

Н.В. Емельянов, Л.Г. Лукьянов, Г.И. Ширмин

Учебно-методическое пособие

**СПЕЦИАЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ
ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ**

2017 г.

Емельянов Н. В., Лукьянов Л. Г., Ширмин Г. И. **Учебно-методическое пособие Специальный практикум по небесной механике.** – М.: Физический факультет МГУ, 2017. 151 с.

ISBN 978-5-9500218-0-0

Предлагаемое учебно-методическое пособие является частью специального астрономического практикума, третью часть которого составляет спецпрактикум по небесной механике.

Практикум состоит из 9 вычислительных задач. Описания этих задач составлены так, чтобы стимулировать более глубокое усвоение соответствующих теоретических разделов из учебной и научной литературы. При проведении вычислений студентами используются современные астрономические базы данных, информационные справочные и поисковые системы. Предлагаемое учебно-методическое пособие является эффективным дополнением к читаемым на кафедре лекционным курсам «Практическая небесная механика», «Эфемеридная астрономия», «Методы определения орбит» и др.

Учебно-методическое руководство «Спецпрактикум по небесной механике» служит формированию у студентов творческого подхода к овладению специальностью «астрономия». Приобретенный ими опыт самостоятельной работы и навыки практического проведения современных астрономических вычислений позволяют оценивать качество сформированных у студентов компетенций и степень общей готовности к профессиональной деятельности в области современной физики и астрономии.

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории новых фотометрических методов ГАИШ МГУ *С.А.Ламзин*

Доктор физ.-мат. наук, заведующий отделом изучения Галактики и переменных звезд ГАИШ МГУ *А.С. Расторгуев*

©Физический факультет МГУ
имени М.В. Ломоносова. 2017

©Емельянов Н.В.,
Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. 2017

ISBN 978-5-9500218-0-0

Оглавление

Введение	4
Задача № 1. Численное интегрирование уравнений движения небесных тел	5
Задача № 2. Определение энергетических затрат и календарных дат отправления и возвращения экспедиции к планете	34
Задача № 3. Определение элементов орбиты астероида по трем наблюдениям	51
Задача № 4. Определение топоцентрического направления на геостационарный спутник	79
Задача № 5. Определение видимой ориентации колец Сатурна	89
Задача № 6. Траектория подспутниковой точки на поверхности Земли для геосинхронных спутников	102
Задача № 7. Сравнение эфемерид планет, полученных из разных источников астрометрических данных	111
Задача № 8. Обстоятельства солнечных затмений на Марсе	123
Задача № 9. Вычисление эфемериды малой планеты	134

Введение

Общий подход к изучению динамики небесных тел – создание моделей движения и эфемерид планет, астероидов, естественных и искусственных спутников Земли, планет и других тел Солнечной системы. Процесс основывается на фундаментальных законах природы, физических параметрах небесных тел и, самое главное, – на астрономических наблюдениях. Используются современные математические методы и самые совершенные методы вычислений. Результирующая форма моделей движения небесных тел – астрономические эфемериды. Они содержат в себе все знания о динамике тел Солнечной системы. Поэтому эфемериды являются одним из главных средств исследований в небесной механике и средством применения наших знаний для практических нужд человека. Все это – область практической небесной механики.

Предлагаемые задачи спецпрактикума по небесной механике предназначены для реализации и применении различных моделей движения небесных тел.

Построение моделей достигается путем решения дифференциальных уравнений движения. В эру совершенной вычислительной техники дифференциальные уравнения решают методами численного интегрирования.

Область применения моделей движения небесных тел весьма широка. Это межпланетные экспедиции, эксплуатация полезной аппаратуры на искусственных спутниках Земли, прогнозирование опасностей со стороны комет и астероидов, сближающихся с Землей.

Очень важно для специалистов по небесной механике приобрести навыки практической деятельности. Именно этой цели и служит предлагаемый специальный практикум.

Очень важно для специалиста по небесной механике уметь делать два дела. Это выполнять численное интегрирование дифференциальных уравнений движения и проводить вычисления по формулам кеплерова движения. Также важно знать, где взять данные, необходимые для решения задач. Этому неизбежно научится тот, кто займется выполнением заданий практикума по небесной механике.

С внедрением в точное естествознание суперкомпьютеров в астрономии все большее значение приобретает численный эксперимент. Умения и навыки обращения с базами информационных, поисковых и справочных систем астрономических данных – необходимые условия становления специалиста в области современной астрономии.

Задача № 1.

Емельянов Н. В.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Содержание

- 1.1. Введение в задачу практикума.
 - 1.1.1. Цели решения уравнений движения небесных тел.
 - 1.1.2. Общие свойства методов численного интегрирования уравнений движения.
 - 1.1.3. Метод Рунге-Кутты интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.
 - 1.1.4. Алгоритм решения задач о движении небесного тела методами численного интегрирования.
 - 1.1.5. Инструкция к вычислительной программе численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений методом Э. Эверхарта.
- 1.2. Постановка задачи практикума.
 - 1.2.1. Исследование зависимости точности численного интегрирования от величины постоянного шага интегрирования.
 - 1.2.2. Исследование зависимости точности численного интегрирования от интервала времени.
 - 1.2.3. Исходные данные для задачи Кеплера.
 - 1.2.4. Алгоритм численного интегрирования методом ломаных отрезков.
 - 1.2.5. Общая схема решения задач.
- 1.3. Методическое указание о формулировке задачи каждому студенту.
- 1.4. Форма отчета по задаче практикума.

1.1. Введение в задачу практикума.

1.1.1. Цели решения уравнений движения небесных тел

Методы численного интегрирования уравнений движения небесных тел разрабатываются и применяются для решения различных задач небесной механики. Совместно с аналитическими и качественными методами они являются процедурами, служащими целям практического познания природы.

Процесс изучения небесных тел, в первую очередь, состоит из построения модели их движения. Модель является основой всех научных изысканий. Она постоянно уточняется на основе все новых наблюдений.

Что же представляет собой модель движения небесных тел? К настоящему времени мы уже знаем достаточно много о телах Солнечной системы. Открыты законы, согласно которым взаимодействуют планеты и спутники. Эти законы выражаются в форме дифференциальных уравнений поступательного и вращательного движений тел.

Использование модели заключается в предвычислении координат и угловых положений тел на любой заданный момент времени. Таким моментом может быть либо момент очередного наблюдения небесного тела, либо момент встречи космического аппарата с небесным телом, либо момент проведения наблюдений с искусственного космического объекта.

Предвычисление орбитального и вращательного движений небесных тел может делаться на основе аналитического решения дифференциальных уравнений движения, если такое решение имеется. Однако почти все практически значимые модели движения описываются уравнениями, точное решение которых неизвестно. Что касается приближенных аналитических решений, то очень часто погрешность приближенного решения оказывается недопустимой, либо при требуемой точности процедура построения решения оказывается чрезмерно трудоемкой даже для мощнейших современных компьютеров.

Предвычисление координат и углов вращения тела на заданный момент времени может выполняться методами численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Преимущества численных методов по сравнению с аналитическими заключаются в относительной простоте их реализации в виде алгоритмов и вычис-

лительных программ для компьютеров. Во многих случаях численные методы обладают большей точностью предвычисления координат небесных тел. Указанные преимущества обычно достигаются при высокой требуемой точности вычислений. Недостатками методов численного решения уравнений движения являются большие затраты времени вычислений, быстрый рост погрешности решения с ростом интервала предвычисления движения и невозможность достоверной оценки точности решения. При заданных уравнениях движения, начальных значениях координат тел и заданном моменте предвычисления точность решения оказывается ограниченной, сколь совершенным бы ни был применяемый численный метод решения.

Численные методы незаменимы в задачах, для которых невозможно получить аналитическое решение. Методы численного интегрирования служат также для проверки правильности и оценки точности найденного в форме ряда аналитического решения.

1.1.2. Общие свойства методов численного интегрирования уравнений движения

Постановка задачи о решении уравнений движения методами численного интегрирования распадается на два независимых этапа. Во-первых, составляются уравнения движения. Во-вторых, разрабатывается новый или выбирается один из известных методов численного интегрирования. Чтобы связать эти два этапа, необходимо принять некоторый стандартный вид уравнений движения.

Итак, в задачах численного интегрирования уравнений движения небесных тел принята следующая форма уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (1)$$

где $x_i(t)$ являются искомыми функциями. Обязательным условием является задание функций $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ таким образом, чтобы их можно было вычислять при любых заданных значениях аргументов. Эти функции могут содержать также постоянные параметры, значения которых заданы.

К настоящему времени разработано огромное множество методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Они различны по своей эффективности и области приложений. Существуют одношаговые методы и методы, основанные

на интерполяционных формулах. В ряде методов используются разложения решения в ряды по полиномам Чебышева. Хороший обзор методов численного интегрирования уравнений движения, применяемых в небесной механике, дан в работе [1]. Существует даже теория методов численного решения уравнений, обобщающая множество таких методов и дающая путь разработки наиболее оптимальных схем интегрирования [2 – 5].

Разнообразные методы численного интегрирования при их применении обладают некоторыми общими свойствами. Эти свойства необходимо знать при решении конкретных задач для достижения наилучшего результата и эффективности исследований.

Основную идею методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений легко объяснить на простейшем из них – методе ломаных отрезков, называемом *методом Эйлера*. При этом можно ограничиться рассмотрением одного дифференциального уравнения общего вида.

Допустим, что мы имеем одно дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t),$$

в котором t есть независимая переменная – время. Требуется найти функцию $x(t)$, удовлетворяющую этому дифференциальному уравнению и начальному условию:

$$x(t_0) = x_0,$$

где t_0 – начальный момент времени, а x_0 – заданная константа.

Для начала важно понять то, что никакой метод численного интегрирования не позволит найти саму функцию $x(t)$, а только ряд ее значений на конечное число моментов времени. Рассмотрим некоторый момент времени t_1 , недалеко отстоящий от момента t_0 . Разность $t_1 - t_0$ обозначим через h , то есть

$$h = t_1 - t_0.$$

Точное значение $x(t_1)$ нам неизвестно, но если величина h достаточно мала, а функция $f(x, t)$ непрерывна, то приближенное значение x в момент времени t_1 можно определить по формуле

$$x_1 = x_0 + f(x_0, t_0) h.$$

Очевидно, что отличие x_1 от точного значения $x(t_1)$ будет тем меньше, чем меньше h . *Погрешность* обусловлена возможной нелинейностью функции $x(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$.

Далее мы можем определить приближенное значение функции $x(t)$ на момент времени $t_2 = t_1 + h$ по формуле

$$x_2 = x_1 + f(x_1, t_1) h.$$

Погрешность найденного значения искомой функции в момент t_2 будет складываться из погрешности x_1 и погрешности, вызванной нелинейностью функции $x(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$.

Теперь алгоритм определения значений искомой функции на последовательные моменты $t_i = t_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$) можно записать так:

$$x_i = x_{i-1} + f(x_{i-1}, t_{i-1}) h. \quad (2)$$

В этом алгоритме величину h называют *постоянным шагом* численного интегрирования. Ошибка значения x_i будет содержать сумму ошибок, совершенных на всех предыдущих шагах интегрирования. Эти ошибки могут иметь различные величины и знаки, но при достаточно произвольной функции $f(x, t)$ *суммарная ошибка*, как правило, возрастает. Очевидно, что возрастание суммарной ошибки происходит с нарастанием числа выполненных шагов интегрирования. Чем больше шагов при постоянной величине шага, тем больше ошибка такого решения.

Любая задача численного интегрирования уравнений движения небесного тела обычно ставится так, что в конечном итоге требуется найти координаты тела на заданный конечный момент времени t_k . Если шаг интегрирования выбран, то можно подсчитать количество шагов k , необходимое для решения задачи. Очевидно, что

$$k = E \left(\frac{t_k - t_0}{h} \right) + 1.$$

Метод Эйлера относится к группе так называемых *одношаговых методов* численного интегрирования. Кроме них существуют еще экстраполяционные и многошаговые методы [1]. Все эти методы имеют некоторые общие свойства. При их применении возникают общие проблемы. Одна из проблем – это *выбор шага интегрирования*. На первый взгляд ясно, что если шаг интегрирования уменьшить, то ошибка, допускаемая на каждом шаге, уменьшится, а, следовательно, повысится точность решения уравнений движения небесного тела.

При заданном интервале времени предвычисления движения, то есть *интервала интегрирования* $t_k - t_0$, количество выполняемых шагов возрастет, что вызовет увеличение затрат вычислительного времени, то есть времени работы компьютера. В некоторых случаях максимальная точность решения определяется только допустимыми затратами времени вычислений.

