 и 2016 годами. Получено следующее формальное значение гравитационного параметра Гималии (J6): $Gm = 0.13 \pm 0.02 \text{ км}^3/\text{с}^2$ (оценка точности по правилу 1σ). Однако в работе (Brozovic, Jacobson, 2017) сделано заключение, что гравитационный параметр Гималии (J6) может заключаться в пределах $0.13 - 0.28 \text{ км}^3/\text{с}^2$.

В этой работе сделана также оценка плотности вещества спутника Юпитера Гималии (J6) на основе средних размеров спутника по результатам наблюдений с космического аппарата «Кассини» (Rogco et al., 2003). Радиус Гималии (J6) был принят равным 67.5 км. Оказалось, что если взять $Gm = 0.13 \text{ км}^3/\text{с}^2$, то плотность получится равной $1.55 \text{ г}/\text{см}^3$. При $Gm = 0.28 \text{ км}^3/\text{с}^2$, плотность равна $2.26 \text{ г}/\text{см}^3$.

Литература к Главе 11

(См. далее отдельный список литературы для раздела 11.5)

Емельянов Н.В., Вашковьяк С.Н., Шереметьев К.Ю. Определение масс спутников планет по взаимным гравитационным возмущениям. *Астрономический вестник*. 2007. Т. 41. № 3. Р. 223–231.

Емельянов Н. В., Уральская В. С. Оценки физических параметров да-

леких спутников планет. *Астрономический вестник*. 2011. Т. 45. № 5. С. 387–395.

- Arlot J.-E., Emelyanov N.V.* The NSDB natural satellites astrometric database. *Astronomy and Astrophysics*. 2009. V. 503. P. 631–638.
- Bauer J.M., Grav T., Buratti B.J., Hicks M.D.* The phase curve survey of the irregular saturnian satellites: A possible method of physical classification. *Icarus*. 2006. V. 184. P. 181–197.
- Bowell E., Hapke B., Domingue D., Lumme K., Peltoniemi J., Harris A.W.* Application of photometric models to asteroids. *Asteroids II*. Ed. Binzel R.P. Tucson: Univ. Arizona Press. 1989. P. 524–556.
- Brown R. H., Cruikshank D. P., Pendleton Y., Veeder G.J.* NOTE: Water Ice on Nereid. *Icarus*. 1999. V. 139. Issue 2. P. 374–378.
- Buratti B.J., Soderlund K., Bauer J. et al.* Infrared (0.83-5.1 μm) photometry of Phoebe from the Cassini Visual Infrared Mapping Spectrometer. *Icarus*. 2008. V. 193. Issue 2. P. 309–322.
- Degewij J., Zellner B., Andersson L. E.* Photometric properties of outer planetary satellites. *Icarus*. 1980. V. 44. P. 520–540.
- Degewij J., Cruikshank D. P., Hartmann W. K.* Near-infrared colorimetry of J6 Himalia and S9 Phoebe - A summary of 0.3- to 2.2-micron reflectances. *Icarus*. 1980. V. 44. P. 541–547.
- Descamps P., Arlot J. E., Thuillot W., Colas F., Vu D. T., Bouchet P., Hainaut O.* Observations of the volcanoes of Io, Loki and Pele, made in 1991 at the ESO during an occultation by Europa. *Icarus*. 1992. V. 100. No. 1. P. 235–244.
- Emelyanov N.V.* The mass of Himalia from the perturbations on other satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 2005a. V. 438. P. L33–L36.
- Emelyanov N. V.* Ephemerides of the outer Jovian satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 2005b. V. 435. P. 1173–1179.
- Emelyanov N.* Precision of the ephemerides of outer planetary satellites. *Planetary and Space Science*. 2010. V. 58. Issue 3. P. 411–420.
- Fernandez Y. R., Sheppard S. S., Jewitt D.C.* The Albedo Distribution of Jovian Trojan Asteroids. *Astronomical Journal*. 2003. V. 126. Issue 3. P. 1563–1574.

- Gladman B., Kavelaars J.J., Holman M., et al.* Discovery of 12 satellites of Saturn exhibiting orbital clustering. *Nature*. 2001. V. 412. Issue 6843. P. 163–166.
- Goguen J. D., Sinton W. M., Matson D. L., Howell R. R., Dick H. M., Johnson T. V., Brown R. H., Veeder G. J., Lane A. L., Nelson R. M., Mclarren R. A.* Io hot spots: Infrared photometry of satellite occultations. *Icarus*. 1988. V. 76. P. 465–484.
- Grav T., Holman M.J., Gladman B.J., Aksnes K.* Photometric Survey of the Irregular Satellites. *Icarus*. 2003. V. 166. Issue 1. P. 33–45.
- Grav T., Holman M.J.* Near-Infrared Photometry of the Irregular Satellites of Jupiter and Saturn. *Astrophysical Journal*. 2004. V. 605. Issue 2. P. L141–L144.
- Grav T., Holman M.J., Fraser W. C.* Photometry of Irregular Satellites of Uranus and Neptune. *Astrophysical Journal*. 2004. V. 613. Issue 1. P. L77–L80.
- Grav T., Bauer J.* A deeper look at the colors of the saturnian irregular satellites. *Icarus*. 2007. V. 191. Issue 1. P. 267–285.
- Jewitt D., Haghighipour N.* Irregular Satellites of the planets: Products of Capture in the Early Solar System. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 2007. V. 45. Issue 1. P. 261–295.
- Maris M., Carraro G., Cremonese G., Fulle M.* Multicolor Photometry of the Uranus Irregular Satellites Sycorax and Caliban. *Astronomical Journal*. 2001. V. 121. P. 2800–2803.
- Maris M., Carraro G., Parisi M. G.* Light curves and colours of the faint Uranian irregular satellites Sycorax, Prospero, Stephano, Setebos and Trinculo. *Astronomy and Astrophysics*. 2007. V. 472. Issue 1. P. 311–319.
- Marsden B.G.* Notes from the IAU General Assembly. *Minor Planet Circulars*. 1986. Nos. 10193 and 10194.
- Porco C., West R. A., McEwen A. et al.* Cassini Imaging of Jupiter's Atmosphere, Satellites, and Rings. *Science*. 2003. V. 299. Issue 5612. P. 1541–1547.
- Rappaport N.J., Iess L., Tortora P. et al.* Gravity Science In The Saturnian System: The Masses of Phoebe, Iapetus, Dione, and Enceladus.

Bulletin of the American Astronomical Society. 2005. V. 37. P. 704–704.

Romon J., Bergh C., Barucci M.A. et al. Photometric and spectroscopic observations of Sycorax, satellite of Uranus. *Astronomy and Astrophysics*. 2001. V. 376. P. 310–315.

Schaefer B. E., Schaefer M. W. Nereid Has Complex Large-Amplitude Photometric Variability. *Icarus*. 2000. V. 146. Issue 2. P. 541–555.

Simonelli D. P., Kay J., Adinolfi D., Veverka J., Thomas P. C., Helfenstein P. Phoebe: Albedo Map and Photometric Properties. *Icarus*. 1999. V. 138. P. 249–258.

Thomas P., Veverka J., Helfenstein P. Voyager observations of Nereid. *Journal of Geophysical Research Supplement*. 1991. V. 96. P. 19253–19259.

Литература для раздела 11.5 — Определение массы Гималии по астрометрическим наблюдениям других спутников.

Емельянов Н.В., Вашковьяк С.Н., Шереметьев К.Ю. Определение масс спутников планет по взаимным гравитационным возмущениям. *Астрономический вестник*. 2007. Т. 41. N 3. P. 223–231.

Brozovic M., Jacobson R. The Orbits of Jupiter's Irregular Satellites. *Astronomical Journal*. 2017. V. 153. Issue 4. Article id. 147, 10 pp.

Christou A. A. Gravitational scattering within the Himalia group of jovian prograde irregular satellites. *Icarus*. 2005. V. 174. Issue 1. P. 215–229.

Emelyanov N.V. The mass of Himalia from the perturbations on other satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 2005a. V. 438. P. L33–L36.

Emelyanov N.V. Ephemerides of the outer Jovian satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 2005b. V. 43., P. 1173–1179.

- Jacobson R. A., Antreasian P. G., Bordi J. J., Criddle K. E., Ionasescu R., Jones J. B., Meek M. C., Owen W. M., Jr., Roth D. C., Roundhill I. M., Stauch J. R.* The Orbits of the Major Saturnian Satellites and the Gravity Field of the Saturnian System. American Astronomical Society, DPS meeting N36, id.15.02. Bulletin of the American Astronomical Society. 2004. V. 36. P. 1097.
- Michalak G.* Determination of asteroid masses. II. (6) Hebe, (10) Hygiea, (15) Eunomia, (52) Europa, (88) Thisbe, (444) Gyptis, (511) Davida and (704) Interamnia. Astronomy and Astrophysics. 2001. V. 374. P. 703–711.
- Porco C. C., Wes, R. A., McEven A., et al.* Cassini Imaging of Jupiter's Atmosphere, Satellites, and Rings. Science. 2003. V. 299. P. 1541–1547.

СОВРЕМЕННЫЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

Резюме

В этой главе мы рассматриваем следующие аспекты научно-организационной деятельности. Как и зачем создаются новые версии и варианты моделей движения спутников? Ясно, что модели движения естественных спутников планет, создаваемые на основе наблюдений, являются одновременно и результатом и средством исследований. Поскольку они создаются для каких-то потенциальных пользаотелей, важно знать, как обеспечивается доступ потребителей к создаваемым средствам исследований. Это рассматривается в следующих разделах книги.

Какие существуют в настоящее время общедоступные базы данных и средства вычисления эфемерид естественных спутников планет? Основные из них перечисляются ниже. Дается описание средства вычисления эфемерид MULTI-SAT, разработанного автором настоящей книги. Объясняется, какие типы координат спутника может выдавать сервер эфемерид MULTI-SAT. В специальном разделе рассказывается, какие конкретно модели движения заложены в MULTI-SAT и кто их разработал. Приводятся также источники и авторы моделей движения спутников, заложенные в службу эфемерид HIRIZONS американского института Jet Propulsion Laboratory (JPL), California Institute of Technology.

В конце главы упоминается понятие виртуальной обсерватории.

12.1. Варианты и смена версий теорий движения и эфемерид спутников планет

История разработки теорий движения спутников больших планет Солнечной системы весьма обширна. Попытки моделировать движение спутников начались с момента их открытия. В прошлые века такие теории опирались на модели кеплеровского движения. В процессе развития теории к модели кеплеровского движения добавлялись возмущения от различных факторов. Весьма широко применялась и до сих пор применяется модель прецессирующего эллипса. В попытках построить наиболее точную аналитическую теорию движения спутника планеты исследователи выводили чрезвычайно объемные формулы. Такие аналитические модели одновременно служили как для вычисления эфемерид, так и для описания эволюции орбит.

С появлением быстродействующих вычислительных машин общая задача моделирования движения спутников планет разделилась на две методически различные проблемы в соответствии с поставленными целями.

Первая и ближайшая цель — получение эфемерид на ближайшее время для проведения новых наблюдений и для осуществления космических миссий. Интервал времени, на котором моделировалось движение спутника, в этом случае относительно невелик. Поэтому весьма эффективным оказалось выполнение численного интегрирования дифференциальных уравнений движения на быстродействующих компьютерах. Простота реализации методов, когда нужно запрограммировать лишь вычисление правых частей уравнений движения, повела по этому пути многих исследователей.

Несколько более сложная проблема появляется при попытках уточнять параметры движения из наблюдений, когда нужно вычислять еще и частные производные от измеряемых величин по уточняемым параметрам. Здесь прибавляется трудность, связанная с тем, что в этой задаче моделировать движение спутника нужно на всем интервале времени наблюдений. Для некоторых спутников этот интервал уже достигает 300 лет. Но и эти проблемы в основном решаются методами численного интегрирования.

Другая цель моделирования движения спутников планет — описать эволюцию орбит на максимально возможном интервале времени. Это необходимо для выяснения истории образования планет и

спутников, а также для выяснения их судьбы в будущем. В такой постановке решение методами численного интегрирования весьма затруднено, а при некоторых вариантах задачи просто невозможно. Здесь препятствиями становятся непомерно большие затраты времени вычислений, невозможность достоверной оценки точности решения и, вообще, ограниченность точности. При этих обстоятельствах мы вынуждены прибегать к попыткам построения аналитического решения дифференциальных уравнений движения. За исключением нескольких простейших механических моделей точное аналитическое решение общей задачи получить невозможно. К тому же никакое приближенное аналитическое решение не будет справедливо на бесконечном интервале времени. Все же аналитические методы дают возможность строить модели эволюции орбит на весьма больших интервалах времени.

Проблемы эволюции орбит спутников планет рассмотрены выше в специальной Главе 10. Здесь же рассказ будет посвящен теориям и моделям движения, которые строились с целью вычисления наиболее точных эфемерид спутников планет. Путь, на котором здесь достигается прогресс, состоит в следующем. В какой-то текущий момент уже существует модель движения, основанная на всех имеющихся на этот момент наблюдениях. Наблюдатели продолжают наблюдать, получают новые астрометрические данные и публикуют их в доступных научных изданиях. Наступает время, когда появляется возможность построить новую версию модели движения и эфемерид конкретной группы спутников. Исследователи, которые занимаются этим систематически, пользуясь ситуацией, создают новую модель. Обычно она реализуется в виде доступных средств вычислений эфемерид и оказывается в распоряжении всех желающих этим воспользоваться. Иногда наблюдатели в своей работе кооперируются с коллегами, умеющими строить теории движения, и совместно публикуют новую модель движения. В этих случаях «владельцы» наблюдений обладают преимуществом по сравнению со своими не менее способными коллегами. При смене версий то время, в которое модель движения остается самой точной и лучшей в мире, бывает весьма различным. Некоторые теории сменяются новыми через год-два, а некоторые «живут» и по 20 лет.

В этой смене версий моделей движения спутников весьма важны два обстоятельства. Во-первых, правильным положением дел является одновременное наличие двух-трех независимо построенных

моделей. Это позволяет проверить и оценить точность средств вычисления эфемерид. Если существуют три модели, две из которых дают близкие между собой результаты, а результаты третьей модели существенно отличаются от результатов первых двух, становятся сомнительными достоинства этой третьей модели. Во-вторых, необходимо оставлять в доступе предшествующие модели движения спутников. Многие новые научные результаты, полученные на основе какой-то теории движения спутника, иногда нуждаются в воспроизведении и проверке. Чтобы вычисления получились согласованными, нужно применять те средства, которые уже использовались ранее.

Некоторые конструкторы моделей движения время от времени совершенствуют свои произведения чаще всего за счет расширения наблюдательной базы. Тогда появляются новые версии той же самой модели. В некоторые периоды времени могут существовать две или более совершенных моделей движения спутников, построенных разными авторами. Тогда мы говорим не о версиях, а о различных вариантах моделей.

Что касается набора учитываемых возмущающих факторов и точности применяемых методов, то нужно отслеживать, чтобы применяемые допущения теории и приближенность методов вычислений не ухудшали модель более, чем ошибки наблюдений. При этом не достаточно оценивать точность определяемых параметров. Для каждого отброшенного возмущающего фактора нужно выяснить его влияние на точность эфемерид. Обычно конструкторы моделей движения добиваются, чтобы теория была заведомо точнее наблюдений.

Теперь ясно, что как только возникает необходимость применить для исследований или для практических нужд теорию движения или средства вычислений эфемерид конкретного спутника, нужно выяснять, какая версия в настоящее время наиболее точная, достоверная и, вообще, самая подходящая. Критериев выбора здесь несколько. Достоверность определяется набором использованных наблюдений и интервалом времени наблюдений. Нужно выяснить, насколько удобна реализация модели для применения, какая модель лучше всего подходит для решения поставленной задачи. Нужно знать, как организован доступ к той или иной модели движения спутника. Этой последней проблеме посвящен следующий раздел нашей книги.

12.2. Средства обеспечения доступа к базам данных, моделям движения и эфемеридам спутников планет

В современную эпоху информационных технологий возможности использования плодов труда конструкторов моделей движения спутников планет весьма разнообразны и велики. Естественным образом происходит техническое слияние баз данных, средств решения задач и представления получаемых результатов. Рассмотрим, как это реализуется на деле.

Сначала укажем на три основных приема решения задач, связанных с базами данных и средствами вычисления эфемерид. В исходном состоянии эти средства состоят из двух элементов: файлы данных и компьютерные программы, обеспечивающие использование этих данных. Приемы работы пользователя иллюстрируются на рис. 12.1.

Первый прием заключается в том, что пользователь копирует в свой компьютер все необходимые файлы и вставляет в свою программу решения задачи те подпрограммы, которые обеспечивают доступ к данным. Программа пользователя решает задачу и по мере надобности сама обращается к подпрограммам за данными. Все происходит внутри одной программы решения задачи. Хорошим примером таких средств является система программ и данных SPICE развитой в американском институте Jet Propulsion Laboratory (Acton et al., 2015). Ее можно найти в Интернете по адресу <https://naif.jpl.nasa.gov/naif/toolkit.html>

Второй прием состоит в том, что база данных размещена всего на одном компьютере в мире. Там же находится вычислительная программа, обеспечивающая доступ к данным через интернет. Обычно это так называемый Web-сервер. Пользователь, сидя за своим компьютером, запускает в работу один из Web-браузеров (не нахожу подходящего русскоязычного термина) и общается с соответствующим Web-сервером через страницы интернета. Программа Web-браузера (Internet Explorer, Microsoft Edge, ...) позволяет пользователю сформировать запрос и получить интересующие его данные в виде файлов. Затем пользователь может запустить программу решения своей задачи, которая будет использовать полученные таким образом файлы. В мире существует несколько таких средств и они описаны ниже.

Третий прием — это, когда вычислительная программа пользователя в процессе своей работы сама обращается через интернет к базе данных, расположенной в другом компьютере или даже в другой стране, сама берет из удаленного компьютера необходимые данные и продолжает вычисления. Для этого на удаленном компьютере должна функционировать программа, которая называется Web-сервис. Этот прием применяют в основном пользователи высокой компьютерной компетенции.

Отметим, что описанные три метода применяются как для выборки из баз данных, так и для вычисления эфемерид спутников планет.

Теперь охарактеризуем отдельно элементы информационных технологий научного процесса изучения динамики спутников планет на основе наблюдений.

Исходным элементом являются базы данных. В нашем случае это в основном базы данных наблюдений спутников. Здесь одновременно существуют два подхода. Первый из них — стремление автоматизировать процесс использования результатов наблюдений. Это неизбежно приводит к необходимости унификации формы представления результатов. Унификация связана с некоторой предварительной обработкой данных на основе тех или иных методов и моделей систем координат и шкал времени. В результате данные оказываются зависимыми от моделей. При уточнении модели данные наблюдений будут уже другими. Это приводит к трудностям, а иногда и к недоразумениям. Например, при переводе исходных координат спутников, полученных с помощью старого звездного каталога в системе экваториальных координат эпохи B1950, в систему координат эпохи J2000 могут использоваться различные модели прецессии. Если координаты помещены в базу данных уже исправленными за прецессию, то не будет возможности переобработать их с другой моделью прецессии. Еще хуже бывают ситуации, когда неизвестно, какие редукции были сделаны, перед тем как результаты были помещены в базу данных. По этим причинам применяется и другой подход — помещать в базу данных результаты наблюдений спутников планет в том составе и в той форме, как это было дано наблюдателями. Данные должны сопровождаться объяснениями, взятыми из того же источника.

В настоящее время имеется не много баз данных наблюдений спутников планет, доступных через интернет. Не вдаваясь в подроб-

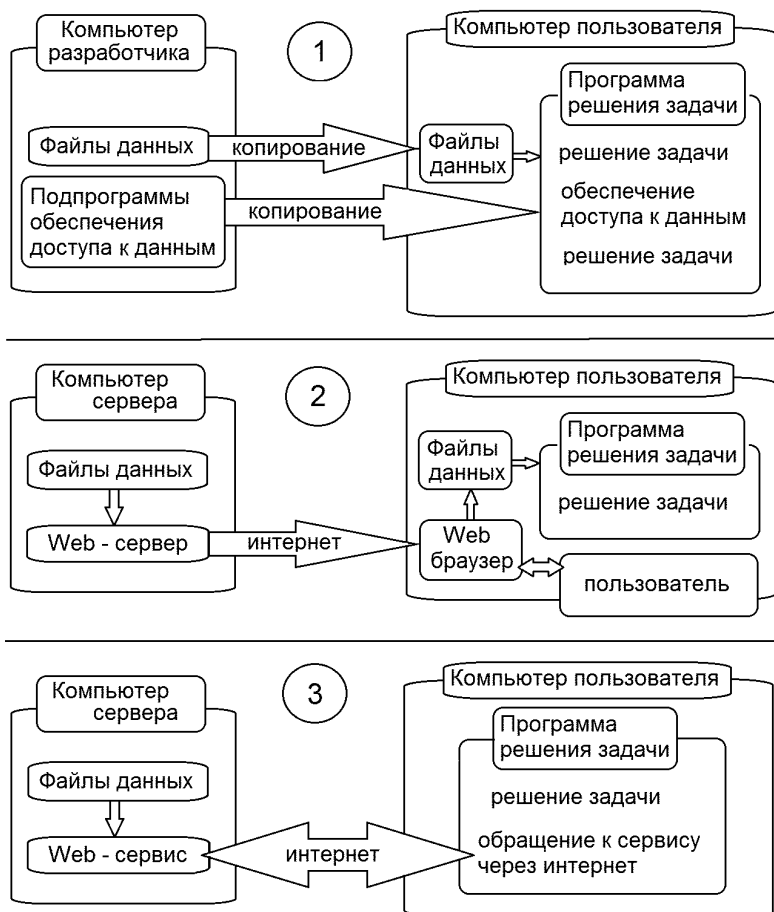


Рис. 12.1. Три приема работы пользователя с базами данных и службами эфемерид спутников планет. Смотрите объяснения в тексте.

ности состава данных, перечислим общедоступные в Интернете базы данных наблюдений.

Прежде всего это база данных, создаваемая при сотрудничестве Государственного астрономического института имени П. К. Штернберга Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (ГАИШ МГУ) и Института небесной механики и вычис-

ления эфемерид (Institut de Mécanique céleste et de calcul des éphémérides — ИМССЕ), Париж, Франция. Она имеет аббревиатуру NSDB — Natural Satellites Database. Адрес доступа к этой базе данных такой: <http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/obspos/index.html> — на сайте ГАИШ МГУ и <http://nsdb.imcce.fr/obspos/obsindhr.htm>

— на сайте ИМССЕ. Заметим, что страницы этой базы данных в Интернете составлены на трех языках: русском, английском и французском. Объявление о создании базы данных NSDB и краткое ее описание опубликовано в работе (Arlot, Emelyanov, 2009). База данных наблюдений состоит из двух частей. Первая, условно обозначаемая как NSDB1, составляется уже давно. Используется принцип размещения данных наблюдений точно в том составе и виде, как они были опубликованы. Фактически это цифровые копии таблиц данных, которые взяты из публикаций. Они сопровождаются необходимыми для использования описаниями, взятыми также из публикаций. Вторая часть — Standard astrometric data содержит те же данные, что и NSDB1, но данные имеют стандартизованную форму. В этой базе данных предлагаются средства для выборки данных из базы. Адрес доступа к этой базе данных такой:

<http://nsdb.imcce.fr/nsdb/home.html>

В базе данных NSDB собраны все опубликованные наблюдения всех известных спутников планет. Еще подробнее NSDB описана ниже.

Другая база данных наблюдений содержится на сайте Центра малых планет (Minor planet center — MPC). Эта база данных ограничивается наблюдениями только далеких спутников планет. Туда помещаются результаты, публикуемые в циркулярах MPC. Формат данных наблюдений в этой базе стандартный. Он примерно такой же, как и для публикации наблюдений малых планет. Описание формата данных можно найти на сайте MPC. Адреса страниц на этом сайте иногда изменяются, поэтому приведем здесь сначала адрес общего доступа к сайту MPC:

<http://minorplanetcenter.net/iau/mpc.html>

Файл с наблюдениями далеких спутников больших планет можно скопировать со страницы по адресу

<http://www.minorplanetcenter.net/iau/ECS/MPCAT-OBS/MPCAT-OBS.html>

Для этого нужно пойти по ссылке

Natural outer irregular satellites of the giant planets.

Некоторые обсерватории имеют свои базы данных наблюдений спутников планет. Пример такой базы — это База данных наблюдений планет и их спутников Пулковской обсерватории (Pulkovo Database of Observations of Planets and Their Satellites). Адрес в Интернете <http://pulddb.ru/db/sdb.php>

Более общая база данных наблюдений тел Солнечной системы Пулковской обсерватории имеет адрес <http://pulddb.ru/db/index.php>

Страницы доступа к этой базе данных позволяют выбрать наблюдения конкретного спутника на заданные годы наблюдений или за все годы.

Морская обсерватория Соединенных штатов Америки (United States Naval Observatory — USNO) Flagstaff имеет свою базу данных наблюдений планет и спутников. На странице по адресу <http://www.usno.navy.mil/USNO/astrometry/optical-IR-prod/solsys/fastt-plansat>

можно получить доступ к наблюдениям, выполненным на телескопе, который называется Flagstaff Astrometric Scanning Transit Telescope. Доступ должен осуществляться по ссылкам, обозначающим годы. Заметим, что доступ к этим страницам с наблюдениями открыт только с компьютеров, расположенных вне территории России.

Результаты астрометрических наблюдений планет и спутников, выполняемых на обсерватории Table Mountain, Калифорния, США, доступны в Интернете на странице <https://ssd.jpl.nasa.gov/dat/planets/ccd1.tmo.html>.

Кроме баз данных наблюдений спутников планет могут быть полезными базы данных физических параметров спутников. Таких баз данных также немного в доступе через интернет. Укажем только некоторые из них. В рамках базы данных NSDB (ГАИШ МГУ — ИМССЕ) имеются страницы «Параметры и константы». Для доступа туда нужно сначала войти в NSDB по указанным выше адресам, а затем пройти по ссылкам: Базы данных — Параметры и константы. Далее можно попасть на страницы:

- Массы спутников,
- Размеры спутников,
- Фотометрические свойства спутников,
- Параметры вращения спутников.

Другой источник данных о физических свойствах спутников планет — это справочно-информационная система Динамика Сол-

нечной системы лаборатории Jet Propulsion Laboratory Калифорнийского технологического института, США. Она доступна в Интернете по адресу <https://ssd.jpl.nasa.gov/>.

Имеется единственная специализированная библиографическая база данных по естественным спутникам планет, созданная в рамках NSDB (ГАИШ МГУ - IMCCE). Чтобы попасть туда через Интернет, нужно войти сначала в NSDB по одному из адресов, указанных выше, а затем пройти по ссылкам: Базы данных — Библиография.

Конечно, всю библиографию по исследованиям естественных спутников планет охватывает библиографическая база данных по астрономии The SAO/NASA Astrophysics Data System Abstract Service. Доступ для поиска библиографии осуществляется по адресу http://adsabs.harvard.edu/abstract_service.html

Теперь рассмотрим имеющиеся средства вычисления эфемерид естественных спутников планет, доступные через интернет. Заметим, что такие средства называют еще службами эфемерид или просто эфемеридами.

Одним из наиболее развитых средств вычисления эфемерид спутников планет является сервер MULTI-SAT. Он создан, поддерживается и сопровождается совместно: Институтом небесной механики и вычисления эфемерид (IMCCE), Париж, Франция и Отделом небесной механики ГАИШ МГУ. Объявление о создании службы MULTI-SAT и краткое ее описание содержится в публикации (Emel'yanov, Arlot, 2008). Адреса доступа к службе MULTI-SAT следующие:

<http://nsdb.imcce.fr/multisat/> — на сайте IMCCE

<http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/multisat/> — на сайте ГАИШ МГУ.

Более подробно это средство рассмотрено ниже.

Другим развитым средством вычисления эфемерид спутников планет является сервер эфемерид HORIZONS JPL NASA, США (Giorgini et al., 1996), предоставляющий доступ к эфемеридам через Web-страницы Интернета. Адрес страницы запроса эфемерид:

<http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

Это средство вычисления эфемерид не только естественных спутников планет, но также почти всех тел Солнечной системы.

На страницах Интернета Minor Planet Center (MPC) имеется служба вычисления эфемерид далеких спутников планет. Доступ

туда осуществляется по адресу
<http://www.minorplanetcenter.net/iau/NatSats/NaturalSatellites.html>

В Институте прикладной астрономии Российской академии наук (ИПА РАН), Санкт-Петербург, Россия разработаны оригинальные модели движения главных спутников планет (Космодамианский, 2009; Порошина, 2013).

Значительным достижением в моделировании движения планет на основе наблюдений является серия работ ЕРМ, выполняемая в ИПА РАН. Эфемериды ЕРМ (Ephemeris of Planets and Moon) включают высокоточные орбиты планет Солнечной системы, Солнца, Луны, трёх крупнейших астероидов (Церера, Паллада, Веста) и четырёх транснептуновых объектов (Эрида, Макемаке, Хаумея, Седна). Кроме того, в ЕРМ включена эфемерида физической либрации Луны и разность динамического и земного времени ТТ-TDB. Эфемериды ЕРМ охватывают интервал времени более 400 лет (1787–2214). Детальное описание эфемерид ЕРМ содержится на сайте <http://iaaras.ru/dept/ephemeris/epm/>.

В ИПА РАН был создан интерактивный сайт для расчёта эфемерид планет и естественных спутников. Адрес сайта:
<http://iaaras.ru/dept/ephemeris/online/>.

Поддерживаются разные наборы величин для выбора вычисляемых величин: даты наблюдений и вычисленные величины в разных форматах, начальная дата и шаг, координаты геоцентрические и топоцентрические для различных пунктов на Земле и т.д. Для расчёта эфемерид планет и естественных спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна используются модели, основанные на численном интегрировании дифференциальных уравнений движения, разработанные в ИПА РАН, кроме того в целях сравнения теорий также доступны теории разных других авторов для соответствующих спутников, а также версии разных вариантов эфемерид планет DE и INPOP (указаны в «ссылках» в конце интерактивного сайта).

