Кафедра небесной механики, астрометрии и гравиметрии физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Специальный практикум по небесной механике.

Задача No. 3.

Ширмин Г.И.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ АСТЕРОИДА ПО ТРЕМ НАБЛЮДЕНИЯМ.

В В Е Д Е Н И Е.

Проблема определения орбит небесных тел из астрономических наблюдений появилась фактически одновременно с возникновением самой динамической астрономии как естественно-научной дисциплины. И произошло это благодаря Эдмунду Галлею, уговорившему своего друга Исаака Ньютона помочь ему вычислить орбиту кометы, известной теперь как знаменитая комета Галлея. В результате возник первый (геометрический по форме) метод решения такой задачи, по праву связываемый с именем самого автора "Математических начал натуральной философии" (1687 г.). Однако подлинный триумф динамической астрономии в качестве эффективного набора аналитических процедур для прогнозирования движений небесных светил принято связывать с именем Карла Фридриха Гаусса, вычислившего поисковую эфемериду первой малой планеты Цереры,потерянную ее первооткрывателем Джузеппе Пиацци (1801 г.), все усилия которого определить элементы ее орбиты оказались безуспешными. Кстати, К.Гаусс не только предложил метод определения орбиты, идейно близкий предложенномму Жозефом-Луи Лагранжем (1778 г.). Более того, К.Гаусс свой метод "довел до числа". Так возник метод, впоследствии получивший название "метод Лагранжа-Гаусса" и ставший затем наиболее распространенным в практике определения орбит и вычисления эфемерид. Тем самым молодой выпускник Геттингенского университета Карл Фридрих Гаусс не просто решил актуальнейшую научную задачу, но и заложил основы прикладной и вычислительной математики, благодаря чему и получил всеобщее признание как "primas matematicus т.е."король математиков". Поэтому не подлежит сомнению утверждение о том, что могущество современной прикладной и вычислительной математики генетически связано с чисто астрономической проблемой прогнозирования движений небесных светил.

Из теоретической астрономии известно, что для определения гелиоцентрической орбиты какого-либо тела, принадлежащего Солнечной системе, необходимо иметь в своем распоряжении по крайней мере три полных набора его небесных координат, охватывающих, к тому же, достаточно продолжительный промежуток времени. В противном случае точность вычисленных значений орбитальных элементов будет неудовлетворительной. Однако указанный временной интервал не должен быть и чрезмерно большим, так как используемые при этом бесконечные ряды по возрастающим степеням малых параметров, роль которых выполняют как раз интервалы времени между парами наблюдений, будут сходиться недостаточно быстро.

А). В том случае, когда речь идет о топоцентрических небесных координатах "светила" (прямых восхождениях и склонениях, приведенных к экватору и равноденствию одной и той же эпохи), их значения должны быть еще "приведены к центру Земли что предполагает введение в координаты соответствующих поправок за суточный параллакс.

Преобразование от топоцетрических небесных координат к геоцентрическим осуществляется по нижеследующим формулам. Пусть α^0, δ^0 - наблюдаемые топоцентрические координаты объекта, а α, δ - его геоцентрические координаты. Далее пусть ρ, φ и s - геоцентрическое расстояние, геоцентрическая широта и звездное время места наблюдения соответственно. Тогда геоцентрические значения сферических небесных координат α и δ вычисляются по формулам:

$$\alpha = \alpha^0 + p_\alpha,$$

$$\delta = \delta^0 + p_\delta,$$

где "параллактические смещения" p_α и p_δ связаны с "параллактическими множителями" M_α и M_δ равенствами:

$$M_\alpha = \rho\, p_\alpha,$$

$$M_\delta = \rho\, p_\delta,$$

причем через ρ обозначено геоцентрическое расстояние объекта. Параллактические множители обычно принято публиковать вместе с наблюдаемыми небесными координатами и если (например, из эфемериды) известно геоцентрическое расстояние ρ, то параллактические смещения p_α и p_δ легко определяются с помощью формул;

$$p_\alpha = \frac{1}{\rho} M_\alpha,$$

$$p_\delta = \frac{1}{\rho} M_\delta.$$

Однако в том случае, когда параллактические множители M_α и M_δ не известны, они могут быть рассчитаны по формулам:

$$M_\alpha = C^s \sec\delta^0 \sin(s-\alpha^0), \qquad M_\delta = S^{''}\cos\delta^0 - C^{''}\sin\delta^0\cos(s-\alpha^0), \tag{1}$$

где

$$C^s = 0^s.5867\,\rho'\cos\phi', \quad C'' = 8''.80\,\rho'\cos\phi', \quad S'' = 8.''80\,\rho'\sin\phi', \tag{2}$$

причем обе части первого из равенств (2) выражены в секундах времени, а оставшихся двух - в секундах дуги. В Астрономическом Ежегоднике СССР приводятся вспомогательные таблицы для вычисления коэффициентов C и S по заданным значениям геоцентрических координат (расстояния ρ' и широты ϕ') основных астрономических обсерваторий Земли.

Б). В случае только что открытого (т.е. впервые наблюдавшегося) небесного тела описанный выше (в разделе А) путь ("приведения к центру Земли") неприменим, так как геоцентрическое расстояние взять неоткуда (оно неизвестно ввиду отсутствия эфемериды такого объекта). Тогда следует к наблюдаемым топоцентрическим координатам объекта добавить топоцентрические значения прямоугольных координат Солнца, вычисленные по геоцентрическим прямоугольным экваториальным координатам Солнца из таблиц Астрономического Ежегодника СССР (за год, к которому относятся наблюдения), публикуемым на начало суток каждой даты года.