На первый взгляд кажется, что если увеличение вычислительных затрат еще допустимо, то улучшения точности всегда можно достигнуть уменьшением шага интегрирования. Можно провести такой эксперимент. Задать конкретные уравнения движения, численное решение которых можно проверить. Это могут быть уравнения, имеющие точное аналитическое решение, или уравнения, допускающие известное частное решение. Далее можно задать интервал интегрирования $[t_0, t_k]$, взять какой-нибудь метод численного интегрирования и решать задачу многократно, уменьшая каждый раз шаг интегрирования. Изучая зависимость точности решения от шага интегрирования, мы увидим, что сначала при уменьшении шага погрешность численного решения уменьшается. Но при некоторых весьма малых значениях шага интегрирования точность начнет ухудшаться, сколь бы мы ни уменьшали шаг. Что же происходит?

Дело в том, что все вычисления делаются всегда с фиксированной точностью выполнения простых арифметических операций. Ее можно улучшить с помощью специальных способов отображения чисел в памяти компьютера и применением соответствующих алгоритмов арифметических действий. Это приведет к еще большим вычислительным затратам. Важно то, что в любом компьютере с соответствующим программным обеспечением максимальная точность представления чисел и точность выполнения арифметических операций фиксирована. При каждой операции совершается некоторая ошибка. Ее называют *ошибкой округления* чисел. При последовательном выполнении арифметических действий ошибки округления накапливаются.

Чем меньше шаг интегрирования, тем меньше погрешность формулы (2), меньше ошибка, совершаемая на каждом шаге, и меньше ее накопление на конечный момент времени. С другой стороны, число шагов растет, и ошибки округления накапливаются. Таким образом существует некоторый оптимальный шаг интегрирования, при котором погрешность вычисления значения искомой функции на конечный момент времени минимальна. Для выбранного метода интегрирования и заданной конкретной задачи лучшая точность недостижи-

ма. Путем совершенствования методов численного интегрирования можно добиться некоторого улучшения точности. Однако современные методы уже столь совершенны, что дальнейшее повышение точности почти не происходит. На практике вычисления с оптимальным шагом, как правило, не производят – слишком велики при этом вычислительные затраты.

Следующую проблему вызывает тот факт, что степень нелинейности искомой функции может быть различна на разных участках интервала $[t_0, t_k]$. При заданном постоянном шаге интегрирования суммарная ошибка создается, в основном, на тех участках, где нелинейность максимальна. Нет смысла выбирать такой же малый шаг на других участках и тратить напрасно время на вычисления с излишней точностью. Оптимально было бы выбирать на каждом участке свой шаг интегрирования в зависимости от степени нелинейности искомой функции. В совершенных методах численного интегрирования поведение решения анализируется на предыдущем шаге, чтобы экономно выбрать следующий шаг. Для этого, конечно, перед началом интегрирования задают некоторый параметр, контролирующий точность вычислений на каждом шаге. Этот параметр называют *заданной точностью интегрирования*, однако эта точность далеко не совпадает с *точностью получения решения* на конечный момент времени t_k . Эти две точности обычно пропорциональны при одной и той же формулировке задачи, то есть при заданных уравнениях движения, начальных условиях и конечном моменте времени. Для анализа поведения решения используют различные приемы и формулы. Один из них состоит в том, что каждый шаг делают дважды: сначала один шаг величиной h , затем два шага, величиной $h/2$. Разницу двух результатов сравнивают с заданной константой – *заданной точностью интегрирования*. Если разность оказывается больше, то шаг уменьшают вдвое. Если же эта разность в десять или более раз меньше, чем заданная точность, то шаг увеличивают. В наиболее совершенных алгоритмах численного интегрирования используют более сложные приемы. К сожалению, на практике не всегда *автоматический выбор шага* может быть эффективен. В некоторых случаях все же используют *постоянный шаг интегрирования*.

Наибольшую проблему в практике численного интегрирования уравнений движения небесных тел представляет оценка точности получаемого решения. Оказывается, не существует строгих формул или условий, позволяющих выполнить такие оценки. На деле используют

некоторые приемы, которые все же нельзя считать вполне надежными. Один из них – это интегрирование “вперед-назад”. То есть после получения значения искомой функции на конечный момент времени это значение принимают за исходное и выполняют интегрирование с отрицательным шагом до начального момента. В конце сравнивают полученный результат с начальным условием. Полученную разность значений и считают точностью выполненного интегрирования. Иногда такие оценки получаются удовлетворительными, но чаще всего реальная точность оказывается хуже. Существуют и другие методы оценки точности численного интегрирования, но все они на самом деле ненадежны.

1.1.3. Метод Рунге-Кутты интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод ломаных отрезков, изложенный в предыдущем параграфе, почти не применяется на практике. Существуют более точные методы. Одним из них является *метод Рунге-Кутты* [1, 6]. Этот метод далеко не самый совершенный, однако в свое время он широко применялся в астрономических задачах. Формулы метода Рунге-Кутты достаточно просты [6]. Их можно легко запрограммировать на любом подходящем языке программирования. В задачах, где не требуется получать предельно высокую точность численного решения уравнений движения, метод Рунге-Кутты может быть эффективно применен.

Опишем этот метод и формулы, по которым выполняются вычисления. Рассмотрим задачу численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (3)$$

с начальными условиями $x_1 = x_1^{(0)}, x_2 = x_2^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$ при $t = t_0$. Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ для удобства будем называть координатами, а независимую переменную t – временем.

Формулы Рунге-Кутты, приводимые ниже, позволяют определить координаты на момент времени $t_{k+1} = t_k + h$, если они известны на момент времени t_k . Формулы составлены на основе метода интерполяции полиномами относительно шага интегрирования h , в которых пренебрегают членами некоторого порядка малости относительно ве-

личины шага. В данном случае сохраняются все члены до 4-го порядка включительно относительно шага. Формулы Рунге-Кутты имеют вид

$$\begin{aligned}
x_i^{(k)} &= x_i(t_k), \\
p_i^{(k)} &= f_i \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, t_k \right), \\
q_i^{(k)} &= f_i \left(x_1^{(k)} + \frac{1}{2}hp_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \frac{1}{2}hp_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} + \frac{1}{2}hp_n^{(k)}, t_k + \frac{1}{2}h \right), \\
r_i^{(k)} &= f_i \left(x_1^{(k)} + \frac{1}{2}hq_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \frac{1}{2}hq_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} + \frac{1}{2}hq_n^{(k)}, t_k + \frac{1}{2}h \right), \\
s_i^{(k)} &= f_i \left(x_1^{(k)} + hr_1^{(k)}, x_2^{(k)} + hr_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} + hr_n^{(k)}, t_k + h \right), \\
x_i^{k+1} &= x_i^{(k)} + \frac{1}{6}h \left(p_i^{(k)} + 2q_i^{(k)} + 2r_i^{(k)} + s_i^{(k)} \right) \\
&\quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).
\end{aligned}$$

Из приведенных формул легко видеть схему алгоритма одношаговых методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений вида (3). Алгоритм состоит из двух относительно независимых блоков. В первом блоке производятся вычисления по формулам Рунге-Кутты. Входными данными для этого блока являются значения искомых функций на момент времени t_k . Результат работы блока – значения искомых функций на момент времени t_{k+1} . Разумеется, исходными параметрами являются также сами моменты t_k и t_{k+1} , а также шаг интегрирования h . Реализация этого блока не зависит от конкретной задачи небесной механики. Второй блок – вычисления правых частей уравнений (3) при любых заданных аргументах $x_1, x_2, \dots, x_n, t$. Этот блок полностью определяется постановкой задачи о движении или вращении небесных тел и не зависит от метода интегрирования.

1.1.4. Алгоритм решения задач о движении небесного тела методами численного интегрирования

Рассмотрим следующий класс задач о движении системы небесных тел. Пусть даны дифференциальные уравнения относительно координат тел. Координатами могут быть как прямоугольные координаты центров масс каждого тела, так и углы поворота каждого

тела в некоторой заданной системе координат. Уравнения должны быть выражены в форме (3), а их правые части заданы так, что известны правила, по которым их можно вычислять для любых заданных значений искомых координат и, возможно, времени. Кроме того, должны быть заданы значения координат на некоторый начальный момент времени t_0 . Обозначим эти значения через $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$. Требуется определить значения координат на некоторый другой также заданный момент времени t_1 . Практические цели решения задачи о движении системы тел диктуют необходимость последовательного вычисления координат также и на другие заданные моменты $t_2, t_3, \dots, t_k$. Чаще всего моменты выбираются равноотстоящими так, что

$$t_i = t_{i-1} + H \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (4)$$

где H – заданный шаг табулирования по времени (но не шаг интегрирования). Таким образом, результатом решения задачи будут значения искомых функций на моменты $t_1, t_2, \dots, t_n$, то есть $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Поставленная задача является типичной не только в практической небесной механике, но также при различных исследованиях теоретического характера.

Соответственно сформулированной постановке задачи можно составить алгоритм ее решения. Он будет состоять из следующих блоков:

- (1.) Задание начального момента времени, начальных значений координат, шага табулирования моментов H . На этом этапе задается также точность численного интегрирования либо шаг интегрирования, если интегрирование ведется с постоянным шагом.
- (2.) Задание следующего момента времени для выдачи результата.
- (3.) Выполнение численного интегрирования уравнений и получение значений искомых функций на следующий момент времени.
- (4.) Запоминание полученных значений в файле или непосредственное использование результата.
- (5.) Проверка достижения последнего заданного момента времени и переход к пункту (2), если последний момент еще не достигнут.

- (6.) Прекращение работы алгоритма.

Пункт (1.) выполняется путем ввода чисел из файла исходных данных или заданием значений прямо в тексте вычислительной программы.

Пункт (2.) выполняется по формуле (4).

Реализация пункта (3.) в вычислительной программе должна быть независима от поставленной задачи, чтобы любую конкретную задачу можно было решать любым методом численного интегрирования. Поэтому сам метод интегрирования оформляют в виде *отдельной процедуры* на выбранном языке программирования. Эту процедуру обычно составляют специалисты по методам численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Для использования процедуры в конкретной задаче нужно знать только форму обращения к этой процедуре и способы обмена данными с ней. Необходимая информация обычно содержится в инструкции, которой снабжается процедура при ее передаче или публикации. Пункт (3.) алгоритма реализуется согласно инструкции к процедуре. Пример такой инструкции приводится в следующем параграфе.

На первый взгляд в описанном выше алгоритме совершенно отсутствует блок вычисления правых частей решаемых уравнений. На самом деле этот блок включен в пункт (3.), но реализуется он в виде независимой процедуры, которую составляет специалист, сформулировавший и решающий задачу. Эта независимая процедура используется процедурой численного интегрирования, которая не зависит от вида правых частей уравнений. Чтобы организовать составление алгоритма и программы, устанавливаются некоторые правила, по которым происходит обращение к процедуре вычисления правых частей уравнений движения. Эти правила также являются частью инструкции к процедуре интегрирования. Алгоритм процедуры вычисления правых частей уравнений не зависит от метода интегрирования, однако заголовок этой процедуры должен быть согласован с инструкцией к процедуре численного интегрирования.

Пункты (4.), (5.) и (6.) алгоритма достаточно просты для программирования. Заметим только, что пункт (4.) может быть реализован более замысловатым способом. Например, можно запрограммировать построение графических изображений на экране компьютера в зависимости от полученных значений искомых функций. В итоге последовательная смена картинок в процессе решения задачи даст наглядное представление о движении системы тел.

Заметим также, что при использовании некоторых процедур численного интегрирования необходимо задать определенные параметры работы процедуры. Это могут быть, например, параметры, задающие точность интегрирования. В то же время результатом выполнения процедуры могут быть некоторые вспомогательные данные, которые также можно использовать в программе решения задачи.

1.1.5. Инструкция к вычислительной программе численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений методом Э. Эверхарта

В практической небесной механике применяются много различных методов численного интегрирования уравнений движения. Она дает стимул для развития и совершенствования таких методов. В то же время задачи небесной механики являются своеобразным полигоном для испытания новых разработок в этой области. Одним из наиболее применяемых в последнее время в небесной механике методов численного интегрирования является метод Э. Эверхарта. Показательно, что его автором является специалист в области небесной механики. Метод подробно описан в книге [1], где даны также ссылки на оригинальные публикации Э. Эверхарта. Первоначально процедура интегрирования была составлена на языке программирования Фортран самим Эверхартом, поэтому ее так и называют *процедурой Эверхарта*.