Отметим, что формы запроса эфемерид на страницах серверов эфемерид MULTI-SAT, HORIZONS, MPC и ИПА существенно различаются. Важным различием является число значащих цифр, которые выдаются при вычислении эфемерид. Сервер MPC выдает топоцентрические координаты спутников с точностью до единиц секунд дуги, сервер HORIZONS — с точностью до 0.001 секунд дуги, а серверы MULTI-SAT и ИПА — 6 значащих цифр после запятой в секундах дуги. Эти свойства не отражают соотношение точ-

ностей эфемерид, выдаваемых разными службами. Это только их технические возможности и ограничения.

12.3. Возможности сервера эфемерид MULTI-SAT

Одно из наиболее развитых средств, предоставляющих эфемериды спутников планет, является сервер эфемерид MULTI-SAT. Он создавался и развивался, начиная с 2002 года, на основе эфемеридных средств, которые разрабатывались в Государственном астрономическом институте имени П.К. Штернберга Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова (ГАИШ МГУ). При сотрудничестве с Институтом небесной механики и вычисления эфемерид (Institut de Mécanique céleste et de calcul des éphémérides — IMCCE), Париж, Франция эта служба эфемерид спутников планет постоянно поддерживается и развивается. При открытии новых спутников, их эфемериды добавляются в сервер. При появлении новых, более совершенных моделей движения, они вносятся в инструментарий службы. Сообщение о создании сервера эфемерид MULTI-SAT опубликовано в работе (Emel'yanov, Arlot, 2008).

Важным свойством сервера MULTI-SAT является то, что он позволяет вычислять эфемериды не только спутников, но также эфемериды всех больших планет от Меркурия до Плутона, а также эфемериды Солнца и Луны.

В мире существуют различные службы эфемерид спутников планет. Сервер эфемерид MULTI-SAT имеет особенности и преимущества по сравнению с другими аналогами. Перечислим здесь главные из них.

1. Эфемериды вычисляются для всех естественных спутников Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона, для которых имеются кем-нибудь разработанные модели движения на основе наблюдений.

2. Запрос эфемерид осуществляется со страниц интернета в удобной форме с большим разнообразием выбора систем координат, шкал времени, типов выдаваемых величин.

3. Имеется возможность вводить таблицу результатов наблюдений спутников и мгновенно получать разности «О – С» — результат сравнения наблюдений с теорией. Число наблюдений не ограничено.

4. Имеется возможность графического показа видимого расположения спутников относительно планеты.

5. Можно получать прямоугольные планетоцентрические координаты спутников, элементы оскулирующих кеплеровских орбит и их средние значения.

6. Вычисляются не только координаты спутников, но также астрометрические координаты планет.

7. Можно выбрать одну из десяти современных планетных теорий, разработанных в IMCCE, JPL NASA, Институте прикладной астрономии РАН (Питьева, 2013; Pitjeva, Pavlov, 2017).

8. Вычисляются эфемериды взаимных затмений спутников. При этом выдаются гелиоцентрические относительные координаты спутников при специальном способе вычисления светового времени.

9. Можно получить эфемериды и обстоятельства всех взаимных покрытий и затмений спутников, а также затмений спутников планеты.

10. Выдаются различные величины, сопутствующие эфемеридам спутников: видимые звездные величины спутников, планетоцентрические угловые координаты спутников, Земли и Солнца, солнечная фаза, видимые размеры планеты, горизонтальные координаты спутников в месте наблюдения.

Рассмотрим теперь подробнее возможности выбора вариантов шкал времени и систем координат.

Время может быть заданным в шкале UTC или в шкале TT.

В меню выбора эпохи экватора и равноденствия геоэквиаториальной небесной системы координат предлагаются следующие раз-
делы:

J2000 — система координат определяется выбором планетной теории. Для теорий, разработанных в JPL (DE405/LE405, DE406/LE406, ...), IMCCE (INPOP) или ИПА РАН (EPM-2015) это система ICRF. Если выбрана планетная теория VSOP87 или DE200, то система координат будет соответствующей этим теориям.

ICRF — все исходные координаты переводятся в эту систему. Если выбрана планетная теория DE200/LE200 или VSOP87, то координаты спутников или планеты переводятся сначала в систему FK5 так, как описано в работе (Standish, 1982), а затем в систему ICRF,

используя формулы перехода, описанные в работе (Feissel, Mignard, 1998).

FK5 — делается преобразование к этой системе согласно предписанию в работах, указанных в предыдущем пункте.

Mean of the date (IAU76) — сначала координаты преобразуются к системе FK5, а затем к системе экватора и равноденствия эпохи даты по формулам прецессии, предписанным постановлением IAU в 1976 году.

True of the date (IAU76, IAU80) — сначала координаты преобразуются к среднему экватору и равноденствию эпохи даты, как описано в предыдущем пункте, а затем — к истинному экватору и равноденствию путем учета нутации по алгоритму, предписанному постановлением IAU 1980 (Seidelmann, 1982).

Apparent (IAU76, IAU80) — это такое же преобразование к истинному экватору и равноденствию, как описано в предыдущем пункте, однако координаты будут уже не астрометрическими, а видимыми. Как получаются видимые координаты, описано в справочниках (Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, 1992; Introduction aux éphémérides Astronomiques, 1997). Следует учесть, что в сервере MULTI-SAT при включении учета нутации по стандарту IAU80 на самом деле используются более точные данные о вращении Земли. Как это делается, описано в конце Главы 5.

B1950 — координаты преобразуются к системе, основанной на звездном каталоге FK4. Для этого используются формулы и алгоритм, рекомендованные резолюцией MAC и описанные в работе (Aoki S., Soma M., Kinoshita H., Inoue, 1983). Это преобразование принимает во внимание E-член в выражении для абберрации и зависит от времени наблюдения или эфемериды.

B1900 — аналогично предыдущему пункту, только после преобразования координат в системе FK4 они дополнительно переводятся в систему среднего экватора и равноденствия эпохи B1900 по формулам прецессии Ньюкома.

Имеются еще пункты меню, дающие преобразования, аналогичные предыдущим пунктам, но с моделью прецессии по Ньюкому и нутации согласно резолюции MAC 1948 года. Это следующие пункты: **Mean of Date (Newcomb)**, **Mean of Jan 1 of the**

year (Newcomb), True of Date (Newcomb, IAU1948), Apparent (Newcomb, IAU1948).

Следует учесть, что в сервере MULTI-SAT все эфемериды в системе видимых координат вычисляются без учета искривления луча света, вызванного гравитацией Солнца.

Заметим, что другие системы координат, кроме ICRF, в последнее время уже не используются. Однако сервер MULTI-SAT дает возможность преобразовать эфемериды к системам, которые использовались в прошлые века. Это делается для того, чтобы можно было сравнивать с эфемеридами результаты старых наблюдений, опубликованных в статьях прошлых веков.

В сервере эфемерид спутников планет MULTI-SAT на заданные моменты времени выдаются либо прямые восхождения и склонения выбранного спутника или планеты, либо разности координат двух тел (спутника и планеты или двух спутников), называемые относительными координатами. При этом относительные координаты могут быть *дифференциальными* или *тангенциальными*, как описано в Главе 5.

В специальном меню сервера MULTI-SAT предлагаются на выбор следующие варианты типов выдаваемых данных.

Alpha, Delta (h, m, s.decimals) — на заданные момент времени выдаются прямые восхождения и склонения.

Delta(Alpha), Delta(Delta) (arcsec) — на заданные моменты времени выдаются разности прямых восхождений и склонений двух тел.

Diff. X, Y (arcsec) — на заданные моменты времени выдаются относительные дифференциальные координаты $X = \Delta\alpha \cos \delta$, $Y = \Delta\delta$, где $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ — разности прямых восхождений и склонений двух тел, а δ — склонение тела, относительно которого определены относительные координаты.

Diff. S(arcsec), Position angle (degrees) — аналогично предыдущему пункту, однако вместо X, Y выдается дифференциальное взаимное угловое расстояние и позиционный угол.

Diff. Inclination (deg), A, B (arcsec) — выдаются дифференциальные относительные координаты в небесной относительной системе координат A, B , повернутой на позиционный угол полюса планеты I , так что связь координат дается формулами $X = A \cdot \cos I + B \cdot \sin I$,

$Y = -A \cdot \sin I + B \cdot \cos I$. Позиционный угол полюса планеты I выдается перед координатами A, B .

Tang. X, Y (arcsec),

Tang. S(arcsec), Position angle (degrees),

Tang. Inclination (deg), A, B (arcsec) — аналогично предыдущим пунктам, но координаты выдаются тангенциальные (см. объяснение в Главе 5).

Pseudo-heliocentric X, Y

Pseudo-heliocentric S, Position angle — аналогично предыдущим пунктам, но координаты выдаются гелиоцентрические при специальном порядке определения светового времени для моделирования взаимных затмений двух спутников. Объяснение таких координат дано в Главе 5.

x, y, z, Vx, Vy, Vz Geo-equatorial — выдаются прямоугольные координаты и компоненты скорости выбранного спутника относительно центра планеты или относительно другого выбранного спутника. Оси координат взаимно параллельны осям геоэкваториальной системы координат.

x, y, z, Vx, Vy, Vz Geo-ecliptic — аналогично предыдущему пункту, но оси координат соответствуют геоэклиптике.

x, y, z, Vx, Vy, Vz Geo-planetocentric — аналогично предыдущему пункту, но оси координат соответствуют плоскости экватора планеты. В этой системе ось x направлена в восходящий узел экватора планеты на геоэкваторе.

Kepler osculat. orbit(geo-equat.) — выдаются элементы кеплеровской оскулирующей орбиты с моментом оскуляции соответствующим заданному моменту времени. Элементы относятся к геоэкваториальной системе координат. В конце таблицы выдаются минимальное, среднее и максимальное значение среднего движения, большой полуоси, эксцентриситета и наклона орбиты.

Kepler osculat. orbit(geo-eclipt.) — аналогично предыдущему пункту, однако система координат геоэклиптическая.

Kepler osculat. orbit(planeto-equat.) — аналогично предыдущему пункту, однако система координат планетоэкваториальная.

R, Alpha, Delta Geo-planetocentric — планетоцентрические расстояние (в км), прямое восхождение и склонение (в градусах) в геоэквиаториальной системе координат.

Plan-equat.lat.,long.,sideral of sat. — сидерические широта и долгота спутника относительно планетного экватора. Долгота отсчитывается от восходящего узла экватора планеты на плоскости земного экватора.

Plan-equat.lat.Earth.,lat.long.synodic of sat. — планетоцентрические широта Земли относительно экватора планеты, синодические планетоцентрические широта и долгота спутника в планетоэквиаториальной системе координат. Долгота спутника отсчитывается относительно проекции радиус-вектора Земли на экватор планеты.

Plan-equat.lat.Sun,lat.long.heliocentr.of sat. — планетоцентрические широта Солнца относительно экватора планеты, планетоцентрические широта и долгота спутника в планетоэквиаториальной системе координат. Долгота спутника отсчитывается относительно проекции радиус-вектора Солнца на экватор планеты.

Топос.alt.,azim.of sat.,alt.,azim.of the Sun — топоцентрические угловые координаты спутника: высота над горизонтом, азимут, часовой угол. Топоцентрические угловая высота и азимут Солнца. Фаза Луны (0.0 — для новолуния, 1.0 — для полнолуния). Если в качестве точки наблюдений выбран геоцентр, то для координат выдаются нулевые значения. Следует учесть, что при переводе координат в горизонтальную систему для заданного наземного пункта учитывается только прецессия оси вращения Земли. Атмосферная рефракция не учитывается. Гравитационное искривление луча света также не учитывается.

Dist.Sun.-Plan.,app.plan.R,Phase,magn.of sat. — геоцентрическое угловое расстояние между планетой и Солнцем, видимый уловый радиус планеты, звездная величина выбранного спутника.

Сделаем несколько важных замечаний относительно типов различных данных, которые выдаются сервером эфемерид спутников планет MULTI-SAT.

1. Планетоцентрические планетоэквиаториальные координаты Земли и Солнца позволяют предвычислять периоды возможных взаимных покрытий и затмений главных спутников больших пла-

нет. Поскольку орбиты этих спутников лежат вблизи плоскости экватора планеты, то взаимные явления происходят именно в те периоды времени, когда широты Земли и Солнца близки к нулю.

2. Синодическая планетоцентрическая долгота спутника (отсчитываемая относительно направления на Землю) в случае синхронного вращения спутника позволяет сразу определить, какой стороной повернут спутник к наблюдателю. Фактически центральный видимый меридиан на спутнике имеет в любой момент времени спутникографическую долготу, равную выдаваемой синодической планетоцентрической долготы спутника плюс 180 градусов. Спутникографическая долгота синхронного спутника отсчитывается на теле спутника от направления на планету в сторону, противоположную вращению спутника. Проще говоря, если синодическая планетоцентрическая долгота спутника равна нулю, то для наземного наблюдателя спутник расположен перед планетой. Если эта долгота равна 180 градусов, то спутник находится позади планеты.

3. Если мы хотим определить ориентацию оси вращения планеты по отношению к наземному наблюдателю, это можно сделать по двум выдаваемым углам. Перед координатами A, B (см. выше) выдается позиционный угол полюса планеты I . Наклон оси вращения планеты к картинной плоскости равен планетоцентрической планетоэкваториальной широте Земли (см. выше). Если этот угол положительный, это означает, что северный полюс планеты отклонен к наблюдателю. В частности, так можно определить видимую с Земли ориентацию колец Сатурна.

4. Для проведения наблюдений спутников важно знать угол солнечной фазы и фазы Луны и звездную величину спутника. Эти величины выдаются при соответствующем выборе пункта меню (см. выше).

12.4. Теории и модели в сервере эфемерид MULTI-SAT

Создатели теорий и моделей движения естественных спутников планет постоянно трудятся над разработкой все новых версий. Прогресс в этом деле обеспечивается в основном появлением новых результатов наблюдений. Естественно стремление исследователей использовать самые последние версии. Однако при сравнении результатов различных работ приходится иногда использовать также

предшествующие версии моделей движения спутников планет. Поэтому в службе эфемерид MULTI-SAT (ГАИШ МГУ – ИМССЕ) оставлена возможность вычисления эфемерид с помощью некоторых предшествующих версий.

Современные и самые совершенные модели движения спутников планет применяются в службах эфемерид MULTI-SAT (ГАИШ МГУ – ИМССЕ) (Emel'yanov, Arlot, 2008) и HORIZONS JPL NASA, США (Giorgini et al., 1996).

На страницах службы эфемерид MULTI-SAT имеется таблица, в которой дается список всех возможных для использования моделей движения спутников. Разумеется, по умолчанию в службе включены самые последние и совершенные версии для каждого спутника. Наиболее значимыми характеристиками моделей движения являются следующие:

- период времени и типы использованных наблюдений,
- период времени представления эфемерид,
- тип модели.

Здесь тип модели может быть одним из следующих: численное интегрирование уравнений движения, аналитическая теория движения, аналитическое представление результатов численного интегрирования, прецессирующий эллипс или более сложная комбинация методов.

Приведем здесь описание только тех моделей, которые в службе эфемерид MULTI-SAT предлагаются по умолчанию, как самые совершенные. В некоторых случаях рассматриваются также альтернативные модели. Некоторые модели построены сразу для ряда спутников в некоторых группах. Последовательность будет соответствовать планетам (от Юпитера до Плутона) и типам спутников: главные, близкие, далекие. В обозначениях некоторых моделей будет указан выбор в меню в службе эфемерид MULTI-SAT. Авторы указаны здесь ниже в описаниях моделей. Далее календарные даты приводим в форме ГГГ/ММ/ДД (год, месяц, день).

Спутники Марса Фобос и Деймос.

Выбор из меню Lainey et al. (2015). Модель построена французским исследователем Валери Ленеем (Valery Lainey) в ИМССЕ, Париж, Франция. Дифференциальные уравнения движения решались методом численного интегрирования. Использовались все наземные наблюдения на интервале времени 1877–2014 гг., а также на-

блюдения с космических аппаратов (КА), включая последние данные с КА Mars Explorer (МЕХ). Период времени представления эфемерид с 1869/12/31 по 2123/07/03. Сообщение о создании модели опубликовано в статье (Arlot et al., 2017). Эта модель отличается от той, которая опубликована в работе (Laineу, Dehant, Patzold, 2007), только составом используемых наблюдений.

Галилеевы спутники Юпитера.

Выбор из меню J1-J4 Laineу 2009, V2.0. Модель построена французским исследователем Валери Ленеем в ИМССЕ, Париж, Франция. Дифференциальные уравнения движения решались методом численного интегрирования. Использовались все наземные фотографические наблюдения и наблюдения на меридианном круге на интервале времени 1891–2007, астрометрические результаты фотометрических наблюдений спутников во время их взаимных покрытий и затмений 1973–2003 гг (каждые 6 лет). Период времени представления эфемерид с 1903/06/01 по 2043/02/13. Сообщение о создании модели опубликовано в работе (Laineу et al., 2009).

Ближкие спутники Юпитера.

Выбор из меню J5, J14–J16 Adjusted on (Jacobson, 2009). Модель построена автором в работе (Емельянов, 2015) путем уточнения параметров прецессирующего эллипса на основе эфемерид этих спутников, вычисленных по теории из публикации (Jacobson, 2013). Интервал времени эфемерид спутников ограничен только интервалом времени планетных эфемерид.

Далекie спутники Юпитера. Восемь далеких спутников Юпитера (J6–J13). Модель опубликована в работе (Emelyanov, 2005). Дифференциальные уравнения движения решались методом численного интегрирования. После публикации модель неоднократно переуточнялась на основе более широких рядов наблюдений. Для настоящей версии эфемерид использовались наземные наблюдения 1905–2016 гг. Интервал времени представления эфемерид с 1905 по 2049 год.

Новые далекие спутники Юпитера. Модель опубликована в работе (Емельянов, Кантер, 2005). Дифференциальные уравнения движения решались методом численного интегрирования. После публикации модель неоднократно переуточнялась на основе более широких рядов наблюдений. Использовались наземные наблюде-

ния на разных интервалах времени для разных спутников (от 30 сут. до 12 лет). Последние использованные наблюдения выполнены в 2018 году. Интервал времени представления эфемерид для большинства этих спутников с 1974 по 2049 год. Для некоторых спутников интервал меньше.

Главные спутники Сатурна.

Выбор из меню S1–S8 by Lainey et al. (2015). Модель построена французским исследователем Валери Ленеом в ИМССЕ, Париж, Франция. Дифференциальные уравнения движения решались методом численного интегрирования. Использовались все наземные наблюдения на интервале времени с 1885 по 2009 год, астрометрические результаты фотометрических наблюдений взаимных явлений в 1995 и в 2009 г, наблюдения с КА Cassini 2004–2012 гг. Сообщение о создании модели опубликовано в работе (Arlot et al., 2017). Период времени представления эфемерид с 1950/01/01 по 2048/01/01.

Спутники Сатурна, соорбитальные главным. Елена S12, Телесто S13, Калипсо S14, Полидевк S34.

Выбор из меню Lainey et al. (2015). Автор V. Lainey (см. выше). Дифференциальные уравнения движения решались методом численного интегрирования. Использовались наземные наблюдения 1980–1996 гг. и наблюдения с КА Cassini 2004–2012 гг. Период времени представления эфемерид с 1950/01/01 по 2049/05/16. Сообщение о создании модели опубликовано в работе (Arlot et al., 2017).

Ближние соорбитальные спутники Сатурна. Выбор из меню для S10, S11 by Nicholson et al. (1992). Спутники S10 Janus, S11 Epimetheus. Аналитическая теория. Интервал времени эфемерид спутников ограничен только интервалом времени планетных эфемерид. Опубликована в работе (Nicholson et al., 1992).

Ближние спутники Сатурна Выбор из меню для S15–S18 Jacobson et al. (2008). Спутники Атлас S15, Прометей S16, Пандора S17, Пан S18, Метона S32, Паллена S33, Дафнис S35. Модель прецессирующего эллипса. Основана на наблюдениях с КА Cassini 2004–2012 гг. Интервал времени эфемерид спутников ограничен только интервалом времени планетных эфемерид. Опубликована в работе (Jacobson et al., 2008).

Далекий спутник Сатурна Феба. Дифференциальные уравне-

ния движения решались методом численного интегрирования. Использовались наземные наблюдения 1898–2012 гг. и наблюдения с КА Cassini 2004–2012 гг. Период времени представления эфемерид с 1875/07/01 по 2022/06/30. Сообщение о создании модели опубликовано в работе (Desmars et al., 2013).

Новые далекие спутники Сатурна. Модель опубликована в работе (Емельянов, Кантер, 2005). Дифференциальные уравнения движения решались методом численного интегрирования. Использовались наземные наблюдения на разных интервалах времени для разных спутников (от 30 сут. до 12 лет). После публикации модели неоднократно переуточнялась на основе более широких рядов наблюдений. Период времени представления эфемерид для большинства этих спутников с 1974 по 2049. Для некоторых спутников интервал меньше.

Главные спутники Урана. Выбор из меню Lainey et al. (2015). Дифференциальные уравнения движения решались методом численного интегрирования. Использовались наземные наблюдения 1874–2012 гг., наблюдения с КА Voyager 2 и астрометрические результаты фотометрических наблюдений взаимных явлений 2007–2008 гг. Период времени представления эфемерид с 1847/01/00 по 2145/01/02. Первая версия модели опубликована в работе (Lainey, 2008). Переуточненная модель на основе более широкого ряда наблюдений опубликована в работе (Arlot et al., 2017).

Главные спутники Урана. Альтернативная модель. Выбор из меню Emelyanov, Nikonchuk 2013. Модель опубликована в работе (Emelyanov, Nikonchuk, 2013). Дифференциальные уравнения движения решались методом численного интегрирования. Использовались наземные наблюдения 1787–2008 гг., наблюдения с КА Voyager 2 и астрометрические результаты фотометрических наблюдений взаимных явлений 2007–2008 гг. Период времени представления эфемерид с 1787/02/12 по 2032/01/09.

Ближние спутники Урана. Модель прецессирующего эллипса. Параметры опубликованы в работах (Jacobson, 1998; Pascu et al., 1998). Модель построена на основе наблюдений с космического телескопа HST в 1994 г и наблюдений КА Voyager-2 в 1985–1986 гг. Представление эфемерид ограничено по времени только планетными эфемеридами.

Новые далекие спутники Урана. Модель опубликована в работе (Емельянов, Кантер, 2005). Дифференциальные уравнения движения решались методом численного интегрирования. Использовались наземные наблюдения для разных спутников на разных интервалах времени. После публикации модели могли переуточняться на основе более широких рядов наблюдений. Последний год наблюдений 2016. Период времени представления эфемерид для спутников U16, U17 с 1974 по 2049 год, для остальных с 1974 по 2026 год.

Спутник Нептуна Тритон. Выбор из меню Emelyanov et al. (2015). Аналитическая теория спутника построена на основе всех наземных наблюдений, выполненных с 1847 по 2012 г., и наблюдений с КА Voyager-2. Представление эфемерид ограничено по времени только планетными эфемеридами. Опубликовано в работе (Emelyanov, Samorodov, 2015).

Далекий спутник Нептуна Нереида. Модель опубликована в работе (Emelyanov, Arlot, 2011). Дифференциальные уравнения движения решались методом численного интегрирования. Модель после публикации переуточнялась. Использовались наземные наблюдения с 1949 по 2017 г. и наблюдения с КА Voyager-2. Период времени представления эфемерид с 1920 по 2049 год.

Ближние спутники Нептуна. Модель прецессирующего эллипса. Параметры опубликованы в работах (Owen, Vaughan, Synnott, 1991; Pascu et al., 2004; Jacobson, 2009). Модель построена на основе наблюдений с космического телескопа HST в 1997 г. и наблюдений КА Voyager-2. Представление эфемерид ограничено по времени только планетными эфемеридами.

Спутники Плутона. Модель опубликована в работе (Beauvalet et al., 2013). Дифференциальные уравнения движения решались методом численного интегрирования. Использовались наблюдения с наземного телескопа VLT-UT4 и космического телескопа HST спутника Харон на интервале времени 1992–2010 гг., а для спутников Никта и Гидра на интервале 2002–2006 гг. Период времени представления эфемерид с 1950/01/01 по 2029/12/31.

12.5. Теории и модели в сервере эфемерид JPL

Современные и самые совершенные модели движения спутников планет применяются в сервере эфемерид тел Солнечной систе-

мы HORIZONS, разработанном в JPL NASA, США (Giorgini et al., 1996). Список всех публикаций, в которых описаны модели движения, приведен в Интернете на странице https://ssd.jpl.nasa.gov/?sat_ephem
Сделаем краткий обзор этих моделей.

Модели построены на основе всех имеющихся наземных наблюдений и наблюдений с помощью космических аппаратов. Для большей части моделей, созданных Jacobson R. A. и Brozovic M., ссылки на публикации не приводятся. Даны только идентификаторы моделей для отождествления эфемерид.

Для спутников Марса Фобос и Деймос используется теория, описанная в работе (Jacobson, Lainey, 2014) и основанная на всех имеющихся наземных наблюдений и наблюдений с помощью космических аппаратов. Уравнения движения решаются методами численного интегрирования.

Для Галилеевых и близких спутников Юпитера применяется модель JUP310. Ссылка на публикацию не приводится.

Модель движения далеких спутников Юпитера описана в работе (Brozovic, Jacobson, 2017). Уравнения движения решаются методами численного интегрирования.

Для главных, близких и далеких спутников Сатурна применяются оригинальные модели SAT389, SAT393 и SAT368. Ссылки на публикации не приводятся.

Модель движения главных спутников Урана опубликована в работе (Jacobson, 2014). Уравнения движения решаются методами численного интегрирования.

Для близких спутников Урана построена модель URA091, для далеких — модель URA112. Ссылки на публикации не приводятся.

Модель движения спутников Нептуна Тритон, Протей и Нереида опубликована в работе (Jacobson, 2009).

Для внутренних спутников Нептуна используется оригинальная модель NEP088. Ссылка на публикацию не приводится.

Модель движения далеких спутников Нептуна опубликована в работе (Brozovic, Jacobson, Sheppard, 2011).

На основе данных, полученных с КА New Horizons, построены новые модели движения спутников Плутона (Jacobson, Brozovic, Buie, Porter, et al., 2015).

12.6. Спутники планет в виртуальных обсерваториях

В мире разрабатываются так называемые Виртуальные обсерватории (ВО). Пока еще нет четко устоявшегося понимания этого термина. Чаще всего виртуальной обсерваторией называют набор инструментов для работы с ресурсами астрономических данных. Данные создают сами астрономы — эксперты в соответствующих областях. Виртуальная обсерватория аккумулирует сведения об этих ресурсах, описывает их, классифицирует и разрабатывает методы доступа к ним: форматы, стандарты и т.п.

Попытки найти виртуальную обсерваторию, содержащую спутники планет, дают единственный результат — это Виртуальная обсерватория Института небесной механики и вычисления эфемерид (Institut de Mécanique céleste et de calcul des éphémérides — IMCCE), Париж, Франция. Доступ в эту виртуальную обсерваторию осуществляется по адресу <http://vo.imcce.fr/>.

Большая часть компонент этой ВО находится в стадии разработки. Попытки найти здесь средства, касающиеся спутников планет, приводят только к возможности вычисления эфемерид спутников планет в табличном виде. Адрес этого средства

<http://vo.imcce.fr/webservices/skybot/?forms=resolver>.

Набор спутников в этой виртуальной обсерватории весьма ограничен. Это спутники Марса (2), Галилеевы спутники Юпитера (4), главные спутники Сатурна (8), главные спутники Урана (5), спутники Нептуна Тритон и Нереида, некоторые близкие спутники Урана (3), близкие спутники Нептуна (6). Эти 30 объектов составляют небольшую часть от всех известных 189 спутников планет.

12.7. Стандарты фундаментальной астрономии

Научная деятельность в области динамики Солнечной системы развивается и практикуется во многих крупных научных центрах и в отдельных лабораториях мира. Современная технология научных исследований состоит из следующих основных практических действий:

- производство наблюдений,
- накопление и сопровождение баз данных,
- составление вычислительных программ для обработки данных.

Каждое из этих действий осуществляется в огромной сети больших и малых коллективов исследователей. Устанавливаются отно-

шения сотрудничества с сопутствующим соперничеством. Основные мотивации две: материальное обеспечение и удовлетворение амбиций. Условием оптимального ведения дел в мировом масштабе является гибкая координация научных исследований. Для этого чаще целенаправленно, а иногда и стихийно создаются средства координации: международные Центры, Советы и Союзы. Одной из функций таких центров является разработка стандартов. Стандарты необходимы для согласованности научных исследований, сопоставления результатов. Часто стандарты диктуются каким-нибудь наиболее сильным и доминирующим научным центром. Иногда стандарты устанавливаются в результате создания крупного комплекса динамических моделей небесных тел, основанных на большой базе данных наблюдений.

Перечислим наиболее крупные научные предприятия в области динамики тел Солнечной системы.

Международный астрономический союз (МАС) – International astronomical union (IAU) на своих регулярных ассамблеях утверждает предложения астрономических стандартов. Адрес в Интернете: <https://www.iau.org/>

Центр малых планет – Minor planet center (MPC) содержит и сопровождает базу данных всех наблюдений малых тел – астероидов, карликовых планет, комет, далеких спутников планет. MPC собирает данные, обеспечивает моделирование движения малых тел, а также предоставляет мировому сообществу целый ряд средств исследований: эфемеридные вычислительные программы и средства анализа данных. Как доминирующее научное предприятие MPC оказывается источником и проводником стандартов в своей области. Адрес MPC в Интернете:

<https://minorplanetcenter.net/iau/mpc.html>

В частности, MPC устанавливает стандартный формат представления результатов наблюдений малых тел и стандарт назначения кодов обсерваторий. Об этих стандартах можно узнать в Интернете по адресам:

<https://minorplanetcenter.net/iau/info/ObsFormat.html>

<https://minorplanetcenter.net/iau/lists/ObsCodesF.html>

Навигационно-вспомогательный информационный фонд – Navigation and Ancillary Information Facility (NAIF) Национального управления по аэронавтике и исследованию космического пространства Соединенных штатов Америки – National Aeronautics and

Space Administration (NASA) был создан в Лаборатории реактивного движения - Jet Propulsion Laboratory (JPL), California Institute of Technology для руководства разработкой и внедрением информационной системы "SPICE" (The SPICE Toolkit). SPICE используется в течение всего жизненного цикла планетарных научных миссий НАСА, чтобы помочь ученым и инженерам разрабатывать миссии, планировать научные наблюдения, анализировать научные данные и выполнять различные инженерные функции, связанные с полетными проектами. Команда NAIF занимается вопросами производства высокоточной, четко задокументированной и легко используемой информации, необходимой ученым и инженерам. Это основные задачи команды NAIF.