АЛГОРИТМ ЛАГРАНЖА-ГАУССА.

I. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТЫ АСТЕРОИДА.

а). Моменты трех наблюдений астероида:

$$t_1, t_2, t_3 \quad (t_1 < t < t_2);$$

б).Наблюденные сферические небесные координаты астероида:

$$(\alpha_1, \delta_1), \quad (\alpha, \delta), \quad (\alpha_2, \delta_2);$$

в).Декартовы прямоугольные координаты Солнца:

$$(X_1, Y_1, Z_1), \quad (X, Y, Z), \quad (X_2, Y_2, Z_2),$$

получаемые интерполированием из соответствующих таблиц Астрономического Ежегодника СССР (на год наблюдений). Координаты астероида и Солнца должны быть выражены в одной и той же системе координат (геоцентрической или топоцентрической), а также должны быть отнесены к небесному экватору и весеннему равноденствию одной и той же эпохи.

II. СВОДКА ФОРМУЛ И ПОРЯДОК ВЫЧИСЛЕНИЙ.

IIa). Вычисление геоцентрических расстояний.

No 1. Вычисление элементов фундаментального определителя ,

то есть направляющих косинусов радиус-вектора астероида относительно осей выбранной системы координат по его сферическим небесным экваториальным координатам:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = \cos\alpha_1 \cos\delta_1, & \lambda = \cos\alpha \cos\delta, & \lambda_2 = \cos\alpha_2 \cos\delta_2, \\ \mu_1 = \sin\alpha_1 \cos\delta_1, & \mu = \sin\alpha \cos\delta, & \mu_2 = \sin\alpha_2 \cos\delta_2, \\ \nu_1 = \sin\delta_1, & \nu = \sin\delta, & \nu_2 = \sin\delta_2. \end{array} \qquad (3)$$

В качестве контрольных соотношений используются следующие очевидные тождества:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 = 1.$$

No 2. Вычисление констант ,

связанных с фундаментальным определителем D метода Лагранжа-Гаусса, по значениям направляющих косинусов, вычисленным в предыдущем разделе:

а). Фундаментальный определитель D

вычисляется согласно формуле Лапласа (в форме разложения по элементам его первого столбца):

$$D = \lambda\lambda_{12} + \mu\mu_{12} + \nu\nu_{12}.$$

Здесь алгебраические дополнения элементов первого столбца определителя D заданы выражениями

$$\lambda_{12} = \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1,$$

$$\mu_{12} = \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1,$$

$$\nu_{12} = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1.$$

Через U_1, U и U_2 далее обозначены так называемые "производные"определители

$$U_1 = X_1\lambda_{12} + Y_1\mu_{12} + Z_1\nu_{12},$$

$$U = X\lambda_{12} + Y\mu_{12} + Z\nu_{12},$$

$$U_2 = X_2\lambda_{12} + Y_2\mu_{12} + Z_2\nu_{12},$$

получаемые из фундаментального определителя D заменой элементов его первого столбца на прямоугольные экваториальные координаты Солнца, соответствующие моментам трех наблюдений.

б). Вычисление постоянных

$$R, C, S, \cos\psi,$$

определяемых формулами:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$C = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z),$$

$$S^2 = R^2 - C^2,$$

$$\cos\psi = \frac{C}{R}.$$

Контроль вычислений: с помощью значений вспомогательных констант L, M и N, определяемых равенствами:

$$L = \lambda_1 + \lambda + \lambda_2 + X_1 + X + X_2,$$

$$M = \mu_1 + \mu + \mu_2 + Y_1 + Y + Y_2,$$

$$N = \nu_1 + \nu + \nu_2 + Z_1 + Z + Z_2,$$

а в качестве контрольного используется соотношение:

$$L\lambda_{12} + M\mu_{12} + N\nu_{12} = D + U_1 + U + U_2,$$

обе части которого должны совпадать в пределах заданной точности вычислений.

No 3. Вычисление геоцентрических расстояний небесного объекта методом последовательных приближений.

Первое приближение.

No 3.1. Вычисление промежутков времени

$$\tau_1, \tau, \tau_2$$

между парами наблюдений по формулам:

$$\tau_1 = k(t_2 - t),$$

$$\tau_2 = k(t - t_1),$$

$$\tau = k(t_2 - t_1),$$

где через k обозначена постоянная Гаусса

$$k = 0,01720209895,$$

а также отношений указанных выше промежутков времени ${n_1}^0$ и ${n_2}^0$:

$$ {n_1}^0 = \frac{\tau_1}{\tau}, $$

$$ {n_2}^0 = \frac{\tau_2}{\tau}, $$

и величин коэффициентов Энке c_1 и c_2 по формулам:

$$ c_1 = \frac{1}{6}\tau_1\tau_2(1 + {n_1}^0), $$

$$ c_2 = \frac{1}{6}\tau_1\tau_2(1 + {n_2}^0). $$

К о н т р о л ь н ы м   с о о т н о ш е н и е м служит равенство:

$$ \frac{1}{3}(c_1 + c_2) = \frac{1}{6}\tau_1\tau_2, $$

обе части которого должны совпадать в пределах заданной точности вычислений.

No 3.2. С о с т а в л е н и е   у р а в н е н и й   Л а г р а н ж а.