Основным достоинством метода Эверхарта является высокая достижимая точность интегрирования. Платой за точность оказываются большие затраты времени вычислений. Процедура интегрирования по методу Эверхарта составлена так, что с помощью двух параметров может быть задана необходимая точность вычислений. В зависимости от заданной точности изменяются необходимые затраты времени вычислений. При низкой требуемой точности вычислительные затраты будут небольшими, однако наилучшее соотношение точности вычислений и затрат времени достигается именно при высокой заданной точности. Основным параметр ε , определяющий точность вычислений на каждом шаге, выражается в виде

$$\varepsilon = 10^l, \quad (5)$$

где l – некоторое заданное целое число.

В методе Эверхарта используются специальные аппроксимирующие полиномы по степеням шага интегрирования. Степень этих полиномов N_{order} может быть выбрана из следующего конечного списка: 7, 11, 15, 19, 23, 27. В процедуре можно взять любое из этих значений. Однако при невысокой заданной точности интегрирования бесполезно задавать высокую степень полиномов. Это может привести лишь к неоправданным затратам времени вычислений. Поэтому N_{order} выбирают в зависимости от заданной точности вычислений в пределах

$$\frac{3}{4}l \leq N_{order} \leq 2l, \quad (6)$$

где l – целое число, фигурирующее в формуле (5).

Процедура Эверхарта позволяет решать уравнения движения как в режиме автоматического выбора шага интегрирования, так и при постоянном заданном шаге. Поскольку в небесной механике большинство задач описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, то для удобства программирования задачи процедура Эверхарта позволяет решать сразу уравнения второго порядка, не разлагая их на удвоенное число уравнений первого порядка вида (1).

Наибольшую часть времени интегрирования занимают вычисления правых частей уравнений. Поэтому эффективность процедуры характеризуется количеством обращений к вычислению правых частей уравнений в конкретной задаче. Для оценки эффективности процедуры оказывается интересным также количество выполненных шагов интегрирования при автоматическом выборе шага. Обе количественные характеристики выдаются процедурой через ее выходные параметры.

Метод Эверхарта содержит процесс итераций при построении полиномов по степеням шага интегрирования на первом шаге. Обычно оказывается достаточным выполнить две итерации, но в некоторых задачах увеличение числа итераций на этом этапе алгоритма может привести к небольшому повышению эффективности процедуры без существенного увеличения затрат времени вычислений. Поэтому входным параметром процедуры является указанное число итераций, с помощью которого можно управлять эффективностью в некоторых небольших пределах. На начальной стадии решения конкретной задачи мало что известно о свойствах уравнений с точки зрения применения процедуры Эверхарта. Поэтому без сомнений можно задать число итераций равным 2.

В зависимости от того, уравнения какого вида нужно решать методом Эверхарта, задают *класс уравнений*. Уравнения разделяются на три класса.

Уравнения первого класса имеют вид (1). Ко второму классу относятся уравнения второго порядка вида

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}, t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (7)$$

Уравнения третьего класса отличаются от уравнений (7) только тем, что правые части не зависят от скорости, то есть от первых производных по времени от искомых функций. Это наиболее часто встречающиеся в небесной механике уравнения. Класс таких уравнений по традиции обозначается как -2. Уравнения класса -2 имеют вид

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (8)$$

После описания всех особенностей процедуры Эверхарта приведем здесь инструкцию для ее использования. Использование реализуется вызовом процедуры в программе пользователя. Инструкция состоит в правилах записи обращения и описании параметров процедуры. Форма записи, конечно, зависит от используемого языка программирования. Обычно это один из языков процедурного типа, например, Фортран, Паскаль или Си. Обозначения и смысл параметров будут одинаковыми в этих трех случаях.

Если программа вычислений составляется на языке программирования Фортран, обращение к процедуре в программе пользователя имеет вид

```
call Rada27(X, V, TI, TF, XL, LL, NV, NI, NF, NS, NCLASS, NOR)
```

Если программа вычислений составляется на языках программирования Си или Паскаль, обращение имеет вид

```
Rada27(X, V, TI, TF, XL, LL, NV, NI, NF, NS, NCLASS, NOR);
```

Опишем тип и смысл каждого параметра. Удобно начать с входного параметра NV. Это параметр целого типа. Описание соответствующей переменной в программе различно на разных языках программирования. Параметр вызывается процедурой по его значению,

то есть при обращении к процедуре на месте этого параметра может стоять любое выражение целого типа. Параметр NV задает число искомых функций n .

Параметр NCLASS задает класс решаемых уравнений. Он может иметь значения 1, 2 или -2 соответственно описанной выше классификации уравнений. Параметр NCLASS целого типа. Он вызывается процедурой по значению.

Параметр X - одномерный массив, описанный в программе пользователя на Фортране в виде

...

```
DIMENSION X(<n>)  
DOUBLE PRECISION X
```

...

на языке Си в виде

...

```
double X[<n+1>];
```

...

или на языке Паскаль в виде

...

```
X: array [0.. <n+1>] of Double;
```

...

где n - константа, определяющая число уравнений. Этот массив используется для хранения и передачи значений искомых функций. Процедура Эверхарта составлена на трех языках так, что в массиве X используются элементы, начиная с номера 1. Поскольку нумерация элементов массива организована различным образом на разных языках, то на языках Паскаль и Си приходится описывать массив на один элемент больше, при этом элемент номер 0 не используется. Перед обращением к процедуре в этом массиве должны содержаться начальные значения на момент t_0 . После обращения элементы массива X будут содержать значения искомых функций на конечный момент t_k . Параметр X является массивом открытого типа, то есть его длина в программе пользователя может быть любой, однако он должен быть описан в указанном выше виде.

Параметр V – одномерный массив, описанный и используемый в программе пользователя аналогично массиву X. Массив V используется только для уравнений классов 1 и -2 для хранения и передачи значений первых производных от искомых функций по времени. Перед обращением к процедуре в этом массиве должны содержаться

начальные значения компонент скоростей на момент t_0 . После обращения элементы массива V будут содержать значения компонент скоростей на конечный момент t_k . Параметр V также, как и X , является массивом открытого типа, его длина в программе пользователя может быть любой, при этом элемент массива $V[0]$ в процедуре не используется.

Параметры TI и TF типа `DOUBLE PRECISION` на Фортране или `double` на Си или Паскале задают начальный и конечный моменты времени t_0 и t_k , соответственно. Эти параметры передаются по значению.

Параметр LL целого типа задает точность вычислений. Он соответствует величине l в формуле (5). Этот параметр передается по значению. Автоматический выбор шага интегрирования делается в том случае, если значение параметра LL задано положительным. Для включения режима постоянного шага интегрирования следует задать значение LL равным любому отрицательному числу. В этом режиме для задания величины постоянного шага интегрирования используется параметр XL типа `DOUBLE PRECISION` на Фортране или `double` на Си или Паскале. Этот входной параметр передается по значению. При автоматическом выборе шага интегрирования параметр XL не используется.

Для задания степени аппроксимирующих полиномов N_{order} служит входной параметр NOR целого типа. Он передается в процедуру по значению. Для выбора значения этого параметра следует использовать неравенства (6).

Параметр NI целого типа задает число итераций при определении аппроксимирующего полинома. Это входной параметр, он передается в процедуру по значению. Как уже указано выше, значение этого параметра может быть выбрано равным 2, если наиболее оптимальное значение этого параметра неизвестно.

Выходные параметры NF и NS передают в программу пользователя количество сделанных обращений к вычислению правых частей уравнений и количество выполненных шагов интегрирования, соответственно. Эти параметры передаются в процедуру по наименованию. На месте этих параметров могут стоять только идентификаторы переменных целого типа.

Теперь рассмотрим то, как процедура численного интегрирования Эверхарта взаимодействует с *процедурой вычисления правых частей уравнений*, которую должен составлять пользователь. В соответствии

с формой обращения к этой процедуре внутри процедуры Эверхарта ее заголовок в программе пользователя должен иметь вид на Фортране

...

```
SUBROUTINE FORCE(Xc, Vc, TM, F)
DOUBLE PRECISION Xc(1),Vc(1),TM,F(1)
```

...

на Си

...

```
void FORCE(double *Xc, double *Vc, double TM, double *F)
```

...

и на Паскале

...

```
procedure Force(var Xc, Vc : array of Double; TM: Double;
                var F: array of Double );
```

...

Массивы X_c и V_c при входе в процедуру содержат значения аргументов функций, определяющих правые части решаемых уравнений. В массиве X_c хранятся значения координат, а в массиве V_c – значения производных от координат по времени. Аргументы располагаются в массивах согласно их номерам, начиная с 1. При этом элементы массивов $X_c[0]$ и $V_c[0]$ никогда не используются. Кроме того, параметр V_c используется только тогда, когда решаются уравнения класса 2.

Входной параметр TM типа `DOUBLE PRECISION` (или `double`) задает текущий момент времени – аргумент правых частей уравнений. Он передается в процедуру по его значению. Если правые части не зависят от времени, то параметр TM не используется.

Результат вычислений правых частей уравнений пользователь должен поместить в элементах выходного массива F . Для этого последовательно используются элементы этого массива, начиная с первого. Нулевой элемент массива F не используется.

При составлении вычислительной программы численного решения дифференциальных уравнений движения небесных тел могут проявляться некоторые особенности, связанные с применяемым языком программирования и другими средствами программирования, например, *компилятором*. В частности, необходимо знать, что процедура Эверхарта, записанная на языке Паскаль, использует для своей работы несколько рабочих массивов, которые должны быть описаны вне тела процедуры как глобальные переменные с фиксированными

именами. Длина этих рабочих массивов зависит от количества искомых функций, то есть от значения n в формулах (1), (7) и (8). Проще всего зарезервировать некоторую длину этих массивов и помнить максимальное допустимое число искомых функций, которое нельзя превышать. В версии процедуры, которую мы используем на языке Паскаль, упомянутые массивы объявляются в модуле, содержащем процедуру Rada27, но вне тела этой процедуры. Эти объявления имеют вид

```
var F1, FJ, Y, Z : array [0..60] of Double;  
    BE, BT, B : array [1..13,1..60] of Double;
```

В этом случае число 60, фигурирующее в объявлениях рабочих массивов, означает максимальное число искомых функций. Если необходимо интегрировать уравнения с большим числом искомых функций, то вместо числа 60 в объявлениях массивов нужно поставить большее число. При необходимости можно сэкономить занимаемую массивами память компьютера, если вместо 60 поставить реально используемое число искомых функций.

При программировании процедуры Forge вычисления правых частей уравнений могут потребоваться параметры, которые вводятся или задаются в основной программе. Передачу значений этих параметров можно сделать только через глобальные переменные, объявленные в одном из модулей программы и связанные через интерфейсы модулей.

При использовании варианта процедуры Эверхарта на других языках программирования указанные выше рабочие массивы могут описываться иначе.

1.2. Постановка задачи практикума

Варианты задачи практикума разветвляются по различным признакам. Первый признак – это выбор решаемой задачи. Вторым признаком – исследуемая механическая модель. Третьим признаком – метод численного интегрирования. Рассмотрим отдельно эти варианты.

1.2.1. Исследование зависимости точности численного интегрирования от величины постоянного шага интегрирования.

Как уже было сказано во Введении, точность результатов численного интегрирования зависит от величины шага интегрирования не монотонно. При уменьшении шага точность возрастает (погрешность уменьшается). Но при достаточно малых шагах погрешность может не уменьшаться с уменьшением шага и даже возрастет. Именно зависимость точности численного интегрирования от величины постоянного шага интегрирования предлагается изучить в данном варианте задачи.

Поскольку для произвольных дифференциальных уравнений точность численного интегрирования оценить невозможно, мы будем интегрировать такие уравнения, для которых известно точное аналитическое решение, и сравнивать результат численного интегрирования с точным аналитическим решением. Ограничимся моделями, в которых движение происходит в неизменной плоскости. При этом рассмотрим такие случаи, когда движение периодическое. Тогда для сравнения нам даже не понадобится само аналитическое решение. Известно, что в периодическом движении через период T точка окажется в том же месте с той же скоростью, что и в начальный момент времени. Поэтому погрешность численного интегрирования мы будем оценивать по расстоянию между начальным положением точки с координатами x_0, y_0 и ее положением x, y после численного интегрирования уравнений движения на интервале времени в один период. Это расстояние и будет погрешностью численного интегрирования.

Алгоритм исследования будет примерно следующим. Вначале возьмем довольно большой шаг численного интегрирования $h = h_0$. Можно, например, взять $h_0 = T/2$. Выполним интегрирование и вычислим величину погрешности

$$\varepsilon = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Затем будем несколько раз повторять такой процесс решения, каждый раз исходя из начальной точки, уменьшая шаг интегрирования h вдвое. Если пронумеровать такие варианты решения индексом $j = 1, 2, \dots, N$, то получим в результате ряд значений

$$j, h_j = h_0 2^{1-j}, \varepsilon_j \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Полученную таблицу можно напечатать. Затем следует построить по этой таблице график. При этом на графике значения h_j, ε_j лучше откладывать в логарифмической шкале.