Пакет средств SPICE является системой баз данных и вычислительных программ для решения задач фундаментальной астрономии.

Адрес NAIF в Интернете: <https://naif.jpl.nasa.gov/naif/about.html>

Адрес SPICE в Интернете:

<https://naif.jpl.nasa.gov/naif/aboutspice.html>

Совершенно естественно, что в системе NAIF-SPICE устанавливаются совершенно четкие и строгие стандарты баз данных и программных средств вычислений. Эти стандарты обеспечивают функционирование всех частей системы. Программы, предоставляемые в системе SPICE, записаны в нескольких вариантах в соответствии с языками программирования Фортран, Си и некоторых других. Естественно, что исследователи всего мира, использующие эти предоставляемые средства, вынуждены следовать стандартам NAIF-SPICE.

Стандарты фундаментальной астрономии - Standards of Fundamental Astronomy (SOFA) Это служба с задачей установить и поддерживать доступный и авторитетный набор алгоритмов и процедур, реализующих стандартные модели, используемые в фундаментальной астрономии. Служба управляется международной комиссией, Советом SOFA, назначенной Отделом А Фундаментальная астрономия Международного астрономического союза (МАС) – IAU Division A – Fundamental Astronomy. SOFA также тесно сотрудничает с Международной службой вращения Земли и систем отсчета (IERS). Алгоритмы и программы в службе SOFA записаны на языках программирования Фортран и Си (ANSI C).

Адрес SOFA в Интернете: <http://www.iausofa.org/>

Международная служба вращения Земли и систем отсчета — International Earth Rotation and Reference System Service (IERS).

Основными задачами IERS являются обслуживание астрономических, геодезических и геофизических сообществ путем предоставления данных и стандартов, касающихся вращения Земли и систем отсчета. Адрес IERS в Интернете:

https://www.iers.org/IERS/EN/Home/home_node.html

Литература к Главе 12

Емельянов Н. В., Кантер А. А. Орбиты новых внешних спутников планет на основе наблюдений. *Астрономический вестник.* 2005. Т. 39. № 2. Р. 128–140.

Емельянов Н. В. Возмущенное движение при малых эксцентриситетах. *Астрономический вестник.* 2015. Т. 49. № 5. С. 380–394.

Космодамианский Г. А. Численная теория движения Галилеевых спутников Юпитера. *Астрономический вестник.* 2009. Т. 43. № 6. С. 483–492.

Путьева Е. В. EPM2011 — обновленные планетные эфемериды ИПА РАН и их использование для научных исследований. *Астрономический вестник.* 2013. Т. 47. С. 419–435.

Порошина А. Л. Численные теории движения Тритона и Нереиды. Письма в *Астрономический журнал.* 2013. Т. 39. № 12. С. 969–974.

Acton C., Bachman N., Folkner W. M., Hilton J. SPICE as an IAU recommendation for planetary ephemerides. IAU General Assembly. 2015. Meeting #29. #2240327.

Aoki S., Soma M., Kinoshita H., Inoue K. Conversion matrix of epoch B 1950.0 FK 4-based positions of stars to epoch J 2000.0 positions in accordance with the new IAU resolutions. *Astronomy and Astrophysics.* 1983. V. 128. P. 263–267.

Arlot J.-E., Emelyanov N. V. The NSDB natural satellites astrometric database. *Astronomy and Astrophysics.* 2009. V. 503. P. 631–638.

- Arlot J.E., Cooper N., Emelyanov N., Lainey V., Meunier L. E., Murray C., Oberst J., Pascu D., Pasewaldt A., Robert V., Tajeddine R., Willner K.* Natural satellites astrometric data from either space probes and ground-based observatories produced by the European consortium «ESPaCE». Notes scientifiques et techniques de l'Institut de Mécanique céleste et de calcul des éphémérides. S105. 2017.
- Beauvalet L., Robert V., Lainey V., Arlot J.-E., Colas, F.* ODIN: a new model and ephemeris for the Pluto system. *Astronomy and Astrophysics*. 2013. V. 553, id.A14, 22 pp.
- Brozovic M., Jacobson R. A., Sheppard S. S.* The Orbits of Neptune's Outer Satellites. *Astronomical Journal*. 2011. V. 141. Issue 4. Article id. 135, 9 pp.
- Brozovic M., Jacobson R. A.* The Orbits of Jupiter's Irregular Satellites. *Astronomical Journal*. 2017. V. 153. Issue 4. article id. 147, 10 pp.
- Desmars J., Li S. N., Tajeddine R., Peng Q. Y., Tang Z. H.* Phoebe's orbit from Наземные and space-based observations. *Astronomy and Astrophysics*. 2013. V. 553. id. A36. 10 pp.
- Emelyanov N. V.* Ephemerides of the outer Jovian satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 2005. V. 435, p. 1173–1179.
- Emel'yanov N. V., Arlot J.-E.* The natural satellites ephemerides facility MULTI-SAT. *Astronomy and Astrophysics*. 2008. V. 487. P. 759–765.
- Emelyanov N. V., Arlot J.-E.* The orbit of Nereid based on observations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2011. V. 417. Issue 1. P. 458–463.
- Emelyanov N. V., Nikonchuk D. V.* Ephemerides of the main Uranian satellites. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2013. V. 436. P. 3668–3679.
- Emelyanov N. V., Samorodov M. Yu.* Analytical theory of motion and new ephemeris of Triton from observations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. V. 454. P. 2205–2215.
- Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac. Edited by P.K. Seidelmann. University Science Books. Mill Valley. California. 1992.

- Feissel M., Mignard F.* The adoption of ICRS on 1 January 1998: meaning and consequences. *Astronomy and Astrophysics*. 1998. V. 331. P. L33–L36.
- Giorgini J. D., Yeomans D. K., Chamberlin A. B., Chodas P. W., Jacobson R. A., Keesey M. S., Lieske J. H., Ostro S. J., Standish E. M., Wimberly R. N.* JPL's On-Line Solar System Data Service. *Bull. Amer. Astron. Soc.* 1996. V. 28. P. 1158–1158.
- Introduction aux éphémérides Astronomiques. Supplément explicatif à la connaissance des temps. (eds. Simon J.-L., Chapront-Touzé M., Morando B., Thuillot W.). Bureau des Longitudes. Paris. Publisher: Les éditions de physique, France. 1997. 450 pp.
- Jacobson R. A.* The Orbits of the Inner Uranian Satellites from Hubble Space Telescope and Voyager 2 Observations. *Astronomical Journal*. 1998. V. 115. Issue 3. P. 1195–1199.
- Jacobson R. A., Spitale J., Porco C. C., Beurle K., Cooper N. J., Evans M. W., Murray C. D.* Revised orbits of Saturn's small inner satellites. *Astronomical Journal*. 2008. V. 135. P. 261–263
- Jacobson R. A.* The orbits of the neptunian satellites and the orientation of the pole of Neptune. *Astronomical Journal*. 2009. V. 137. P. 4322–4329.
- Jacobson R. A.* The orbits of the regular Jovian satellites, their masses, and the gravity field of Jupiter. American Astronomical Society, DDA Meeting, #44, #402.04, 2013.
- Jacobson, R. A.* The Orbits of the Uranian Satellites and Rings, the Gravity Field of the Uranian System, and the Orientation of the Pole of Uranus. *Astronomical Journal*. 2014. V. 148. Issue 5. Article id. 76, 13 pp.
- Jacobson R. A., Lainey V.* Martian satellite Orbits and Ephemerides. *Planetary and Space Science*. 2014. V. 102. P. 35–44.
- Jacobson R. A., Brozovic M., Buie M., Porter S., Showalter M., Spencer J., Stern S. A., Weaver H., Young L., Ennico K., Olkin C.* The Orbits and Masses of Pluto's Satellites after New Horizons. American Astronomical Society. 2015. DPS meeting #47. id. 102.08.
- Lainey V., Dehant V., Patzold M.* First numerical ephemerides of the

- Martian moons. *Astronomy and Astrophysics*. 2007. V. 465. p. 1075–1084.
- Lainey V.* A new dynamical model for the Uranian satellites. *Planetary and Space Science*. 2008. V. 56. P. 1766–1772.
- Lainey V., Arlot J.-E., Karatekin O., van Hoolst T.* Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations. *Nature*. 2009. V. 459. Issue 7249. P. 957–959.
- Nicholson P. D., Hamilton D. P., Matthews K., Yoder C. F.* New observations of Saturn's coorbital satellites. *Icarus*. 1992. V. 100. P. 464–484.
- Owen W. M., Vaughan R. M., Synnott S. P.* Orbits of the six new satellites of Neptune. *Astronomical Journal*. 1991. V. 101. P. 1511–1515.
- Pascu D., Rohde J. R., Seidelmann P. K., Wells E. N., Kowal C. T., Zellner B. H., Storrs A. D., Currie D. G., Dowling D. M.* Hubble Space Telescope Astrometric Observations and Orbital Mean Motion Corrections for the Inner Uranian Satellites. *Astronomical Journal*. 1998. V. 115. Issue 3. P. 1190–1194.
- Pascu D., Rohde J. R., Seidelmann P. K., Wells E. N., Hershey John L., Storrs A. D., Zellner B. H., Bosh A. S., Currie D. G.* Hubble Space Telescope Astrometric Observations and Orbital Mean Motion Corrections for the Inner Satellites of Neptune. *Astronomical Journal*. 2004. V. 127. N. 5. P. 2988–2996.
- Pitjeva E. V., Pavlov D. A.* EPM2017 and EPM2017H 2017. <http://iaaras.ru/en/dept/ephemeris/epm/2017/>. Accessed 7 Nov 2017.
- Seidelmann P. K.* 1980 IAU theory of nutation – The final report of the IAU Working Group on Nutation. *Celestial Mechanics*. 1982. V. 27. P. 79–106.
- Standish, E. M., Jr.* Orientation of the JPL Ephemerides, DE200/LE200, to the dynamical equinox of J2000. *Astronomy Astrophysics*. 1982. V. 114. P. 297–302.

НОМЕНКЛАТУРА СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

Приводимые здесь данные включают в себя принятые Международным астрономическим союзом (МАС) названия и номера естественных спутников планет. Русскоязычные названия спутников соответствуют принятой в русскоязычной литературе терминологии для мифологических персонажей. Даются также обстоятельства открытия каждого спутника: год открытия, ссылка на публикацию сообщения об открытии. Чтобы легче идентифицировать тип спутника, приводятся приближенные значения большой полуоси. В соответствии с принятым МАС правилом для определения прямого и обратного движения (см. Главу 9) спутники с обратным (ретроградным) движением в нижеследующих таблицах имеют специальную пометку.

Номенклатура спутников Марса

Таблица П1.1. Номенклатура спутников Марса.

Номер	Латинское название	Русское название	Год открытия	Б. полуось орбиты, км
M1	Phobos	Фобос	1877	9380.
M2	Deimos	Деймос	1877	23460.

Сообщение об открытии спутников Марса

Rodgers John, Thompson R. W., Hall Asaph Letter to the Hon. R.W. Thompson, Secretary of the Navy, announcing the discovery of satellites of Mars, by Rodgers, John; Thompson, R. W.; Hall, Asaph. Washington: U.S. Naval Observatory, [1877]. United States Naval Observatory. 1877.

Публикация первых наблюдений спутников Марса, выполненных Азафом Холлом

Hall A. Observations of the satellites of Mars, made with the 26-inch refractor of the U.S. Naval Observatory, Washington. *Astronomische Nachrichten*. 1877. V. 91. No. 2161. P. 11–14.

Номенклатура спутников Юпитера

Таблица П1.2: Номенклатура спутников Юпитера. Для спутников без названия даны временные обозначения. В квадратных скобках даны номера библиографических ссылок на публикации сообщений об открытиях. Список библиографии дан после таблицы. В графе Б. полуось знаком г отмечены спутники с обратным (ретроградным) движением.

Но- мер	Латинское название	Русское название	Год открытия	Б. полуось орбиты, км
J1	Io	Ио	1610 Г.Галилей	421800 -
J2	Europa	Европа	1610 Г.Галилей	671100 -
J3	Ganymede	Ганимед	1610 Г.Галилей	1070400 -
J4	Callisto	Каллисто	1610 Г.Галилей	1882700 -
J5	Amalthea	Амальтея	1892 [1]	181400 -
J6	Himalia	Гималия	1904 [2]	11461000 -
J7	Elara	Элара	1904 [2]	11741000 -
J8	Pasiphae	Пасифе	1908 [3]	23624000 г
J9	Sinope	Синопе	1914 [4]	23939000 г
J10	Lysithea	Лиситея	1938 [5]	11717000 -

Но- мер	Латинское название	Русское название	Год открытия	Б. полуось орбиты, км
J11	Carme	Карме	1938 [5]	23404000 r
J12	Ananke	Ананке	1951 [6]	21276000 r
J13	Leda	Леда	1975 [7]	11165000 -
J14	Thebe	Теба	1979 [8]	221900 -
J15	Adrastea	Адрастея	1979 [9]	129000 -
J16	Metis	Метида	1979 [10]	128000 -
J17	Callirrhoe	Каллирое	1999 [11]	24103000 r
J18	Themisto	Фемисто	2000 [12]	7400000 -
J19	Megaclite	Мегаклите	2000 [12]	23493000 r
J20	Taygete	Тайгете	2000 [12]	23280000 r
J21	Chaldene	Халдене	2000 [12]	23100000 r
J22	Harpyke	Гарпалике	2000 [12]	20858000 r
J23	Kalyke	Калике	2000 [12]	23566000 r
J24	Iocaste	Иокасте	2000 [12]	21061000 r
J25	Erinome	Эриноме	2000 [12]	23196000 r
J26	Isonoe	Исоное	2000 [12]	23155000 r
J27	Praxidike	Праксидике	2000 [12]	20907000 r
J28	Autonoe	Автоное	2001 [13]	24046000 r
J29	Thyone	Тионе	2001 [13]	20939000 r
J30	Hermippe	Гермиппе	2001 [13]	21131000 r
J31	Aitne	Этне	2001 [13]	23229000 r
J32	Eurydome	Эвридоме	2001 [13]	22865000 r
J33	Euanthe	Эванте	2001 [13]	20797000 r
J34	Euporie	Эвпорие	2001 [13]	19304000 r
J35	Orthosie	Ортозии	2001 [13]	20720000 r
J36	Sponde	Спонде	2001 [13]	23487000 r
J37	Kale	Кале	2001 [13]	23217000 r
J38	Pasithee	Пазите	2001 [13]	23004000 r
J39	Hegemone	Гегемоне	2003 [14]	23947000 r
J40	Mneme	Мнеме	2003 [15]	21069000 r

Но- мер	Латинское название	Русское название	Год открытия	Б. полуось орбиты, км
J41	Aoede	Аойде	2003 [16]	23981000 r
J42	Thelxinoe	Тельксиное	2003 [17]	21162000 r
J43	Arche	Архе	2002 [18]	22931000 r
J44	Kallichore	Каллихоре	2003 [19]	24043000 r
J45	Helike	Гелике	2003 [16]	21263000 r
J46	Carpo	Карпо	2003 [20]	16989000 -
J47	Eukelade	Эвкеладе	2003 [16]	23661000 r
J48	Cyllene	Киллене	2003 [21]	23951000 r
J49	Kore	Коре	2003 [21]	24011000 r
J50	Herse	Герсе	2003 [21]	22992000 r
J51	S/2010 J 1	—	2010 [22]	23189718 r
J52	S/2010 J 2	—	2010 [23]	20790825 r
J53	Dia	Дия	2000 [24]	12297000 -
—	S/2003 J 2	—	2003 [16]	29541000 r
J60	S/2003 J 3	—	2003 [16]	20221000 r
—	S/2003 J 4	—	2003 [16]	23930000 r
J57	S/2003 J 5	—	2003 [16]	23495000 r
—	S/2003 J 9	—	2003 [19]	23384000 r
—	S/2003 J 10	—	2003 [19]	23041000 r
—	S/2003 J 12	—	2003 [19]	17582000 r
J58	S/2003 J 15	—	2003 [21]	22627000 r
—	S/2003 J 16	—	2003 [21]	20957000 r
J55	S/2003 J 18	—	2003 [21]	20514000 r
J61	S/2003 J 19	—	2003 [20]	23533000 r
—	S/2003 J 23	—	2003 [25]	23563000 r
J72	S/2011 J 1	—	2012 [26]	20691211 r
J56	S/2011 J 2	—	2012 [26]	23233215 r
J54	S/2016 J 1	—	2017 [27]	20595483 r
J62	Valetudo	Валетудо	2018 [29]	18928094 -
J59	S/2017 J 1	—	2017 [28]	23483978 r

Но- мер	Латинское название	Русское название	Год открытия	Б. полуось орбиты, км
J63	S/2017 J 2	—	2018 [30]	23240956 r
J64	S/2017 J 3	—	2018 [31]	20639315 r
J65	S/2017 J 4	—	2018 [32]	11494801 -
J66	S/2017 J 5	—	2018 [33]	23169389 r
J67	S/2017 J 6	—	2018 [34]	22394681 r
J68	S/2017 J 7	—	2018 [35]	20571457 r
J69	S/2017 J 8	—	2018 [36]	23174445 r
J70	S/2017 J 9	—	2018 [37]	21429954 r
J71	S/2018 J 1	—	2018 [38]	11453003 r

Ссылки на сообщения об открытиях спутников Юпитера

- [1] *Barnard E. E.* Discovery of a Fifth Satellite of Jupiter, September 8, 1892. Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 1892. V. 4. No. 25. P. 199–199.
- [2] *Perrine C. D.* Discovery, observations and approximate orbits of two new satellites of Jupiter. Lick Observatory Bulletin. 1904. V. 3. No. 64. P.52–52.
- [3] *Melotte J., Perrine C. D.* Recent Observations of the Moving Object Near Jupiter, Discovered at Greenwich. Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 1908. V. 20. No. 120. P. 184–184.
- [4] *Nicholson S. B.* Discovery of the Ninth Satellite of Jupiter. Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 1914. V. 26. No. 155. P. 197–197.
- [5] *Nicholson S. B.* Two New Satellites of Jupiter. Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 1938. V. 50. No. 297. P. 292–292.
- [6] *Nicholson S. B.* An Unidentified Object Near Jupiter, Probably a New Satellite. Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 1951. V. 63. No. 375. P. 297–297.
- [7] *Kowal C.* Probable New Satellite of Jupiter. IAUC 2845. 1975.

- [8] *Synnott S. P.* 1979J2 — Discovery of a previously unknown Jovian satellite. *Science*. 1980. V. 210. P. 786–788.
- [9] *Jewitt D. C., Danielson G. E., Synnott S. P.* Discovery of a new Jupiter satellite. *Science*. 1979. V. 206. P. 951–951.
- [10] *Synnott S. P.* 1979J3 — Discovery of a previously unknown satellite of Jupiter. *Science*. 1981. V. 212. P. 1392–1392.
- [11] *Scotti J.V., Spahr T.B., McMillan R.S., J.A. Larsen J.A., Montani J., Gleason A.E., Gehrels T.* IAUC* 7460. 1999.
- [12] *Sheppard S. S., Jewitt D. C., Fernandez Y., Magnier G.* IAUC* 7525. 2000.
- [13] *Sheppard S.S., Jewitt D.C., Kleyna J.* MPEC2002-J54**. 2002.
- [14] *Sheppard S.S.* IAUC* 8088. 2003.
- [15] *Sheppard S.S., Gladman B.* IAUC* 8138. 2003.
- [16] *Sheppard S.S.* IAUC* 8087. 2003.
- [17] *Sheppard S.S., Gladman B.* IAUC* 8276. 2003.
- [18] *Sheppard S.S.* IAUC* 8035. 2002.
- [19] *Sheppard S.S.* IAUC* 8089. 2003.
- [20] *Sheppard S.S.* IAUC* 8125. 2003.
- [21] *Sheppard S.S.* IAUC* 8116. 2003.
- [22] *Jacobson R., Brozovic M., Gladman B., Alexandersen M.* CBAT IAU*** 2734. 2011.
- [23] *Veillet C.* CBAT IAU*** 2734. 2011.
- [24] *Sheppard S. S., Jewitt D. C., Fernandez Y., Magnier G.* IAUC* 7525. 2000.
- [25] *Sheppard S.S.* IAUC* 8281. 2003.
- [26] *Sheppard S.S.* CBAT IAU*** 3002. 2012.
- [27] *Sheppard S.S.* MPEC** 2017-L08. 2017.
- [28] *Sheppard S.S.* MPEC** 2017-L47. 2017.
- [29] *Sheppard S.S.* MPEC** 2018-O09. 2018.
- [30] *Sheppard S.S.* MPEC** 2018-O10. 2018.
- [31] *Sheppard S.S.* MPEC** 2018-O11. 2018.
- [32] *Sheppard S.S.* MPEC** 2018-O12. 2018.
- [33] *Sheppard S.S.* MPEC** 2018-O13. 2018.

- [34] *Sheppard S.S.* МПЕС** 2018-O14. 2018.
 [35] *Sheppard S.S.* МПЕС** 2018-O15. 2018.
 [36] *Sheppard S.S.* МПЕС** 2018-O16. 2018.
 [37] *Sheppard S.S.* МПЕС** 2018-O17. 2018.
 [38] *Sheppard S.S.* МПЕС** 2018-O18. 2018.

* IAUC – International Astronomical Union Circular

** МПЕС – Minor Planet Electronic Circulars - IAU Minor Planet Center

*** СВАО IAU – Central Bureau for Astronomical Telegrams IAU Circular

Номенклатура спутников Сатурна

Таблица П1.3: Номенклатура спутников Сатурна. Для спутников без названия даны временные обозначения. В квадратных скобках даны номера библиографических ссылок на публикации сообщений об открытиях. Список библиографии дан после таблицы. В графе Б. полусью знаком г отмечены спутники с обратным (ретроградным) движением. Спутник S6 Титан был открыт Гюйгенсом (Христиан Гюйгенс ван Зуйлихем). Спутники S3 Тефия, S4 Диона, S5 Рея и S8 Япет открыл Кассини (Кассини Джованни Доменико). Спутники S1 Мимас и S2 Энцелад были открыты Гершелем (Гершель Уильям).

Но- мер	Латинское название	Русское название	Год открытия	Б. полусью орбиты, км
S1	Mimas	Мимас	1789	185600 -
S2	Enceladus	Энцелад	1789	238100 -
S3	Tethys	Тефия	1684	294700 -
S4	Dione	Диона	1684	377400 -
S5	Rhea	Рея	1672	527100 -
S6	Titan	Титан	1655	1221900 -
S7	Hyperion	Гиперион	1848 [1]	1464100 -
S8	Iapetus	Япет	1671	3560800 -

Но- мер	Латинское название	Русское название	Год открытия	Б. полуось орбиты, км
S9	Phoebe	Феба	1898 [2]	12944300 г
S10	Janus	Янус	1966 [3]	151500 -
S11	Epimetheus	Эпиметей	1977 [4]	151400 -
S12	Helene	Елена	1980 [5], [6]	377400 -
S13	Telesto	Телесто	1980 [7], [8]	294700 -
S14	Calypso	Калипсо	1980 [7], [8]	294700 -
S15	Atlas	Атлас	1980 [9], [10]	137700 -
S16	Prometheus	Прометей	1980 [9], [10]	139400 -
S17	Pandora	Пандора	1980 [9], [10]	141700 -
S18	Pan	Пан	1990 [11]	133600 -
S19	Ymir	Имир	2000 [12], [13]	23130000 г
S20	Paaliaq	Палиак	2000 [12], [13]	15198000 -
S21	Tarvos	Тарвос	2000 [14], [13]	18239000 -
S22	Ijiraq	Иджирак	2000 [15], [13]	11442000 -
S23	Suttungr	Суттунг	2000 [16], [13]	19465000 г
S24	Kiviuq	Кивиок	2000 [15], [13]	11365000 -
S25	Mundilfari	Мундилфари	2000 [17], [13]	18722000 г
S26	Albiorix	Альбиорикс	2000 [18], [13]	16394000 -
S27	Skathi	Скади	2000 [17], [13]	15641000 г
S28	Erriapo	Эррипо	2000 [19], [13]	17604000 -
S29	Siarnaq	Сиарнак	2000 [14], [13]	18195000 -
S30	Thrymr	Трюм	2000 [17], [13]	20219000 г
S31	Narvi	Нарви	2003 [20], [21]	18719000 г
S32	Methone	Метона	2004 [22], [21]	194000 -
S33	Pallene	Паллена	2004 [22], [21]	211000 -
S34	Polydeuce	Полидевк	2004 [23], [21]	377400 -
S35	Daphnis	Дафнис	2005 [24]	136500 -
S36	Aegir	Эгир	2005 [25], [26]	19460000 г
S37	Bebhionn	Бефинд	2005 [25], [26]	17040000 -
S38	Bergelmir	Бергельмир	2005 [25], [26]	19610000 г

Но- мер	Латинское название	Русское название	Год открытия	Б. полуось орбиты, км
S39	Bestla	Бестла	2005 [25], [26]	19890000 г
S40	Farbauti	Фарбаути	2005 [25], [26]	20580000 г
S41	Fenrir	Фенрир	2005 [25], [26]	23050000 г
S42	Fornjot	Форньот	2005 [25], [26]	24030000 г
S43	Hati	Хати	2005 [25], [26]	20670000 г
S44	Hugrokkin	Гирроккин	2006 [27], [26]	18170000 г
S45	Kari	Кари	2006 [27], [26]	22320000 г
S46	Loge	Логи	2006 [27], [26]	22980000 г
S47	Skoll	Сколл	2006 [27], [26]	17470000 г
S48	Surtur	Сурт	2006 [27], [26]	22290000 г
S49	Anthe	Анфа	2007 [28], [29]	197700 -
S50	Jarnsaxa	Ярнсакса	2006 [27], [29]	18560000 г
S51	Greip	Грейп	2006 [27], [29]	18070000 г
S52	Tarpeq	Таркек	2007 [30], [29]	17960000 -
S53	Aegaeon	Эгеон	2008 [31]	167500 -
—	S/2004 S 7	—	2005 [25]	20880000 г
—	S/2004 S 12	—	2005 [25]	20010000 г
—	S/2004 S 13	—	2005 [25]	18280000 г
—	S/2004 S 17	—	2005 [25]	19130000 г
—	S/2006 S 1	—	2006 [27]	18930000 г
—	S/2006 S 3	—	2006 [27]	21080000 г
—	S/2007 S 2	—	2007 [30]	16520000 г
—	S/2007 S 3	—	2007 [30]	19180000 г
—	S/2009 S 1	—	2009 [32]	117000 -

Ссылки на сообщения об открытиях спутников Сатурна

- [1] *Bond W. C.* Discovery of a new satellite of Saturn. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1848. V. 9. P. 1–1.
- [2] *Pickering E. C.* Phoebe, ninth Satellite of Saturn discovered by W. W. Pickering. Harvard College Observatory Bulletin. 1899. No. 49. P. 1–1.

- [3] *Dollfus A.* Probable New Satellite of Saturn. IAUC 1987. 1967.
- [4] *Fountain J. W., Larson S. M.* A new satellite of Saturn. Science. 1977. V. 197. P. 915–917.
- [5] *Harris, A. W., Gibson J., Lecacheux J., Fort B. et al* IAUC 3463. 1980.
- [6] *Lecacheux J., Laques P., Wierick G., Lelievre G. et al.* IAUC 3483. 1980.
- [7] *Smith B. A., Reitsema H. J., Larson S. M.* 1980 S 2. IAUC 3456.1980.
- [8] *Cruikshank D.; Smith B. A., Reitsema H. J., Larson S. M. et al.* Saturn. IAUC 3457. 1980.
- [9] *Collins S. A., Cook A. F., Cuzzi J. N., Danielson G. E. et al.* First Voyager view of the rings of Saturn. Nature. 1980. V. 288. P. 439–442.
- [10] *Smith B. A., Soderblom L., Beebe R. F., Boyce J. M. et al.* Encounter with Saturn - Voyager 1 imaging science results. Science. 1981 V. 212. P. 163–191.
- [11] *Showalter M. R., Colas F., Lecacheux J., Laques P., Despiau R.* Saturn. IAUC 5052. 1990.
- [12] *Gladman B.* S/2000 S 1 AND S/2000 S 2. IAUC 7512. 2000.
- [13] Satellites of Jupiter, Saturn, Uranus. IAUC 8177. 2003.
- [14] *Gladman B.* S/2000 S 3 AND S/2000 S 4. IAUC 7513. 2000.
- [15] *Gladman B.* S/2000 S 5 AND S/2000 S 6. IAUC 7521. 2000.
- [16] *Gladman B.* S/2000 S 12. IAUC 7548. 2000.
- [17] *Gladman B.* S/2000 S 7, S/2000 S 8, S/2000 S 9. IAUC 7538. 2000.
- [18] *Gladman B.* S/2000 S 11. IAUC 7545. 2000.
- [19] *Gladman B.* S/2000 S 10. IAUC 7539. 2000.
- [20] *Sheppard S. S.* S/2000 S 12. IAUC 8116. 2003.
- [21] Satellites of Saturn. IAUC 8471. 2005.
- [22] *Porco C. C.* S/2004 S 1 AND S/2004 S 2. IAUC 8389. 2004.
- [23] *Porco C. C.* S/2004 S 3, S/2004 S 4, AND R/2004 S 1. IAUC 8401. 2004.
- [24] *Porco C. C.* S/2005 S 1. IAUC 8524. 2005.
- [25] *Jewitt D., Sheppard S, Kleyna J.* New satellites of Saturn. IAUC 8523. 2005.

