Кафедра небесной механики, астрометрии и гравиметрии физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Специальный практикум по небесной механике.

Задача No. 9.

Ширмин Г. И.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФЕМЕРИДЫ МАЛОЙ ПЛАНЕТЫ

Эфемеридой называется совокупность положений светила на небесной сфере для ряда, как правило, равноотстоящих моментов времени с целью дать возможность астрономам-наблюдателям обнаружить небесный объект по его угловым координатам - прямому восхождению α и склонению δ. Высокоточная астрономическая эфемерида (ничем) незаменима при сравнении какого-либо длительного ряда наблюдений с теорией движения уже известного небесного объекта. Что же касается только что открытых (то есть, ранее не известных) тел Солнечной системы, то для них совершенно необходима так называемая "поисковая" эфемерида, позволяющая не упустить объект из поля зрения наблюдателей. Дело в том, что в истории астрономии неоднократно бывали случаи потери небесных объектов из-за плохой поисковой эфемериды. Характерный пример - утрата в 1911 году малой планеты No. 719 "Альберта" из-за плохо определенной орбиты, по элементам которой рассчитывалась поисковая эфемерида. С тех пор несмотря на усиленные поиски этот астероид (в течение длительного промежутка времени) ни разу не наблюдался (см. "ЭФЕМЕРИДЫ МАЛЫХ ПЛАНЕТ на 1978 год" , Наука, Ленинград, 1977, с. 30, L719 Albert, где опубликованы орбитальные элементы. Однако на стр. 57 нет даты оппозиции). При составлении эфемерид чрезвычайно важным является выбор промежутка времени между последовательными прогнозируемыми положениями объекта на небесной сфере. Например, для малых планет он обычно не превышает 4-х недель, а для комет ,как правило, - не более 2-х суток.

А). В ы ч и с л е н и е к о о р д и н а т в п л о с к о с т и о р б и т ы .

Положение тела в орбитальной плоскости определяется его полярными координатами: фокальным расстоянием r и истинной аномалией v :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}, \quad \tan(\frac{v}{2}) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan(\frac{E}{2}),$$

где a - большая полуось эллиптической орбиты, e - ее эксцентриситет, а E - эксцентрическая аномалия (объекта), связанная со временем t уравнением Кеплера:

$$E - e\sin E = n(t - t_0) + M_0.$$

Здесь n - это определяемое из третьего закона Кеплера $n^2a^3 = \mu$ среднее суточное движение $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, $\mu = f(m_0+m)$ - гравитационный параметр масс m_0 и m, а f - универсальная гравитационная постоянная. Фокальные прямоугольные координаты в плоскости орбиты ξ и η , связанные с полярными координатами r и v формулами:

$$\xi = r\cos v, \quad \eta = r\sin v,$$

выражаются также через большую полуось a и эксцентрическую аномалию E :

$$\xi = a(\cos E - e), \quad \eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E.$$

Б). В ы ч и с л е н и е г е л и о ц е н т р и ч е с к и х э к л и п т и ч е с к и х к о о р д и н а т н е б е с н о г о о б ъ е к т а.

В гелиоцентрической эклиптической системе координат $Sx_1y_1z_1$ декартовы прямоугольные координаты объекта определяются формулами:

$$x_1 = r(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i), \quad y_1 = r(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i), \quad z_1 = r\sin u\sin i,$$

причем $u = \omega + v$, где u - это аргумент широты объекта, а ω - аргумент широты перицентра. Эти формулы могут быть представлены в другом виде:

$$x_1 = p_x\xi + q_x\eta, \quad y_1 = p_y\xi + q_y\eta, \quad z_1 = p_z\xi + q_z\eta, \quad \xi = r\cos v, \quad \eta = r\sin v,$$

где $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ - единичный вектор направления на перицентр эллиптической орбиты, $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ - единичный вектор, ортогональный линии апсид и положительно ориентированный против часовой стрелки, так что: $(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, а их компоненты (то есть направляющие косинусы осей $S\xi$ и $S\eta$ орбитальной системы координат $S\xi\eta\zeta$ в гелиоцентрической эклиптической системе $Sx_1y_1z_1$) вычисляются по формулам:

$$p_x = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i, \quad p_y = \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i, \quad p_z = \sin\omega\sin i,$$

$$q_x = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i, \quad q_y = -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i, \quad q_z = \cos\omega\sin i.$$

В). Р а с с ч е т г е л и о ц е н т р и ч е с к и х э к в а т о р и а л ь н ы х к о о р д и н а т н е б е с н о г о т е л а.