Количество вариантов N следует выбрать опытным путем, исходя из приемлемого времени вычислений на компьютере.

По графикам можно увидеть искомую зависимость точности численного интегрирования от шага интегрирования. Можно установить также то значение шага интегрирования, после которого дальнейшее уменьшение шага уже нецелесообразно.

Такие исследования можно делать отдельно для ряда начальных условий, для нескольких механических моделей, обладающих описанными выше свойствами, и нескольких методов численного интегрирования.

Таким образом можно сравнить достижимую точность и эффективность для разных методов. Сравнивать нужно решения для одной и той же механической модели (уравнений движения) и для одних и тех же начальных условий.

Заметим, что обычно в процедурах численного интегрирования результат оказывается в программе в том же массиве переменных, что и начальные условия. Поэтому при каждом запуске интегрирования следует заново засылать в эти переменные значения начальных условий.

1.2.2. Исследование зависимости точности численного интегрирования от интервала времени

Такое исследование можно выполнять для тех же моделей, что и в предыдущем варианте задачи. Следует использовать то обстоятельство, что в периодическом движении, сколько бы точка ни двигалась, она через каждый период должна оказываться в начальном положении. Однако из-за погрешности численного интегрирования после каждого периода точка будет смещаться от ее начального положения.

Поставим задачу следующим образом. Выберем подходящий шаг интегрирования h и не будем его изменять в процессе исследования. Зададим начальные условия x_0, y_0 и выполним интегрирование на интервале времени одного периода движения T . По результату интегрирования x, y вычислим значение погрешности ε по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Далее будем повторять интегрирование несколько раз, задавая на каждом этапе начальные условия по результату, который получился в предыдущем интегрировании. Пронумеруем выполненные этапы индексом $j = 1, 2, \dots, N$. Очевидно, что на каждом этапе номер j мы будем получать решение уравнений для момента времени, отстоящем от начального на интервал времени $t_j = j \times T$.

Количество этапов N следует выбрать опытным путем, исходя из приемлемого времени вычислений на компьютере.

Таким образом получится ряд значений

$$j, t_j, \varepsilon_j \quad (j = 1, 2, \dots, N) .$$

Полученную таблицу можно напечатать. Затем следует построить по этой таблице график. На графике получится зависимость точности численного интегрирования от интервала времени.

Такие исследования можно делать отдельно для нескольких значений шага интегрирования, для ряда начальных условий, для нескольких механических моделей, обладающих описанными выше свойствами, и нескольких методов численного интегрирования.

Так можно изучить поведение погрешности со временем в зависимости от выбранного шага интегрирования, построив на одном рисунке несколько графиков, соответствующих разным величинам шага. Можно также сравнить ход изменения погрешности со временем для разных методов интегрирования.

Заметим, что обычно в процедурах численного интегрирования результат оказывается в программе в том же массиве переменных, что и начальные условия. Поэтому при каждом следующем этапе интегрирования эти массивы уже будут содержать необходимые начальные условия, которые берутся как результат предыдущего этапа. Заново засылать в эти переменные исходные значения начальных условий не следует.

1.2.3. Исходные данные для задачи Кеплера.

Как уже сказано в предыдущих разделах, не существует надежных и достоверных методов оценки точности численного интегрирования в задачах небесной механики. Точность численного интегрирования можно установить только тогда, когда известно точное аналитическое решение. На практике в таких случаях отпадает необходимость не только в оценках точности, но в самом численном интегри-

ровании, так как закон движения задан формулами, вычисление по которым делается сразу с точностью представления чисел в компьютере. Однако свойства и возможности методов численного интегрирования оказываются аналогичными при решении уравнений возмущенного движения и при решении уравнений, для которых известно общее аналитическое решение. Поэтому разумно узнавать и изучать эти свойства на таких простых механических моделях.

Одной из механических моделей, для которых известно точное аналитическое решение, является задача Кеплера. Для многих реальных небесных тел эта модель уже дает приближенное представление о движении. При точном описании движения небесных тел задача Кеплера используется как основа для применения теории возмущений.

Для наглядности рассмотрим задачу Кеплера в приложении к описанию движения искусственных спутников Земли. В этом случае притягивающим центром является Земля, масса которой сосредоточена в ее центре, а движущаяся по действием ее притяжения материальная точка – это искусственный спутник.

Движение точки в задаче Кеплера происходит в неизменной плоскости. Поэтому для описания движения можно ограничиться системой из двух координат, которые для удобства программирования получения решения обозначим через x_1, x_2 . Уравнения движения в этой задаче записываются в виде

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\frac{\mu x_1}{r^3}, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -\frac{\mu x_2}{r^3},\end{aligned}$$

где t - время, μ - гравитационный параметр, а r определяется формулой

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Метод Рунге-Кутты, как он описан выше, применяется для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому перепишем уравнения движения задачи Кеплера в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_3}{dt} &= -\frac{\mu x_1}{r^3}, \\ \frac{dx_4}{dt} &= -\frac{\mu x_2}{r^3}.\end{aligned}$$

Правые части этих четырех уравнений зависят от четырех искомых функций x_1, x_2, x_3, x_4 . Вид этих уравнений подходит под общий вид уравнений движения (3).

Поскольку под притягивающим центром мы решили рассматривать Землю, то следует взять $\mu = 398601.3 \text{ км}^3/\text{с}^2$.

Теперь нужно задать начальные условия движения, то есть значения четырех искомых функций x_1, x_2, x_3, x_4 на начальный момент времени t_0 . Обозначим эти значения через $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}$. Для простоты будем предполагать, что в начальный момент времени спутник находится в перигее. Не ограничивая общности можно считать, что $x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$. Если при этом $x_1^{(0)}, x_4^{(0)}$ заданы, то период обращения T определится по формуле кеплерового движения

$$T = 2\pi\mu \left(\frac{x_1^{(0)}}{2\mu - x_4^{(0)2} x_1^{(0)}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Если кеплеровую орбиту задавать двумя параметрами – расстоянием в перигее $x_1^{(0)}$ и эксцентриситетом e , то скорость в перигее $x_4^{(0)}$ и период обращения T можно вычислить из соотношений

$$x_4^{(0)} = \sqrt{\frac{\mu}{x_1^{(0)}}(1+e)}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{x_1^{(0)}}{1-e} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Так как μ выражен в $\text{км}^3/\text{с}^2$, то, задавая $x_1^{(0)}$ в км, получим период T , выраженный в секундах.

Для $x_1^{(0)} = 8000 \text{ км}$ и некоторых значений эксцентриситета e значения $x_4^{(0)}$ и T даны в табл. 1. Эти значения можно взять для численного интегрирования уравнений движения задачи Кеплера.

1.2.4. Алгоритм численного интегрирования методом ломаных отрезков

Выше метод ломаных отрезков рассматривался в приложении к одному уравнению первого порядка относительно одной переменной.

Таблица 1: Параметры кеплеровой орбиты.

e	$x_4^{(0)}$	T
0.1	7.403220836230674	8340.301091536389
0.3	8.048149554400688	12159.01609766036
0.5	8.645099406600250	20141.43860897035
0.7	9.203411120340110	43337.47572288957

Чтобы провести исследования для задачи Кеплера и других задач, нужно записать формулы метода для произвольного числа переменных.

Рассмотрим задачу численного интегрирования системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (9)$$

с начальными условиями $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$, ..., $x_n = x_n^{(0)}$ при $t = t_0$. Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ суть координаты, а независимая переменная t – время. Интегрирование этих уравнений методом ломаных отрезков проводится по следующим простым формулам. Пусть мы имеем значения искомых функций для момента t_k , т. е.

$$x_i^{(k)} = x_i(t_k) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Выберем шаг интегрирования h . Значения функций для момента $t_{k+1} = t_k + h$, т. е. $x_i^{(k+1)} = x_i(t_{k+1})$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) найдутся по формуле

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, t_k) h \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Применяя эту формулу для $k = 0, 1, 2, \dots$, можно добраться до конечного момента времени $t = T$.

1.2.5. Общая схема решения задач

Из выше описанных задач и методов можно увидеть три относительно независимых блока алгоритма решения любой такой задачи.

В первом блоке формулируется исследовательская задача. Это либо получение зависимости точности интегрирования от шага, либо получение зависимости точности интегрирования от интервала времени. Эти формулировки не зависят от того, какие уравнения решаются и каким методом.

Второй блок содержит алгоритм метода численного интегрирования. Это может быть метод Эйлера, метод Рунге-Кутты или метод Эверхарта. В этом алгоритме понадобится вычисление правых частей уравнений. Вычисление правых частей средствами языков программирования может быть вынесено из блока метода численного интегрирования. Тогда этот блок оказывается независимым от постановки задачи и от вида правых частей уравнений.

В третьем блоке просто вычисляются правые части уравнений. Этот блок не зависит ни от постановки задачи, ни от метода интегрирования.

Такое разделение функций на три блока позволяет легко модифицировать вычислительную программу для любой задачи рассматриваемого семейства. Нужно просто заменять соответствующие блоки.

Структура вычислительной программы приведена на Рис. 1. Вариант “Задача трех тел” изображен для обобщения схемы на разные модели движения. В данном описании рассматривается только задача двух тел.

Все варианты трех блоков могут быть запрограммированы по данным выше описаниям. Не хватает только описания метода Эверхарта. Для применения этого метода следует взять готовую программу, написанную на выбранном языке программирования. В ведущих астрономических институтах (например, ГАИШ МГУ, ИПА РАН, ГАО РАН) эти программы широко используются и передаются заинтересованным коллегам. Инструкция для применения метода Эверхарта приведена выше.

На языках программирования Фортран, Си и Паскаль вышеуказанные блоки реализуются в виде процедур или функций. Отметим некоторые особенности программирования данного семейства задач.

Обмен данными между блоками программы осуществляется через формальные параметры процедур или функций. Однако для вычисления правых частей уравнений могут понадобиться значения некоторых постоянных параметров. Например, в задаче Кеплера это гравитационный параметр μ . Чтобы не загромождать обращения к процедурам передачей значений этих параметров, можно использовать

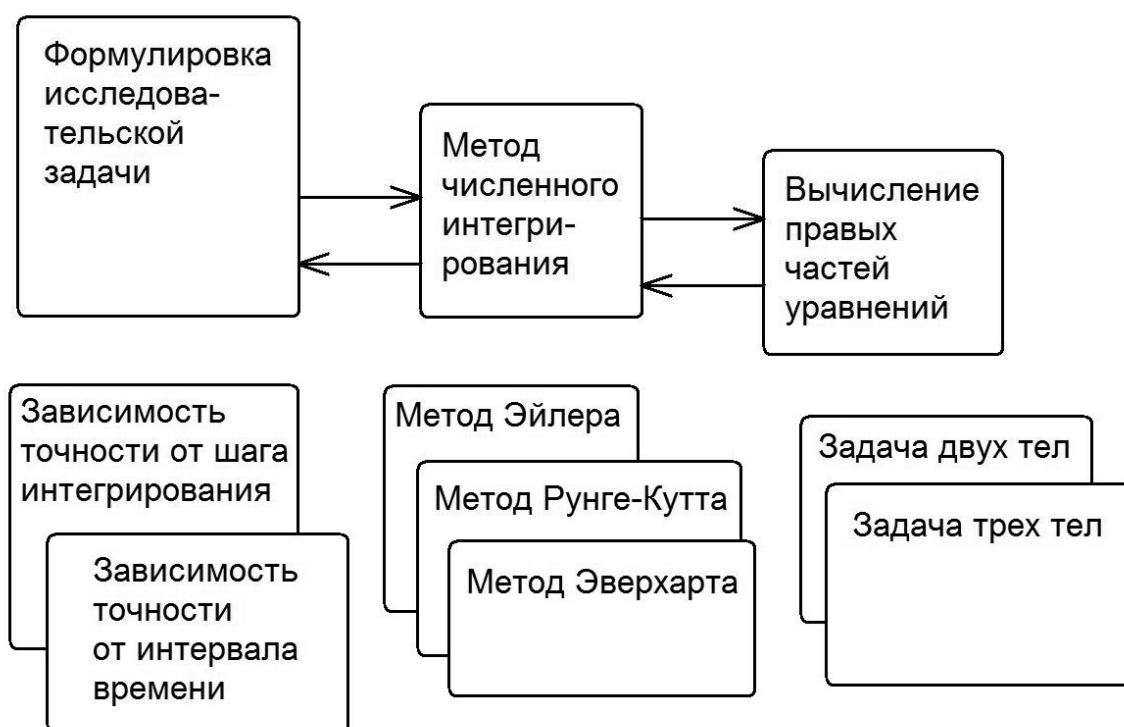


Рис. 1: Структура вычислительной программы решения задачи. Сверху: блоки программы. Снизу: возможные варианты блоков.