В этом разделе составляется система уравнений Лагранжа, определяющая геоцентрическое расстояние светила ρ в момент среднего из трех наблюдений:

$$ DP = U - {n_1}^0 U_1 - {n_2}^0 U_2, $$

$$ DQ = c_1 U_1 + c_2 U_2 .....(A) $$

$$ \rho = P - \frac{Q}{r^3}, $$

$$ r^2 = (\rho + C)^2 + S^2 ....(B) $$

К р и т е р и й   О п п о л ь ц е р а единственности орбиты, соответствующей используемому набору наблюдательных данных , состоит в удовлетворении неравенства:

$$ 3P cos\psi > R. $$

Если последнее неравенство не удовлетворяется, то это означает, что используемому набору наблюдательных данных соответствует двойное решение задачи Лагранжа-Гаусса. В таком случае какое-либо одно из трех наблюдений должно быть исключено и заменено другим, чтобы новый набор трех наблюдений удовлетворял критерию Оппольцера.

No 3.3. Численное решение системы (B) уравнений Лагранжа.

Система (B) уравнений Лагранжа - это система двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными: геоцентрическим расстоянием ρ и гелиоцентрическим расстоянием r исследуемого небесного тела. Решение такой системы может быть найдено лишь приближенно, например, каким-либо из итерационных способов. Это, разумеется, предполагает выбор стартового значения для искомой переменной ρ из области сходимости применяемого итерационного процесса. С этой целью используется следующее одно уравнение:

$$p = 1 - (x^{\star 2} + 2x^{\star}\cos\psi + 1)^{\frac{-3}{2}} \dots \quad (a)$$

относительно другой (безразмерной) неизвестной $x^{\star}$, определяемой равенством:

$$x^{\star} = \frac{\rho}{r},$$

и с двумя параметрами p , $\cos\psi$,, таких что

$$p = \frac{R}{P},$$

а

$$\cos\psi = \frac{C}{R}.$$

Уравнение (а) выводится из системы (B) путем исключения из последней гелиоцентрического расстояния r при условии, что коэффициенты P и Q связаны приближенным соотношением

$$Q \simeq PR^3.$$

Вышеупомянутое уравнение (a) в принципе позволяет найти значение искомой величины $x^\star$ по заданным значениям параметров p и $\cos\psi$. Однако безразмерное геоцентрическое расстояние $x^\star$ определяется уравнением (a) как неявная функция двух аргументов p и $\cos\psi$:

$$x^\star = \Phi(p, \cos\psi),$$

так что вычисление этой последней неявной функции связано с определенными трудностями, чреватыми потерей точности. Эти трудности легко преодолимы, если обратить внимание на то обстоятельство, что приближенное значение $x^\star$ может быть получено из таблицы с двумя входами для значений p , вычисляемых непосредственно по формуле (a) как функции $x^\star$ и $\cos\psi$:

$$p = \Psi(x^\star, \cos\psi).$$

Такая таблица содержится в монографии: М.Ф.Субботин."ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ АСТРОНОМИЮ изд."Наука М., 1968, сс. 780-783.Таблица X. "Приближенное решение уравнений Лагранжа". Эта таблица позволяет легко находить значение $x^\star$ для заданных значений p и $\cos\psi$. Таким образом, стартовое значение геоцентрического расстояния $\rho^{(0)}$ определяется приближенно из равенства:

$$\rho^{(0)} = x^\star R.$$

Это приближенное значение геоцентрического расстояния ρ подлежит уточнению с помощью какого-либо из итерационных способов решения алгебраических уравнений. Например, для применения метода касательных Ньютона уравнение (B) следует привести к виду:

$$f(\rho) = 0,$$

где для левой части этого уравнения использовано обозначение

$$f(\rho) = \rho - P + \frac{Q}{r^3},$$

так что ее первая производная $f'(\rho)$ представима формулой

$$f'(\rho) = 1 - \frac{3Q(\rho + C)}{r^5}.$$

Итерации начинаются со стартового значения:

$$\rho^{(0)} = x^\star R,$$

причем итерационная схема метода касательных Ньютона приобретает вид:

$$\rho^{(k+1)} = \rho^{(k)} - \frac{f(\rho^{(k)})}{f'(\rho^{(k)})},$$

где номер итерации k принимает значения

$$k = 0, 1, 2, ...$$

Напротив,если вместо метода касательных Ньютона для уточнения геоцентрического расстояния ρ испольэуется клаассический метод итераций, то итерационная схема для системы (B) уравнений Лагранжа такова:

$$\rho^{(k+1)} = P - \frac{Q}{(r^{(k)})^3,},$$

$$(r^{(k)})^2 = [\rho^{(k)} + C]^2 + S^2,$$

$$k = 0, 1, 2, ...,$$

причем по-прежнему через $\rho^{(0)}$ обозначено стартовое значение искомого геоцентрического расстояния ρ , определяемое равенством:

$$\rho^{(0)} = x^{\star} R.$$

No 3.4.Вычисление г е о ц е н т р и ч е с к и х р а с с т о я н и й ρ_1 и ρ_2 , соответствующих моментам крайних наблюдений.