- [26] Satellites of Jupiter and Saturn. IAUC 8826. 2007.
- [27] *Jewitt D., Sheppard S, Kleyna J.* New satellites of Saturn. IAUC 8727. 2006.
- [28] *Porco C. C.* S/2007 S 4. IAUC 8857. 2007.
- [29] Satellites of Saturn. IAUC 8873. 2007.
- [30] *Jewitt D., Sheppard S, Kleyna J.* S/2007 S 1, S/2007 S 2, AND S/2007 S 3. IAUC 8836. 2007.
- [31] *Porco C. C.* S/2008 S 1. IAUC 9023. 2009.
- [32] *Porco C. C.* S/2009 S 1. IAUC 9091. 2009.

* IAUC – International Astronomical Union Circular

Номенклатура спутников Урана

Таблица П1.4: Номенклатура спутников Урана. Для спутников без названия даны временные обозначения. В квадратных скобках даны номера библиографических ссылок на публикации сообщений об открытиях. Список библиографии дан после таблицы. В графе Б. полусось знаком г отмечены спутники с обратным (ретроградным) движением.

Но- мер	Латинское название	Русское название	Год открытия	Б. полусось орбиты, км
U1	Ariel	Ариэль	1851 [1]	190900 -
U2	Umbriel	Умбриэль	1851 [1]	266000 -
U3	Titania	Титания	1787 [2]	436300 -
U4	Oberon	Оберон	1787 [2]	583500 -
U5	Miranda	Миранда	1948 [3]	129900 -
U6	Cordelia	Корделия	1986 [4]	49800 -
U7	Ophelia	Офелия	1986 [4]	53800 -
U8	Bianca	Бьянка	1986 [4]	59200 -
U9	Cressida	Крессида	1986 [4]	61800 -
U10	Desdemona	Дездемона	1986 [4]	62700 -
U11	Juliet	Джульетта	1986 [4]	64400 -

Номер	Латинское название	Русское название	Год открытия	Б. полуось орбиты, км
U12	Portia	Порция	1986 [4]	66100 -
U13	Rosalind	Розалинда	1986 [4]	69900 -
U14	Belinda	Белинда	1986 [4]	75300 -
U15	Puck	Пак	1986 [4]	86000 -
U16	Caliban	Калибан	1997 [5]	7231000 г
U17	Sycorax	Сикоракса	1997 [5]	12179000 г
U18	Prospero	Просперо	1999 [6]	16256000 г
U19	Setebos	Сетебос	1999 [7]	17418000 г
U20	Stephano	Стефано	1999 [7]	8004000 г
U21	Trinculo	Тринкуло	2001 [8]	8504000 г
U22	Francisco	Франциско	2001 [9]	4276000 г
U23	Margaret	Маргарита	2003 [10]	14345000 -
U24	Ferdinand	Фердинанд	2001 [11]	20901000 г
U25	Perdita	Пердита	1999 [12]	76416 -
U26	Mab	Маб	2003 [13]	97734 -
U27	Cupid	Купидон	2003 [13]	74800 -

Ссылки на сообщения об открытиях спутников Урана

- [1] *Lassell W.* Letter to the editor [discovery of two satellites of Uranus. *Astronomical Journal.* 1851. V. 2. P. 70–70.
- [2] *Herschel W.* An Account of the Discovery of Two Satellites Revolving Round the Georgian Planet. By William Herschel, LL.D. F. R. S. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* 1787. V. 77. P. 125–129.
- [3] *Kuiper G. P.* The Fifth Satellite of Uranus. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific.* 1949. V. 61. No. 360. P. 129–129.
- [4] *Smith B. A., Soderblom L. A., Beebe R., Bliss D. et al.* Voyager 2 in the Uranian system – Imaging science results. *Science.* 1986. V. 233. P. 43–64.
- [5] *Gladman B. J., Nicholson P. D., Burns J. A.* Satellites of Uranus. *IAUC 6764.* 1997.

- [6] *Gladman B.* Probable new satellites of Uranus. IAUC 7248. 1999.
- [7] *Kavelaars J.J., Gladman B., Holman M., Petit J.-M., Scholl H.* Probable new satellites of Uranus. IAUC 7230. 1999.
- [8] *Holman M., Kavelaars J., Milisavljevic D.* S/2001 U 1. IAUC 7980. 2002.
- [9] *Holman M., Kavelaars J., Milisavljevic D.* S/2001 U 3. IAUC 8216. 2003.
- [10] *Sheppard S. S., Jewitt D. C.* S/2003 U 3. IAUC 8217. 2003.
- [11] *Holman M., Gladman B.* S/2001 U 2 AND S/2002 N 4. IAUC 8213. 2003.
- [12] *E. Karkoschka* S/1986 U 10. IAUC 7171. 1999.
- [13] *Showalter M. R., Lissauer J.J.* S/2003 U 1 AND S/2003 U 2. IAUC 8209. 2003.

* IAUC – International Astronomical Union Circular

Номенклатура спутников Нептуна

Таблица П1.5: Номенклатура спутников Нептуна. Для спутников без названия даны временные обозначения. В квадратных скобках даны номера библиографических ссылок на публикации сообщений об открытиях. Список библиографии дан после таблицы. В графе Б. полюсь знаком г отмечены спутники с обратным (ретроградным) движением.

Но- мер	Латинское название	Русское название	Год открытия	Б. полюсь орбиты, км
N1	Triton	Тритон	1846 [1]	354800 -
N2	Nereid	Нереида	1949 [2]	5513400 -
N3	Naiad	Наяда	1989 [3]	48200 -
N4	Thalassa	Таласса	1989 [3]	50100 -
N5	Despina	Деспина	1989 [3]	52500 -
N6	Galatea	Галатея	1989 [3]	62000 -
N7	Larissa	Ларисса	1989 [3]	73500 -
N8	Proteus	Протей	1989 [3]	117600 -

Но- мер	Латинское название	Русское название	Год открытия	Б. полуось орбиты, км
N9	Halimede	Галимеда	2003 [4]	15686000 r
N10	Psamathe	Псамафа	2003 [4]	46738000 r
N11	Sao	Сао	2003 [4]	22452000 -
N12	Laomedeia	Лаомедея	2003 [5]	22580000 -
N13	Neso	Несо	2003 [6]	46570000 r
—	S/2004 N 1	—	2004 [7]	105250 -

Ссылки на сообщения об открытиях спутников Нептуна

- [1] *Lassell W.* Discovery of supposed ring and satellite of Neptune. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1846. V. 7. P. 157–157.
- [2] *Kuiper G. P.* Object near Neptune. IAUC 1212. 1949.
- [3] *Smith B. A., Soderblom L. A., Banfield D., Barnet C.* Voyager 2 at Neptune: Imaging Science Results. Science. 1989. V. 246. P. 1422–1449.
- [4] *Holman M., Kavelaars J., Grav T., Fraser W., Milisavljevic D.* Satellites of Neptune. IAUC 8047. 2003.
- [5] *Sheppard S. S., Jewitt D. C., Kleyna J.* Satellites of Neptune. IAUC 8193. 2003.
- [6] *Holman M., Gladman B.* S/2001 U 2 AND S/2002 N 4. IAUC 8213. 2003.
- [7] *Showalter M.* press release NASA13-215. 2004.

Номенклатура спутников Плутона

Таблица П1.6: Номенклатура спутников Плутона. В квадратных скобках даны номера библиографических ссылок на публикации сообщений об открытиях. Список библиографии дан после таблицы.

Но- мер	Латинское название	Русское название	Год открытия	Б. полуось орбиты, км
P1	Charon	Харон	1978 [1]	19500
P2	Nix	Никта	2005 [2]	49400
P3	Hydra	Гидра	2005 [2]	64700
P4	Kerberos	Цербер	2011 [3]	59000
P5	Styx	Стикс	2012 [4]	42400

Ссылки на сообщения об открытиях спутников Плутона

- [1] *Smith J. C., Christy J. W., Graham J. A.* 1978 P 1. IAUC 3241. 1978.
- [2] *Weaver H. A., Stern S. A., Mutchler M. J., Steffl A. J., Buie M. W., Merline W. J., Spencer J. R., Young E. F., Young L. A.* S/2005 P 1 AND S/2005 P 2. IAUC 8625. 2005.
- [3] *Showalter M. R., Hamilton D. P., Stern S. A., Weaver H. A., Steffl A. J., Young L. A.* New Satellite of (134340) Pluto: S/2011 (134340) 1. IAUC 9221. 2011.
- [4] *Showalter M. R., Weaver H. A., Stern S. A., Steffl A. J., Buie M. W., Merline W. J., Mutchler M. J., Soummer R., Throop H. B.* New Satellite of (134340) Pluto: S/2012 (134340) 1. IAUC 9253. 2012.

ОРБИТАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЕСТЕСТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

Орбитальные параметры спутников Марса

Таблица П2.1: Средние орбитальные параметры спутников Марса. Интервал времени 2000–2040 годы. Наклон орбиты отсчитывается от экватора Марса. Периоды обращения вычислены по среднему значению оскулирующего среднего движения. Данные получены с помощью эфемеридного сервера MULTI-SAT.

Спутник	Б. полуось, км	Эксцентриситет	Наклон, градусы	Период, сут.
Фобос	9378.536	0.01511286	1.076095	0.319155947
Деймос	23458.954	0.00027719	2.041303	1.2625928067

Таблица П2.2: Орбитальное ускорение Фобоса. Во второй колонке дается величина $\frac{1}{2} \frac{dn}{dt}$, где n — среднее движение Фобоса.

Ссылка на источник	Орбитальное ускорение, 10^{-5} град /год ²
Jacobson et al., 1989	124.9 ± 1.8
Emelyanov et al., 1993	129.0 ± 1.0
Bills et al., 2005	136.7 ± 0.6
Lainey et al., 2007	127.0 ± 1.5

Орбитальные параметры спутников Юпитера

Таблица П2.3: Средние орбитальные параметры Галилеевых спутников Юпитера. Интервал времени 2000–2040 годы. Наклон орбиты отсчитывается от экватора Юпитера. Периоды обращения вычислены по среднему значению оскулирующего среднего движения. Данные получены с помощью эфемеридного сервера MULTI-SAT.

Спутник	Б. полуось, км	Эксцентриситет	Наклон, градусы	Период, сут.
J1 Ио	421942.424	0.00416355	0.036917	1.770620604
J2 Европа	671122.114	0.00936389	0.467883	3.551834882
J3 Ганимед	1070399.250	0.00196240	0.147563	7.154143807
J4 Каллисто	1882744.546	0.00728706	0.249848	16.689013764

Таблица П2.4: Средние орбитальные параметры близких спутников Юпитера. Наклон орбиты отсчитывается от экватора Юпитера. Взяты параметры прецессирующего эллипса, уточненные в работе (Емельянов, 2015) по модели движения спутников (Jacobson, 2013). Периоды даны для средней долготы.

Спутник	Б. полуось, км	Эксцентриситет	Наклон, градусы	Период, сут.
J5 Амальтея	181365.552	0.00342600	0.376187	0.4981790697
J14 Теба	221888.173	0.01753195	1.071790	0.6745359075
J15 Адрастея	128979.903	0.00018093	0.012926	0.2982604262
J16 Метис	127978.860	0.00050486	0.012230	0.2947788040

Таблица П2.5: Средние орбитальные параметры далеких спутников Юпитера на интервале времени с 1600 по 2600 год (Brozovic, Jacobson, 2017). Наклон орбиты отсчитывается от эклиптики эпохи J2000.

Спутник	Б. полуось, км	Эксцентриситет	Наклон, градусы	Период, сут.
J6 Гималия	11460200	0.159	28.61	250.56
J7 Элара	11740300	0.211	27.94	259.64

Спут- ник	Б. полу-, ось, км	Эксцен- триситет	Наклон, градусы	Период, сут.
J8 Пасифе	23629100	0.406	151.41	743.61
J9 Синопе	23942000	0.255	158.19	758.89
J10 Лиситея	11717000	0.116	27.66	259.20
J11 Карме	23400500	0.255	164.99	734.17
J12 Ананке	21253700	0.233	148.69	629.80
J13 Леда	11164400	0.162	27.88	240.93
J17 Каллирое	24098900	0.280	147.08	758.82
J18 Фемисто	7503900	0.243	42.98	130.02
J19 Мегаклите	23813900	0.416	152.78	752.88
J20 Тайгете	23362900	0.252	165.25	732.41
J21 Халдене	23180600	0.250	165.16	723.73
J22 Гарпалике	21106100	0.230	148.76	623.32
J23 Калике	23564600	0.247	165.12	742.04
J24 Иокасте	21272000	0.215	149.41	631.60
J25 Эриноме	23285900	0.266	164.91	728.49
J26 Исоное	23231200	0.247	165.25	726.26
J27 Праксидике	21147700	0.227	148.88	625.39
J28 Автоное	24037200	0.315	152.37	761.01
J29 Тионе	21197200	0.231	148.59	627.19
J30 Гермиппе	21297100	0.210	150.74	633.91
J31 Этне	23316700	0.263	165.05	730.12
J32 Эвридоме	23146200	0.275	150.27	717.31
J33 Эванте	21039000	0.232	148.92	620.45
J34 Эвпорие	19336200	0.144	145.74	550.69
J35 Оргозие	21158200	0.281	146.00	622.58
J36 Спонде	23790100	0.311	151.00	748.32
J37 Кале	23305800	0.260	164.94	729.61
J38 Пазите	23091500	0.268	165.12	719.47
J39 Гегемоне	23574700	0.344	154.16	739.82
J40 Мнеме	21033000	0.226	148.58	620.05
J41 Аойде	23974100	0.432	158.27	761.40
J42 Тельксиное	21159700	0.220	151.39	628.03
J43 Архе	23352000	0.249	165.01	731.90

Спут- ник	Б. полу- ось, км	Эксцен- триситет	Наклон, градусы	Период, сут.
J44 Каллихоре	23276300	0.251	165.10	728.24
J45 Гелике	21065500	0.150	154.84	626.33
J46 Карпо	17056600	0.432	51.62	456.28
J47 Эвкеладе	23322700	0.262	165.26	730.33
J48 Киллене	23799600	0.415	150.33	751.98
J49 Коре	24481800	0.331	145.17	776.84
J50 Герсе	23407900	0.254	164.96	734.52
J51 2010 J1	23448500	0.249	165.10	736.50
J52 2010 J2	21004200	0.227	148.67	618.85
J53 Дия	12297500	0.232	28.63	278.21
2003 J2	28348600	0.410	157.29	980.59
J60 2003 J3	20210000	0.197	147.63	583.84
2003 J4	23928700	0.362	149.59	755.25
J57 2003 J5	23424100	0.251	165.24	735.40
2003 J9	23334700	0.266	165.03	730.93
2003 J10	22862300	0.475	168.79	719.55
2003 J12	17818600	0.491	151.08	489.67
J58 2003 J15	22565200	0.191	146.90	689.79
2003 J16	21089700	0.228	148.74	622.89
J55 2003 J18	20491400	0.090	146.20	598.14
2003 J19	23545900	0.256	165.13	741.03
2003 J23	23601700	0.276	146.51	734.64
2011 J1	23444400	0.253	165.34	736.33
J56 2011 J2	23124300	0.349	153.60	718.40
J54 2016 J1	20595500	0.140	139.84	603.83
J59 2017 J1	23484000	0.397	149.20	735.21

Орбитальные параметры спутников Сатурна

Таблица П2.6: Средние орбитальные параметры главных спутников Сатурна. Интервал времени 2000–2040 годы. Наклон орбиты отсчитывается от экватора Сатурна. Периоды обращения вычислены по среднему значению оскулирующего среднего движения. Данные получены с помощью эфемеридного сервера MULTI-SAT.

Спут- ник	Б. полу- ось, км	Эксцен- триситет	Наклон, градусы	Период, сут.
S1 Мимас	186021.35	0.01967966	1.572785	0.94735329
S2 Энцелад	238412.62	0.00485416	0.008796	1.37455344
S3 Тефия	294976.58	0.00103366	1.091441	1.89168521
S4 Диона	377652.23	0.00224433	0.029095	2.74034631
S5 Рея	527235.48	0.00100497	0.334693	4.52036866
S6 Титан	1221952.96	0.02869581	0.404763	15.94770268
S7 Гиперион	1481540.33	0.10594669	1.010876	21.29278135
S8 Япет	3561752.42	0.02839588	15.754312	79.37108889

Таблица П2.7: Средние орбитальные параметры близких соорбитальных спутников Сатурна. Наклон орбиты отсчитывается от экватора Сатурна. Для спутников S10 Янус и S11 Эпиметей параметры взяты из работы (Nicholson et al., 1992). Для спутников S12 Елена, S13 Телесто, S14 Калипсо средние элементы получены с помощью эфемеридного сервера MULTI-SAT на интервале времени 2000–2040 годы. При этом периоды не определялись, поскольку спутники являются соорбитальными соответствующим главным спутникам.

Спут- ник	Б. полу- ось, км	Эксцен- триситет	Наклон, градусы	Период, сут.
S10 Янус	152026.525	0.00666424	0.148003	0.69991748
S11 Эпиметей	152026.525	0.00989707	0.326212	0.69991748
S12 Елена	377557.343	0.00759738	0.212697	(S4 Диона)
S13 Телесто	294904.096	0.00120295	1.180305	(S3 Тефия)
S14 Калипсо	294903.047	0.00125402	1.500476	(S3 Тефия)

Таблица П2.8: Средние орбитальные параметры близких спутников Сатурна S15 – S18, S32 – S35, S49, S53. Наклон орбиты отсчитывается от экватора Сатурна. Периоды соответствуют средним долготам. Параметры орбиты взяты из работы (Jacobson et al., 2008), кроме спутника S49 Анфа, для которого параметры взяты из работы (Cooper et al. 2008). Данные для спутника S53 Эгеон взяты из публикации (Pogso, 2009).

Спут- ник	Б. полу- ось, км	Эксцен- триситет	Наклон, градусы	Период, сут.
S15 Атлас	137670.0	0.0012	0.0031	0.60169240
S16 Прометей	139380.0	0.0022	0.0075	0.61299003
S17 Пандора	141710.0	0.0042	0.0507	0.62850414
S18 Пан	133584.0	0.0000144	0.0001	0.57505072
S32 Метона	194230.0	0.000	0.0131	1.00957630
S33 Паллена	212280.0	0.004	0.1813	1.15374576
S34 Полидевк	377200.0	0.0192	0.1774	2.73691945
S35 Дафнис	136505.5	0.0000331	0.0036	0.59407983
S49 Анфа	197655.0	0.0012	0.0170	1.03644246
S53 Эгеон	167500.0	0.0002	0.0010	0.80812000

Таблица П2.9: Средние орбитальные параметры далеких спутников Сатурна. Интервал времени 2000–2022 годы. Наклон орбиты отсчитывается от эклиптики эпохи J2000. Периоды обращения вычислены по среднему значению оскулирующего среднего движения. Данные вычислены с помощью эфемеридного сервера MULTI-SAT.

Спут- ник	Б. полу- ось, км	Эксцен- триситет	Наклон, градусы	Период, сут.
S9 Феба	12929039.9	0.1606324	173.09509	548.85427
S19 Имир	22962695.0	0.3488370	172.55711	1298.51677
S20 Палиак	14996742.1	0.4823732	45.14496	685.63343
S21 Тарвос	18216574.2	0.5733807	36.71391	917.70613
S22 Иджирак	11344466.9	0.3743473	49.50231	451.11541
S23 Суттунг	19395933	0.1185987	174.32725	1008.36326
S24 Кивиок	11307200	0.1551990	48.85463	448.89544
S25 Мундилфари	18590897	0.2077999	169.41758	946.26206

Спут- ник	Б. полу-, ось, км	Эксцен- триситет	Наклон, градусы	Период, сут.
S26 Альбиорикс	16327637	0.5436476	35.84246	778.83551
S27 Скади	15576511	0.2444519	148.86319	725.77430
S28 Эррипо	17511661	0.5221874	38.16016	865.00410
S29 Сиарнак	17881078	0.4581336	45.78317	892.57443
S30 Трюм	20319707	0.4781182	174.49251	1081.10795
S31 Нарви	19283228	0.2933297	137.56415	999.63191
S36 Эгир	20644613	0.2591989	167.45641	1107.19916
S37 Бефинд	17030786	0.3786360	41.56639	829.68887
S38 Бергельмир	19270288	0.1341646	158.02409	998.60492
S39 Бестла	20340498	0.6733796	145.68311	1082.82684
S40 Фарбаути	20291660	0.2102589	157.06470	1078.98982
S41 Фенрир	22332629	0.1316001	163.36678	1245.61873
S42 Форньот	24952935	0.2031598	167.71320	1470.67610
S43 Хати	19680664	0.3612598	162.60887	1030.59325
S44 Гирроккин	18341509	0.4051464	154.04512	927.29333
S45 Кари	22017148	0.4047111	147.19929	1219.24861
S46 Логи	22912847	0.1897239	166.31049	1294.40633
S47 Сколл	17621701	0.4332351	155.24493	873.23726
S48 Сурт	22769483	0.4327269	166.38362	1282.06719
S50 Ярнсакса	19283446	0.2329932	163.74470	999.60686
S51 Грейп	18365735	0.3233132	172.73529	929.11893
S52 Таркек	17748123	0.1134880	50.37607	882.68959
S/2004 S 7	20935811	0.5331217	165.59551	1130.54667
S/2004 S 12	19765284	0.3460168	163.59877	1037.25182
S/2004 S 13	18075271	0.2471338	167.57146	907.18131
S/2004 S 17	19356909	0.1804826	167.78802	1005.32393
S/2006 S 1	18715128	0.1252450	153.84562	955.78651
S/2006 S 3	21199569	0.4172553	153.10901	1152.07421
S/2007 S 2	16693361	0.1775148	176.60045	805.19585
S/2007 S 3	19717834	0.1916931	177.17941	1033.54331

Орбитальные параметры спутников Урана

Таблица П2.10: Радиусы орбит и периоды обращения главных спутников Урана (Emelyanov, Nikonchuk, 2013). Значения получены путем уточнения круговой орбиты в плоскости экватора Урана по результатам численного интегрирования уравнений движения на интервале с 1787 по 2032 год. Опорная модель была уточнена на основе всех имеющихся наблюдений.

Спутник	Радиус орбиты, км	Период обращения, сут
U1 Ариэль	190929.789	2.52037923705
U2 Умбриэль	265984.008	4.14417716318
U3 Титания	436281.937	8.70586922413
U4 Оберон	583449.534	13.46323747494
U5 Миранда	129848.114	1.41347941664

Таблица П2.11: Средние значения эксцентриситетов и наклонов главных спутников Урана на интервале времени 2000–2040 годы. Наклоны орбит отсчитываются от экватора Урана в сторону южного полюса. Данные получены с помощью эфемеридного сервера MULTI-SAT с выбором модели движения Arlot et al. (2017).

Спутник	Эксцентриситет			Наклон, град.		
	мин.	средн.	макс.	мин.	средн.	макс.
U1 Ариэль	0.0002	0.0007	0.0015	0.016	0.033	0.053
U2 Умбриэль	0.0030	0.0038	0.0045	0.052	0.064	0.079
U3 Титания	0.0007	0.0019	0.0030	0.034	0.058	0.094
U4 Оберон	0.0008	0.0017	0.0030	0.182	0.190	0.195
U5 Миранда	0.0010	0.0013	0.0016	4.404	4.420	4.434

Таблица П2.12: Параметры орбит близких спутников Урана. Наклон орбиты отсчитывается от экватора Урана в сторону южного полюса. Орбиты представляют собой прецессирующие эллипсы. Периоды обращения соответствуют изменению средних долгот спутников. Для спутников U6 Корделия, U7 Офелия параметры взяты из работы (Jacobson, 1998). Для остальных спутников — из работы (Showalter, Lissauer, 2006).

Спутник	Б. полуось, км	Эксцентриситет	Наклон, градусы	Период, сут.
U6 Корделия	49751.7220	0.000260	0.08479	0.335033842
U7 Офелия	53763.3900	0.009920	0.10362	0.376400393
U8 Бьянка	59165.5621	0.000274	0.18110	0.434579025
U9 Крессида	61766.7199	0.000203	0.03790	0.463569377
U10 Дездемона	62658.3825	0.000342	0.09820	0.473649687
U11 Джульетта	64358.2307	0.000052	0.04540	0.493065462
U12 Порция	66097.2873	0.000512	0.02550	0.513196030
U13 Розалинда	69926.8179	0.000579	0.09340	0.558459595
U14 Белинда	75255.6102	0.000277	0.02820	0.623527138
U15 Пак	86004.4919	0.000389	0.32140	0.761832904
U25 Пердита	97735.9095	0.002537	0.1335	0.922958342
U26 Маб	74392.3409	0.001335	0.0988	0.612824737
U27 Купидон	76416.7306	0.003287	0.0676	0.638019137

Таблица П2.13: Параметры орбит далеких спутников Урана. Наклон орбиты отсчитывается от эклиптики. Периоды обращения вычислены как средние за большой промежуток времени и соответствуют изменению средней аномалии. Данные получены с помощью средства, описанного в работе (Емельянов, Вашковьяк, 2012). Остальные параметры вычислены на интервале времени с 1960 по 2060 год с помощью эфемеридного сервера MULTI-SAT.

Спутник		Б. полуось, км	Эксцентриситет	Наклон, градусы	Период, лет.
	min	7160841	0.074576	139.388	
U16 Калибан	mean	7166371	0.078742	139.726	1.586654
	max	7170731	0.082372	140.012	

Спут- ник		Б. полу-, ось, км	Эксцен- триситет	Наклон, градусы	Период, лет.
U17 Сикоракса	min	12147958	0.450552	151.620	3.521717
	mean	12193460	0.492994	153.325	
	max	12253618	0.535105	154.839	
U18 Просперо	min	16105679	0.316875	143.701	5.402682
	mean	16219543	0.358308	145.277	
	max	16353362	0.400816	146.930	
U19 Сетевос	min	17313795	0.466791	145.866	6.066045
	mean	17520561	0.533485	148.114	
	max	17734844	0.593424	150.116	
U20 Стефано	min	7946520	0.137591	141.323	1.854024
	mean	7950882	0.148893	141.691	
	max	7956250	0.160579	142.039	
U21 Тринкуло	min	8499736	0.201950	165.977	2.050397
	mean	8505890	0.213832	166.205	
	max	8513782	0.224779	166.440	
U22 Франциско	min	4274861	0.131887	147.362	0.731215
	mean	4275490	0.138173	147.500	
	max	4276111	0.144428	147.635	
U23 Маргарита	min	14363104	0.722039	47.782	4.547646
	mean	14459011	0.805199	52.126	
	max	14564006	0.869983	57.380	
U24 Фердинанд	min	19978168	0.321742	166.424	7.580276
	mean	20330388	0.399019	167.679	
	max	20754127	0.474938	168.758	

Орбитальные параметры спутников Нептуна

Таблица П2.14: Параметры орбиты спутника Тритон и близких спутников. Наклоны орбит отсчитываются от экватора Нептуна. Параметры орбиты Тритона взяты из работы (Emelyanov, Samorodov, 2015), спутников N3 Наяда и N4 Таласса – из работы (Owen et al., 1991), спутников N5 Деспина, N6 Галатея, N7 Ларисса – из работы (Pascu et al., 2004), спутника N8 Протей – из работы (Jacobson, 2009), спутника S/2004 N 1 – из сообщения (Showalter, 2013).

Спут- ник	Б. полу- ось, км	Эксцен- триситет	Наклон, градусы	Период, сут.
N1 Тритон	354696.8	0.0	157.268439	5.876714551
N3 Наяда	48233.1	0.000328	4.7382	0.294395663
N4 Таласса	50069.2	0.000156	0.2054	0.311484539
N5 Деспина	52531.3	0.000139	0.0655	0.334655476
N6 Галатея	61945.1	0.000120	0.0544	0.428744263
N7 Ларисса	73545.70	0.001386	0.2008	0.554653319
N8 Протей	117646.0	0.000510	0.0749	1.122314776
S/2004 N 1	105384.0	0.000000	0.0000	0.950000000

Таблица П2.15: Параметры орбит далеких спутников Нептуна. Наклон орбиты отсчитывается от эклиптики. Периоды обращения вычислены как средние за большой промежуток времени и соответствуют изменению средней аномалии (Емельянов, Вашковьяк, 2012). Остальные параметры вычислены на интервале времени с 1960 по 2060 год с помощью эфемеридного сервера MULTI-SAT.

Спут- ник		Б. полу- ось, км	Эксцен- триситет	Наклон, градусы	Период, лет.
N2 Нереида	min	5516655	0.744831	4.8560	0.987018
	mean	5517274	0.751105	4.9882	
	max	5518238	0.755896	5.1056	
N9 Галимеда	min	16565549	0.228959	111.8056	5.144978
	mean	16588715	0.250702	112.5882	
	max	16607272	0.263546	113.2500	
	min	45652714	0.167440	117.1266	

Спут- ник		Б. полу- ось, км	Эксцен- триситет	Наклон, градусы	Период, лет.
N10 Псамафа	mean	47371107	0.279459	120.8545	24.82927
	max	49449874	0.391994	124.2182	
	min	22107254	0.113321	52.6235	
N11 Сао	mean	22211127	0.134501	53.6789	7.970776
	max	22310554	0.153853	54.4520	
	min	23345855	0.347880	37.6585	
N12 Лаомедея	mean	23476976	0.387977	38.9636	8.663030
	max	23673374	0.426845	40.3566	
	min	47889561	0.619595	134.5595	
N13 Несо	mean	49735947	0.739533	139.1570	26.68128
	max	51483996	0.849778	143.8458	

Орбитальные параметры спутников Плутона

Таблица П2.16: Параметры орбит спутников Плутона (Vie et al., 2012; Vie et al., 2013; IAUС 9253, 2012). Наклоны орбит отсчитываются от геоэкуатора эпохи J2000. Орбита Харона рассчитана относительно Плутона, орбиты других спутников – относительно барицентра Плутона – Харон. Периоды обращения спутников P2–P5 взяты из публикации (Weaver et al., 2016).