для них глобальные переменные.

В блоке метода численного интегрирования оно проводится для всего заданного интервала времени. Операции по шагам интегрирования организуются внутри блока. Таким образом, исходными данными для блока метода численного интегрирования будут значения искомых функций на начальный момент времени, величина интервала интегрирования и шаг интегрирования. Результатом работы блока будут значения искомых функций на конечный момент времени. В рассмотренных выше вариантах задач начальный момент времени может быть задан равным нулю.

В общем случае величина шага интегрирования может быть несоизмерима с интервалом интегрирования. Т. е. в интервале интегрирования не укладывается целое число шагов. Это может привести к ситуации, когда вычисление значений искомых функций на конечный момент времени оказывается невозможным. Это препятствие можно преодолеть следующим способом.

Рассмотрим цикл вычислений по шагам интегрирования. Схема алгоритма может быть такой.

1. Задание шага интегрирования (в переменной h_0).
2. Пересылка шага интегрирования из переменной h_0 в некоторую промежуточную переменную h - текущий шаг интегрирования.
3. Присвоение начальных значений искомых функций и начального момента времени $t = 0$.
4. Проверка: не выходит ли момент времени $t + h$ за пределы интервала времени интегрирования.
5. Если момент времени $t + h$ выходит за пределы интервала времени интегрирования, то нужно модифицировать шаг, т. е. присвоить переменной h значение $T - t$.
6. Вычисление значений искомых функций на момент $t + h$ по формулам метода численного интегрирования.
7. Приращение текущего момента времени, т. е. операция $t = t + h$.
8. Проверка достижения конца интервала интегрирования – проверка условия $t \geq T$. Если условие не выполнено, то переходим к пункту 4.
9. Иначе заканчиваем интегрирование – выходим из блока.

В таком алгоритме вычисления автоматически закончатся получением значений искомых функций на момент T .

1.3. Методическое указание о формулировке задачи каждому студенту

Как видно из описания практикума, возможна формулировка большого ряда различных задач в рассматриваемом семействе. Задачи могут различаться по постановке исследований (зависимость точности от шага интегрирования или зависимость точности от длины интервала времени), по начальным условиям, и по методу численного интегрирования (метод Эйлера, метод Рунге-Кутты, метод Эверхарта). Следует предусмотреть сравнение между собой результатов в разных вариантах.

Для реализации методов и выполнения практикума понадобится компьютер с установленным в нем компилятором с одного из языков программирования (Фортран, Си или Паскаль).

Студентам, имеющим некоторый опыт программирования, можно предложить составление программы решения задачи самостоятельно с возможностью необходимых консультаций. С остальными студентами нужно проводить занятия, чтобы обучить их программированию на примере задачи практикума.

1.4. Форма отчета по задаче практикума.

Каждому студенту предлагается один вариант из задач рассматриваемого семейства. После решения задачи студент должен подготовить письменный отчет по следующему плану:

1. Введение (О чем идет речь? Почему возникают рассматриваемые проблемы? Зачем это нужно в широком плане?).
2. Постановка задачи (Цель исследования. Что дано? Что определить?).
3. Описание исследуемой механической модели (Привести уравнения движения).
4. Задание начальных условий.
5. Указания на применяемые методы (Описания методов интегрирования приводить не следует).
6. Полученные результаты (Таблицы, графики с объяснениями).
7. Выводы (Констатация того, что искомый результат получен).

В целом такой отчет может иметь объем 3-5 страниц.

Литература

1. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. – М.: Наука. 1984 Главная редакция физико-математической литературы, 136 с.
2. Butcher J.C. Coefficients for the Study of Runge-Kutta Integration Processes. – J. Austral. Math. Soc., 1963, v. 3, p. 185 - 201.
3. Butcher J.C. On the Runge-Kutta Processes of High Order. – J. Austral. Math. Soc., 1964, v. 4, p. 179 - 195.
4. Butcher J.C. Implicit Runge-Kutta Processes. – Math. Comp., 1964, v. 18, p. 50 - 64.
5. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. – М.: Мир, 1979, 312 с.
6. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г.Н.Дубошина. – М.: Наука, 1976, 862 с.

Задача № 2.

Лукьянов Л.Г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ И КАЛЕНДАРНЫХ ДАТ ОТПРАВЛЕНИЯ И ВОЗВРАЩЕНИЯ ЭКСПЕДИЦИИ К ПЛАНЕТЕ

Содержание

- 2.1.1. Постановка задачи.
- 2.1.2. Характеристическая скорость.
- 2.1.3. Метод склеивания траекторий.
- 2.1.4. Гомановский перелет.
- 2.1.5. Выход из сферы действия планеты.
- 2.2.1. Вычисление энергетических затрат.
- 2.2.2. Радиус сферы действия планеты.
- 2.2.3. Движение вне сферы действия планеты.
- 2.2.4. Движение внутри сферы действия планеты.
- 2.3. Календарные даты старта и возвращения.
- 2.4. Численное интегрирование уравнений движения.

2.1.1. Постановка задачи

Для выполнения *маневров* на борту *космического аппарата* устанавливается ракетный двигатель, позволяющий создавать реактивную силу, определенной величины и направления. С помощью соответствующим образом выбранных маневров можно осуществить *перелет* космического аппарата из окрестности Земли к заранее выбранной планете Солнечной системы. По величине создаваемой двигателем реактивной силы различаются двигатели малой и большой тяги. Далее ограничимся использованием только двигателей большой тяги.

2.1.2. Характеристическая скорость

Для двигателей большой тяги (ЖРД - жидкостные реактивные двигатели или РДТТ - реактивные двигатели твердого топлива) при осуществлении маневров на орбите время работы двигателя является малой величиной по сравнению с временем перелета к планете. Поэтому вводится понятие *импульсного маневра*, при выполнении которого считается, что изменение скорости движения аппарата происходит мгновенно. Скорость движения аппарата $\vec{V}$ при этом изменяется скачком на некоторую конечную величину $\Delta\vec{V}$, называемую *импульсом скорости*.

Для оценки величины импульса скорости, создаваемого реактивным двигателем, рассмотрим уравнения движения ракеты в виде

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{w} \frac{dm}{dt} + \vec{F}, \quad (1)$$

где m — масса ракеты, $\vec{w}$ — относительная скорость истечения "рабочего тела" из сопла двигателя, $\vec{F}$ — равнодействующая внешних сил.

Если положить $\vec{F} = 0$, т.е. рассмотреть движение ракеты в бессиловом поле и, кроме того, считать скорость истечения постоянной $\vec{w} = \text{const}$ и всегда направленной параллельно скорости движения ракеты $\vec{V}$, то уравнение (1) легко интегрируется разделением переменных:

$$\Delta\vec{V} = \vec{V} - \vec{V}_0 = \vec{w} \ln \frac{m}{m_0}. \quad (2)$$

Уравнение (2) называют *формулой Циолковского*. Эта формула связывает изменение скорости космического аппарата с изменением

его массы и, тем самым, определяет импульс скорости $\Delta \vec{V}$ в зависимости от массы выгоревшего топлива $\Delta m = m_0 - m$ при заданной в качестве характеристики двигателя относительной скорости истечения массы $\vec{w}$. Несмотря на весьма грубое предположение $\vec{F} = 0$, формула Циолковского дает достаточно хороший результат в случае малого интервала времени работы двигателя, так как остается малым интеграл $\int_{t_0}^t |\vec{F}| dt$. Поэтому при проектировании космических аппаратов эта формула широко используется. Приращение скорости, определяемое формулой Циолковского, называют *характеристической скоростью*. Эта формула определяет такую величину скорости, которую приобрел бы космический аппарат при отсутствии потерь от многочисленных возмущающих факторов.

2.1.3. Метод склеивания траекторий

Аналитическое определение траектории *межпланетного перелета* является одной из самых трудных задач небесной механики, так как метод малого параметра (основной метод теории возмущений) здесь не применим ввиду отсутствия такого параметра. Поэтому для приближенного определения траектории межпланетного перелета используется метод *склеивания* траекторий задачи двух тел. А именно, около каждой планеты определяется некоторая область, называемая *сферой действия* планеты, внутри которой движение космического аппарата рассчитывается по задаче двух тел "планета - космический аппарат", а вне сферы действия — по другой задаче двух тел "Солнце - космический аппарат". Поэтому внутри сферы действия космический аппарат движется по планетоцентрической гиперболической траектории, а вне сферы действия — по гелиоцентрической эллиптической. Вся траектория состоит из трех "склеенных" частей: двух внутри сфер действия обеих планет и одной вне этих сфер.

Размеры сфер действия планет малы по сравнению с межпланетными расстояниями, поэтому протяженность траектории движения космического аппарата внутри сферы действия планеты весьма мала по сравнению с протяженностью всей траектории перелета.

Это дает возможность использовать следующую приближенную схему перелета. Весь полет по планетоцентрическим орбитам внутри сфер действия планет отправления и назначения считать происходящим мгновенно (за ничтожно малое время) с мгновенным изменением

скорости аппарата до ее значения $\vec{V}_1$ (или $\vec{V}_2$), вычисленного на границе сферы действия при планетоцентрическом движении аппарата. А всю сферу действия планеты условно считать точечной, расположенной в центре планеты. Вся траектория перелета тогда будет складываться из двух мгновенных импульсных перелетов по планетоцентрическим орбитам и движения космического аппарата по эллиптической гелиоцентрической орбите, начинающейся в центре планеты отправления с начальной скоростью $\vec{V}_1$ и заканчивающейся в центре планеты назначения с аналогичным образом рассчитанной скоростью $\vec{V}_2$. Величины скоростей $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ определяются в следующем параграфе.

2.1.4. Гомановский перелет

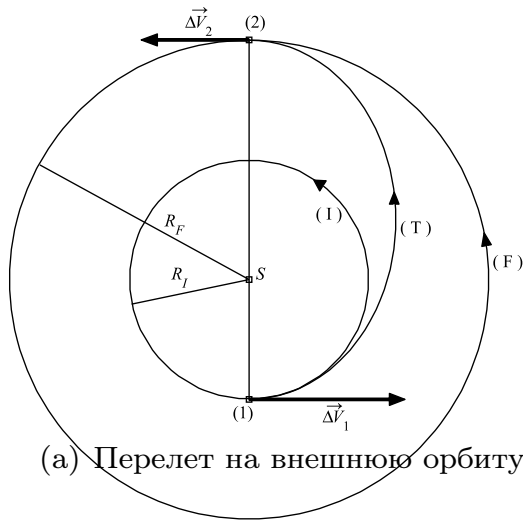
Движение вне сфер действия планет определяется траекторией оптимального двух-импульсного перелета с одной круговой орбиты на другую, а именно, с орбиты *отправления* на орбиту *назначения*. Такой двух-импульсный перелет называют *гомановским* в честь Гомана, предложившего его в 1924 г. для осуществления межпланетных перелетов космических кораблей.

При осуществлении гомановского перелета сначала в некоторой точке (1) начальной круговой орбиты (I) с помощью мгновенно отработавшего двигателя космический аппарат приобретает первый импульс скорости $\Delta\vec{V}_1$, направленный по касательной к орбите, и переходит на эллиптическую орбиту (T) с перицентром, совпадающим с точкой подачи первого импульса скорости. Величина импульса скорости выбирается такой, чтобы в апоцентре (2) эллиптическая орбита (T) соприкасалась с круговой орбитой планеты назначения (F), где подается второй импульс скорости $\Delta\vec{V}_2$ (второе включение двигателя) также по касательной к орбите. Величина второго импульса скорости выбирается равной разности между местной круговой скоростью и скоростью аппарата в апоцентре эллиптической орбиты. В результате аппарат оказывается на круговой орбите назначения.