Пусть $Sxyz$ - гелиоцентрическая экваториальная система прямоугольных координат , причем за основную плоскость Sxy выбрана плоскость небесного экватора для момента начала какого-то бесселева года, а ось абсцисс Sx положительно ориентирована на "точку весны" γ. Тогда переход от эклиптических координат x_1, y_1, z_1 к экваториальным x, y, z дают формулы преобразования;

$$x = x_1, \quad y = y_1 \cos\epsilon - z_1 \sin\epsilon, \quad z = y_1 \sin\epsilon + z_1 \cos\epsilon,$$

в которых через ε обозначен наклон эклиптики к экватору. С учетом выражений () для x_1, y_1, z_1 формулы преобразования принимают вид:

$$x = p_x\xi + q_x\eta, \quad y = (p_y\xi + q_y\eta)\cos\varepsilon - (p_z\xi + q_z\eta)\sin\varepsilon, \quad z = (p_y\xi + q_y\eta)\sin\varepsilon + (p_z\xi + q_z\eta)\cos\varepsilon.$$

Последние формулы иначе выглядят так:

$$x = P_x\xi + Q_x\eta, \quad y = P_y\xi + Q_y\eta, \quad z = P_z\xi + Q_z\eta.$$

Здесь использованы формулы связи между направляющими косинусами $P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z$ осей абсцисс $S\xi$ и ординат $S\eta$ орбитальной системы координат $S\xi\eta\zeta$ относительно осей экваториальной $Sxyz$ гелиоцентрической системы координат с направляющими косинусами $p_x, p_y, p_z, q_x, q_y, q_z$ тех же осей $S\xi$ и $S\eta$ относительно осей эклиптической $Sx_1y_1z_1$ системы гелиоцентрических декартовых прямоугольных координат:

$$P_x = p_x, \quad P_y = p_y \cos\varepsilon - p_z \sin\varepsilon, \quad P_z = p_y \sin\varepsilon + p_z \cos\varepsilon,$$

$$Q_x = q_x, \quad Q_y = q_y \cos\varepsilon - q_z \sin\varepsilon, \quad Q_z = q_y \sin\varepsilon + q_z \cos\varepsilon,$$

Компоненты единичных векторов $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$ и $\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$ удовлетворяют очевидным условиям:

$$\vec{P}^2 = 1, \quad \vec{Q}^2 = 1, \quad (\vec{P}\vec{Q}) = 0,$$

явный вид которых таков:

$${P_x}^2 + {P_y}^2 + {P_z}^2 = 1, \quad {Q_x}^2 + {Q_y}^2 + {Q_z}^2 = 1, \quad P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z = 0.$$

Г). Определение геоцентрических экваториальных координат небесного тела.

Пусть $T\xi\eta\zeta$ - геоцентрическая экваториальная система прямоугольных декартовых координат с осью абсцисс $T\xi$, положительно ориентированной на точку весеннего равноденствия γ (некоторой эпохи t_0) . Положения небесного объекта

"P" и Солнца "S" в этой системе зададим радиус-векторами $\vec{\varrho} = (\xi, \eta, \zeta)$ и $\vec{R} = (X, Y, Z)$. В гелиоцентрической экваториальной системе координат $Sxyz$, с осями, паралельными осям геоцентрической системы $T\xi\eta\zeta$ и одинаково с ними направленными, положение небесного объекта "P" определится тогда радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$. Представим геоцентрический радиус-вектор $\vec{\varrho}$ также в виде: $\vec{\varrho} = \varrho\vec{\varrho}^{(0)}$, где через $"\varrho"$ обозначено геоцентрическое расстояние объекта "P" , а $\vec{\varrho}^{(0)} = (\lambda, \mu, \nu)$ - единичный вектор геоцентрического направления на P, компоненты которого (направляющие косинусы λ, μ, ν в систме $T\xi\eta\zeta$) с небесными координатами объекта (прямым восхождением α и склонением δ) связаны следующими известными соотношениями:

$$\lambda = \cos\alpha\cos\delta, \quad \mu = \sin\alpha\cos\delta, \quad \nu = \sin\delta,$$

Нетрудно сообразить в справедливости такого векторного равенства

$$\vec{\varrho} = \vec{R} + \vec{r}.$$

С учетом всего выше сказанного получаются следующие три соотношения:

$$\varrho\cos\alpha\cos\delta = X + x, \quad \varrho\sin\alpha\cos\delta = Y + y, \quad \varrho\sin\delta = Z + z$$

а так как

$$x = P_x\xi + Q_x\eta, \quad y = P_y\xi + Q_y\eta, \quad z = P_z\xi + Q_z\eta,$$

то

$$\varrho\cos\alpha\cos\delta = X + P_x\xi + Q_x\eta, \quad \varrho\sin\alpha\cos\delta = Y + P_y\xi + Q_y\eta, \quad \varrho\sin\delta = Z + P_z\xi + Q_z\eta,$$

где по-прежнему:

$$\xi = a(\cos E - e), \quad \eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E,$$

а через a, e, E обозначены большая полуось орбиты, ее эксцентриситет и эксцентрическая аномалия (объекта) соответственно.