Прежде всего по значению гелиоцентрического расстояния r , вычисленному в первом приближении (см. предыдущий раздел No 3.3), по формулам Энке:

$$n_1^{(1)} = n_1^{(0)} + \frac{c_1}{r^3},$$

$$n_2^{(1)} = n_2^{(0)} + \frac{c_2}{r^3},$$

вычисляются отношения площадей треугольников $n_1^{(1)}$ и $n_2^{(1)}$. Затем геоцентрическое расстояние ρ_1 вычисляется по тому из трех нижеследующих уравнений, левая часть которого имеет наибольший коэффициент при определяемом неизвестном ρ_1 :

$$[n_1\lambda_{12}]\rho_1 = (\nu_2\mu - \mu_2\nu)\rho - (\nu_2Y - \mu_2Z) + n_1(\nu_2Y_1 - \mu_2Z_1) + n_2(\nu_2Y_2 - \mu_2Z_2);$$

$$[n_1\mu_{12}]\rho_1 = (\lambda_2\nu - \nu_2\lambda)\rho - (\lambda_2Z - \nu_2X) + n_1(\lambda_2Z_1 - \nu_2X_1) + n_2(\lambda_2Z_2 - \nu_2X_2);$$

$$[n_1\nu_{12}]\rho_1 = (\mu_2\lambda - \lambda_2\mu)\rho - (\mu_2X - \lambda_2Y) + n_1(\mu_2X_1 - \lambda_2Y_1) + n_2(\mu_2X_2 - \lambda_2Y_2... \quad (C).$$

Так, например, если λ_{12} по модулю превосходит как μ_{12}, так и ν_{12}:
:

$$|\lambda_{12}| \geq max(|\mu_{12}|, |\nu_{12}|),$$

то для вычисления ρ_1 надо выбрать первое из трех соотношений (C).

Что же касается геоцентрического расстояния ρ_2, оно определяется из трех следующих соотношений, превращающихся (после вычисления ρ и ρ_1) в уравнения с одним неизвестным ρ_2:

$$(n_2\lambda_2)\rho_2 = \lambda\rho - (n_1\lambda_1)\rho_1 - X + n_1X_1 + n_2X_2;$$

$$(n_2\mu_2)\rho_2 = \mu\rho - (n_1\mu_1)\rho_1 - Y + n_1Y_1 + n_2Y_2; ... \quad (D)$$

$$(n_2\nu_2)\rho_2 = \nu\rho - (n_1\nu_1)\rho_1 - Z + n_1Z_1 + n_2Z_2$$

Например, при выполнении условия, что λ_2 по абсолютной величине превосходит как μ_2, так и ν_2, т.е.

$$|\lambda_2| \geq max(|\mu_2|, |\nu_2|),$$

с наибольшей точностью последнее геоцентрическое расстояние ρ_2 определяется третьим соотношением (D).

No 3.5. Вычисление гелиоцентрических координат и расстояний объекта.

Значения гелиоцентрических координат вычисляются по формулам

$$\begin{array}{lll} x_1 = \lambda_1\rho_1 - X_1, & x = \lambda\rho - X, & x_2 = \lambda_2\rho_2 - X_2 \\ y_1 = \mu_1\rho_1 - Y_1, & y = \mu\rho - Y, & y_2 = \lambda_2\rho_2 + Y_2 \\ z_1 = \nu_1\rho_1 - Z_1, & z = \nu\rho - Z, & z_2 = \nu_2\rho_2 - Z_2 \end{array} \tag{E}$$

после чего вычисляются квадраты гелиоцентрических расстояний

$$(r_1)^2 = (x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2,$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$(r_2)^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2 + (z_2)^2$$

К о н т р о л ь . Во-первых, вычисленное в этом разделе значение величины r должно совпадать с ее значением, полученным в процессе численного решения системы уравнений Лагранжа (см. раздел No 3.3), то есть должно быть выполнено условие:

$$r = r^{(k)},$$

где через $r^{(k)}$ обозначено значение переменной r из последней итерации (в процессе уточнения геоцентрических расстояний). Во-вторых, вычислнные в этом разделе значения гелиоцентрических координат небесного объекта должны удовлетворять (разумеется, в пределах заданной точности вычислений) также и соотношениям:

$$x = n_1x_1 + n_2x_2,$$

$$y = n_1y_1 + n_2y_2,$$

$$z = n_1z_1 + n_2z_2.$$

П р и м е ч а н и е 1.

Для астероидов иногда оказывается достаточно той точности,которую дает первое приближение гауссовой процедуры определения геоцентрических расстояний. Так, например, можно сразу переходить к вычислению элементов орбиты, предназначенных для вычисления так называемой "поисковой"эфемериды, чтобы астрономы-наблюдатели смогли продолжить наблюдения и, благодаря ей, сумели не потерять интересующий их небесный объект.

No 3.6. У ч е т п л а н е т н о й а б е р р а ц и и .

Эффект планетной аберрации является следствием того обстоятельства, что свет распространяется не мгновенно, т.е. скорость света имеет конечное значение. Поэтому за тот промежуток времени, пока свет проходит расстояние от источника света до наблюдателя, сам светящийся объект успевает передвинуться в пространстве на новое место. Таким образом, фиксируемое наблюдателем положение объекта на небесной сфере соответствуют не моменту наблюдения, а некоторому более раннему моменту времени. Следовательно, вычисленные в предыдущем разделе гелиоцентрические координаты светила: (x_1, y_1, z_1), (x, y, z), (x_2, y_2, z_2) должны относиться, соответственно, к исправленным (за планетную аберрацию) моментам времени:

$$t_1{}^* = t_1 - L\rho_1,$$

$$t^* = t - L\rho,$$

$$t_2{}^* = t_2 - L\rho_2,$$

где

$$L = 0^d.0057756$$

- это так называемое "световое время"(в средних солнечных сутках), за которое свет проходит расстояние, равное одной астрономической единице.