Спут- ник	Б. полу- ось, км	Эксцен- триситет	Наклон, градусы	Период, сут.
P1 Харон	19573	0.0	96.218	6.3872273
P2 Никта	48841	0.00230	96.287	24.85463
P3 Гидра	64736	0.00658	96.331	38.2017
P4 Цербер	57890	0.0045	96.37	32.16756
P5 Стикс	42000	0.0	96.3	20.1615

Литература к Приложению 2

Емельянов Н.В., Вашковьяк М.А. Эволюция орбит и сближения далеких спутников планет. Средства изучения и примеры. *Астрономический вестник*. 2012. Т. 46. С. 460–473.

- Емельянов Н.В.* Возмущенное движение при малых эксцентриситетах. *Астрономический вестник*. 2015. Т. 49. С. 380–394.
- Arlot J.E., Cooper N., Emelyanov N., Lainey V., Meunier L.E., Murray C., Oberst J., Pascu D., Pasewaldt A., Robert V., Tajeddine R., Willner K.* Natural satellites astrometric data from either space probes and ground-based observatories produced by the European consortium «ESPACE». *Notes Scientifiques et Techniques de l'Institut de mécanique céleste*. 2017. S105.P1–49.
- Bills B. G., Neumann G. A., Smith D. E., Zuber M. T.* Improved estimate of tidal dissipation within Mars from MOLA observations of the shadow of Phobos. *Journal of Geophysical Research*. 2005, V. 110. Issue E7. CiteID E07004.
- Brozovic, M., Jacobson R. A.* The Orbits of Jupiter's Irregular Satellites. *Astronomical Journal*. 2017. V. 153. Article id. 147, 10 pp.
- Buie M. W., Tholen D. J., Grundy W. M.* The orbit of Charon is circular. *Astronomical Journal*. 2012. V. 144. Article id. 15, 19 pp.
- Buie M. W., Grundy W. M., Tholen D. J.* Astrometry and Orbits of Nix, Kerberos, and Hydra. *Astronomical Journal*. 2013. V. 146. Issue 6. Article id. 152, 12 pp.
- Cooper N. J., Murray C. D., Evans M. W., Beurle K., Jacobson R. A., Porco C. C.* Astrometry and dynamics of Anthe (S/2007 S 4), a new satellite of Saturn. *Icarus*. 2008. V. 195. Issue 2. P. 765–777.
- Emelyanov N. V., Vashkovyak S. N., Nasonova L. P.* The dynamics of Martian satellites from observations. *Astronomy and Astrophysics*. 1993. V. 267. N. 2. P. 634–642.
- Emelyanov N. V., Nikonchuk D.V.* Ephemerides of the main Uranian satellites. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2013. V. 436. Issue 4. P. 3668–3679.
- Emelyanov N. V., Samorodov M. Yu.* Analytical theory of motion and new ephemeris of Triton from observations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. V. 454. P. 2205–2215.
- Jacobson R. A., Synnott S. P., Campbell J. K.* The orbits of the satellites of Mars from spacecraft and earthbased observations. *Astronomy and Astrophysics*. 1989. V. 225. P. 548–554.
- Jacobson R. A.* The Orbits of the Inner Uranian Satellites from Hubble

- Space Telescope and Voyager 2 Observations. *Astronomical Journal*. 1998. V. 115. Issue 3. P. 1195–1199.
- Jacobson R. A., Spitale J., Porco C. C., Beurle K., Cooper N. J., Evans M. W., Murray, C. D.* Revised Orbits of Saturn's Small Inner Satellites. *Astronomical Journal*. 2008. V. 135. P. 261–263.
- Jacobson R. A.* The Orbits of the Neptunian Satellites and the Orientation of the Pole of Neptune. *Astronomical Journal*. 2009. V. 137. Issue 5. P. 4322–4329.
- Jacobson R.A.* The orbits of the regular Jovian satellites, their masses, and the gravity field of Jupiter. American Astronomical Society. DDA meeting #44, #402.04. 2013.
- Lainey V., Dehant V., Patzold M.* First numerical ephemerides of the Martian moons. *Astronomy and Astrophysics*. 2007. V. 465. P. 1075–1084.
- Nicholson P. D.; Hamilton D. P., Matthews K., Yoder C. F.* New observations of Saturn's coorbital satellites. *Icarus*. 1992. V. 100. P. 464–484.
- Owen W. M., Vaughan R. M., Synnott S. P.* Orbits of the six new satellites of Neptune. *Astronomical Journal*. 1991. V.101. P.1511–1515.
- Pascu D., Rohde J. R., Seidelmann P. K., Wells E. N., Hershey J. L., Storrs A. D., Zellner B. H., Bosh A. S., Currie D. G.* Hubble Space Telescope Astrometric Observations and Orbital Mean Motion Corrections for the Inner Satellites of Neptune. *Astronomical Journal*. 2004. V. 127. Issue 5. P. 2988–2996.
- Porco, C. C.* S/2008 S 1. IAUC 9023. 2009. P. 1–1.
- Showalter M. R., Lissauer J.J.* The Second Ring-Moon System of Uranus: Discovery and Dynamics. *Science*. 2006. V. 311. Issue 5763. P. 973–977.
- Showalter M. R.* New satellite of Neptune: S/2004 N 1. CBET 3586. 2013.
- Tholen D.J., Buie M. W., Grundy W. M., Elliott G. T.* Masses of Nix and Hydra. *Astronomical Journal*. 2008. V. 135. P. 777–784.
- Weaver H. A., Buie M. W., Buratti B.J., Grundy W. M., Lauer T. R., Olkin C. B., Parker A. H., Porter S. B. and 43 co-authors.* The small satellites of Pluto as observed by New Horizons. *Science*. 2016. V. 351. Issue 6279. Id. aae0030.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

Функции наклона

Функции наклона $F_{k,m,p}(i)$ появляются в теории возмущенного движения спутника при разложении возмущающей функции, обусловленной несферичностью планеты, или от притяжения внешнего тела. Направление радиус-вектора спутника однозначно определяется его широтой φ и долготой, отсчитываемой от восходящего узла орбиты, т.е. $\lambda - \Omega$. Направление радиус-вектора спутника также однозначно определяется наклоном орбиты i и аргументом широты u (угол между радиус-вектором и направлением на восходящий узел). Между этими парами углов справедливы соотношения

$$\sin \varphi = \sin i \sin u,$$

$$\cos \varphi \cos(\lambda - \Omega) = \cos u,$$

$$\cos \varphi \sin(\lambda - \Omega) = \cos i \sin u.$$

При разложении возмущающей функции возникает некоторая функция

$$Q_{km} = P_k^{(m)}(\sin \varphi) \exp \sqrt{-1} m(\lambda - \Omega),$$

зависящая от φ и $\lambda - \Omega$. Используя последние соотношения эту функцию можно выразить через i и u следующим образом:

$$Q_{km} = (\sqrt{-1})^{m-k+2E(\frac{k-m}{2})} \sum_{p=0}^k F_{kmp}(i) \exp \sqrt{-1}(k-2p)u, \quad (\text{ПЗ.1})$$

где $F_{kmp}(i)$ — специальные функции небесной механики, называемые функциями наклона. В этом выражении использовано обозначение $E(\dots)$ — целая часть числа.

Выражение для $F_{kmp}(i)$ для любых значений индексов через $\sin i$ и $\cos i$ имеет вид

$$F_{kmp}(i) = \sum_t \frac{(2k-2t)!}{t!(k-t)!(k-m-2t)!2^{2k-2t}} \sin^{k-m-2t} i \times$$

$$\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \cos^s i \sum_c \binom{k-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-E_{km}}.$$

Здесь E_{km} — целая часть $(k-m)/2$, t изменяется от 0 до p или E_{km} (в зависимости от того, что меньше), а суммирование выполняется по всем значениям c , при которых биномиальные коэффициенты отличны от нуля.

В статье (Брумберг, 1967) можно найти выражение для $F_{kmp}(i)$ через $\sin i/2$ и $\cos i/2$. В публикации (Фоминов, Филенко, 1978) даются удобные формулы для вычисления функций наклона и их производных, а также соответствующие вычислительные программы. При необходимости определения функций наклона для больших значений индексов можно воспользоваться методом, основанном на специальных рекуррентных соотношениях, изложенным в работе (Емельянов, 1985). Эффективный метод вычисления функций наклона с помощью рекуррентных соотношений предложен в работе (Emelianov, Kanter, 1989).

Ниже приводятся явные выражения для функций наклона с индексами $k = 2, 3, 4$, $m = 0, 1, \dots, k$, $p = 0, 1, \dots, k$.

$$\begin{aligned} F_{200}(i) &= -\frac{3}{8} \sin^2 i, & F_{201}(i) &= \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2}, \\ F_{202}(i) &= -\frac{3}{8} \sin^2 i, & F_{210}(i) &= \frac{3}{4} \sin i (1 + \cos i), \\ F_{211}(i) &= -\frac{3}{2} \sin i \cos i, & F_{212}(i) &= -\frac{3}{4} \sin i (1 - \cos i), \\ F_{220}(i) &= \frac{3}{4} (1 + \cos i)^2, & F_{221}(i) &= \frac{3}{2} \sin^2 i, \\ F_{222}(i) &= \frac{3}{4} (1 - \cos i)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{300}(i) &= -\frac{5}{16} \sin^3 i, \\
F_{301}(i) &= \frac{15}{16} \sin^3 i - \frac{3}{4} \sin i, \\
F_{302}(i) &= -\frac{15}{16} \sin^3 i + \frac{3}{4} \sin i, \\
F_{303}(i) &= \frac{5}{16} \sin^3 i, \\
F_{310}(i) &= -\frac{15}{16} \sin^2 i(1 + \cos i), \\
F_{311}(i) &= \frac{15}{16} \sin^2 i(1 + 3 \cos i) - \frac{3}{4}(1 + \cos i), \\
F_{312}(i) &= \frac{15}{16} \sin^2 i(1 - 3 \cos i) - \frac{3}{4}(1 - \cos i), \\
F_{313}(i) &= -\frac{15}{16} \sin^2 i(1 - \cos i), \\
F_{320}(i) &= \frac{15}{8} \sin i(1 + \cos i)^2, \\
F_{321}(i) &= \frac{15}{8} \sin i(1 - 2 \cos i - 3 \cos^2 i), \\
F_{322}(i) &= -\frac{15}{8} \sin i(1 + 2 \cos i - 3 \cos^2 i), \\
F_{323}(i) &= -\frac{15}{8} \sin i(1 - \cos i)^2, \\
F_{330}(i) &= \frac{15}{8}(1 + \cos i)^3, \\
F_{331}(i) &= \frac{45}{8} \sin^2 i(1 + \cos i), \\
F_{332}(i) &= \frac{45}{8} \sin^2 i(1 - \cos i), \\
F_{333}(i) &= \frac{15}{8}(1 - \cos i)^3, F_{400}(i) = \frac{35}{128} \sin^4 i, \\
F_{401}(i) &= -\frac{35}{32} \sin^4 i + \frac{15}{16} \sin^2 i, \\
F_{402}(i) &= \frac{105}{64} \sin^4 i - \frac{15}{8} \sin^2 i + \frac{3}{8}, \\
F_{403}(i) &= -\frac{35}{32} \sin^4 i + \frac{15}{16} \sin^2 i, \\
F_{404}(i) &= \frac{35}{128} \sin^4 i, \\
F_{410}(i) &= -\frac{35}{32} \sin^3 i(1 + \cos i), \\
F_{411}(i) &= \frac{35}{16} \sin^3 i(1 + 2 \cos i) - \frac{15}{8} \sin i(1 + \cos i), \\
F_{412}(i) &= \cos i\left(\frac{15}{4} \sin i - \frac{105}{16} \sin^3 i\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{413}(i) &= -\frac{35}{16} \sin^3 i(1 - 2 \cos i) + \frac{15}{8} \sin i(1 - \cos i), \\
F_{414}(i) &= \frac{35}{32} \sin^3 i(1 + \cos i), \\
F_{420}(i) &= -\frac{105}{32} \sin^2 i(1 + \cos i)^2, \\
F_{421}(i) &= \frac{105}{8} \sin^2 i \cos i(1 + \cos i) - \frac{15}{8}(1 + \cos i)^2, \\
F_{422}(i) &= \frac{105}{16} \sin^2 i(1 - 3 \cos^2 i) + \frac{15}{4} \sin^2 i, \\
F_{423}(i) &= -\frac{105}{8} \sin^2 i \cos i(1 - \cos i) - \frac{15}{8}(1 - \cos i)^2, \\
F_{424}(i) &= -\frac{105}{32} \sin^2 i(1 - \cos i)^2, \\
F_{430}(i) &= \frac{105}{16} \sin i(1 + \cos i)^3, \\
F_{431}(i) &= \frac{105}{8} \sin i(1 - 3 \cos^2 i - 2 \cos^3 i), \\
F_{432}(i) &= -\frac{315}{8} \sin^3 i \cos i, \\
F_{433}(i) &= -\frac{105}{8} \sin i(1 - 3 \cos^2 i + 2 \cos^3 i), \\
F_{434}(i) &= -\frac{105}{16} \sin i(1 - \cos i)^3, \\
F_{440}(i) &= \frac{105}{16} (1 + \cos i)^4, \\
F_{441}(i) &= \frac{105}{4} \sin^2 i(1 + \cos i)^2, \\
F_{442}(i) &= \frac{315}{8} \sin^4 i, \\
F_{443}(i) &= \frac{105}{4} \sin^2 i(1 - \cos i)^2, \\
F_{444}(i) &= \frac{105}{16} (1 - \cos i)^4.
\end{aligned}$$

Функции эксцентриситета

Функции эксцентриситета появляются в теории возмущенного движения спутника при разложении возмущающей функции, обусловленной несферичностью планеты, или притяжением внешнего тела. Следующие функции от расстояния r и истинной аномалии v

приходится разлагать в ряд по кратным средней аномалии M при малых эксцентриситетах e :

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp \sqrt{-1} j v = \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_q^{n,j}(e) \exp \sqrt{-1} q M, \quad (\text{ПЗ.2})$$

где $X_q^{n,j}(e)$ – специальные функции небесной механики, называемые функциями эксцентриситета. Вывод такого разложения и формулы для вычисления функций эксцентриситета, можно найти в работах (Брумберг, 1967; Аксенов, 1986). Оказывается, что записанный выше ряд по кратным средней аномалии сходится при всех значениях эксцентриситета, меньших единицы.

Отметим некоторые свойства функций эксцентриситета.

Количество вычислений можно сократить, используя соотношение

$$X_{-q}^{k,-j}(e) = X_q^{k,j}(e).$$

Для всех допустимых значений индексов можно записать разложение

$$X_q^{k,j}(e) = e^{|q-j|} \sum_{s=0}^{\infty} X_{q,s}^{k,j} e^{2s},$$

где $X_{q,s}^{k,j}$ – некоторые числа, а ряд сходится при всех $e < 1$. Вычислить все необходимые коэффициенты $X_{q,s}^{k,j}$ можно с помощью рекуррентных соотношений, которые взяты из работы (Cherniack, 1972) и приведены к удобному для программирования виду в публикации (Фоминов, Филенко, 1978). Аналогичные рекуррентные соотношения даны еще в работе (Hughes, 1981) и приведены в книге (Мюррей, Дермотт, 2010). Функциям эксцентриситета уделено много внимания в книге (Аксенов, 1986).

При значении индекса $q = 0$ функции эксцентриситета выражаются в конечном виде. Для этого частного случая вычисления можно выполнять по рекуррентным соотношениям, взятым из работы (Hughes, 1981).

При вычислении возмущений оказывается важным следующее свойство:

$$X_0^{-3,2}(e) = X_0^{-3,-2}(e) = 0$$

при всех $e < 1$.

Явные выражения функций $X_q^{k,j}(e)$ для $k = -3, -4, -5$ и некоторых значений j, q даны в книге (Каула, 1970).

Заметим, что в литературе числа $X_{q,s}^{k,j}$ называются еще операторами Ньюкома, а сами функции эксцентриситета — коэффициентами Ганзена.

Ниже приводятся выражения для некоторых функций эксцентриситета при $q = 0$.

$$X_0^{2,0} = 1 + \frac{3}{2}e^2, \quad X_0^{2,1} = -2e - \frac{1}{2}e^3, \quad X_0^{2,2} = \frac{5}{2}e^2,$$

$$X_0^{-3,0} = (1 - e^2)^{-3/2}, \quad X_0^{-4,1} = e(1 - e^2)^{-5/2},$$

$$X_0^{-5,2} = \frac{3}{4}e^2(1 - e^2)^{-7/2}, \quad X_0^{-5,0} = (1 + \frac{3}{2}e^2)(1 - e^2)^{-7/2}.$$

Литература к Приложению 3

- Аксенов Е.П.* Специальные функции в небесной механике. М.: Наука, 1986.
- Брумберг В. А.* Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. Бюллетень ИТА. 1967. Т. 11. N. 2. С. 73–83.
- Емельянов Н. В.* Вычисление нормированных функций наклона и их производных при больших значениях индексов. Труды ГАИШ. 1985. Т.57. С.83–91.
- Каула У.* Спутниковая геодезия. М.: Мир, 1970.
- Фоминов А.М., Филенко Л.Л.* Вычисление нормированных функций наклона и их производных. Вычисление коэффициентов Ганзена и их производных. Алгоритмы небесной механики. 1978. N 19. ИТА АН СССР. Ленинград, 1978.
- Cherniack J. R.* Computation of Hansen coefficients. SAO Special Report. 1972. N. 346.
- Emelianov N. V., Kanter A. A.* A method to compute inclination functions and their derivatives. Manuscripta geodaetica. 1989. V. 14. С. 77–83.
- Hughes S.* The Computation of Tables of Hansen Coefficients. Celestial Mechanics. 1981. V. 25. Issue 1. P. 101–107.

Построение шкал времени

Время является феноменом, который мы покорно принимаем таким, какой он есть. Однако в астрономической практике мы нуждаемся в источнике, сообщающем нам о времени. Источником обычно служит какой-нибудь физический процесс, подлежащий наблюдению и измерению. Астрономы всегда нуждаются в самом равномерном времени, определяемом той или иной шкалой. Постоянно ведутся поиски самой равномерной шкалы времени.

В прошлые века физическим процессом, несущим нам время, было вращение Земли. Время с ним связанное, называли *всемирным временем* (UT — Universal Time). Установлением всемирного времени занимались астрономы. Одна из версий всемирного времени обозначается через UT1.

Поскольку местное солнечное время зависит от долготы места на Земле, было введено понятие поясного времени. Всемирное время на гринвичском меридиане обозначается как GMT — Greenwich Mean Time.

После того как была обнаружена неравномерность вращения Земли, шкалу времени стали основывать на процессе движения Земли вокруг Солнца. Измерением этого процесса занимались астрономы. Так в астрономическую практику вошло *эфemerидное время* (ET — Ephemeris Time). Эфemerидное время считалось самым равномерным. Разность эфemerидного и всемирного времени измерялась и табулировалась. Из-за непредсказуемости переменной скорости вращения Земли разность UT1 — ET всегда была известна только для моментов в прошлом после обработки астрономических

наблюдений. Таблицы разностей $UT1 - ET$ публиковались в астрономических ежегодниках.

С 1967 года определением понятия секунды стали заниматься физики. И уже с 1972 года в астрономической практике используется понятие *атомного времени*. Датчиком времени стали физические процессы в атомах, доступные наблюдению и измерению. Шкалу атомного времени обозначают как IAT – International Atomic Time. Эта шкала считалась столь же равномерной, как и шкала эфемеридного времени. По необъяснимым историческим причинам разность между эфемеридным и атомным временем ($ET - IAT$) установили равной 32.184 секунды.

Возникло противоречие между желанием пользоваться самым равномерным временем IAT и тем фактом, что наша практическая жизнь на Земле связана с восходом и заходом солнца, а солнце живет на небе по шкале всемирного времени. Противоречие разрешили следующим путем. Придумали всемирное координированное время (UTC – Universal Time Coordinated) согласно двум простым правилам: $IAT - UTC$ всегда равно целому числу секунд, разность $UTC - UT1$ никогда не превышает 0.9 секунды. Таким образом, время UTC, являясь равномерным, отслеживает изменения хода всемирного времени $UT1$. Для реализации этих правил придется время от времени скачком изменять UTC на одну секунду. Этим занимается международная служба вращения Земли (IERS – International Earth Rotation Service). Обычно при необходимости это делают либо 1 января, либо 1 июля. Как часто это делается можно узнать из следующего раздела. О планируемом заранее скачке времени UTC и о текущей разности $IAT - UTC$ можно узнать на сайте

<https://hpiers.obspm.fr/iers/bul/bulc/bulletinc.dat>.

В настоящее время GMT (Greenwich Mean Time) совпадает с UTC.

К концу XX века точность астрономических наблюдений достигла такого уровня, что приходится применять модель общей теории относительности (ОТО) вместо Ньютоновой механики. Согласно ОТО время течет по-разному в разных местах Солнечной системы. Поэтому шкалу времени стали привязывать к месту, в котором находятся часы, хранящие время. Так появились понятия барицентрического времени (TDB – Time Dynamic Barycentric), текущего в барицентре Солнечной системы, и времени на геоиде (TT – Time

Terestre). Реализация ТТ оказалась возможной благодаря тому, что атомные часы расположены на геоиде. При этом положили, что $ТТ - IAT = 32.184$ секунды. Таким образом, получилось, что время ТТ является продолжением эфемеридного времени ET, что удобно для астрономической практики.

Барицентрическое время используется для описания динамики тел Солнечной системы. Поскольку в барицентре Солнечной системы фактически нет никаких часов, даже атомных, то шкалу TDB приходится моделировать, используя знания о распределении масс, орбитальном и вращательном движениях небесных тел. Конечно, скорость течения времени в барицентре отличается от скорости его течения на геоиде. Эта разность имеет как вековой ход, так и периодические изменения. Однако для удобства работы в астрометрии предположили, что в барицентре расположены часы, идущие в среднем с той же скоростью, что и часы на геоиде. Периодически изменяющуюся разность $P = TDB - TT$ пришлось моделировать огромными тригонометрическими рядами, учитывая периодические движения многих тел Солнечной системы. Фактически величина P представлена суммой периодических слагаемых, каждое со своим периодом. Одну из версий этого ряда можно найти в статье Fairhead, Bretagnon (1990). Максимальная амплитуда периодических членов ряда составляет 0.001656 с.

В последние годы в качестве датчика времени используются сигналы космических радиоисточников, называемых пульсарами. Такое пульсарное время считается наиболее равномерным.

Более подробные сведения о шкалах времени и его измерениях можно найти в книгах *Introduction aux Ephémérides Astronomiques*, 1997), Труды ИПА РАН. Вып. 10. Эфемеридная астрономия (2004).

Связь шкалы UTC со шкалой TT

Как следует из предыдущего раздела, разность $ТТ - UTC$ равна 32.184 секунды плюс некоторое целое число секунд. В таблице П4.1 и на рис. П4.1 дается разность $ТТ - UTC$ для каждой из начальных дат ее изменения, начиная с 1972 года. Скачкообразное изменение шкалы UTC на одну секунду устанавливается международной службой вращения Земли (IERS – International Earth Rotation Service) в 0 часов начальной даты. Для дат до 1972 года разность

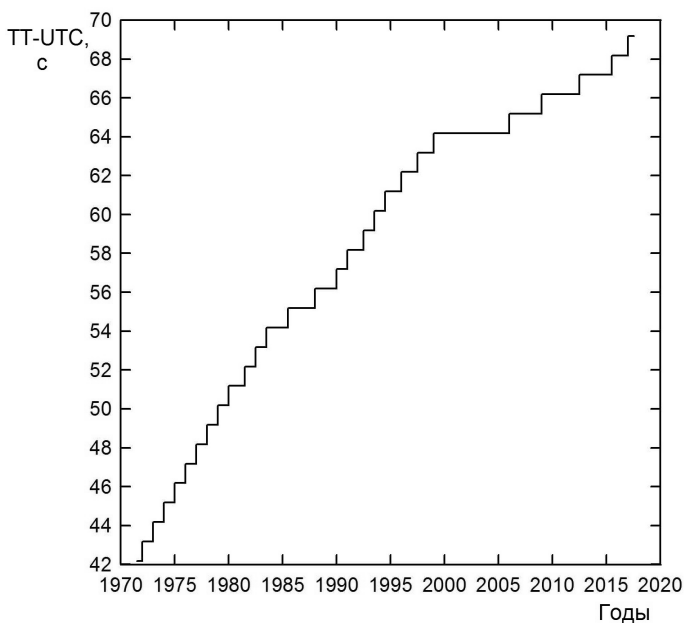


Рис. П4.1. Изменение разности TT – UTC со временем.

ET – UTC или ET – GMT публиковалась в *Астрономических ежегодниках*.

Шкалы времени в публикациях наблюдений в прошлых веках

В публикациях астрометрических наблюдений планет, спутников и астероидов в прошлых веках использовались шкалы местного среднего солнечного времени. Связь некоторых таких шкал с UTC или с продолжением UTC в прошлое – GMT дается в таблице П4.2.

Таблица П4.1. Разность ТТ – UTC для каждой из начальных дат ее изменения.

Юлианская дата, JD	Календарная дата	ТТ-UTC, секунды
2441317.5	1972 01 01	42.184
2441499.5	1972 07 01	43.184
2441683.5	1973 01 01	44.184
2442048.5	1974 01 01	45.184
2442413.5	1975 01 01	46.184
2442778.5	1976 01 01	47.184
2443144.5	1977 01 01	48.184
2443509.5	1978 01 01	49.184
2443874.5	1979 01 01	50.184
2444239.5	1980 01 01	51.184
2444786.5	1981 07 01	52.184
2445151.5	1982 07 01	53.184
2445516.5	1983 07 01	54.184
2446247.5	1985 07 01	55.184
2447161.5	1988 01 01	56.184
2447892.5	1990 01 01	57.184
2448257.5	1991 01 01	58.184
2448804.5	1992 07 01	59.184
2449169.5	1993 07 01	60.184
2449534.5	1994 07 01	61.184
2450083.5	1996 01 01	62.184
2450630.5	1997 07 01	63.184
2451179.5	1999 01 01	64.184
2453736.5	2006 01 01	65.184
2454832.5	2009 01 01	66.184
2456109.5	2012 07 01	67.184
2457204.5	2015 07 01	68.184
2457754.5	2017 01 01	69.184

Таблица П4.2. Связь различных шкал времени, которые использовались в прошлом.

Обозначение шкалы времени в публикациях	Разность: UTC - время шкалы (ч – часы, м – минуты, с – секунды)
Greenwich Mean Time	0 ч
Washington mean time	5 ч 8 м 12.15 с
Central Standard Time	6 ч
Pacific Standard Time	8 ч
Pulkovo mean time	-(2 ч 1 м 18.576 с)
Paris Mean Time	-(9 м 21 с)
Cambridge Mean Time	-(22.752 с)
Temps moyen de Nice	-(29 м 12.096 с)
Strasburg Mean Time	-(31 м 4.248 с)
Mount Hamilton Mean Time	8 ч 6 м 34.92 с
90th Meridian Time	6 ч
Leander McCormick mean time	5 ч 14 м 5.328 с

Литература к Приложению 4

Fairhead L., Bretagnon P. An analytical formula for the time transformation ТВ-ТТ. *Astronomy and Astrophysics*. 1990. V. 229. P. 240–247.

Introduction aux éphémérides Astronomiques. Supplément explicatif à la connaissance des temps. (eds. Simon J.-L., Chapront-Touzé M., Morando B., Thuillot W.). Bureau des Longitudes. Paris. Publisher: Les éditions de physique, France. 1997. 450 pp.

Труды ИПА РАН. Вып. 10. Эфемеридная астрономия. Санкт-Петербург. 2004.

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ХОЛЕЦКОГО. ПРОГРАММА НА ЯЗЫКЕ СИ

Для оценки точности эфемерид методом вариации параметров движения требуется вычислять некоторую матрицу \mathbf{L} , называемую матрицей декомпозиции Холецкого и удовлетворяющую соотношению

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{D},$$

где матрица \mathbf{D} есть ковариационная матрица ошибок параметров, которая получается при уточнении параметров движения небесного тела из наблюдений.