Д). Порядок вычисления эфемериды (светила).

Предположим, что для некоторой эпохи t_0 известны элементы эллиптической орбиты небесного объекта, а именно: большая полуось a, эксцентриситет e, наклонение к плоскости эклиптики i, долгота восходящего узла Ω, аргумент перигелия ω, а также M_0 - средняя аномалия в эпоху t_0. Для того, чтобы вычислить координаты: прямое восхождение α и склонение δ светила на небесной сфере, следует выполнить следующие 7 (семь) операций.

1). Сначала вычислить компоненты векторов $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ и $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ по формулам:

$$p_x = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i, \quad p_y = \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i, \quad p_z = \sin\omega\sin i,$$

$$q_x = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i, \quad q_y = -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i, \quad q_z = \cos\omega\sin i.$$

Затем вычислить компоненты векторов

$$\vec{P} = (P_x, P_y, P_z), \quad \vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$$

по формулам ;

$$P_x = p_x, \quad P_y = p_y\cos\varepsilon - p_z\sin\varepsilon, \quad P_z = p_y\sin\varepsilon + p_z\cos\varepsilon,$$

$$Q_x = q_x, \quad Q_y = q_y\cos\varepsilon - q_z\sin\varepsilon, \quad Q_z = q_y\sin\varepsilon + q_z\cos\varepsilon,$$

2).Вычислить среднее (суточное) движение n и среднюю аномалию M по формулам:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad M = n(t - t_0) + M_0;$$

3).Найти эксцентрическую аномалию E , решив уравнение Кеплера:

$$E - e\sin\sin E = M;$$

по схеме классического способа итераций:

$$E^{(0)} = M, \quad E^{(1)} = E^{(0)} + e\sin E^{(0)}, \quad ,. \quad . \quad . \quad , \quad E^{(k+1)} = E^{(k)} + e\sin E^{(k)}$$

добившись (с точностью до ϵ^*) выполнения условия

$$|E^{(k+1)} - E^{(k)}| < \epsilon^* \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

4). Вычислить прямоугольные орбитальные координаты ξ и η объекта по формулам;

$$\xi = a(\cos E - e), \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2}\sin E,$$

5). По таблицам Астрономического Ежегодника СССР на соответствующий год определить прямоугольные экваториальные геоцентрические координаты Солнца X, Y, Z для нужного момента времени t;

6). В уравнениях для сферических геоцентрических координат ϱ, α, δ;

$$\varrho\cos\alpha\cos\delta = \Phi, \quad \varrho\sin\alpha\cos\delta = \chi, \quad \varrho\sin\delta = \Psi,$$

Вычислить правые части Φ, χ, Ψ по формулам:

$$\Phi = X + P_x\xi + Q_x\eta, \quad \chi = Y + P_y\xi + Q_y\eta, \quad \Psi = Z + P_z\xi + Q_z\eta$$

7). Определить значения сферических геоцентрических координат объекта ϱ, α, δ из системы трех уравнений с тремя неизвестными;

$$\varrho \cos\alpha \cos\delta = \Phi, \quad \varrho \sin\alpha \cos\delta = \chi, \quad \varrho \sin\delta = \Psi,$$

Геоцентрическое расстояние до объекта ϱ вычисляется по формуле:

$$\varrho = \sqrt{\Phi^2 + \chi^2 + \Psi^2},$$

Главное значение прямого восхождения α определяется выражением:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\Xi}{\Phi}\right),$$

а по знакам функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определяется квадрант единичной окружности, $0^h < \alpha \leq 24^h$. Наконец, величина склонения δ в пределах $-90^\circ < \delta < +90^\circ$ определяется формулой:

$$\delta = \arcsin\left(\frac{\Psi}{\varrho}\right).$$

Первая орбита не может считаться удовлетворительной из-за недостаточной точности. Поэтому сразу же возникает (гораздо) более трудная задача - улучшить полученную при первом вычислении орбиту. Астрономические эфемериды дают возможность не только улучшать элементы орбит небесных тел, но и, кстати, определять фундаментальные астрономические постоянные (например, такие как массы больших планет Солнечной смстемы).

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ каждому СТУДЕНТУ (по задаче No. 4 "ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФЕМЕРИДЫ АСТЕРОИДА") заключается в нижеследующем.

ЗАДАЮТСЯ оскулирующие ЭЛЕМЕНТЫ орбиты какого-либо астероида на фиксированную эпоху, по ним на заданный момент времени ВЫЧИСЛЯЮТСЯ его небесные КООРДИНАТЫ, которые СРАВНИВАЮТСЯ с таковыми в Ежегоднике "ЭФЕМЕРИДЫ МАЛЫХ ПЛАНЕТ"за тот же год.