No 4. ***Второе и последующие приближения в гауссовой процедуре уточнения расстояний.***

No 4.1. В т о р о е   п р и б л и ж е н и е

начинается с вычисления новых значений промежутков времени между парами наблюдений (с исправленными за планетную аберрацию моментами наблюдений) по формулам:

$$\tau_1{}^* = k(t_2{}^* - t^*),$$

$$\tau_2{}^* = k(t^* - t_1{}^*),$$

$$\tau^* = k(t_2{}^* - t_1{}^*).$$

Затем вычисляются новые значения отношений промежутков времени между парами наблюдений:

$$n_1{}^0 = \frac{\tau_1{}^*}{\tau^*},$$

$$n_2{}^0 = \frac{\tau_2{}^*}{\tau^*}.$$

Далее во втором приближении вычисляются отношения площадей треугольников по формулам Гиббса:

$$n_1{}^{(2)} = n_1{}^0 \frac{[1 + B_1(r_1)^{-3}]}{(1 - Br^{-3})},$$

$$n_2{}^{(2)} = n_2{}^0 \frac{[1 + B_2(r_2)^{-3}]}{(1 - Br^{-3})},$$

где коэффициенты B, B_1 и B_2 суть постоянные величины,определяемые формулами:

$$B = \frac{1}{12}\tau^{*2}(1 + n_1{}^0 n_2{}^0),$$

$$B_1 = \frac{1}{12}\tau^{*2}(n_2{}^0 - n_1{}^0 n_1{}^0),$$

$$B_2 = \frac{1}{12}\tau^{*2}(n_1{}^0 - n_2{}^0 n_2{}^0).$$

П р и м е ч а н и е 1.

Не следует упускать из виду то обстоятельство, что во втором приближении значения величин τ^*, $\tau_1{}^*$, $\tau_2{}^*$, $n_1{}^0$ и $n_2{}^0$ предполагаются исправленными за планетную аберрацию (т.е. перевычисленными на моменты времени $t_1{}^*$, t^*, $t_2{}^*$).

Дальнейшие вычисления по уточнению значений геоцентрических расстояний производятся в соответствии с разделом No 4.2.

В т р е т ь е м п р и б л и ж е н и и (а также во всех последующих приближениях) отношения площадей треугольников рассчитываются по формулам Гаусса:

$$n_1^{(k)} = n_1{}^0 \frac{\eta}{\eta_1},$$

$$n_2^{(k)} = n_2{}^0 \frac{\eta}{\eta_2},$$

где $(k \geq 3)$, причем $n_1{}^0$, $n_2{}^0$ вычисляются по формулам

$$n_1{}^0 = \frac{\widetilde{\tau_1}}{\widetilde{\tau}},$$

$$n_2{}^0 = \frac{\widetilde{\tau_2}}{\widetilde{\tau}}$$

с исправленными за планетную аберрацию моментами наблюдений

$$\widetilde{t_1} = t_1 - L\rho_1,$$

$$\widetilde{t} = t - L\rho,$$

$$\widetilde{t_2} = t_2 - L\rho_2,$$

а также с соответственно исправленными значениями промежутков времени между парами наблюдений:

$$\widetilde{\tau} = k(\widetilde{t_2} - \widetilde{t_1}),$$

$$\widetilde{\tau_1} = k(\widetilde{t_2} - \widetilde{t}),$$

$$\widetilde{\tau_2} = k(\widetilde{t} - \widetilde{t_1}).$$

В формулах Гаусса η, η_1, η_2 суть отношения площадей секторов к площадям треугольников, образованных парами гелиоцентрических радиус-векторов объекта, соответствующих моментам используемых наблюдений. Указанные отношения площадей секторов к площадям соответствующих треугольников представляются цепными дробями Ганзена.

В частности величина η - это отношение площади эллиптического сектора, образованного "крайними" радиус-векторами, к площади треугольника, образованного теми же радиус-векторами и стягивающей их концы хордой, а вычисляется η с помощью следующих формул:

$$\eta = 1 + \frac{10}{11}\left(\frac{d}{1 + \frac{d}{1+\frac{d}{1+\dots}}}\right),$$

где

$$d = \frac{22\widetilde{\tau}^2}{\kappa^2[6\kappa + 9(r_1 + r_2)]},$$

причем

$$\kappa^2 = 2(r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2).$$

Аналогичный смысл имеет величина η_1 , также представляемая соответствующей формулой в форме цепной дроби;

$$\eta_1 = 1 + \frac{10}{11}\left(\frac{d_1}{1 + \frac{d_1}{1+\frac{d_1}{1+\dots}}}\right),$$

где d_1 и κ_1 определяются двумя следующим далее равенствами:

$$d_1 = \frac{22\widetilde{\tau_1}^2}{{\kappa_1}^2[6\kappa_1 + 9(r_2 + r)]},$$

и

$${\kappa_1}^2 = 2(r_2 r + x_2 x + y_2 y + z_2 z).$$

Наконец, значение величины η_2 также определяет соответствующая цепная дробь Ганзена:

$$\eta_2 = 1 + \frac{10}{11}(\frac{d_2}{1 + \frac{d_2}{1+\frac{d_2}{1+\ldots}}}),$$