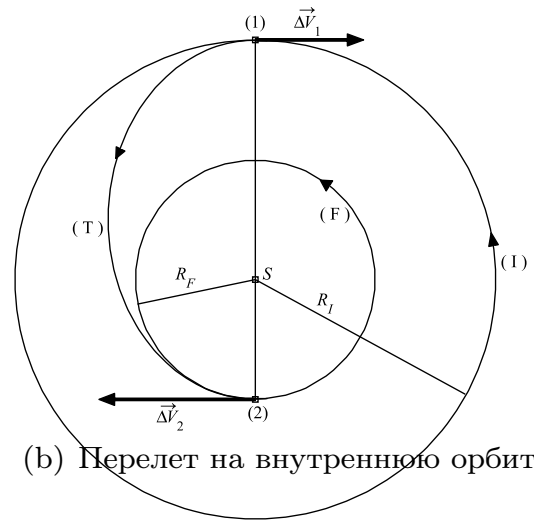
Скорости движения аппарата в начальной $\vec{V}_1$ и конечной $\vec{V}_2$ точках гомановской орбиты определяются значениями

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_I + \Delta\vec{V}_1, \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_F + \Delta\vec{V}_2, \quad (3)$$

где $\vec{V}_I$ и $\vec{V}_F$ — орбитальные скорости гелиоцентрического движения планет отправления и назначения соответственно.



(a) Перелет на внешнюю орбиту



(b) Перелет на внутреннюю орбиту

Рис. 1: Схема гомановского перелета. Обозначения: (I) — круговая орбита планеты отправления, (F) — круговая орбита планеты назначения, (T) — эллиптическая орбита гомановского перелета с начальной (I) на конечную орбиту (F) , R_I — гелиоцентрический радиус орбиты отправления, R_F — гелиоцентрический радиус орбиты назначения, S — Солнце, (1) и (2) — начальная и конечная точки осуществления гомановского перелета, $\Delta\vec{V}_1$ и $\Delta\vec{V}_2$ — соответственно первый и второй импульсы скорости, необходимые для гомановского перелета.

Строго показано, что гомановский перелет является оптимальным среди всех двухимпульсных перелетов, т. е. для его осуществления требуется минимально возможное количество топлива. Но, энергетические затраты можно уменьшить, если осуществлять трехимпульсный перелет. Далее ограничимся рассмотрением только гомановского перелета. Схема гомановского перелета космического аппарата изображена на рис. 1.

2.1.5. Выход из сферы действия планеты

Внутри сферы действия планеты движение космического аппарата определяется задачей двух тел "планета - космический аппарат". Траекторией движения здесь является планетоцентрическая гипербола. Будем считать, что космический аппарат уже выведен на круговую орбиту искусственного спутника планеты отправления. Мгновенный переход на гиперболическую орбиту осуществляется приложением в некоторой точке исходной круговой орбиты космического аппарата импульса скорости $\Delta \vec{v}_1$. Величина этого импульса подбирается такой, чтобы при достижении сферы действия планеты гелиоцентрическая скорость космического аппарата оказалась равной скорости движения по гомановской орбите $\vec{V}_1$ в точке 1. Аналогично по величине скорости $\vec{V}_2$ определяется второй импульс скорости $\Delta \vec{v}_2$. На рис. 2 изображен общий вид гиперболической траектории внутри сферы действия планеты, иллюстрирующей "склеивание" планетоцентрических орбит вблизи планет отправления и назначения с орбитой гомановского перелета.

2.2.1. Вычисление энергетических затрат

Для определения энергетических затрат, т.е. суммарной характеристической скорости $|\Delta \vec{v}_\Sigma| = |\Delta \vec{v}_1| + |\Delta \vec{v}_2|$, необходимой для осуществления перелета с круговой орбиты искусственного спутника одной планеты на круговую орбиту искусственного спутника другой планеты, нужно:

- определить радиусы сфер действия планет,
- вычислить начальную V_1 (в точке 1) и конечную V_2 (в точке 2) скорости, необходимые для осуществления гомановского перелета,
- вычислить импульсы скорости $\Delta \vec{v}_1$ и $\Delta \vec{v}_2$, необходимые для осу-

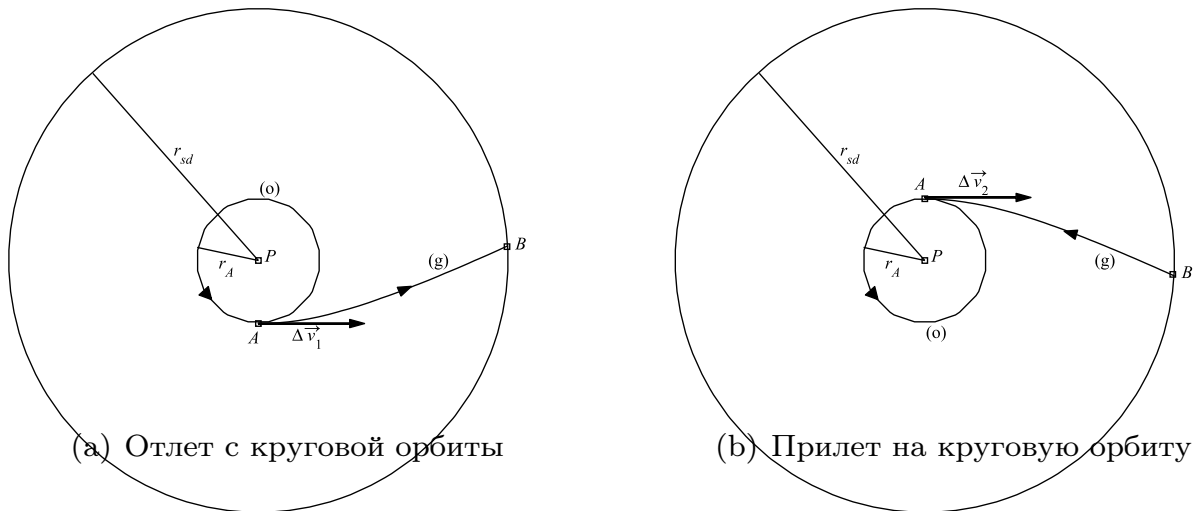


Рис. 2: Траектория полета внутри сферы действия планеты. Обозначения: (o) — круговая орбита искусственного спутника планеты, (g) — гиперболическая орбита внутри сферы действия, A — точка подачи импульса скорости, B — точка орбиты, лежащая на сфере действия.

ществления гиперболического планетоцентрического движения с орбиты (или на орбиту) искусственного спутника планеты до сферы действия планеты, т.е. произвести "склеивание" планетоцентрической гиперболической орбиты, расположенной внутри сферы действия, с гелиоцентрической эллиптической гомановской орбитой, расположенной вне сферы действия.

2.2.2. Радиус сферы действия планеты

Для определения радиуса сферы действия планеты рассмотрим уравнения движения в абсолютной системе координат задачи трех тел: Солнца, планеты и космического аппарата. Учитывая, что масса космического аппарата m ничтожно мала по сравнению с массами планеты m_P и Солнца m_0 , в уравнениях движения можно пренебречь силами притяжения Солнца и планеты космическим аппаратом, т.е. рассматривать ограниченную задачу трех тел. Тогда система дифференциальных уравнений абсолютного движения указанной огра-

ниченной задачи трех тел принимает вид

$$\begin{aligned}
m_0 \ddot{\vec{\rho}}_0 &= f m_0 m_P \frac{\vec{\rho}_P - \vec{\rho}_0}{R_P^3} = f m_0 m_P \frac{\vec{R}_P}{R_P^3}, \\
m_P \ddot{\vec{\rho}}_P &= -f m_0 m_P \frac{\vec{\rho}_P - \vec{\rho}_0}{R_P^3} = -f m_0 m_P \frac{\vec{R}_P}{R_P^3}, \\
m \ddot{\vec{\rho}} &= f m_0 m \frac{\vec{\rho}_0 - \vec{\rho}}{R^3} + f m_P m \frac{\vec{\rho}_P - \vec{\rho}}{r^3} = -f m_0 m \frac{\vec{R}}{R^3} - f m_P m \frac{\vec{r}}{r^3},
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\vec{\rho}_0, \vec{\rho}_P, \vec{\rho}$ — радиусы-векторы Солнца, планеты и космического аппарата в абсолютной системе координат, $\vec{R}_P, \vec{R}$ — гелиоцентрические радиусы-векторы планеты и космического аппарата, $\vec{r}$ — планетоцентрический радиус космического аппарата (см. рис. 3).

Вычитанием первого уравнения системы (4), умноженного на $1/m_0$, из третьего, умноженного на $1/m$, получается уравнение относительного гелиоцентрического движения космического аппарата

$$\ddot{\vec{R}} + \mu_0 \frac{\vec{R}}{R^3} = \mu_P \left(\frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right), \tag{5}$$

а вычитанием второго уравнения системы (4), умноженного на $1/m_P$, из третьего, умноженного на $1/m$, — уравнение относительного планетоцентрического движения космического аппарата

$$\ddot{\vec{r}} + \mu_P \frac{\vec{r}}{r^3} = \mu_0 \left(\frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{R}}{R^3} \right). \tag{6}$$

Центральным телом в уравнении (5) является Солнце, а возмущающим — планета. В уравнении (6), наоборот, центральным телом является планета, а возмущающим — Солнце. Абсолютные величины центрального G_0 и возмущающего F_0 ускорений, действующих на космический аппарат в гелиоцентрическом движении, имеют значения

$$G_0 = \frac{\mu_0}{R^2}, \quad F_0 = \mu_P \left| \frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right|, \tag{7}$$

а аналогичные абсолютные величины центрального G_P и возмущающего F_P ускорений в планетоцентрическом движении — значения

$$G_P = \frac{\mu_P}{r^2}, \quad F_P = \mu_0 \left| \frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{R}}{R^3} \right|. \tag{8}$$

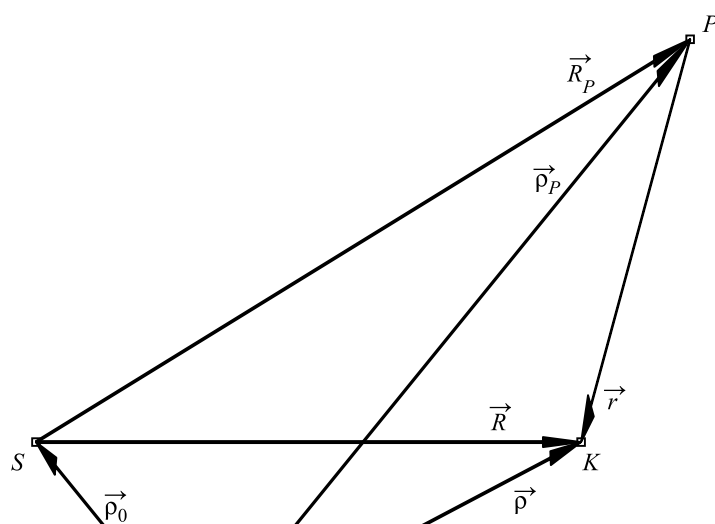


Рис. 3: Используемые радиусы-векторы. Обозначения: O — начало абсолютной системы координат, S — Солнце, P — планета, K — космический аппарат.

Сферой действия планеты называется область вокруг планеты, внутри которой отношение модуля возмущающего ускорения F к центральному G в планетоцентрическом движении не превосходит аналогичного отношения в гелиоцентрическом движении, т.е. сфера действия определяется неравенством

$$\frac{F_0}{G_0} \geq \frac{F_P}{G_P}. \quad (9)$$

Граница сферы действия получается из (9) заменой знака неравенства на знак равенства. Уравнение сферы действия планеты можно упростить, если величины G_0 , G_P , F_0 , F_P выразить через μ_0 , μ_P , r , R_P . При этом делают упрощающие предположения, приближенно выполняющиеся на сфере действия:

$$\vec{R} \approx \vec{R}_P, \quad \frac{r}{R_P} = \varepsilon, \quad (10)$$

где ε — малая величина. Тогда величины G_0 , G_P , F_0 , F_P можно записать

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{\mu_0}{R^2} \approx \frac{\mu_0}{R_P^2}, \quad G_P = \frac{\mu_P}{r^2}, \quad F_0 = \mu_P \left| \frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right| \approx \frac{\mu_P}{r^2}, \\ F_P &= \mu_0 \left| \frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{R} + \vec{r}}{(R_P + r)^3} \right| \approx \mu_0 \left| 0 - \frac{\vec{r}}{(R_P + r)^3} \right| \approx \frac{\mu_0 r}{R_P^3}, \end{aligned} \quad (11)$$

а уравнение сферы действия примет вид

$$\frac{\frac{\mu_P}{r^2}}{\frac{\mu_0}{R_P^2}} = \frac{\frac{\mu_0 r}{R_P^3}}{\frac{\mu_P}{r^2}}. \quad (12)$$

После преобразования отсюда получается радиус сферы действия планеты (обозначенный через r_{sd}) в виде выражения, известного как "закон двух пятых":

$$r_{sd} = R_P \left(\frac{\mu_P}{\mu_0} \right)^{2/5}. \quad (13)$$

Числовые значения радиусов сфер действия планет Солнечной системы приведены в таблице 1.