Матрица \mathbf{L} оказывается нижней треугольной матрицей. Для ее вычисления можно использовать следующую программу, составленную на языке программирования Си:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
...
void decomp(double *A, int n, double *L)
{
  int i,j,k;

  for(i=0;i<n;i++)
  {
    for(j=0;j<n;j++)
    {
      if(j>i) L[i*n+j]=0.0;
```

```

else
{
if(j<i)
{
L[i*n+j]=A[i*n+j];
if(j-1>=0) for(k=0;k<=j-1;k++) L[i*n+j]-=L[i*n+k]*L[j*n+k];
L[i*n+j]=L[i*n+j]/L[j*n+j];
}
else
{
L[i*n+j]=A[i*n+j];
if(i-1>=0) for(k=0;k<=i-1;k++) L[i*n+j]-=L[i*n+k]*L[i*n+k];
if(L[i*n+j]<=0.0) L[i*n+j]=0.0;
else L[i*n+j]=sqrt(L[i*n+j]);
}
}
}
}

return;
}

```

В процедуре `decomp` параметр `A` задает адрес исходной матрицы **D**, параметр `n` задает размерность матрицы, а параметр `L` — адрес результирующей матрицы **L**. Элементы матриц располагаются в индексированных переменных `A` и `L` по строкам.

ПАРАМЕТРЫ ВРАЩЕНИЯ ПЛАНЕТ И ЕСТЕСТВЕННЫХ СПУТНИКОВ

Определения

Принятые определения параметров вращения даны в Главе 9.

Параметры вращения планет и естественных спутников регулярно публикуются в докладах Рабочей группы Международного Астрономического Союза (МАС) по картографическим координатам и элементам вращения (IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements – IAU WG CCRE). Приведенные ниже параметры взяты из последнего такого доклада, содержащегося в публикации (Archinal et al. 2018). В этой публикации имеются обширные объяснения о происхождении приводимых параметров, ссылки на источники и рекомендации к формированию таких данных в будущем.

В случаях, когда возможно проследить происхождение данных, здесь ниже даются ссылки на источники. В некоторых случаях помимо данных из публикации (Archinal et al. 2018) приводятся также новые версии параметров вращения, сопровождаемые ссылками на публикацию этих новых данных.

Ниже даны экваториальные координаты α_0, δ_0 северного полюса каждой планеты и спутников в системе экватора и равноденствия эпохи $J2000$. Даны выражения для долготы нулевого меридиана W как функции времени. Аргументами времени являются:

T – интервал в юлианских столетиях (36525 суток) от стандартной эпохи $J2000$ – 12 час. 1 января 2000 г. (JD 2451545.0) TDB,

d – интервал в сутках от стандартной эпохи.

Все угловые величины измеряются в градусах. Скорости изменения углов соответствуют размерности величин T и d .

Параметры вращения планет, имеющих естественные спутники

Марс.

Координаты полюса Марса, рекомендованные Рабочей группой IAU WG CCRE MAC (Archinal et al. 2018), основаны на данных, опубликованных в работах Kuchynka et al. (2014), Konopliv et al. (2016). Координаты определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 317.269202 - 0.10927547 T + \\ &+ 0.000068 \sin(198.991226 + 19139.4819985 T) + \\ &+ 0.000238 \sin(226.292679 + 38280.8511281 T) + \\ &+ 0.000052 \sin(249.663391 + 57420.7251593 T) + \\ &+ 0.000009 \sin(266.183510 + 76560.6367950 T) + \\ &+ 0.419057 \sin(79.398797 + 0.5042615 T), \\ \delta_0 &= 54.432516 - 0.05827105 T + \\ &+ 0.000051 \cos(122.433576 + 19139.9407476 T) + \\ &+ 0.000141 \cos(43.058401 + 38280.8753272 T) + \\ &+ 0.000031 \cos(57.663379 + 57420.7517205 T) + \\ &+ 0.000005 \cos(79.476401 + 76560.6495004 T) + \\ &+ 1.591274 \cos(166.325722 + 0.5042615 T), \\ W &= 176.049863 + 350.891982443297 d + \\ &+ 0.000145 \sin(129.071773 + 19140.0328244 T) + \\ &+ 0.000157 \sin(36.352167 + 38281.0473591 T) + \\ &+ 0.000040 \sin(56.668646 + 57420.9295360 T) + \\ &+ 0.000001 \sin(67.364003 + 76560.2552215 T) + \\ &+ 0.000001 \sin(104.792680 + 95700.4387578 T) + \\ &+ 0.584542 \sin(95.391654 + 0.5042615 T). \end{aligned}$$

Примечание. Положение нулевого меридиана Марса опирается на координаты посадочного аппарата Viking 1, Такое определение находится в согласии с ранее заданным положением нулевого меридиана, связанным с положением кратера Airy-0.

Юпитер.

Координаты полюса, рекомендованные Рабочей группой IAU WG CCRE MAC (Archinal et al. 2018) и взятые из публикации (Riddle, Warwick, 1976):

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 268.056595 - 0.006499 T + 0.000117 \sin Ja + 0.000938 \sin Jb + \\ &\quad + 0.001432 \sin Jc + 0.000030 \sin Jd + 0.002150 \sin Je, \\ \delta_0 &= 64.495303 + 0.002413 T + 0.000050 \cos Ja + 0.000404 \cos Jb + \\ &\quad + 0.000617 \cos Jc - 0.000013 \cos Jd + 0.000926 \cos Je \\ W &= 284.95 + 870.5360000 d.\end{aligned}$$

Здесь аргументы тригонометрических функций вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}Ja &= 99.360714 + 4850.4046 T, \quad Jb = 175.895369 + 1191.9605 T, \\ Jc &= 300.323162 + 262.5475 T, \quad Jd = 114.012305 + 6070.2476 T, \\ Je &= 49.511251 + 64.3000 T.\end{aligned}$$

Примечание. Вращение Юпитера относится к вращению его магнитного поля.

Сатурн.

Координаты полюса, рекомендованные Рабочей группой IAU WG SСRE MAC (Archinal et al. 2018) и взятые из публикаций (Hubbard et al., 1993; French et al., 1993):

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 40.589 - 0.036 T, \\ \delta_0 &= 83.537 - 0.004 T, \\ W &= 38.90 + 810.7939024 d.\end{aligned}$$

Примечание. Вращение Сатурна относится к вращению его магнитного поля.

Уран.

Координаты полюса, рекомендованные Рабочей группой IAU WG SСRE MAC (Archinal et al. 2018) и взятые из публикации (Mason et al., 1992):

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 257.311, \\ \delta_0 &= -15.175, \\ W &= 203.81 - 501.1600928 d.\end{aligned}$$

Примечание. Вращение Урана здесь относится к вращению его магнитного поля.

Новая модель вращения Урана опубликована в работе (Jacobson, 2014). Согласно этой модели, для α_0 , δ_0 имеем следующие выражения как функции времени:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 257.309980 + \\ &\quad + 0.000173 T + 0.000895 \sin S1 + 0.000180 \sin S2 + \\ &\quad + 0.000098 \sin S3 + 0.000075 \sin S4 - 0.000818 \sin S5, \\ \delta_0 &= -15.172395 -\end{aligned}$$

$$-0.000019 T - 0.000851 \cos S1 - 0.000173 \cos S2 - \\ -0.000094 \cos S3 - 0.000072 \cos S4 - 0.000818 \cos S5,$$

где

$$S1 = 328.616724 + 26.9601 T, \\ S2 = 259.275089 + 2024.7285 T, \\ S3 = 102.827444 + 182.8030 T, \\ S4 = 185.361668 + 276.4108 T, \\ S5 = 137.359959.$$

Здесь член с $S5$ добавлен только для того, чтобы сделать сумму тригонометрических членов равной нулю в начальную эпоху.

Нептун.

Координаты полюса, рекомендованные Рабочей группой IAU WG CCRE MAC (Archinal et al. 2018), взяты из публикаций (Jacobson, 1990; Warwick et al. 1989). При этом скорость вращения выведена в работе (Karkoschka, 2011) из наблюдений деталей на поверхности. Координаты определяются следующими выражениями:

$$\alpha_0 = 299.36 + 0.70 \sin N, \\ \delta_0 = 43.46 - 0.51 \cos N, \\ W = 249.978 + 541.1397757 d - 0.48 \sin N, \\ N = 357.85 + 52.316 T.$$

Альтернативные параметры вращения Нептуна, опубликованные в статье (Jacobson, 2009), и вариант, полученный в работе (Emelyanov, Samorodov, 2015), рассмотрены в Главе 9.

Плутон.

Координаты полюса, рекомендованы Рабочей группой IAU WG CCRE MAC (Archinal et al. 2018). Здесь по правилам определения полюса малой планеты северный полюс направлен по вектору момента вращения Плутона. Нулевой меридиан Плутона определен по среднему направлению на Харон.

$$\alpha_0 = 132.993, \\ \delta_0 = -6.163, \\ W = 302.695 + 56.3625225 d.$$

Северный полюс, связанный с неизменной плоскостью Лапласа Солнечной системы, имеет следующие координаты (Archinal et al. 2018):

$$\alpha_0 = 273.85,$$

$$\delta_0 = 66.99.$$

Координаты северного полюса Солнца (Archinal et al. 2018)

$$\alpha_0 = 286.13,$$

$$\delta_0 = 63.87,$$

$$W = 84.176 + 14.1844000 d.$$

Примечание. Формула для W здесь записана с учетом поправки за время распространения света (для момента старта фотонов с Солнца) и без поправки за аберрацию.

Параметры вращения естественных спутников

Все угловые величины измеряются в градусах. Скорости изменения углов соответствуют размерности величин T и d .

Спутники Марса.

Параметры вращения спутников рекомендованы Рабочей группой IAU WG CCRE MAC (Archinal et al. 2018) и взяты из публикации (Stark et al., 2017).

M1 Фобос.

$$\alpha_0 = 317.67071657 - 0.10844326 T -$$

$$-1.78428399 \sin(M1) + 0.02212824 \sin(M2) -$$

$$-0.01028251 \sin(M3) - 0.00475595 \sin(M4).$$

$$\delta_0 = 52.88627266 - 0.06134706 T -$$

$$-1.07516537 \cos(M1) + 0.00668626 \cos(M2) -$$

$$-0.00648740 \cos(M3) + 0.00281576 \cos(M4).$$

$$W = 34.9964842535 + 1128.84475928 d + 12.72192797 T^2 +$$

$$+1.42421769 \sin(M1) - 0.02273783 \sin(M2) +$$

$$+0.00410711 \sin(M3) + 0.00631964 \sin(M4) + 1.143 \sin(M5).$$

M2 Деймос.

$$\alpha_0 = 316.65705808 - 0.10518014 T +$$

$$+3.09217726 \sin(M6) + 0.22980637 \sin(M7) +$$

$$+0.06418655 \sin(M8) + 0.02533537 \sin(M9) + 0.00778695 \sin(M10).$$

$$\begin{aligned}
\delta_0 &= 53.50992033 - 0.05979094 T + \\
&+ 1.83936004 \cos(M6) + 0.14325320 \cos(M7) + \\
&+ 0.01911409 \cos(M8) - 0.01482590 \cos(M9) + 0.00192430 \cos(M10). \\
W &= 79.39932954 + 285.16188899 d - \\
&- 2.73954829 \sin(M6) - 0.39968606 \sin(M7) - \\
&- 0.06563259 \sin(M8) - 0.02912940 \sin(M9) + 0.01699160 \sin(M10).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
M1 &= 190.72646643 + 15917.10818695 T, \\
M2 &= 21.46892470 + 31834.27934054 T, \\
M3 &= 332.86082793 + 19139.89694742 T, \\
M4 &= 394.93256437 + 38280.79631835 T, \\
M5 &= 189.63271560 + 41215158.18420050 T + 12.71192322 T^2, \\
M6 &= 121.46893664 + 660.22803474 T, \\
M7 &= 231.05028581 + 660.99123540 T, \\
M8 &= 251.37314025 + 1320.50145245 T, \\
M9 &= 217.98635955 + 38279.96125550 T, \\
M10 &= 196.19729402 + 19139.83628608 T.
\end{aligned}$$

Альтернативная модель вращения Фобоса, построенная в работе (LeMaistre et al., 2013), описывается следующими ниже формулами.

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 317.65171 - 0.108 T + \\
&+ 0.325245 \cos P1_A + 1.758464 \sin P1_A + \\
&+ 3.7879 \cdot 10^{-3} \cos P2_A - 9.9870 \cdot 10^{-3} \sin P2_A + \\
&+ 8.0360 \cdot 10^{-3} \cos P3_A + 2.0727 \cdot 10^{-2} \sin P3_A - \\
&- 5.0099 \cdot 10^{-3} \cos P4_A + 1.5865 \cdot 10^{-2} \sin P4_A - \\
&- 1.3858 \cdot 10^{-2} \cos P5_A - 2.6599 \cdot 10^{-2} \sin P5_A - \\
&- 3.0986 \cdot 10^{-2} \cos P6_A - 3.4267 \cdot 10^{-3} \sin P6_A, \\
\delta_0 &= 52.875277 - 0.061 T + \\
&+ 1.059273 \cos P1_D - 0.200688 \sin P1_D - \\
&- 5.8509 \cdot 10^{-3} \cos P2_D - 3.1664 \cdot 10^{-3} \sin P2_D + \\
&+ 6.2752 \cdot 10^{-3} \cos P3_D - 2.3877 \cdot 10^{-3} \sin P3_D + \\
&+ 9.5540 \cdot 10^{-3} \cos P4_D + 3.2837 \cdot 10^{-3} \sin P4_D + \\
&+ 1.6049 \cdot 10^{-2} \cos P5_D - 8.3571 \cdot 10^{-3} \sin P5_D + \\
&+ 2.0673 \cdot 10^{-2} \cos P6_D - 1.8695 \cdot 10^{-2} \sin P6_D, \\
W &= 34.78084 + 1128.844585 d + 8.864 T^2 - \\
&- 0.260555 \cos P1_W - 1.403236 \sin P1_W -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 8.1901 \cdot 10^{-3} \cos P2_W - 2.1305 \cdot 10^{-2} \sin P2_W + \\
& + 3.9954 \cdot 10^{-3} \cos P3_W - 1.2650 \cdot 10^{-2} \sin P3_W + \\
& + 1.1051 \cdot 10^{-2} \cos P4_W + 2.1210 \cdot 10^{-2} \sin P4_W + \\
& + 0.177178 \cos P5_W + 1.085406 \sin P5_W + \\
& + 2.4709 \cdot 10^{-2} \cos P6_W + 2.7324 \cdot 10^{-2} \sin P6_W - \\
& - 2.7638 \cdot 10^{-3} \cos P7_W - 8.2309 \cdot 10^{-3} \sin P7_W,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
P1_A &= (360.0/826.2093)d, \\
P2_A &= (360.0/686.9689)d, \\
P3_A &= (360.0/413.1034)d, \\
P4_A &= (360.0/0.8430)d, \\
P5_A &= (360.0/0.5133)d, \\
P6_A &= (360.0/0.2313)d, \\
P1_D &= (360.0/826.2098)d, \\
P2_D &= (360.0/686.9603)d, \\
P3_D &= (360.0/413.0996)d, \\
P4_D &= (360.0/0.8430)d, \\
P5_D &= (360.0/0.5133)d, \\
P6_D &= (360.0/0.2313)d, \\
P1_W &= (360.0/826.2082)d, \\
P2_W &= (360.0/413.1050)d, \\
P3_W &= (360.0/0.8430)d, \\
P4_W &= (360.0/0.5133)d, \\
P5_W &= (360.0/0.3190)d, \\
P6_W &= (360.0/0.2313)d, \\
P7_W &= (360.0/0.1595)d.
\end{aligned}$$

Новые выражения для координат полюсов спутников Марса получены и даны в публикации (Jacobson, 2017).

М1 Фобос.

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 317.670722 - 0.1084132486 T - \\
& - 1.784328 \sin M1 + 0.022113 \sin M2, \\
\delta_0 &= 52.886261 - 0.0613383599 T - \\
& - 1.075191 \cos M1 + 0.006656 \cos M2, \\
W &= 35.187741 + 1128.8447592753 d + 12.722 T^2 + \\
& + 1.424227 \sin M1 - 0.022751 \sin M2.
\end{aligned}$$

М2 Деймос.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 316.656987 - 0.1046750020 T + \\ &+ 0.007782 \sin M3 + 0.025076 \sin M4 + \\ &+ 3.022942 \sin M5 + 0.064064 \sin M6 - \\ &- 0.005241 \sin M7, \\ \delta_0 &= 53.509843 - 0.0599874462 T + \\ &+ 0.001912 \cos M3 - 0.014719 \cos M4 + \\ &+ 1.796415 \cos M5 + 0.019065 \cos M6 + \\ &+ 0.003205 \cos M7, \\ W &= 79.399489 + 285.1618889679 d + \\ &+ 0.016999 \sin M3 - 0.029333 \sin M4 - \\ &- 2.626250 \sin M5 - 0.065368 \sin M6 - \\ &- 0.184398 \sin M7. \end{aligned}$$

Тригонометрические аргументы даны в виде

$$\begin{aligned} M1 &= 190.752833 + 15917.1197346 T, \\ M2 &= 21.510735 + 31834.5296590 T, \\ M3 &= 196.381549 + 19139.7201379 T, \\ M4 &= 214.896971 + 38279.9940271 T, \\ M5 &= 125.675097 + 660.2084573 T, \\ M6 &= 251.350194 + 1320.4169146 T, \\ M7 &= 215.675097 + 660.2084573 T. \end{aligned}$$

Спутники Юпитера. Данные взяты из отчета Рабочей группы IAU WG CCRE MAC (Archinal et al. 2018). Ниже даны также найденные ссылки на источники данных.

Галилеевы спутники (Lieske, 1979; Smith et al., 1979).

J1 Ио:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 268.05 - 0.009 T + 0.094 \sin J3 + 0.024 \sin J4, \\ \delta_0 &= 64.50 + 0.003 T + 0.040 \cos J3 + 0.011 \cos J4, \\ W &= 200.39 + 203.4889538 d - 0.085 \sin J3 - 0.022 \sin J4. \end{aligned}$$

Примечание. Нулевой меридиан определяется направлением на планету.

J2 Европа:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 268.08 - 0.009 T + 1.086 \sin J4 + 0.060 \sin J5 + 0.015 \sin J6 + \\ &+ 0.009 \sin J7, \\ \delta_0 &= 64.51 + 0.003 T + 0.468 \cos J4 + 0.026 \cos J5 + 0.007 \cos J6 + \\ &+ 0.002 \cos J7, \\ W &= 36.022 + 101.3747235 d - 0.980 \sin J4 - 0.054 \sin J5 - 0.014 \sin J6 - \\ &- 0.008 \sin J7. \end{aligned}$$

Примечание. Меридиан 182 градуса определен кратером Cilix.

ЈЗ Ганимед:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 268.20 - 0.009 T - 0.037 \sin J4 + 0.431 \sin J5 + 0.091 \sin J6, \\ \delta_0 &= 64.57 + 0.003 T - 0.016 \cos J4 + 0.186 \cos J5 + 0.039 \cos J6, \\ W &= 44.064 + 50.3176081 d + 0.033 \sin J4 - 0.389 \sin J5 - 0.082 \sin J6.\end{aligned}$$

Примечание. Меридиан 128 градуса определен кратером Anat.

Ј4 Каллисто:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 268.72 - 0.009 T - 0.068 \sin J5 + 0.590 \sin J6 + 0.010 \sin J8, \\ \delta_0 &= 64.83 + 0.003 T - 0.029 \cos J5 + 0.254 \cos J6 - 0.004 \cos J8, \\ W &= 259.51 + 21.5710715 d + 0.061 \sin J5 - 0.533 \sin J6 - 0.009 \sin J8.\end{aligned}$$

Примечание 1. Меридиан 326 градуса определен кратером Saga.

Примечание 2. Новые значения W_0 для спутников J2 Европа, J3 Ганимед, J4 Каллисто появились как результат вычислений новых контрольных сетей, выполненных Davies M., Colvin T.R. и Katayama F.

Близкие спутники.

Ј16 Метида:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 268.05 - 0.009 T, \\ \delta_0 &= 64.49 + 0.003 T, \\ W &= 346.09 + 1221.2547301 d \text{ (Lieske, 1997)}.\end{aligned}$$

Ј15 Адрастея

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 268.05 - 0.009 T, \\ \delta_0 &= 64.49 + 0.003 T, \\ W &= 33.29 + 1206.9986602 d \text{ (Nicholson, Mathews, 1991)}.\end{aligned}$$

Ј5 Амальгея (Smith et al., 1979)

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 268.05 - 0.009 T - 0.84 \sin J1 + 0.01 \sin 2J1, \\ \delta_0 &= 64.49 + 0.003 T - 0.36 \cos J1, \\ W &= 231.67 + 722.6314560 d + 0.76 \sin J1 - 0.01 \sin 2J1.\end{aligned}$$

Ј14 Теба (Уточненные значения получил Nicholson P. D., Cornell University, в 1996 г)

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 268.05 - 0.009 T + 2.11 \sin J2 + 0.04 \sin 2J2, \\ \delta_0 &= 64.49 + 0.003 T - 0.91 \cos J2 + 0.01 \cos 2J2, \\ W &= 8.56 + 533.7004100 d + 1.91 \sin J2 - 0.04 \sin 2J2.\end{aligned}$$

Тригонометрические аргументы для спутников Юпитера определяются формулами

$$\begin{aligned}J1 &= 73.32 + 91472.9 T, J2 = 24.62 + 45137.2 T, J3 = 283.90 + 4850.7 T, \\ J4 &= 355.80 + 1191.3 T, J5 = 119.90 + 262.1 T, J6 = 229.80 + 64.3 T, \\ J7 &= 352.25 + 2382.6 T, J8 = 113.35 + 6070.0 T.\end{aligned}$$

Спутники Сатурна. Данные взяты из отчета Рабочей группы МАС IAU WG CCRE (Archinal et al. 2018). Ниже даны также ссылки на источники данных.

Главные спутники (Roatsch et al., 2009).

$$\begin{aligned} S1 \text{ Мимас: } \alpha_0 &= 40.66 - 0.036 T + 13.56 \sin S3, \\ \delta_0 &= 83.52 - 0.004 T - 1.53 \cos S3, \\ W &= 333.46 + 381.9945550 d - 13.48 \sin S3 - 44.85 \sin S5. \end{aligned}$$

Примечание. Меридиан 162 градуса задает кратер Palomides.

$$\begin{aligned} S2 \text{ Энцелад: } \alpha_0 &= 40.66 - 0.036 T, \\ \delta_0 &= 83.52 - 0.004 T, \\ W &= 6.32 + 262.7318996 d. \end{aligned}$$

Примечание. Меридиан 5 градусов задает кратер Salih.

$$\begin{aligned} S3 \text{ Тефия: } \alpha_0 &= 40.66 - 0.036 T + 9.66 \sin S4, \\ \delta_0 &= 83.52 - 0.004 T - 1.09 \cos S4, \\ W &= 8.95 + 190.6979085 d - 9.60 \sin S4 + 2.23 \sin S5. \end{aligned}$$

Примечание. Меридиан 299 градусов задает кратер Arete.

$$\begin{aligned} S4 \text{ Диона: } \alpha_0 &= 40.66 - 0.036 T, \\ \delta_0 &= 83.52 - 0.004 T, \\ W &= 357.6 + 131.534931 d. \end{aligned}$$

Примечание. Меридиан 63 градусов задает кратер Palinurus.

$$\begin{aligned} S5 \text{ Рея: } \alpha_0 &= 40.38 - 0.036 T + 3.10 \sin S6, \\ \delta_0 &= 83.55 - 0.004 T - 0.35 \cos S6, \\ W &= 235.16 + 79.6900478 d - 3.08 \sin S6. \end{aligned}$$

Примечание. Меридиан 340 градусов задает кратер Tore.

$$\begin{aligned} S6 \text{ Титан: (Stiles et al., 2008; Lorenz et al., 2008; Stiles et al., 2010)} \\ \alpha_0 &= 39.4827, \\ \delta_0 &= 83.4279, \\ W &= 186.5855 + 22.5769768 d. \end{aligned}$$

S8 Япет (Davies, Katayama, 1984):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 318.16 - 3.949 T, \\ \delta_0 &= 75.03 - 1.143 T, \\ W &= 355.2 + 4.5379572 d. \end{aligned}$$

Примечание. Меридиан 276 градусов задает кратер Almeric.

Параметры вращения главного спутника Сатурна S7 Гиперион не приводятся, так как он имеет хаотическое вращение.

Близкие спутники (Thomas et al., 1983).

S10 Янус: $\alpha_0 = 40.58 - 0.036 T - 1.623 \sin S2 + 0.023 \sin 2S2$,
 $\delta_0 = 83.52 - 0.004 T - 0.183 \cos S2 + 0.001 \cos 2S2$,
 $W = 58.83 + 518.2359876 d + 1.613 \sin S2 - 0.023 \sin 2S2$.

S11 Эпиметей: $\alpha_0 = 40.58 - 0.036 T - 3.153 \sin S1 + 0.086 \sin 2S1$,
 $\delta_0 = 83.52 - 0.004 T - 0.356 \cos S1 + 0.005 \cos 2S1$,
 $W = 293.87 + 518.4907239 d + 3.133 \sin S1 - 0.086 \sin 2S1$.

S15 Атлас: $\alpha_0 = 40.58 - 0.036 T$,
 $\delta_0 = 83.53 - 0.004 T$,
 $W = 137.88 + 598.3060000 d$.

S16 Прометей: $\alpha_0 = 40.58 - 0.036 T$,
 $\delta_0 = 83.53 - 0.004 T$,
 $W = 296.14 + 587.289000 d$.

S17 Пандора: $\alpha_0 = 40.58 - 0.036 T$,
 $\delta_0 = 83.53 - 0.004 T$,
 $W = 162.92 + 572.7891000 d$.

S18 Пан (Showalter, 1991):

$\alpha_0 = 40.6 - 0.036 T$,
 $\delta_0 = 83.5 - 0.004 T$,
 $W = 48.8 + 626.0440000 d$.

Соорбитальные спутники. Данные о вращении основаны на орбитальных параметрах спутников (Synnot et al., 1983).

S12 Елена: $\alpha_0 = 40.85 - 0.036 T$,
 $\delta_0 = 83.34 - 0.004 T$,
 $W = 245.12 + 131.6174056 d$.

S13 Телесто: $\alpha_0 = 50.51 - 0.036 T$,
 $\delta_0 = 84.06 - 0.004 T$,
 $W = 56.88 + 190.6979332 d$.

S14 Калипсо: $\alpha_0 = 36.41 - 0.036 T$,
 $\delta_0 = 85.04 - 0.004 T$,
 $W = 153.51 + 190.6742373 d$.

Далекий спутник S9 Феба (Colvin et al., 1989):

$\alpha_0 = 356.90$,
 $\delta_0 = 77.80$,
 $W = 178.58 + 931.639 d$.

Тригонометрические аргументы для спутников Сатурна определяются формулами:

$$S1 = 353.32 + 75706.7 T, S2 = 28.72 + 75706.7 T,$$

$$S3 = 177.40 - 36505.5 T,$$

$$S4 = 300.00 - 7225.9 T, S5 = 316.45 + 506.2 T, S6 = 345.20 - 1016.3 T.$$

Спутники Урана. Данные рекомендованы Рабочей группой МАС IAU WG CCRE (Archinal et al. 2018). Взяты из публикаций (Jacobson, 1985a; Jacobson, 1985b).

Главные спутники.

U1 Ариэль: $\alpha_0 = 257.43 + 0.29 \sin U13,$
 $\delta_0 = -15.10 + 0.28 \cos U13,$
 $W = 156.22 - 142.8356681 d + 0.05 \sin U12 + 0.08 \sin U13.$

U2 Умбриэль: $\alpha_0 = 257.43 + 0.21 \sin U14,$
 $\delta_0 = -15.10 + 0.20 \cos U14,$
 $W = 108.05 - 86.8688923 d - 0.09 \sin U12 + 0.06 \sin U14.$

U3 Титания: $\alpha_0 = 257.43 + 0.29 \sin U15,$
 $\delta_0 = -15.10 + 0.28 \cos U15,$
 $W = 77.74 - 41.3514316 d + 0.08 \sin U15.$

U4 Оберон: $\alpha_0 = 257.43 + 0.16 \sin U16,$
 $\delta_0 = -15.10 + 0.16 \cos U16,$
 $W = 6.77 - 26.7394932 d + 0.04 \sin U16.$

U5 Миранда: $\alpha_0 = 257.43 + 4.41 \sin U11 - 0.04 \sin 2U11,$
 $\delta_0 = -15.08 + 4.25 \cos U11 - 0.02 \cos 2U11,$
 $W = 30.70 - 254.6906892 d - 1.27 \sin U12 + 0.15 \sin 2U12.$

Ближние спутники.

U6 Корделия: $\alpha_0 = 257.31 - 0.15 \sin U1,$
 $\delta_0 = -15.18 + 0.14 \cos U1,$
 $W = 127.69 - 1074.5205730 d - 0.04 \sin U1.$

U7 Офелия: $\alpha_0 = 257.31 - 0.09 \sin U2,$
 $\delta_0 = -15.18 + 0.09 \cos U2,$
 $W = 130.35 - 956.4068150 d - 0.03 \sin U2.$

U8 Бьянка: $\alpha_0 = 257.31 - 0.16 \sin U3,$
 $\delta_0 = -15.18 + 0.16 \cos U3,$
 $W = 105.46 - 828.3914760 d - 0.04 \sin U3.$

U9 Крессиды: $\alpha_0 = 257.31 - 0.04 \sin U4,$
 $\delta_0 = -15.18 + 0.04 \cos U4,$
 $W = 59.16 - 776.5816320 d - 0.01 \sin U4.$

- U10 Дездемона: $\alpha_0 = 257.31 - 0.17 \sin U5$,
 $\delta_0 = -15.18 + 0.16 \cos U5$,
 $W = 95.08 - 760.0531690 d - 0.04 \sin U5$.
- U11 Джульетта: $\alpha_0 = 257.31 - 0.06 \sin U6$,
 $\delta_0 = -15.18 + 0.06 \cos U6$,
 $W = 302.56 - 730.1253660 d - 0.02 \sin U6$.
- U12 Порция: $\alpha_0 = 257.31 - 0.09 \sin U7$,
 $\delta_0 = -15.18 + 0.09 \cos U7$,
 $W = 25.03 - 701.4865870 d - 0.02 \sin U7$.
- U13 Розалинда: $\alpha_0 = 257.31 - 0.29 \sin U8$,
 $\delta_0 = -15.18 + 0.28 \cos U8$,
 $W = 314.90 - 644.6311260 d - 0.08 \sin U8$.