где

$$d_2 = \frac{22\widetilde{\tau}_2{}^2}{\kappa_2{}^2[6\kappa_2 + 9(r_1 + r)]},$$

а

$$\kappa_2{}^2 = 2(r_1 r + x_1 x + y_1 y + z_1 z).$$

No 4.2. После второго приближения (и всех последующих приближений) с уточненными значениями отношений площадей треугольников n_1 и n_2 вычисляются к о э ф ф и ц и е н т ы Э н к е c_1 и c_2 по формулам:

$$c_1 = (n_1 - n_1{}^0)r^{-3},$$

$$c_2 = (n_2 - n_2{}^0)r^{-3},$$

где в качестве $n_1{}^0$ и $n_2{}^0$ берутся их исправленные за планетную аберрацию значения, а

$$r = r^{(k)},$$

причем "(k)" означает номер последнего (из осуществленных) приближений в гауссовой процедуре уточнения расстояний.

No 4.3. Теперь по формулам (A) и (B) раздела No 3.2 вычисляются новые значения расстояний до объекта (геоцентрического "ρ" и гелиоцентрического "r"), соответствующих моменту среднего наблюдения.

No 4.4. С помощью тех же самых уравнений из числа (C) и (D) раздела No 3.3, которые использовались в первом приближении для нахождения "крайних" геоцентрических расстояний, после подстановки в вышеуказанные уравнения уточненных значений величин n_1, n_2, определяются новые значения ρ_1 и ρ_2 , соответствующие моментам крайних наблюдений.

No 4.5. По формулам (E) вычисляются уточненные значения гелиоцентрических координат x_i, y_i, z_i $(i = 1, 0, 2)$, соответствующие моментам трех наблюдений небесного объекта.

П р и м е ч а н и е 2.

Если новые значения геоцентрических расстояний ρ_1, ρ и ρ_2 отличаются более чем на $0,001 a.e.$ от тех, что были употреблены для исправления моментов наблюдений за планетную аберрацию, то соответствующие (аберрационные) поправки иногда бывает необходимо уточнить.

П р и м е ч а н и е 3.

Последующие приближения гауссовой процедуры уточнения геоцентрических расстояний исследуемого небесного объекта продолжаются до совпадения последующих значений отношений площадей треугольников с их предыдущими значениями (разумеется, в пределах той точности, с которой ведутся вычисления.

Таким образом, при выполнении условий:

$$|{n_q}^{(k+1)} - {n_q}^{(k)}| \leq \epsilon^* \quad (q = 1, 2; \quad k = 0, 1, 2, ..., n),$$

все расстояния до объекта считаются вычисленными с требуемой точностью ε^*, так что можно переходить к реализации второго этапа стратегии Леонарда Эйлера, то есть к вычислению элементов орбиты.

IIб). В ы ч и с л е н и е э л е м е н т о в о р б и т ы .

В методе Лагранжа-Гаусса элементы орбиты вычисляются из краевых условий невозмущенного движения объекта, в качестве которых выбираются гелиоцентрические координаты , соответствующие моментам двух крайних наблюдений:

$$(t_1, x_1, y_1, z_1),$$

$$(t_2, x_2, y_2, z_2).$$

Эти значения выбираются из результатов последнего выполненного приближения гауссовой процедуры уточнения расстояний от наблюдателя до объекта.

No 5.1. В ы ч и с л е н и е к в а д р а т о в "крайних" гелиоцентрических р а с с т о я н и й r_1 и r_2, а также вспомогательных величин σ, x_0, y_0, z_0 , r_0 по нижеприведенным формулам:

$$ {r_1}^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2, $$

$$ {r_2}^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2, $$

$$\sigma = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2){r_1}^{-2},$$

$$x_0 = x_2 - \sigma x_1,$$

$$y_0 = y_2 - \sigma y_1,$$

$$z_0 = z_2 - \sigma z_1,$$

$${r_0}^2 = {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2.$$

No 5.2. Вычисление разности истинных аномалий

$$(2f) = v_2 - v_1$$

в двух крайних положениях исследуемого объекта по формулам:

$$\sin(2f) = \frac{r_0}{r_2},$$

$$\cos(2f) = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)}{r_1r_2}.$$

Квадрант единичной окружности, в котором находится угол (2f),находится по знакам $\sin(2f)$ и $\cos(2f)$, в то время как главное значение угла $(2f)$ точнее определяется соотношением:

$$(2f) = arctg[\frac{r_0r_1}{(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)}].$$

Основное контрольное соотношение таково:

$$(r_0r_1)^2 = (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

В целях дополнительного контроля за вычислениями желательно использовать также равенство:

$$arc\sin(\frac{r_0}{r_2}) = arc\cos\frac{(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)}{r_1r_2},$$

обеспечивающее согласие значений разности истинных аномалий $(2f)$, выводимых из двух первых формул этого раздела.

No 5.3. Вычисление фокального параметра "p" орбиты с помощью соотношения:

$$\sqrt{p} = \eta \frac{(r_1)(r_0)}{\tau},$$

где через "η" обозначено отношение площади сектора к площади треугольника для среднего наблюдения (его значение уже вычислено после операций раздела No 4.1., выполненных в последнем приближении гауссовой процедуры уточнения расстояний до объекта).