2.2.3. Движение вне сферы действия планеты

Интеграл энергии для эллиптического движения космического ап-

Планета	r_{sd} $10^6 \cdot \text{км}$	μ_P $\text{км}^3/\text{с}^2$	R_P $10^6 \cdot \text{км}$	n_P гр./сут
Солнце	∞	132712439940	—	
Меркурий	0.11178	22032.080	57.909	4.092
Венера	0.61696	324858.599	108.209	1.602
Земля	0.92482	398600.433	149.598	0.986
Марс	0.57763	42828.314	227.941	0.524
Юпитер	48.141	126712767.858	778.293	0.083
Сатурн	54.774	37940626.061	1429.371	0.034
Уран	51.755	5794549.007	2874.995	0.012
Нептун	86.952	6836534.064	4504.346	0.006
Плутон	35.812	981.601	5911.775	0.004
Луна		4902.801	0.3844	

Планета	V_P км/с	r_P км	$(\lambda_P)_0$ град
Солнце	—	695992	—
Меркурий	47.87	2415	252.2509
Венера	35.02	6035	181.9798
Земля	29.79	6374	100.4664
Марс	24.13	3285	355.4330
Юпитер	13.06	69830	34.3515
Сатурн	9.66	57500	50.0774
Уран	6.80	24150	314.0550
Нептун	5.44	2900	304.3487
Плутон	4.74	6500	
Луна		1738	

Таблица 1: Используемые постоянные Солнца, планет и Луны. Для Луны приведены постоянные, связанные с Землей. Средняя долгота $(\lambda_P)_0$ определена в эпоху $t_0 = J2000.0$, ($JD = 2451545.0$).

парата по гомановской перелетной орбите записывается в виде

$$V^2 - \frac{2\mu_0}{R} = -\frac{\mu_0}{a_T}, \quad (14)$$

где V — гелиоцентрическая скорость движения космического аппарата, R — его гелиоцентрический радиус, $a_T = (R_I + R_F)/2$ — большая полуось гомановской перелетной орбиты, R_I — радиус начальной орбиты, R_F — радиус конечной орбиты $\mu_0 = f \cdot m_0$, f — универсальная гравитационная постоянная, m_0 — масса Солнца (см. также рис. 1).

Из формулы (14) определяются скорости движения космического аппарата в перигелии V_π и афелии V_α орбиты

$$V_\pi = \sqrt{\frac{2\mu_0}{R_I} - \frac{\mu_0}{a_T}}, \quad V_\alpha = \sqrt{\frac{2\mu_0}{R_F} - \frac{\mu_0}{a_T}}. \quad (15)$$

При перелете от Земли E к планете P индексы в этих формулах следует положить $I = E$ и $F = P$, а при перелете в обратном направлении, наоборот, $I = P$ и $F = E$. Для перелета на внешнюю орбиту скорость в перигелии V_π определяет скорость $V_1 = V_\pi$, а в афелии $V_2 = V_\alpha$. При перелете на внутреннюю орбиту, наоборот: $V_1 = V_\alpha$ и $V_2 = V_\pi$.

Время τ перелета по гомановскому полу-эллипсу равно

$$\tau = \frac{\pi}{n_T}, \quad n_T = \sqrt{\frac{\mu_0}{a_T^{3/2}}}, \quad (16)$$

где n_T — среднее движение по гомановской орбите.

2.2.4. Движение внутри сферы действия планеты

Интеграл энергии уравнений движения внутри сферы действия планеты записывается в виде

$$v_A^2 - \frac{2\mu_P}{r_A} = v_B^2 - \frac{2\mu_P}{r_B}, \quad (17)$$

где $r_A = r_P + H$ — планетоцентрический радиус начальной круговой орбиты космического аппарата, r_P — средний радиус поверхности планеты, H — высота круговой орбиты космического аппарата над поверхностью планеты, $r_B = r_{sd}$ — радиус сферы действия планеты, $v_A = \sqrt{\mu_P/r_A} + \Delta v_1$ — планетоцентрическая скорость движения

аппарата в момент его схода с начальной круговой орбиты, $\sqrt{\mu_P/r_A}$ — круговая скорость на начальной орбите искусственного спутника планеты, Δv_1 — первый импульс скорости, создаваемый двигателем, v_B — планетоцентрическая скорость движения аппарата в момент достижения им сферы действия планеты, $\mu_P = f m_P$ — гравитационный параметр планеты, m_P — масса планеты. Обозначения некоторых величин приведены также на рис. 2.

Планетоцентрическая скорость v_B определяется по уже найденной скорости в перигелии (или афелии) гомановской орбиты $V_B = V_\pi$ (или $V_B = V_\alpha$) и орбитальной скорости движения планеты V_P :

$$v_B = V_B - V_P, \quad (18)$$

где $V_P = \sqrt{(\mu_0 + \mu_P)/R_P}$ — переносная скорость движения планеты относительно Солнца.

Полагая $P = E$, из формул (17) и (18) определяется величина первого импульса скорости Δv_1 , обеспечивающего переход с круговой орбиты искусственного спутника Земли на гиперболическую перелетную орбиту,

$$\Delta v_1 = v_A - \sqrt{\frac{\mu_E}{r_E + H}} = \sqrt{\frac{2\mu_E}{r_E + H} + (V_B - V_E)^2} - \frac{2\mu_E}{r_B} - \sqrt{\frac{\mu_E}{r_E + H}}, \quad (19)$$

где $V_B = V_\pi$ при полете к внешней планете, и $V_B = V_\alpha$ — при полете к внутренней планете, $V_E = \sqrt{(\mu_0 + \mu_E)/R_E}$.

Таким же путем определяется и второй импульс скорости Δv_2 , обеспечивающий перелет с гиперболической орбиты в сфере действия планеты назначения на круговую орбиту искусственного спутника этой планеты:

$$\Delta v_2 = v_A - \sqrt{\frac{\mu_P}{r_P + H}} = \sqrt{\frac{2\mu_P}{r_P + H} + (V_B - V_P)^2} - \frac{2\mu_P}{r_B} - \sqrt{\frac{\mu_P}{r_P + H}}, \quad (20)$$

где $V_B = V_\alpha$ для внешней планеты, и $V_B = V_\pi$ для внутренней планеты.

Суммарная характеристическая скорость, необходимая для осуществления перелета "планета отправления — планета назначения" оказывается равной

$$\Delta v_\Sigma = \Delta v_1 + \Delta v_2, \quad (21)$$

а характеристическая скорость, требующаяся для всей миссии (с учетом перелета в обратном направлении) просто удвоится — $2\Delta v_\Sigma$.

2.3. Календарные даты старта и возвращения

При осуществлении перелета к планете назначения дату старта нужно выбирать таким образом, чтобы в момент попадания космического аппарата на орбиту планеты назначения (точка 2 на рис. 1) сама планета P также оказалась в этой точке. Для этого в момент старта космического аппарата планета назначения должна находиться на некотором вполне определенном угловом расстоянии $\Delta\lambda$ по долготе от планеты отправления, опережая ее (при перелете к внешней планете) или отставая (при полете к внутренней планете), как это изображено на рис. 4. Зная время гомановского перелета τ от точки 1 до точки 2, величину $\Delta\lambda$ можно вычислить по формуле

$$\Delta\lambda = \pm(\pi - n_F\tau), \quad (22)$$

где верхний знак перед скобкой берется при перелете на внешнюю (по отношению к орбите отправления) орбиту, а нижний — при перелете на внутреннюю орбиту, $n_F = \sqrt{\mu_0 + \mu_P}/R_P^{3/2}$ — среднее движение планеты назначения.

Средние долготы планеты отправления λ_I и планеты назначения λ_F можно определить по формулам

$$\lambda_I = (\lambda_I)_0 + n_I(t - t_0), \quad \lambda_F = (\lambda_F)_0 + n_F(t - t_0), \quad (23)$$

где $(\lambda_I)_0$ и $(\lambda_F)_0$ — значения средних долгот в начальную эпоху t_0 планет отправления и назначения соответственно, n_I и n_F — средние движения этих планет вокруг Солнца.

Составляя разность

$$\lambda_F - \lambda_I = (\lambda_F)_0 - (\lambda_I)_0 + (n_F - n_I)(t - t_0), \quad (24)$$

и приравнивая ее величине $\Delta\lambda + 2j\pi$, ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), получаем уравнение для определения всех возможных моментов старта t_{st1} космического аппарата с орбиты отправления в виде

$$t_{st1} = t_0 + \frac{\Delta\lambda - \lambda_F + \lambda_I}{n_F - n_I} + \frac{2j\pi}{n_F - n_I}, \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (25)$$

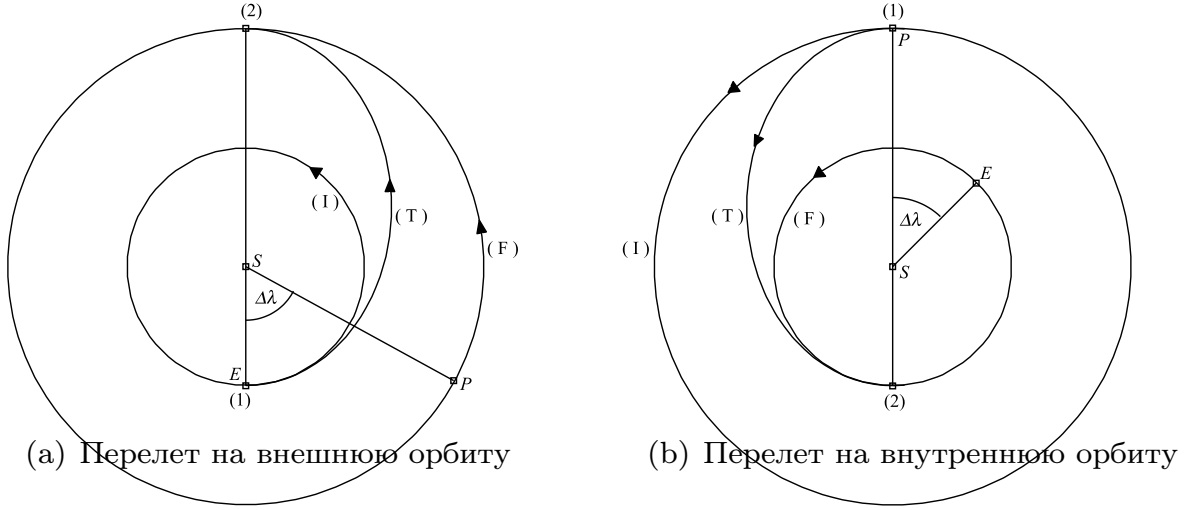


Рис. 4: Схема необходимого взаимного расположения планеты отправления E и планеты назначения P в момент старта космического аппарата.

где величина $\tau_{EP} = 2\pi/(n_F - n_I)$ определяет период повторяемости взаимных расположений планет, сохраняющих разность средних долгот, равной $\Delta\lambda$.

Знание величины $\Delta\lambda$ при возвращении космического аппарата на Землю позволяет вычислить время ожидания ближайшего благоприятного момента t_{st2} для старта с орбиты планеты. Для этого нужно воспользоваться формулой (25), определяя в ней минимальное значение величины j , удовлетворяющей неравенству $t_{st2} > t_{st1} + j\tau_{EP}$.

2.4. Численное интегрирование уравнений движения

Для оценки точности проведенных вычислений траектории движения космического аппарата с использованием сфер действия планет можно провести численное интегрирование следующих уравнений гелиоцентрического движения аппарата

$$\ddot{\vec{R}} + \mu_0 \frac{\vec{R}}{R^3} = \mu_E \left(\frac{\vec{R}_E}{R_E^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right) + \mu_P \left(\frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{r}_P}{r_P^3} \right), \quad (26)$$

где $\vec{R} = \vec{R}_E + \vec{r} = \vec{R}_P + \vec{r}_P = \{X, Y\}$, $\vec{r} = \{x, y\}$ и $\vec{r}_P = \{x_P, y_P\}$

— соответственно гелиоцентрические, геоцентрические и планетоцентрические координаты космического аппарата, индекс E определяет параметры Земли, а P — планеты.

Радиусы-векторы планет

$$\vec{R}_E = \{X_E, Y_E\}, \quad \vec{R}_P = \{X_P, Y_P\}, \quad (27)$$

считаются известными, их координаты определяются по формулам

$$\begin{aligned} X_E &= R_E \cos(\lambda_E), & Y_E &= R_E \sin(\lambda_E), \\ X_P &= R_P \cos(\lambda_P), & Y_P &= R_P \sin(\lambda_P), \end{aligned} \quad (28)$$

где средние долготы планет задаются равенствами

$$\lambda_E = (\lambda_E)_0 + n_E(t - t_0), \quad \lambda_P = (\lambda_P)_0 + n_P(t - t_0), \quad (29)$$

а $(\lambda_E)_0$ и $(\lambda_P)_0$ — средние долготы планет в начальную эпоху $t_0 = J2000.0$ ($JD = 2451545.0$).