- U14 Белинда: $\alpha_0 = 257.31 - 0.03 \sin U9$,
 $\delta_0 = -15.18 + 0.03 \cos U9$,
 $W = 297.46 - 577.3628170 d - 0.01 \sin U9$.
- U14 Пак: $\alpha_0 = 257.31 - 0.33 \sin U10$,
 $\delta_0 = -15.18 + 0.31 \cos U10$,
 $W = 91.24 - 472.5450690 d - 0.09 \sin U10$.

Тригонометрические аргументы для спутников Урана определяются формулами:

$$\begin{aligned}
 U1 &= 115.75 + 54991.87 T, U2 = 141.69 + 41887.66 T, \\
 U3 &= 135.03 + 29927.35 T, \\
 U4 &= 61.77 + 25733.59 T, U5 = 249.32 + 24471.46 T, \\
 U6 &= 43.86 + 22278.41 T, \\
 U7 &= 77.66 + 20289.42 T, U8 = 157.36 + 16652.76 T, \\
 U9 &= 101.81 + 1872.63 T, \\
 U10 &= 138.64 + 8061.81 T, U11 = 102.23 - 2024.22 T, \\
 U12 &= 316.41 + 2863.96 T, \\
 U13 &= 304.01 - 51.94 T, U14 = 308.71 - 93.17 T, \\
 U15 &= 340.82 - 75.32 T, U16 = 259.14 - 504.81 T.
 \end{aligned}$$

Спутники Нептуна. Данные рекомендованы Рабочей группой МАС IAU WG CCRE (Archinal et al. 2018).

N1 Тритон (Параметры вывел J. Lieske на основе орбитальных данных, полученных в работе (Jacobson, 1990)).

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= 299.36 - 32.35 \sin N7 - 6.28 \sin 2N7 - 2.08 \sin 3N7 - \\
 &\quad - 0.74 \sin 4N7 - 0.28 \sin 5N7 - 0.11 \sin 6N7 - \\
 &\quad - 0.07 \sin 7N7 - 0.02 \sin 8N7 - 0.01 \sin 9N7,
 \end{aligned}$$

$$\delta_0 = 41.17 + 22.55 \cos N7 + 2.10 \cos 2N7 + 0.55 \cos 3N7 + \\ + 0.16 \cos 4N7 + 0.05 \cos 5N7 + 0.02 \cos 6N7 + \\ + 0.01 \cos 7N7,$$

$$W = 296.53 - 61.2572637 d + 22.25 \sin N7 + 6.73 \sin 2N7 + \\ + 2.05 \sin 3N7 + 0.74 \sin 4N7 + 0.28 \sin 5N7 + \\ + 0.11 \sin 6N7 + 0.05 \sin 7N7 + 0.02 \sin 8N7 + \\ + 0.01 \sin 9N7.$$

Ближние спутники (Owen et al., 1991).

N3 Наяда: $\alpha_0 = 299.36 + 0.70 \sin N - 6.49 \sin N1 + 0.25 \sin 2N1,$
 $\delta_0 = 43.36 - 0.51 \cos N - 4.75 \cos N1 + 0.09 \cos 2N1,$
 $W = 254.06 + 1222.8441209 d -$
 $-0.48 \sin N + 4.40 \sin N1 - 0.27 \sin 2N1.$

N4 Таласса: $\alpha_0 = 299.36 + 0.70 \sin N - 0.28 \sin N2,$
 $\delta_0 = 43.45 - 0.51 \cos N - 0.21 \cos N2,$
 $W = 102.06 + 1155.7555612 d - 0.48 \sin N + 0.19 \sin N2.$

N5 Деспина: $\alpha_0 = 299.36 + 0.70 \sin N - 0.09 \sin N3,$
 $\delta_0 = 43.45 - 0.51 \cos N - 0.07 \cos N3,$
 $W = 306.51 + 1075.7341562 d - 0.49 \sin N + 0.06 \sin N3.$

N6 Галатей: $\alpha_0 = 299.36 + 0.70 \sin N - 0.07 \sin N4,$
 $\delta_0 = 43.43 - 0.51 \cos N - 0.05 \cos N4,$
 $W = 258.09 + 839.6597686 d - 0.48 \sin N + 0.05 \sin N4.$

N7 Ларисса: $\alpha_0 = 299.36 + 0.70 \sin N - 0.27 \sin N5,$
 $\delta_0 = 43.41 - 0.51 \cos N - 0.20 \cos N5,$
 $W = 179.41 + 649.0534470 d - 0.48 \sin N + 0.19 \sin N5.$

N8 Протей: $\alpha_0 = 299.27 + 0.70 \sin N - 0.05 \sin N6,$
 $\delta_0 = 42.91 - 0.51 \cos N - 0.04 \cos N6,$
 $W = 93.38 + 320.7654228 d - 0.48 \sin N + 0.04 \sin N6.$

Тригонометрические аргументы для спутников Нептуна определяются формулами:

$$N = 357.85 + 52.316 T, N1 = 323.92 + 62606.6 T, \\ N2 = 220.51 + 55064.2 T, N3 = 354.27 + 46564.5 T, \\ N4 = 75.31 + 26109.4 T, N5 = 35.36 + 14325.4 T, \\ N6 = 142.61 + 2824.6 T, N7 = 177.85 + 52.316 T.$$

Примечание. Параметры вращения далекого спутника Нептуна N2 Нереида в публикации (Archinal et al., 2018) не приводятся, так как пока нет подходящей модели его вращения.

Спутник Плутона Харон. Данные рекомендованы Рабочей группой МАС IAU WG CCRE (Archinal et al. 2018). Здесь северным полюсом спутника считается направление его момента количества движения. Положение нулевого меридиана определяется направлением на Плутон.

$$\alpha_0 = 132.993,$$

$$\delta_0 = -6.163,$$

$$W = 122.695 + 56.3625225 d.$$

Спутники Плутона Р2 Никта, Р3 Гидра, Р4 Керберос, Р5 Стикс (\dot{W} – угловая скорость вращения). Данные взяты из публикации (Weaver et al., 2016). Обозначение \dot{W} использовано для скорости изменения W .

$$\text{Р2 Никта: } \alpha_0 = 350, \delta_0 = 42, \dot{W} = 196.83 \text{ град/сут,}$$

$$\text{Р3 Гидра: } \alpha_0 = 257, \delta_0 = -24, \dot{W} = 838.18 \text{ град/сут,}$$

$$\text{Р4 Цербер: } \alpha_0 = 222, \delta_0 = 72, \dot{W} = 67.80 \text{ град/сут,}$$

$$\text{Р5 Стикс: } \alpha_0 = 196, \delta_0 = 61, \dot{W} = 111.11 \text{ град/сут.}$$

Литература к Приложению 6

Archinal B. A., Acton C. H., A'hearn M. F., Conrad A., Consolmagno G. J., Duxbury T., Hestroffer D., Hilton J. L., Kirk R. L., Klioner S. A., McCarthy D., Meech K., Oberst J., Ping J., Seidelmann P. K., Tholen D. J., Thomas P. C., Williams I. P. Report of the IAU Working Group on cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2015. *Celestial Mechanics and Dynamic Astronomy*. 2018. 130:22.

Colvin T. R., Davies M. E., Rogers, P. G. Phoebe: A Control Network and Rotational Elements. *Bulletin of the American Astronomical Society*. 1989. V. 21. P. 987.

Davies M. E., Katayama F. Y. The control network of Iapetus. *Icarus*. 1984. V. 59. P. 199–204.

Duxbury T. C., Callahan J. D. PHOBOS and Deimos control networks. *Icarus*. 1989. V. 77. P. 275–286.

Emelyanov N. V., Samorodov M. Yu. Analytical theory of motion and new ephemeris of Triton from observations. *Monthly Notices*

of the Royal Astronomical Society. 2015. V. 454. P. 2205–2215.

Folkner W. M., Yoder C. F., Yuan D. N., Standish E. M., Preston R. A. Interior structure and seasonal mass redistribution of Mars from radio tracking of Mars pathfinder. *Science*. 1997. V. 278. P. 1749–1752.

French R. G., Nicholson P. D., Cooke M. L., Elliot J. L., Matthews K., Perkovic O., Tollestrup E., Harvey P., Chanover N. J., Clark M. A., Dunham E. W., Forrest W., Harrington J., Pipher J., Brahic A., Grenier I., Roques F., Arndt M. Geometry of the Saturn system from the 3 July 1989 occultation of 28 SGR and Voyager observations. *Icarus*. 1993. V. 103. P. 163–214.

Jacobson R. A. Direction of the North Pole of the Uranian Satellites in the IAU J2000 System. Interoffice Memorandum 314.10-520. 1985a. Jet propulsion Laboratory.

Jacobson R. A. The Prime Meridians of the Uranian Satellites. Interoffice Memorandum 314.10-555. 1985b. Jet propulsion Laboratory.

Jacobson R. A. Ephemerides of the Neptunian Satellites. Interoffice Memorandum 314.6-1145. 1990. Jet Propulsion Laboratory.

Jacobson R. A. The orbits of the neptunian satellites and the orientation of the pole of Neptune. *Astronomical Journal*. 2009. V. 137. P. 4322–4329.

Jacobson R. A. The orbits of the uranian satellites and rings, the gravity field of the uranian system, and the orientation of the pole of Uranus. *Astronomical Journal*. 2014. 148:76 (13pp).

Jacobson R. A. The Orientations of the Martian Satellites from a Fit to Ephemeris MAR097. Jet Propulsion Laboratory. Interoffice Memorandum 392R-17-004. April 20, 2017.

Hubbard W. B., Porco C. C., Hunten D. M., Rieke G. H., Rieke M. J., McCarthy D. W., Haemmerle V., Clark R., Turtle E. P., Haller J., McLeod B., Lebofsky L. A., Marcialis R., Holberg J. B., Landau R., Carrasco L., Elias J., Buie M. W., Persson S. E., Boroson T., West S., Mink D. J. The occultation of 28 SGR by Saturn - Saturn pole position and astrometry. *Icarus*. 1993. V. 103. P. 215–234.

- Karkoschka E.* Neptune's rotational period suggested by the extraordinary stability of two features. *Icarus*. 2011. V. 215. P. 439–448.
- Konopliv A. S., Park R. S., Folkner W. M.* An improved JPL Mars Gravity Field and Orientation from Mars Orbiter and Lander Tracking Data. *Icarus*. 2016. V. 274. P. 253–260.
- Kuchynka P., Folkner W. M., Konopliv A. S., Parker T. J., Park R. S., Le Maistre S., Dehant V.* New constraints on Mars rotation determined from radiometric tracking of the Opportunity Mars Exploration Rover. *Icarus*. 2014. V. 229. P. 340–347.
- LeMaistre S., Rosenblatt P., Rambaux N., Castillo-Rogez J. C., Dehant V., Marty J.-C.* Phobos interior from librations determination using Doppler and star tracker measurements. *Planetary and Space Science*. 2013. V. 85. P. 106–122.
- Lieske J. H.* Poles of the Galilean satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 1979. V. 75. No. 1–2. P. 158–163.
- Lieske J. H.* Revised rotation angle for Jupiter satellite 516 Metis. JPL Interoffice Memorandum 312, F-97-059. 1997.
- Mason E. C., French R. G., Buie M. W.* Uranus Pole and Ring Orbits from 1977-1991 Stellar Occultation and Voyager 2 Observations. American Astronomical Society, 24th DPS Meeting, id.42.15-P. Bulletin of the American Astronomical Society. 1992. V. 24. P. 1031–1031.
- Nicholson P.D., Matthews K.* Near-infrared observations of the Jovian ring and small satellites. *Icarus*. 1991. V. 93. P. 331–346.
- Owen Jr. W. M., Vaughan R. M., Synnott S. P.* Orbits of the Six New Satellites of Neptune. *Astronomical Journal*. 1991. V. 101. P. 1511–1515.
- Riddle A. C., Warwick J. W.* Redefinition of System III longitude. *Icarus*. 1976. V. 27. P. 457–459.
- Roatsch Th., Jaumann R., Stephan K., Thomas P.C.* Cartographic mapping of the Icy satellites using ISS and VIMS data. In: Dougherty, et al. (eds.) *Saturn from Cassini-Huygens*. Springer, Berlin (2009). doi:10.1007/978-1-4020-9215-2.
- Showalter M. R.* Visual detection of 1981S13, Saturn's eighteenth satellite, and its role in the Encke gap. *Nature*. 1991. V. 351. P. 709–713.

- Smith B. A., Soderblom L. A., Beebe R., Boyce J., Briggs G., Carr M., Collins S. A., Johnson T. V., Cook A. F., Danielson G. E., Morrison D.* The Galilean satellites and Jupiter – Voyager 2 imaging science results. *Science*. 1979. V. 206. P. 927-950.
- Stark A., Willner K., Burmeister S., Oberst J.* Geodetic framework for martian satellite exploration I: reference rotation models. *European Planetary Science Conference*. 2017. V. 11. EPSC2017-868-1.
- Stiles B.W., Kirk R.L., Lorenz R.D., Hensley S., Lee E., Ostro S.J., Allison M.D., Callahan P.S., Gim Y., Ies, L., Percidel Marmo P., Hamilton G., Johnson W.T.K., West R.D.* The Cassini RADAR Team: Determining Titan's spin state from Cassini RADAR images. *Astronomical Journal*. 2008. V. 135. P. 1669–1680.
- Stiles, B.W., Kirk R.L., Lorenz R.D., Hensley S., Lee E., Ostro S.J., Allison M.D., Callahan P.S., Gim Y., Iess L., Percidel Marmo P., Hamilton G., Johnson W.T.K., West R.D.* The Cassini RADAR Team: ERRATUM: Determining Titan's Spin State from Cassini RADAR Images. *Astronomical Journal*. 2010. V. 139. P. 311.
- Synnott S. P., Terrile R.J., Jacobson R. A., Smith B. A.* Orbits of Saturn's F ring and its shepherding satellites. *Icarus*. 1983. V. 53. P. 156–158.
- Thomas P., Veverka J., Morrison D., Davies M., Johnson, T. V.* Saturn's small satellites – Voyager imaging results. *Journal of Geophysical Research*. 1983. V. 88. P. 8743–8754.
- Warwick J. W., Evans D. R., Peltzer G. R., Peltzer R. G., Romig J. H., Sawyer C. B., Riddle A. C., Schweitzer A. E., Desch M. D., Kaiser M. L.* Voyager planetary radio astronomy at Neptune. *Science*. 1989. V. 246. P. 1498–1501.
- Weaver H. A., Buie M. W., Buratti B.J., Grundy W. M., Lauer T. R., Olkin C. B., Parker A. H., Porter S. B. and 43 co-authors.* The small satellites of Pluto as observed by New Horizons. *Science*. 2016. V. 351. Issue 6279. Id. aae0030.

ФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЕСТЕСТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

Спутники Марса

Таблица П7.1: Физические параметры спутников Марса: a_1, a_2, a_3 — полуоси приближающего эллипсоида, Gm — гравитационный параметр, V — геоцентрическая визуальная звездная величина в среднюю оппозицию. В квадратных скобках указан номер ссылки в списке библиографии источников данных (см. ниже).

Спутник	a_1, a_2, a_3 км	$Gm \cdot 10^6$, км ³ /с ²	Зв. вел. V
Фобос	13.00, 11.39, 9.07 [1.1]	709.2 ± 0.4 [1.2]	11.9 [1.3]
Деймос	7.8, 6.0, 5.1 [1.4]	101.0 ± 3.0 [1.2]	12.9 [1.3]

Спутники Юпитера

Таблица П7.2: Физические параметры Галилеевых спутников Юпитера: a_1, a_2, a_3 — полуоси приближающего эллипсоида, a_s — радиус, Gm — гравитационный параметр, V — геоцентрическая визуальная звездная величина в среднюю оппозицию. В квадратных скобках указан номер ссылки в списке библиографии источников данных (см. ниже).

Спутник	a_1, a_2, a_3 или a_s , км	Gm , км ³ /с ²	Зв. вел. V
J1 Ио	1829.7, 1819.2, 1815.8 [2.1]	5959.92 [2.2]	5.02 [2.3]
J2 Европа	1562.6, 1560.3, 1559.5 [2.4]	3202.73 [2.2]	5.29 [2.3]

Спутник	a_1, a_2, a_3 или a_s , км	Gm , $\text{км}^3/\text{с}^2$	Зв. вел. V
J3 Ганимед	2631.2 [2.5]	9887.83 [2.2]	4.61 [2.3]
J4 Каллисто	2410.3 [2.6]	7179.29 [2.2]	5.65 [2.3]

Таблица П7.3: Физические параметры близких (внутренних) спутников Юпитера: a_1, a_2, a_3 — полуоси приближающего эллипсоида, Gm — гравитационный параметр, V — геоцентрическая визуальная звездная величина в среднюю оппозицию. В квадратных скобках указан номер ссылки в списке библиографии источников данных (см. ниже).

Спутник	a_1, a_2, a_3 , км	Gm , $\text{км}^3/\text{с}^2$	Зв. вел. V
J5 Амальтея	125, 73, 64 [3.1]	0.139 [3.2]	14.1 [3.3]
J14 Теба	58, 49, 42 [3.4]	0.1 [3.4]	16.0 [3.5]
J15 Адрастея	10, 8, 7 [3.4]	0.0005 [3.4]	18.7 [3.5]
J16 Метис	30, 20, 20 [3.4]	0.008 [3.4]	17.5 [3.5]

Таблица П7.4: Физические параметры восьми далеких спутников Юпитера: a_1, a_2, a_3 — полуоси приближающего эллипсоида, a_s — радиус, Gm — гравитационный параметр, V — геоцентрическая визуальная звездная величина в среднюю оппозицию. Массы спутников J7 — J13 вычислены автором по приведенным оценкам радиусов и предполагаемой плотностью 2.6 г/см^3 . В квадратных скобках указан номер ссылки в списке библиографии источников данных (см. ниже).

Спутник	a_1, a_2, a_3 или a_s , км	Gm , $\text{км}^3/\text{с}^2$	Зв. вел. V
J6 Гималия	75, 60, 60 [4.1]	0.28 [4.2]	14.6 [4.3]
J7 Элара	43 [4.3]	0.043 [4.3]	16.3 [4.3]
J8 Пасифе	30 [4.3]	0.015 [4.3]	17.0 [4.3]
J9 Синопе	19 [4.3]	0.0037 [4.3]	18.0 [4.3]
J10 Лиситея	18 [4.3]	0.0032 [4.3]	18.2 [4.3]
J11 Карме	23 [4.3]	0.0066 [4.3]	17.5 [4.3]
J12 Ананке	14 [4.3]	0.0015 [4.3]	18.7 [4.3]

Спутник	a_1, a_2, a_3	$Gm,$	Зв. вел.
	или $a_s,$ км	км ³ /с ²	V
J13 Леда	10 [4.3]	0.00054 [4.3]	19.5 [4.3]

Таблица П7.5: Физические параметры других далеких спутников Юпитера: a_s — радиус, Gm — гравитационный параметр, V — визуальная геоцентрическая звездная величина в спектральной полосе R в среднюю оппозицию при солнечном фазовом угле 6 градусов, σ — погрешность звездной величины (1σ). Данные получены в работе ([5.1] Емельянов, Уральская, 2011) на основе результатов фотометрических измерений, приводимых вместе с результатами астрометрических наблюдений, поступаемых в Minor Planet Center (MPC). Приняты гипотетические значения альбедо — 0.04 и плотности вещества спутников — 2.6 г/см³.

Спутник	$a_s,$	$Gm \cdot 10^6,$	Зв. вел.	σ
	км	км ³ /с ²	V	зв. вел.
J17 Каллирое	4.5	67.2	21.05	0.17
J18 Фемисто	3.9	44.2	21.00	0.40
J19 Мегаклите	3.3	27.0	21.82	0.18
J20 Тайгете	2.7	14.5	22.25	0.25
J21 Халдене	2.4	9.5	22.66	0.46
J22 Гарпалике	2.4	10.6	22.61	0.29
J23 Калике	3.0	19.6	22.20	0.23
J24 Иокасте	2.9	17.7	22.21	0.21
J25 Эриноме	1.9	4.8	22.70	0.26
J26 Исоное	2.2	7.8	22.72	0.24
J27 Праксидике	3.7	36.1	21.84	0.45
J28 Автоное	2.4	9.9	22.33	0.34
J29 Тионе	2.3	8.8	22.56	0.22
J30 Гермиппе	3.0	18.9	22.30	0.32
J31 Этне	1.9	5.1	22.78	0.32
J32 Эвридоме	2.0	5.4	22.96	0.24
J33 Эванте	2.0	5.5	23.31	0.22
J34 Эвпорие	1.6	3.1	23.10	0.17
J35 Оргозие	1.8	4.2	23.48	0.12

Спутник	$a_s,$	$Gm \cdot 10^6,$	Зв. вел.	σ
	км	км ³ /с ²	V	зв. вел.
J36 Спонде	1.7	3.5	23.49	0.25
J37 Кале	1.6	3.1	22.91	0.39
J38 Пазите	1.4	2.1	23.53	0.19
J39 Гегемоне	1.8	4.3	22.74	0.23
J40 Мнеме	1.8	4.2	23.08	0.22
J41 Аойде	2.3	8.2	22.48	0.21
J42 Тельксиное	1.8	4.4	23.10	0.27
J43 Архе	1.7	3.6	22.98	0.31
J44 Каллихоре	1.6	2.9	23.15	0.18
J45 Гелике	2.3	9.1	22.72	0.29
J46 Карпо	1.8	4.3	22.94	0.22
J47 Эвкеладе	2.3	9.0	22.62	0.29
J48 Киллене	1.6	3.0	22.96	0.20
J49 Коре	1.9	5.0	23.28	0.60
J50 Герсе	1.6	3.2	23.22	0.25
J51 S/2010 J 1	1.5	2.5	23.55	0.06
J52 S/2010 J 2	1.0	0.7	24.00	0.10
S/2003 J 2	1.4	1.9	23.25	0.25
J60 S/2003 J 3	1.3	1.6	23.41	0.17
S/2003 J 4	1.2	1.2	23.58	0.17
J57 S/2003 J 5	2.6	12.4	22.58	0.18
S/2003 J 9	1.2	1.2	23.69	0.12
S/2003 J 10	1.2	1.2	23.60	0.10
S/2003 J 12	1.1	0.8	23.86	0.50
J58 S/2003 J 15	1.3	1.7	23.55	0.17
S/2003 J 16	1.3	1.7	23.33	1.30
J55 S/2003 J 18	1.7	3.7	23.25	0.11
S/2003 J 19	1.3	1.6	23.38	0.15
S/2003 J 23	1.2	1.2	23.60	0.20
S/2011 J 1	1.2	1.2	23.60	0.20
J56 S/2011 J 2	1.2	1.2	23.60	0.20
J54 S/2016 J 1	1.7	3.5	23.50	-
J59 S/2017 J 1	2.3	9.1	23.20	-

Спутники Сатурна

Таблица П7.6: Физические параметры главных и некоторых близких спутников Сатурна: a_1, a_2, a_3 — полуоси приближающего эллипсоида, Gm — гравитационный параметр, V — геоцентрическая визуальная звездная величина в среднюю оппозицию. В квадратных скобках указан номер ссылки в списке библиографии источников данных (см. ниже).

Спутник	$a_1, a_2, a_3,$ км	$Gm,$ км ³ /с ²	Зв. вел. V
S1 Мимас	207.8, 196.7, 190.6 [6.1]	2.509 [6.3]	12.8 [6.13]
S2 Энцелад	256.6, 251.4, 248.3 [6.1]	7.205 [6.4]	11.8 [6.13]
S3 Тефия	538.4, 528.3, 526.3 [6.1]	41.200 [6.5]	10.2 [6.13]
S4 Диона	563.4, 561.3, 559.6 [6.1]	73.1127 [6.6]	19.4 [6.13]
S5 Рея	765.0, 763.1, 762.4 [6.1]	153.9395 [6.7]	9.6 [6.13]
S6 Титан	2574.32, 2574.36, 2574.91 [6.2]	8978.1394 [6.8]	8.4 [6.13]
S7 Гиперион	180.1, 133.0, 102.7 [6.1]	0.3727 [6.6]	14.4 [6.13]
S8 Япет	745.7, 745.7, 712.1 [6.1]	120.5117 [6.6]	11.0 [6.13]
S9 Феба	109.4, 108.5, 101.8 [6.1]	0.5534 [6.6]	16.4 [6.14]
S10 Янус	101.5, 92.5, 76.3 [6.1]	0.12651[6.9]	14.4 [6.13]
S11 Эпиметей	64.9, 57.0, 53.1 [6.1]	0.035110[6.9]	15.6 [6.13]
S12 Елена	21.7, 19.1, 13.0 [6.1]	0.0017 [6.10]	18.4 [6.13]
S13 Телесто	21.7, 19.1, 13.0 [6.1]	0.00048 [6.11]	18.5 [6.13]
S14 Калипсо	15.1, 11.5, 7.0 [6.1]	0.00024 [6.11]	18.7 [6.13]
S15 Атлас	20.4, 17.7, 9.4 [6.1]	0.000384 [6.9]	19.0 [6.13]
S16 Прометей	67.8, 39.7, 29.7 [6.1]	0.010677 [6.9]	15.8 [6.13]
S17 Пандора	52.0, 40.5, 32.0 [6.1]	0.009133 [6.9]	16.4 [6.13]
S18 Пан	17.2, 15.7, 10.4 [6.1]	0.00033 [6.12]	19.4 [6.15]

Таблица П7.7: Размеры некоторых близких спутников Сатурна: a_1, a_2, a_3 — полуоси приближающего эллипсоида, a_s — радиус, В квадратных скобках указан номер ссылки в списке библиографии источников данных (см. ниже).

Спутник	$a_1, a_2, a_3,$ или a_s , км
S32 Метона	1.6, 1.6, 1.6 [7.1]
S33 Паллена	2.9, 2.8, 2.0 [7.1]
S34 Полидевк	1.5, 1.2, 1.0 [7.1]
S/2004 S3	2.5 [7.2]
S/2004 S4	2.5 [7.2]
S/2004 S6	2.5 [7.2]
S35 Дафнис	4.3, 4.1, 3.2 [7.1]
S49 Анфа	1.0 [7.3]
S53 Эгеон	0.25 [7.4]

Таблица П7.8: Физические параметры далеких спутников Сатурна: a_s — радиус, Gm — гравитационный параметр, V — визуальная геоцентрическая звездная величина в спектральной полосе R в средней оппозиции при солнечном фазовом угле 3 градуса, σ — погрешность звездной величины (1σ). Данные получены в работе ([5.1] Емельянов, Уральская, 2011) на основе результатов фотометрических измерений, приводимых вместе с результатами астрометрических наблюдений, поступаемых в Minor Planet Center (MPC). Приняты гипотетические значения альbedo — 0.06 и плотности вещества спутников — 2.3 г/см³.

Спутник	a_s , км	$Gm \cdot 10^6$, км ³ /с ²	Зв. вел. V	σ зв. вел.
S19 Имир	9.4	526.4	21.81	0.14
S20 Палиак	11.0	862.1	21.30	0.20
S21 Тарвос	6.9	206.9	22.34	0.22
S22 Иджирак	5.8	123.2	22.75	0.27
S23 Суттунг	2.9	16.0	23.98	0.22
S24 Кивиок	8.0	327.3	22.05	0.29
S25 Мундилфари	3.0	17.6	23.95	0.29

Спутник	$a_s,$	$Gm \cdot 10^6,$	Зв. вел.	σ
	км	км ³ /с ²	V	зв. вел.
S26 Альбиорикс	13.7	1654.9	20.83	0.39
S27 Скади	3.3	22.3	23.84	0.14
S28 Эррипо	5.1	87.0	23.11	0.25
S29 Сиарнак	24.3	9178.9	19.92	0.10
S30 Трюм	3.7	31.4	23.78	0.19
S31 Нарви	2.7	12.9	24.22	0.26
S36 Эгир	2.3	8.1	24.92	0.19
S37 Бефинд	2.5	9.9	24.41	0.30
S38 Бергельмир	2.5	9.4	24.57	0.12
S39 Бестла	2.9	16.4	24.04	0.33
S40 Фарбаути	1.9	4.3	25.01	0.16
S41 Фенрир	1.8	3.6	25.26	0.07
S42 Форньот	2.3	8.0	24.87	0.26
S43 Хати	2.2	7.0	24.66	0.24
S44 Гирроккин	3.9	36.6	23.76	0.19
S45 Кари	2.9	15.5	24.21	0.14
S46 Логи	2.4	8.8	24.80	0.13
S47 Сколл	2.4	9.0	24.80	0.18
S48 Сурт	2.0	4.8	25.27	0.24
S50 Ярнсакса	1.9	4.4	24.92	0.07
S51 Грейп	2.1	6.0	24.77	0.18
S52 Таркек	2.8	14.6	24.19	0.12
S/2004 S 7	2.3	7.6	24.60	0.25
S/2004 S 12	2.0	5.4	24.85	0.21
S/2004 S 13	2.1	5.6	24.83	0.33
S/2004 S 17	1.7	3.1	25.25	0.16
S/2006 S 1	2.3	7.3	25.05	0.05
S/2006 S 3	1.8	3.8	24.80	0.07
S/2007 S 2	2.5	9.4	24.45	0.21
S/2007 S 3	1.9	4.5	25.12	0.21

Спутники Урана

Таблица П7.9: Физические параметры главных и некоторых близких спутников Урана: a_1, a_2, a_3 — полуоси приближающего эллипсоида, a_s — радиус, Gm — гравитационный параметр, V — геоцентрическая визуальная звездная величина в среднюю оппозицию. В квадратных скобках указан номер ссылки в списке библиографии источников данных (см. ниже).

Спутник	$a_1, a_2, a_3,$ или a_s , км	$Gm,$ км ³ /с ²	Зв. вел. V
U1 Ариэль	581.1, 577.9, 577.7 [8.1]	90.3 [8.4]	13.7 [8.6]
U2 Умбриэль	584.7, 584.7, 584.7 [8.1]	78.2 [8.4]	14.5 [8.6]
U3 Титания	788.9, 788.9, 788.9 [8.1]	235.3 [8.4]	13.5 [8.6]
U4 Оберон	761.4, 761.4, 761.4 [8.1]	201.1 [8.4]	13.7 [8.6]
U5 Миранда	240.4, 234.2, 232.9 [8.1]	4.4 [8.4]	15.8 [8.6]
U6 Корделия	25, 18, 18 [8.2]	0.0030 [8.2]	23.6 [8.6]
U7 Офелия	27, 19, 19 [8.2]	0.0036 [8.2]	23.3 [8.6]
U8 Бьянка	32, 23, 23 [8.2]	0.0062 [8.2]	22.5 [8.6]
U9 Крессида	46, 37, 37 [8.2]	0.0229 [8.2]	21.6 [8.6]
U10 Дездемона	45, 27, 27 [8.2]	0.0119 [8.2]	22.0 [8.6]
U11 Джульетта	75, 37, 37 [8.2]	0.0372 [8.2]	21.1 [8.6]
U12 Порция	78, 63, 63 [8.2]	0.1122 [8.2]	20.7 [8.6]
U13 Розалинда	36, 36, 36 [8.2]	0.0170 [8.2]	21.8 [8.6]
U14 Белинда	64, 32, 32 [8.2]	0.0238 [8.2]	21.5 [8.6]
U15 Пак	81, 81, 81 [8.2]	0.1931 [8.5]	19.7 [8.6]
U25 Пердита	15, 15, 15 [8.2]	—	23.7 [8.6]
U26 Маб	12.4 [8.3]	—	—
U27 Купидон	8.9 [8.3]	—	—

Таблица П7.10: Физические параметры далеких спутников Урана: a_s — радиус, Gm — гравитационный параметр, V — визуальная геоцентрическая звездная величина в спектральной полосе R в среднюю оппозицию при солнечном фазовом угле 3 градуса, σ — погрешность звездной величины (1σ). Данные получены в работе ([5.1] Емельянов, Уральская, 2011) на основе результатов фотометрических измерений, проводимых вместе с результатами астрометрических наблюдений, поступаемых в Minor Planet Center (MPC). Приняты гипотетические значения альбедо — 0.04 и плотности вещества спутников — 1.5 г/см^3 . V_S — визуальная геоцентрическая звездная величина в полосе R для наблюдателя с Земли, взятая из работы ([9.1] Sheppard et al., 2005)