No 5.4. Оп р е д е л е н и е и с т и н н ы х а н о м а л и й "v_1" и "v_2" в двух крайних положениях объекта, а также эксцентриситета "e" его орбиты, для чего используются соотношения:

$$e\sin(v_1 = \frac{q_1\cos(2f) - q_2)}{\sin(2f)},$$

$$e\cos(v_1) = q_1,$$

$$v_2 = v_1 + (2f).$$

Здесь через "q_1" и "q_2" обозначены величины:

$$q_1 = \frac{p}{r1} - 1, \quad q_2 = \frac{p}{r_2} - 1.$$

К о н т р о л ь вычисления параметра орбиты, определенного в разделе No 5.3, осуществляется с помощью соотношения:

$$p = r_2[1 + e\cos(v_2)].$$

No 5.5. В ы ч и с л е н и е б о л ь ш о й п о л у о с и "a" о р б и т ы, а также эксцентрических аномалий "E_1" и "E_2" в двух крайних положениях объекта.

Для этого служат формулы:

$$e = \sin(\varphi),$$

$$a = \frac{p}{(1-e)(1+e)} = \frac{p}{\cos^2(\varphi)},$$

где

$$\varphi = arc\sin(e)$$

-это так называемый "угол эксцентриситета".

Значения E_1 и E_2 вычисляются по формулам:

$$tg(\frac{E_1}{2}) \quad = \quad \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad tg(\frac{v_1}{2}),$$

$$tg(\frac{E_2}{2}) \quad = \quad \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad tg(\frac{v_2}{2}).$$

В целях контроля вычислений используется равенство:

$$b\sin\frac{(E_2-E_1)}{2} = \sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{(v_2-v_1)}{2},$$

где через "b" обозначена малая полуось эллиптической орбиты, так что

$$b = a\sqrt{(1-e^2)} = a\cos(\varphi).$$

No 5.6. Вычисление средних аномалий "M_1" и "M_2" небесного объекта, соответствующих его крайним наблюдениям:

$$M_1 = E_1 - e^\circ \sin(E_1),$$

$$M_2 = E_2 - e^\circ \sin(E_2),$$

причем через e° обозначено значение эксцентриситета,выраженное в градусах дуги:

$$e^\circ = 57^\circ.2957795e.$$

No 5.7. Определение среднего суточного движения "n" объекта и его средней аномалии "M" "эпохи оскуляции"t_0 по формулам:

$$n = \frac{(M_2-M_1)}{(t_2-t_1)},$$

$$M_0 = M_1 + n(t_0 - t_1),$$

где в качестве "эпохи оскуляции" t_0 берется момент начала суток второго (то есть "среднего") наблюдения:

$$t_0 = [t].$$

No. 5.8. В ы ч и с л е н и е "векторных элементов":

$$\vec{P} = (P_x, P_y, P_z),$$

$$\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z).$$

Значения этих шести компонент векторов $\overrightarrow{P}$ и $\overrightarrow{Q}$ вычисляются с помощью формул:

$$P_x = \frac{x_1}{r_1}\cos(v_1) - \frac{x_0}{r_0}\sin(v_1),$$

$$P_y = \frac{y_1}{r_1}\cos(v_1) - \frac{y_0}{r_0}\sin(v_1),$$

$$P_z = \frac{z_1}{r_1}\cos(v_1) - \frac{z_0}{r_0}\sin(v_1),$$

$$Q_x = \frac{x_1}{r_1}\sin(v_1) + \frac{x_0}{r_0}\cos(v_1),$$

$$Q_y = \frac{y_1}{r_1}\sin(v_1) + \frac{y_0}{r_0}\cos(v_1),$$

$$Q_z = \frac{z_1}{r_1}\sin(v_1) + \frac{z_0}{r_0}\cos(v_1).$$

В качестве к о н т р о л ь н ы х с о о т н о ш е н и й используются следующие тождественные равенства:

$$(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2 = a^2,$$

$$(B_x)^2 + (B_y)^2 + (B_z)^2 = b^2,$$

$$(A_x)(B_x) + (A_y)(B_y) + (A - z)(B_z) = 0,$$

где

$$A_x = aP_x, \quad A_y = aP_y, \quad A_z = aP_z, \quad B_x = bQ_x, \quad B_y = bQ_y, \quad b_z = bQ_z,$$

а через a и b обозначены соответственно большая и малая оси эллиптической орбиты астероида.

No 5.9. Вычисление "угловых элементов" орбиты (долготы восходящего узла Ω на эклиптике, наклонения орбиты i к эклиптике и углового расстояния перигелия ω от восходящего узла).

С этой целью для вычисления ω и i используются соотношения:

$$\sin(i)\sin(\omega) = P_z \cos\varepsilon - P_y \sin\varepsilon,$$

$$\sin(i)\cos(\omega) = Q_z \cos\varepsilon - Q_y \sin\varepsilon,$$

откуда главное значение для ω определяется формулой

$$\omega = arctg\frac{(P_z \cos\varepsilon - P_y \sin\varepsilon)}{(Q_z \cos\varepsilon - Q_y \sin\varepsilon)},$$

а по знакам левых частей вышеупомянутых двух равенств для угла ω устанавливается соответствующий квадрант единичной окружности. В свою очередь Ω определяется из соотношений:

$$\sin\Omega = (P_y \cos\omega - Q_y \sin\omega)\sec\varepsilon,$$

$$\cos\Omega = P_x \cos\omega - Q_x \sin\omega,$$

причем главное значение Ω задается формулой

$$\Omega = arctg\frac{(P_e \cos\omega - Q_y \sin\omega)\sec\varepsilon}{(P_x \cos\omega - Q_x \sin\omega)},$$

в то время как по знакам $\sin\Omega$ и $\cos\Omega$ устанавливается соответствующий углу Ω квадрант. Во всех вышеприведенных соотношениях через ε обозначен угол наклона эклиптики к экватору, значение которого должно браться для эпохи употребляемых небесных координат (например,из Астрономического Ежегодника за тот год, к которому отнесены используемые наблюдения исследуемого объекта).

Контроль вычисления "угловых элементов" осуществляется: во-первых, по совпадению значений угла Ω, вычисленных по $\sin\Omega$ и $\cos\Omega$ в отдельности, так чтобы с заданной точностью ϵ^* выполнялось равенство:

$$arc\sin[(P_z\cos\omega - Q_y\sin\omega)\sec\varepsilon] = arc\cos(P_x\cos\omega - Q_x\sin\omega),$$

а во-вторых, по удовлетворению условия

$$(P_x)\sin\omega + (Q_x)\cos\omega = -\cos(i)\sin\Omega.$$

III. Представление наблюдений.

Наиболее полный контроль (правильности) вычисленной орбиты небесного объекта дает процедура представления исходных наблюдений при помощи найденных орбитальных элементов. Однако иногда практически достаточным считается контроль , состоящий в представлении среднего наблюдения, непосредственно при нахождении элементов орбиты не используемого. Чтобы вычислить небесные координаты объекта, соответствующие моменту "t" среднего наблюдения, используются следующие формулы:

$$t^* = t - L\rho, \quad L = 0^d.0057756,$$

$$M = M_0 + n(t^* - t_0),$$

$$E - e^\circ\sin(E) = M,$$

где через t_0, как и ранее, обозначена "эпоха оскуляции то есть момент начала суток среднего из трех использованных наблюдений, а e° - это введенное уже ранее значение эксцентриситета орбиты e, выраженное в градусной мере:

$$e^\circ = 57^\circ.2957795e.$$

Наконец, вычисленные геоцентрические небесные координаты ρ, α^c, δ^c объекта доставляются решением следующей системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\rho\cos(\alpha^c)\cos(\delta^c) = \Xi,$$

$$\rho\sin(\alpha^c)\cos(\delta^c) = \Phi,$$

$$\rho\sin(\delta^c) = \Psi,$$

правые части которых заданы выражениями:

$$\Xi = A_x[\cos(E) - e] + B_x\sin(E) + X,$$

$$\Phi = A_y[\cos(E) - e] + B_y\sin(E) + Y,$$

$$\Psi = A_z[\cos(E) - e] + B_z\sin(E) + Z.$$

Здесь используются значения компонент векторов

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

и

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

, уже вычисленные в разделе $No.5^\circ.8$.

Геоцентрические экваториальные координаты Солнца X, Y, Z берутся на момент $"t"$ среднего наблюдения небесного объекта.

Решение системы трех уравнений с тремя неизвестными дает главные значения небесных координат объекта в форме:

$$\alpha^c = arc\tan[\frac{\Xi}{\Phi}],$$

$$\delta^c = arc\tan[\sin\alpha^c\frac{\Psi}{\Phi}],$$

а соответствующие квадранты единичной окружности определяются знаками функций Ξ, Φ, Ψ. Наконец, вычисленное значение геоцентрического расстояния определяется выражениями:

$$\rho = \Psi \csc(\delta^c),$$

$$\rho = \Xi \sec(\alpha^c) \sec(\delta^c),$$

$$\rho = \Phi \csc(\alpha^c) \sec(\delta_c).$$

Совпадение значений ρ, полученных по трем последним формулам, служит свидетельством отсутствия грубых ошибок в вычислениях.

Аберрационное время $(L\rho)$ получается путем интерполирования или экстраполирования из значений, имеющихся для трех исходных наблюдений.

После вычисления величины геоцентрического расстояния ρ правильность принятого значения величины $(L\rho)$ проверяется и, в случае необходимости, вычисление повторяется.

(В том случае, когда исходными данными для определения элементов орбиты астероида были его топоцентрические экваториальные координаты,)

Сравниваемые небесные координаты среднего наблюдения исправляются за суточный параллакс.

П р и м е ч а н и е .

Точность представления небесных координат среднего наблюдения объекта должна быть не хуже 0".1 , для чего все вычисления должны вестись с 7 (семью) значащими цифрами. Модули разностей "О - С"

("Observatum minus Calculatum"):

$$\Delta(\alpha) = \alpha - \alpha^c,$$

$$\Delta(\delta) = \delta - \delta^c$$

по прямому восхождению порядка

$$\Delta(\alpha) = 0^s.07$$

и по склонению

$$\Delta(\delta) = 0^{"}.5$$

свидетельствуют о наличии в проведенных вычислениях значительных ошибок. Вычисленные элементы орбиты можно считать удовлетворительно представляющими используемые наблюдения астероида при выполнении условий:

$$|\Delta(\alpha)| \leq (0".1),$$

$$|\Delta(\delta)| \leq (0".1).$$

Здесь, как и прежде, геоцентрические небесные координаты "светила" для момента среднего наблюдения обозначены через α и δ, в то время как через α^c и δ^c обозначены их вычисленные значения.

IV. Блок-схема алгоритма Лагранжа-Гаусса.