Спутник	a_s ,	$Gm \cdot 10^6$,	Зв. вел.	σ	Зв. вел.
	км	$\text{км}^3/\text{с}^2$	V	зв. вел.	V_S
U16 Калибан	48.3	0.0471079	21.60	0.21	22.4
U17 Сикоракса	86.4	0.2704545	20.30	0.19	20.8
U18 Просперо	25.0	0.0065508	23.01	0.14	23.2
U19 Сетевос	27.0	0.0082507	23.01	0.21	23.3
U20 Стефано	16.9	0.0020243	24.01	0.20	24.1
U21 Тринкуло	9.4	0.0003434	25.15	0.22	25.4
U22 Франциско	9.7	0.0003815	25.34	0.16	25.0
U23 Маргарита	9.4	0.0003531	25.16	0.20	25.2
U24 Фердинанд	10.6	0.0005064	24.89	0.09	25.1

Спутники Нептуна

Таблица П7.11: Физические параметры Тритона, Нереиды и близких спутников Нептуна: a_1, a_2, a_3 — полуоси приближающего эллипсоида, a_s — радиус, Gm — гравитационный параметр, V — геоцентрическая визуальная звездная величина в среднюю оппозицию. В квадратных скобках указан номер ссылки в списке библиографии источников данных (см. ниже).

Спутник	a_1, a_2, a_3 ,	Gm ,	Зв. вел.
	или a_s , км	$\text{км}^3/\text{с}^2$	V
N1 Тритон	1354.6, 1352.8, 1352.4 [10.1]	1427.9 [10.4]	13.472 [10.5]
N2 Нереида	170 [10.2]	2.06 [10.2]	19.7 [10.2]

Спутник	$a_1, a_2, a_3,$ или a_s , км	$Gm,$ км ³ /с ²	Зв. вел. V
N3 Наяда	33 [10.3]	0.013 [10.3]	23.91 [10.3]
N4 Таласса	41 [10.3]	0.025 [10.3]	23.32 [10.3]
N5 Деспина	75 [10.3]	0.14 [10.3]	22.00 [10.3]
N6 Галатейя	88 [10.3]	0.25 [10.3]	21.85 [10.3]
N7 Ларисса	97 [10.3]	0.33 [10.3]	21.49 [10.3]
N8 Протей	210 [10.3]	3.36 [10.3]	19.75 [10.3]

Таблица П7.12: Физические параметры далеких спутников Нептуна: a_s — радиус, Gm — гравитационный параметр, V — визуальная геоцентрическая звездная величина в спектральной полосе R в среднюю оппозицию при солнечном фазовом угле 3 градуса, σ — погрешность звездной величины (1σ). Данные получены в работе ([5.1] Емельянов, Уральская, 2011) на основе результатов фотометрических измерений, приводимых вместе с результатами астрометрических наблюдений, поступаемых в Minor Planet Center (MPC). Приняты гипотетические значения альbedo — 0.04 и плотности вещества спутников — 1.5 г/см³. a_{Sh} — радиус спутника из работы ([11.1] Sheppard et al., 2005). V_S — визуальная геоцентрическая звездная величина, в полосе R для наблюдателя с Земли, взятая из работы ([11.1] Sheppard et al., 2005).

Спутник	$a_s,$ км	$a_{Sh},$ км	$Gm \cdot 10^6,$ км ³ /с ²	V	σ	V_S
N9 Галимеда	36.9	31	0.0210759	24.15	0.29	24.5
N10 Псамафа	21.9	20	0.0044054	25.28	0.38	25.5
N11 Сао	20.9	22	0.0038316	25.39	0.20	25.5
N12 Лаомедея	24.7	21	0.0063181	25.03	0.33	25.5
N13 Несо	28.0	30	0.0091746	24.75	0.24	24.6

Спутники Плутона

Таблица П7.13: Физические параметры спутников Плутона: a_1, a_2, a_3 — полуоси приближающего эллипсоида, a_s — радиус, Gm — гравитационный параметр, V — геоцентрическая визуальная звездная величина в среднюю оппозицию, P — геометрическое альbedo. В квадратных скобках указан номер ссылки в списке библиографии источников данных (см. ниже).

Спутник	a_1, a_2, a_3	Gm ,	Зв. вел.	
	или a_s , км	км ³ /с ²	V	P
Плутон	1187 [12.1]	869.6 [12.1]	13.65 [12.7]	—
P1 Харон	606.0 [12.2]	105.9 [12.1]	17.97 [12.3]	—
P2 Никта	25, 17.5, 16.5 [12.8]	0.068 [12.4]	24.55 [12.3]	0.65 [12.8]
P3 Гидра	32.5, 22.5, 12.5 [12.8]	0.028 [12.4]	24.39 [12.3]	0.56 [12.8]
P4 Цербер	9.5, 5, 4.5 [12.8]	—	26.1 [12.5]	0.56 [12.8]
P5 Стикс	8, 4.5, 4 [12.8]	—	27.0 [12.6]	0.83 [12.8]

Библиография источников данных

- [1.1] *Willner K., Oberst J., Hussmann H., Giese B., Hoffmann H., Matz K.-D., Roatsch T., and Duxbury T.* Phobos control point network, rotation, and shape. *Earth and Planetary Science Letters*. 2010. V. 294. No. 3–4. P. 541–546.
- [1.2] *Jacobson R. A.* The Orbits and Masses of the Martian Satellites and the Libration of Phobos. *Astronomical Journal*. 2010. V. 139. No. 2. P. 668–679.
- [1.3] *Zellner B. H., Capen R. C.* Photometric properties of the Martian satellites. *Icarus*. 1974. V. 23. P. 437–444.
- [1.4] *Thomas P. C.* Gravity, Tides, and Topography on Small Satellites and Asteroids: Application to Surface Features of the Martian Satellites. *Icarus*. 1993. V. 105. No. 2. P. 326–344.
- [2.1] *Thomas P. C., Davies M. E., Colvin T. R., Oberst J., Schuster P., Neukum G., Carr M. H., MCEwen A., Schubert G., and Belton M.J. S.* The Shape of Io from Galileo Limb Measurements. *Icarus*. 1998. V. 135. P. 175–180.

- [2.2] *Jacobson R. A.* The Gravity Field of the Jovian System and the Orbits of the Regular Jovian Satellites. American Astronomical Society. 2001. DPS meeting #33, #11.01. V. 33. P. 11.01.
- [2.3] *Morrison D., Morrison N. D., Lazarewicz, A. R.* Four-color photometry of the Galilean satellites. *Icarus*. 1974. V. 23. P. 399–416.
- [2.4] *Nimmo F., Thomas P. C., Pappalardo R. T., Moore W. B.* The global shape of Europa: Constraints on lateral shell thickness variations. *Icarus*. 2007. V. 191. P. 183–192.
- [2.5] *Anderson J. D., Jacobson R. A., Lau E. L., Moore W. B., Olsen O., Schubert G., Thomas P. C., Galileo Gravity Science Team.* Shape, Mean Radius, Gravity Field and Interior Structure of Ganymede. American Astronomical Society. 2001. DPS Meeting #33, #35.09; Bulletin of the American Astronomical Society. V. 33. P. 1101–1101.
- [2.6] *Anderson J. D., Jacobson R. A., McElrath T. P., Moore W. B., Schubert G., Thomas P. C.* Shape, Mean Radius, Gravity Field, and Interior Structure of Callisto. *Icarus*. 2001. V. 153. P. 157–161.
- [3.1] *Weinwurm G.* Gravity field of Jupiter's moon Amalthea and the implication on a spacecraft trajectory. *Advances in Space Research*. 2006. V. 38. No. 9. P. 2125–2130.
- [3.2] *Anderson J. D., Johnson T. V., Schubert G., Asmar S., Jacobson R. A., Johnston D., Lau E. L., Lewis G., Moore W. B., Taylor A., Thomas P. C., Weinwurm G.* Amalthea's Density Is Less Than That of Water. *Science*. 2005. V. 308. No. 5726. P. 1291–1293.
- [3.3] *Thomas P., Veverka J.* Amalthea. In: *Satellites of Jupiter*. (A83-16226 04-91) Tucson, AZ, University of Arizona Press, 1982 Publisher: Tucson, AZ, University of Arizona Press. 1982. P. 147–173.
- [3.4] *Thomas P. C., Burns J. A., Rossier L., Simonelli D., Veverka J., Chapman C. R., Klaasen K., Johnson T. V., Belton M. J. S.* The Small Inner Satellites of Jupiter. *Icarus*. 1998. V. 135. P. 360–371.
- [3.5] *Veverka J., Thomas P., Synott S.* The inner satellites of Jupiter. *Vistas in Astronomy*. 1981. V. 25. P. 245–259.
- [4.1] *Porco C. C., West R. A., McEwen A., Del Genio D., Ingersoll A. P., Thomas P., Squyres S., Dones L., Murray C. D., Johnson T. V., Burns J. A., Brahic A., Neukum G., Veverka J., Barbara J. M., Denk T., Evans M., Ferrier J. J., Geissler P., Helfenstein P., Roatsch T., Throop H., Tiscareno M., Vasavada A. R.* Cassini Imaging of Jupiter's Atmosphere, Satellites, and Rings. *Science*. 2003. V. 299. No. 5612. P. 1541–1547.
- [4.2] *Emelyanov N. V.* The mass of Himalia from the perturbations on other satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 2005. V. 438. No. 3. P. L33–L36.

- [4.3] *Rettig T.W., Walsh K., Consolmagno G.* Implied Evolutionary Differences of the Jovian Irregular Satellites from a BVR Color Survey. *Icarus*. 2001. V. 154. P. 313–320.
- [5.1] *Емельянов Н. В., Уральская В. С.* Оценки физических параметров далеких спутников планет. *Астрономический вестник*. 2011. Т. 45. N 5. С. 387–395.
- [6.1] *Thomas P. C.* Sizes, shapes, and derived properties of the saturnian satellites after the Cassini nominal mission. *Icarus*. 2010. V. 208. P. 395–401.
- [6.2] *Zebker H. A., Stiles B., Hensley S., Lorenz R., Kirk R. L., Lunine J.* Size and Shape of Saturn's Moon Titan. *Science*. 2009. V. 324. No. 5929. P. 921.
- [6.3] *Cooper N. J., Murray C. D., Evans M. W., Beurle K., Jacobson R. A., Porco, C. C.* Astrometry and dynamics of Anthe (S/2007 S 4), a new satellite of Saturn. *Icarus*. 2008. V. 195. P. 765–777.
- [6.4] *Rappaport N.J., Iess L., Tortora P., Anabtawi A., Asmar S.W., Somenzi L., Zingoni F.* Mass and interior of Enceladus from Cassini data analysis. *Icarus*. 2007. V. 190. P. 175–178.
- [6.5] *Jacobson R. A., Spitale J. N., Porco C. C., Owen W. M. Jr.* The GM Values of Mimas and Tethys and the Libration of Methone. *Astronomical Journal*. 2006. V. 132 No. 2. P. 711–713.
- [6.6] *Jacobson R. A., Antreasian P. G., Bordi J.J., Criddle K. E., Ionasescu R., Jones J. B., Mackenzie R. A., Meek M. C., Parcher D., Pelletier F.J., Owen W. M. Jr., Roth D. C., Roundhill I. M., and Stauch J. R.* The Gravity Field of the Saturnian System from Satellite Observations and Spacecraft Tracking Data. *Astronomical Journal*. 2006. V. 132. No. 6. P. 2520–2526.
- [6.7] *Iess L., Rappaport N.J., Tortora P., Lunine J., Armstrong J.W., Asmar S.W., Somenzi L., and Zingoni F.* Gravity field and interior of Rhea from Cassini data analysis. *Icarus*. 2007. V. 190. P. 585–593.
- [6.8] *Iess L., Rappaport N.J., Jacobson R. A., Racioppa P., Stevenson D.J., Tortora P., Armstrong J. W., Asmar S. W.* Gravity Field, Shape, and Moment of Inertia of Titan. *Science*. 2010. V. 327. No. 5971. P. 1367.
- [6.9] *Cooper N. J., Renner S., Murray C. D., Evans M. W.* Saturn's Inner Satellites: Orbits, Masses, and the Chaotic Motion of Atlas from New Cassini Imaging Observations. *The Astronomical Journal*. 2015. V. 149. Issue 1. Article id. 27. 18 pp.
- [6.10] *Thomas P. C.* The shapes of small satellites. *Icarus*. 1989. V. 77. P. 248–274.

- [6.11] *Thomas P., Veverka J., Morrison D., Davies M., Johnson T. V.* Saturn's small satellites - Voyager imaging results. *Journal of Geophysical Research*. 1983. V. 88. P. 8743–8754.
- [6.12] *Porco C. C., Baker E., Barbara J., Beurle K., Brahic A., Burns J. A., Charnoz S., Cooper N., Dawson D. D., Del Genio A. D., Denk T., Dones L., Dyudina U., Evans M. W., Giese B., Grazier K., Helfenstein P., Ingersoll A. P., Jacobson R. A., Johnson T. V., McEwen A., Murray C. D., Neukum G., Owen W. M., Perry J., Roatsch T., Spitale J., Squyres S., Thomas P., Tiscareno M., Turtle E., Vasavada A. R., Veverka J., Wagner R., West R.* Cassini Imaging Science: Initial Results on Saturn's Rings and Small Satellites. *Science*. 2005. V. 307. No 5713. P. 1226–1236.
- [6.13] *Morrison D., Johnson T. V., Shoemaker E. M., Soderblom L. A., Thomas P., Veverka J., Smith B. A.* Satellites of Saturn – Geological perspective. IN: *Saturn (A85-33976 15-91)*. Tucson, AZ, University of Arizona Press. 1984. P. 609–639.
- [6.14] *Simonelli D. P., Kay J., Adinolfi D., Veverka J., Thomas P. C., Helfenstein P.* Phoebe: Albedo Map and Photometric Properties. *Icarus*. 1999. V. 138. P. 249–258.
- [6.15] *Showalter M. R.* Visual detection of 1981S13, Saturn's eighteenth satellite, and its role in the Encke gap. *Nature*. 1991. V. 351. P. 709–713.
- [7.1] *Thomas P. C.* Sizes, shapes, and derived properties of the saturnian satellites after the Cassini nominal mission. *Icarus*. 2010. V. 208. P. 395–401.
- [7.2] *Porco C. C., Baker E., Barbara J., Beurle K., Brahic A., Burns J. A., Charnoz S., Cooper N., Dawson D. D., Del Genio A. D., Denk T., Dones L., Dyudina U., Evans M. W., Giese B., Grazier K., Helfenstein P., Ingersoll A. P., Jacobson R. A., Johnson T. V., McEwen A., Murray C. D., Neukum G., Owen W. M., Perry J., Roatsch T., Spitale J., Squyres S., Thomas P., Tiscareno M., Turtle E., Vasavada A. R., Veverka J., Wagner R., West R.* Cassini Imaging Science: Initial Results on Saturn's Rings and Small Satellites. *Science*. 2005. V. 307. No 5713. P. 1226–1236.
- [7.3] *Porco C. C., Thomas P. C., Weiss J. W., Richardson D. C.* Saturn's Small Inner Satellites: Clues to Their Origins. *Science*. 2007. V. 318. No 5856. P. 1602–1607.
- [7.4] *Porco, C. C.* S/2008 S 1. *IAUC 9023*. 2009. P. 1–1.
- [8.1] *Thomas P. C.* Radii, shapes, and topography of the satellites of Uranus from limb coordinates. *Icarus*. 1988. V. 73. P. 427–441.
- [8.2] *Karkoschka E.* Voyager's Eleventh Discovery of a Satellite of Uranus and Photometry and the First Size Measurements of Nine Satellites. *Icarus*. 2001. V. 151. No 1. P. 69–77.

- [8.3] *Showalter M. R., Lissauer J. J.* The Second Ring-Moon System of Uranus: Discovery and Dynamics. *Science*. 2006. V. 311. No 5763. P. 973–977.
- [8.4] *Jacobson R. A., Campbell J. K., Taylor A. H., Synnott S. P.* The masses of Uranus and its major satellites from Voyager tracking data and earth-based Uranian satellite data. *Astronomical Journal*. 1992. V. 103. No 6. P. 2068–2078.
- [8.5] *Thomas P., Weitz C., Veverka J.* Small satellites of Uranus – Disk-integrated photometry and estimated radii. *Icarus*. 1989. V. 81. P. 92–101.
- [8.6] *Karkoschka E.* Comprehensive Photometry of the Rings and 16 Satellites of Uranus with the Hubble Space Telescope. *Icarus*. 2001. V. 151. No 1. P. 51–68
- [9.1] *Sheppard S. S., Jewitt D., Kleyna J.* An Ultradeep Survey for Irregular Satellites of Uranus: Limits to Completeness. *Astronomical Journal*. 2005. V. 129. Issue 1. P. 518–525.
- [10.1] *Thomas P. C.* The Shape of Triton from Limb Profiles. *Icarus*. 2000. V. 148. P. 587–588.
- [10.2] *Thomas P., Veverka J., Helfenstein P.* Voyager observations of Nereid. *Journal of Geophysical Research Supplement*. 1991. V. 96. No A11. P. 19253–19259.
- [10.3] *Karkoschka E.* Sizes, shapes, and albedos of the inner satellites of Neptune. *Icarus*. 2003. V. 162. No 2. P. 400–407.
- [10.4] *Jacobson R. A., Riedel J. E., Taylor A. H.* The orbits of Triton and Nereid from spacecraft and earthbased observations. *Astronomy and Astrophysics*. 1991. V. 247. No 2. P. 565–575.
- [10.5] *Goguen J. D., Hammel H. B., Brown R. H.* V photometry of Titania, Oberon, and Triton. *Icarus*. 1989. V. 77. P. 239–247.
- [11.1] *Sheppard S. S., Jewitt D., Kleyna J.* A Survey for «Normal» Irregular Satellites around Neptune: Limits to Completeness. *Astronomical Journal*. 2006. V. 132. Issue 1. P. 171–176.
- [12.1] *Stern S. A., Grundy W. M., McKinnon Wm. B., Weaver H. A., Young L. A.* The Pluto System After New Horizons. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 2018. V. 56. P. 357–392.
- Tholen D. J., Buie M. W., Grundy W. M., Elliott G. T.* Masses of Nix and Hydra. *Astronomical Journal*. 2008. V. 135. No 3. P. 777–784.
- [12.2] *Person M. J., Elliot J. L., Gulbis A. A. S., Pasachoff J. M., Babcock B. A., Souza S. P., Gangestad J.* Charon's Radius and Density from the Combined Data Sets of the 2005 July 11 Occultation. *Astronomical Journal*. 2006. V. 132. No 4. P. 1575–1580.

- [12.3] *Buie M. W., Grundy W. M., Young E. F., Young L. A., Stern S. A.* Orbits and Photometry of Pluto's Satellites: Charon, S/2005 P1, and S/2005 P2. *Astronomical Journal*. 2006. V. 132. No 1. P. 290–298.
- [12.4] *Tholen D. J., Buie M. W., Grundy W. M.* Improved Masses of Nix and Hydra American Astronomical Society, DPS meeting #42, #20.08; *Bulletin of the American Astronomical Society*. 2010. V. 42. P. 984–984.
- [12.5] *Showalter M. R., Hamilton D. P., Stern S. A., Weaver H. A., Steffl A. J., Young L. A.* New satellite of (134340) Pluto: S/2011 (134340) 1. CBET 2769. 2011. P. 1–1.
- [12.6] *Showalter M. R., Weaver H. A., Stern S. A., Steffl A. J., Buie M. W., Merline W. J., Soummer R., Throop H. B.* New satellite of (134340) Pluto: S/2012 (134340) 1. IAUC 9253. 2012. P. 1–1.
- [12.7] Pluto Fact Sheet. NASA.
<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/plutofact.html>
- [12.8] *Weaver H. A., Buie M. W., Buratti B. J., Grundy W. M., Lauer T. R., Olkin C. B., Parker A. H., Porter S. B. and 43 co-authors.* The small satellites of Pluto as observed by New Horizons. *Science*. 2016. V. 351. Issue 6279. Id. aae0030.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Earth Orientation Parameter, 238
EOP, 238
- FK4, 237
FK5, 236
- HORIZONS, 473, 487
HST, 232
- ICRF, 236
IERS, 491
IMCCE, 229, 313, 319, 320, 470,
472, 473, 475, 476
- JPL, 486
- MPC, 471, 473
MULTI-SAT, 473, 475
- NAIF, 489
New Horizons, 49
NSDB, 470
- O-C, 26
- SOFA, 490
SPICE, 468, 490
- TT-UTC, 234, 532
- USNO, 472
- WISE, 232
- Авдюшев, 149, 152, 205, 257
Алгоритмы фильтрации, 245
Аналитическая теория, 142
Аномалия
 истинная, 67
 средняя, 68
 эксцентрическая, 68
Астрономическая единица, 51
- Беликова программа, 200
Библиография, 473
Ближние спутники, 149
Бутстреп-выборки, 332
- Варианты теорий, 465
Вашковьяк, 393
Вековые возмущения, 117, 118
Вектор наблюдения, 209, 270
Версии теорий, 465
Весы наблюдений, 275
Взаимные затмения, 42, 222, 283
Взаимные покрытия, 42, 283
Взаимные явления в будущем, 320
Виртуальная обсерватория, 488
Влияние главных спутников, 83
Возмущающая функция, 78
Возмущения
 вековые, 118
 орбит, 53

- от Солнца, 377
- периодические, 120
- Вращение
 - Гипериона, 359
 - Нептуна, 349
 - Солнца, 542
 - Фобоса, 353, 542
 - планет, 82, 538
 - спутников, 344, 357, 542
 - хаотическое, 359
- Время, 21
- Вулканы на Ио, 435
- Вычисление
 - координат, 71
 - скорости, 71
- ГАО РАН, 471
- Гидра, 48
- Гималия, 454
- Гравитационные параметры планет, 52
- Гравитационный параметр, 64
- Гравитационный параметр Солнца, 51
- Дважды осредненная, 382
- Декомпозиция Холецкого, 536
- Динамическое сжатие планет, 52
- Диссипация, 155
- Долгота перицентра, 70
- Доступ
 - к данным, 468
 - к эфемеридам, 468
- Зависимость яркости от угла вращения, 306
- Задача Хилла, 381
- Задача двух неподвижных центров, 87
- Задача двух тел, 63, 64
- Закон Кеплера 3-й, 69
- Закон рассеяния света
 - Ломмеля–Зеелигера, 299
 - Хапке, 300
- Звездная величина, 442
- Звездные каталоги, 229
- ИПА РАН, 474
- Изменение
 - либрационное, 384
 - циркуляционное, 384
- Измеряемые величины, 225, 242
- Изохронные производные, 261
- Интернет-ресурс, 419
- Ио, 435
- Источники наблюдений, 231
- Итерации по Денби, 70
- Кампании наблюдений, 313
- Кеплеровское движение, 63, 67
 - типы орбит, 67
 - фокальный параметр, 68
- Классификация орбит, 409
- Классификация спутников, 35
- Ковариационная матрица
 - ошибок наблюдений, 250
 - параметров, 253
- Козаи, 382, 390
- Количество спутников, 37
- Компоненты сил для зональных гармоник, 82
- Координаты
 - абсолютные, 218
 - барицентрические, 212
 - видимые, 238
 - гелиоцентрические, 212
 - дифференциальные, 218
 - тангенциальные, 221
 - угловые, 218
- Коэффициенты корреляции, 253
- Леверье, 40
- Лидов, 382, 390
- Линия апсид, 64
- МАС, 489

- МРС, 489
 Малые эксцентриситеты, 129
 Масса Гималии, 454
 Метод Рунге-Кутты, 190
 Метод дифференциального уточнения, 259
 Метод малого параметра, 105
 Метод наименьших квадратов, 249
 Модель движения, 23
 Монте-Карло метод, 329
- Наблюдения, 20, 32, 209, 210, 225
 двух спутников, 215
 спутника, 214
 Небесная механика, 17
 Невязки наблюдений, 278
 Неизменная плоскость Лапласа, 541
 Несферичность планеты, 78, 96, 114
 Никта, 48, 49
 Номенклатура, 38, 495
 Нормальные уравнения, 251
- Общая теория относительности, 61
 Орбитальная система, 65
 Орбиты, 510
 планет, 50
 спутников, 53, 54, 510
 Ориентация орбиты, 66
 Ориентация оси вращения, 347
 Основные понятия, 19
 Открытие Нептуна, 39
 Открытие Харона, 41
- ПЗС, 229
 Параметры движения, 242, 244
 Планеты, 50
 Плоскость Лапласа, 541
 Плохая обусловленность, 255
 Плутон, 37, 49
 Плутон-Харон, 46
- Позиционный угол, 220
 Постоянное возмущение большой полуоси, 123
 Потери спутников, 341
 Прецессирующий эллипс, 127
 Приливы, 155
 Притяжение внешних тел, 115
- Рабочая группа IAU WG CCRE, 347
 Радиус Солнца, 51
 Разложение возмущающей функции, 114, 115
 Резонанс Лидова-Козаи, 385
 Релятивистские возмущения, 61
- Сближения орбит спутников, 411
 Световое время, 214, 215
 Северный полюс, 81
 Северный полюс Солнца, 542
 Сжатие Солнца, 51
 Системы координат, 22, 235, 243
 Скорость света, 51
 Случай Хилла, 392
 Спекл-интерферометрия, 230
 Специальные функции, 524
 Способ Пуассона, 109
 Спутники
 близкие, 36
 главные, 35, 152
 далекие, 36
- Среднее движение, 68, 69
 Стикс, 48
 Схема изучения, 25
- Теория возмущений, 90, 117
 Техника наблюдений, 228
 Топоцентр, 210
 Точность наблюдений, 312
 Точность эфемерид, 29, 327, 335, 337
 Трехосный эллипсоид, 79
 Тритон, 39, 40, 147, 349

Угловое расстояние, 220
Уравнение Кеплера, 69
Уравнения Лагранжа, 101, 102
Уравнения движения, 62, 64
Ускорение Фобоса, 510
Условные уравнения, 245, 247, 270
Уточнение массы, 266
Уточнение параметров, 242

Физические параметры
 планет, 51
 спутников, 434, 556

Фобос, 178

Фотометрическая модель, 289, 306
 взаимного затмения, 297
 взаимного покрытия, 295
 упрощенная, 290

Фотометрия, 43, 286, 446

Функции
 наклона, 524
 эксцентриситета, 527

Хапке, 300
Хапке параметры, 302
Харон, 41, 47, 49
Холецкого декомпозиция, 335

Цербер, 48

Частные производные, 71, 259
Чебышева полиномы, 202
Численно-аналитический метод,
 401
Численное интегрирование, 184,
 185, 192, 202

Шкалы времени, 233, 530

Эверхарта программа, 194
Эволюция орбит, 371, 392, 416
 от Солнца, 376
 от сжатия, 372
Эксцентриситет, 69

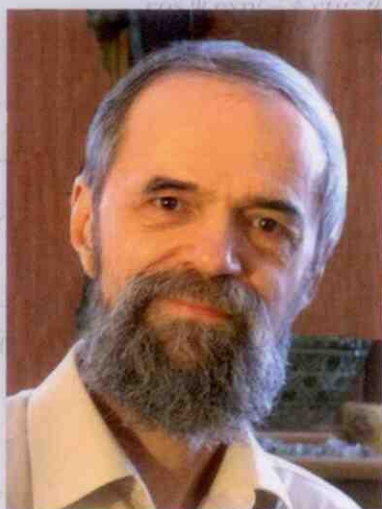
Элементы Лагранжа, 74, 75, 77,
 103
Эпоха J2000, 210
Эффект Лидова – Козаи, 390

Емельянов Николай Владимирович
Динамика естественных спутников планет
на основе наблюдений

Подп. в печ. 14.07.2019. Формат 60×90/16.
Усл. п. л. 36. Тираж 300 экз. Заказ № 5741.

ООО «Век 2», 141195, г. Фрязино, ул. Полевая, 12-35
E-mail: vek-2@mail.ru., www.vek2.ru
Изд. Лиц. ЛР № 070440 от 11.04.97.

Отпечатано в соответствии
с предоставленными материалами
в АО «Первая образцовая типография»,
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, 1



ЕМЕЛЬЯНОВ

Николай Владимирович
 Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом небесной механики Государственного астрономического института имени П. К. Штернберга Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, член Международного астрономического союза.

Автор научных трудов по исследованию движения естественных спутников планет на основе наблюдений.

Основной характер научной деятельности – построение математических моделей, составление вычислительных программ, проведение вычислений, обработка наблюдений.



9785850991999