Уравнения (26) тогда можно записать в скалярной форме

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \mu_0 \frac{X}{R^3} &= \mu_E \left(\frac{X_E}{R_E^3} - \frac{x}{r^3} \right) + \mu_P \left(\frac{X_P}{R_P^3} - \frac{x_P}{r_P^3} \right), \\ \ddot{Y} + \mu_0 \frac{Y}{R^3} &= \mu_E \left(\frac{Y_E}{R_E^3} - \frac{y}{r^3} \right) + \mu_P \left(\frac{Y_P}{R_P^3} - \frac{y_P}{r_P^3} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

Систему уравнений (30) необходимо проинтегрировать численно с начальными условиями при $t = t_i = t_{st1}$ и $\lambda = \lambda_i = \lambda(t_i)$:

$$\begin{aligned} X_i &= (X_E)_i + x_i = R_E \cos \lambda_i + r \cos \lambda_i, & Y_i &= R_E \sin \lambda_i + r \sin \lambda_i, \\ \dot{X}_i &= -R_E n_E \sin \lambda_i - r n_E \sin \lambda_i - \Delta v_1 \sin \lambda_i, \\ \dot{Y}_i &= R_E n_E \cos \lambda_i + r n_E \cos \lambda_i + \Delta v_1 \cos \lambda_i. \end{aligned} \quad (31)$$

Численным интегрированием необходимо получить значения координат и скоростей в момент времени $t_k = t_i + \tau$ и сравнить их с координатами и скоростями, полученными при гомановском перелете и вычислить значение импульса скорости Δv_1 .

Литература

1. Эскобал П. Методы астродинамики. М. Изд. Мир. 1971.
2. Суханов А.А. Астродинамика. М. Ротапринт ИКИ РАН. 2009.
3. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н.Дубошина. М. Наука. 1976.
4. Сайт отдела небесной механики ГАИШ:
<http://lnfm1.sai.msu.ru/neb/rw/cmd-cont.htm>

Задача № 3.

Ширмин Г.И.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ АСТЕРОИДА ПО ТРЕМ НАБЛЮДЕНИЯМ

3.1. Введение

Проблема определения орбит небесных тел из астрономических наблюдений появилась фактически одновременно с возникновением самой динамической астрономии как естественно-научной дисциплины. И произошло это благодаря Эдмунду Галлею, уговорившему своего друга Исаака Ньютона помочь ему вычислить орбиту кометы, известной теперь как знаменитая комета Галлея. В результате возник первый (геометрический по форме) метод решения такой задачи, по праву связываемый с именем самого автора "Математических начал натуральной философии" (1687 г.). Однако подлинный триумф динамической астрономии в качестве эффективного набора аналитических процедур для прогнозирования движений небесных светил принято связывать с именем Карла Фридриха Гаусса, вычислившего поисковую эфемериду первой малой планеты Цереры, потерянную ее первооткрывателем Джузеппе Пиацци (1801 г.), все усилия которого определить элементы ее орбиты оказались безуспешными. Кстати, К.Гаусс не только предложил метод определения орбиты, идейно близкий предложенному Жозефом-Луи Лагранжем (1778 г.). Более того, К.Гаусс свой метод "довел до числа". Так возник метод, впоследствии получивший название "метод Лагранжа-Гаусса" и ставший затем наиболее распространенным в практике определения орбит и вычисления эфемерид. Тем самым молодой выпускник Геттингенского университета Карл Фридрих Гаусс не просто решил актуальнейшую научную задачу, но и заложил основы прикладной и вычислительной математики, благодаря чему и получил всеобщее признание как "primas mathematicus", т.е. "король математиков". Поэтому не подлежит сомнению утверждение о том, что могущество

современной прикладной и вычислительной математики генетически связано с чисто астрономической проблемой прогнозирования движений небесных светил.

Из теоретической астрономии известно, что для определения гелиоцентрической орбиты какого-либо тела, принадлежащего Солнечной системе, необходимо иметь в своем распоряжении по крайней мере три полных набора его небесных координат, охватывающих, к тому же, достаточно продолжительный промежуток времени. В противном случае точность вычисленных значений орбитальных элементов будет неудовлетворительной. Однако указанный временной интервал не должен быть и чрезмерно большим, так как используемые при этом бесконечные ряды по возрастающим степеням малых параметров, роль которых выполняют как раз интервалы времени между парами наблюдений, будут сходиться недостаточно быстро.

А) В том случае, когда речь идет о топоцентрических небесных координатах "светила" (прямых восхождений и склонениях, приведенных к экватору и равноденствию одной и той же эпохи), их значения должны быть еще "приведены к центру Земли что предполагает введение в координаты соответствующих поправок за суточный параллакс.

Преобразование от топоцентрических небесных координат к геоцентрическим осуществляется по нижеследующим формулам. Пусть α^0, δ^0 - наблюдаемые топоцентрические координаты объекта, а α, δ - его геоцентрические координаты. Далее пусть ρ, φ и s - геоцентрическое расстояние, геоцентрическая широта и звездное время места наблюдения соответственно. Тогда геоцентрические значения сферических небесных координат α и δ вычисляются по формулам:

$$\alpha = \alpha^0 + p_\alpha,$$

$$\delta = \delta^0 + p_\delta,$$

где "параллактические смещения" p_α и p_δ связаны с "параллактическими множителями" M_α и M_δ равенствами:

$$M_\alpha = \rho p_\alpha,$$

$$M_\delta = \rho p_\delta,$$

причем через ρ обозначено геоцентрическое расстояние объекта. Параллактические множители обычно принято публиковать вместе с

наблюдаемыми небесными координатами и если (например, из эфемериды) известно геоцентрическое расстояние ρ , то параллактические смещения p_α и p_δ легко определяются с помощью формул;

$$p_\alpha = \frac{1}{\rho} M_\alpha,$$

$$p_\delta = \frac{1}{\rho} M_\delta.$$

Однако в том случае, когда параллактические множители M_α и M_δ не известны, они могут быть рассчитаны по формулам:

$$M_\alpha = C^s \sec \delta^0 \sin(s - \alpha^0), \quad M_\delta = S'' \cos \delta^0 - C'' \sin \delta^0 \cos(s - \alpha^0), \quad (1)$$

где

$$C^s = 0^s.5867 \rho' \cos \phi', \quad C'' = 8''.80 \rho' \cos \phi', \quad S'' = 8''.80 \rho' \sin \phi', \quad (2)$$

причем обе части первого из равенств (2) выражены в секундах времени, а оставшихся двух - в секундах дуги. В Астрономическом Ежегоднике СССР приводятся вспомогательные таблицы для вычисления коэффициентов C и S по заданным значениям геоцентрических координат (расстояния ρ' и широты ϕ') основных астрономических обсерваторий Земли.

Б) В случае только что открытого (т.е. впервые наблюдавшегося) небесного тела описанный выше (в разделе А) путь ("приведения к центру Земли") неприменим, так как геоцентрическое расстояние взять неоткуда (оно неизвестно ввиду отсутствия эфемериды такого объекта). Тогда следует к наблюдаемым топоцентрическим координатам объекта добавить топоцентрические значения прямоугольных координат Солнца, вычисленные по геоцентрическим прямоугольным экваториальным координатам Солнца из таблиц Астрономического Ежегодника СССР (за год, к которому относятся наблюдения), публикуемым на начало суток каждой даты года.

3.2. Алгоритм Лагранжа-Гаусса

3.2.1. Исходные данные задачи определения орбиты астероида

а) Моменты трех наблюдений астероида:

$$t_1, t_2, t_3 \quad (t_1 < t < t_2);$$

б) Наблюденные сферические небесные координаты астероида:

$$(\alpha_1, \delta_1), \quad (\alpha, \delta), \quad (\alpha_2, \delta_2);$$

в) Декартовы прямоугольные координаты Солнца:

$$(X_1, Y_1, Z_1), \quad (X, Y, Z), \quad (X_2, Y_2, Z_2),$$

получаемые интерполированием из соответствующих таблиц Астрономического Ежегодника СССР (на год наблюдений). Координаты астероида и Солнца должны быть выражены в одной и той же системе координат (геоцентрической или топоцентрической), а также должны быть отнесены к небесному экватору и весеннему равноденствию одной и той же эпохи.

3.2.2. Сводка формул и порядок вычислений

3.2.2.1. Вычисление элементов фундаментального определителя, то есть направляющих косинусов радиус-вектора астероида относительно осей выбранной системы координат по его сферическим небесным экваториальным координатам:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos \alpha_1 \cos \delta_1, & \lambda &= \cos \alpha \cos \delta, & \lambda_2 &= \cos \alpha_2 \cos \delta_2, \\ \mu_1 &= \sin \alpha_1 \cos \delta_1, & \mu &= \sin \alpha \cos \delta, & \mu_2 &= \sin \alpha_2 \cos \delta_2, \\ \nu_1 &= \sin \delta_1, & \nu &= \sin \delta, & \nu_2 &= \sin \delta_2. \end{aligned}$$

В качестве контрольных соотношений используются следующие очевидные тождества:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 = 1.$$

3.2.2.2. Вычисление констант, связанных с фундаментальным определителем D метода Лагранжа-Гаусса, по значениям направляющих косинусов, вычисленным в предыдущем разделе:

а) Ф у н д а м е н т а л ь н ы й о п р е д е л и т е л ь D вычисляется согласно формуле Лапласа (в форме разложения по элементам его первого столбца):

$$D = \lambda\lambda_{12} + \mu\mu_{12} + \nu\nu_{12}.$$

Здесь алгебраические дополнения элементов первого столбца определителя D заданы выражениями

$$\lambda_{12} = \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1,$$

$$\mu_{12} = \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1,$$

$$\nu_{12} = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1.$$

Через U_1, U и U_2 далее обозначены так называемые "производные" определители

$$U_1 = X_1\lambda_{12} + Y_1\mu_{12} + Z_1\nu_{12},$$

$$U = X\lambda_{12} + Y\mu_{12} + Z\nu_{12},$$

$$U_2 = X_2\lambda_{12} + Y_2\mu_{12} + Z_2\nu_{12},$$

получаемые из фундаментального определителя D заменой элементов его первого столбца на прямоугольные экваториальные координаты Солнца, соответствующие моментам трех наблюдений.

б) В ы ч и с л е н и е п о с т о я н н ы х

$$R, C, S, \cos \psi,$$

определяемых формулами:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$C = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z),$$

$$S^2 = R^2 - C^2,$$

$$\cos \psi = \frac{C}{R}.$$

К о н т р о л ь в ы ч и с л е н и й : с помощью значений вспомогательных констант L, M и N , определяемых равенствами:

$$L = \lambda_1 + \lambda + \lambda_2 + X_1 + X + X_2,$$

$$M = \mu_1 + \mu + \mu_2 + Y_1 + Y + Y_2,$$

$$N = \nu_1 + \nu + \nu_2 + Z_1 + Z + Z_2,$$

а в качестве контрольного используется соотношение:

$$L\lambda_{12} + M\mu_{12} + N\nu_{12} = D + U_1 + U + U_2,$$

обе части которого должны совпадать в пределах заданной точности вычислений.

3.2.2.3. Вычисление геоцентрических расстояний небесного объекта методом последовательных приближений

Первое приближение.

3.1. Вычисление промежутков времени

$$\tau_1, \tau, \tau_2$$

между парами наблюдений по формулам:

$$\tau_1 = k(t_2 - t),$$

$$\tau_2 = k(t - t_1),$$

$$\tau = k(t_2 - t_1),$$

где через k обозначена постоянная Гаусса

$$k = 0,01720209895,$$

а также отношений указанных выше промежутков времени n_1^0 и n_2^0 :

$$n_1^0 = \frac{\tau_1}{\tau},$$

$$n_2^0 = \frac{\tau_2}{\tau},$$

и величин коэффициентов Энке c_1 и c_2 по формулам:

$$c_1 = \frac{1}{6}\tau_1\tau_2(1 + n_1^0),$$

$$c_2 = \frac{1}{6}\tau_1\tau_2(1 + n_2^0).$$

К о н т р о л ь н ы м с о о т н о ш е н и е м служит равенство:

$$\frac{1}{3}(c_1 + c_2) = \frac{1}{6}\tau_1\tau_2,$$

обе части которого должны совпадать в пределах заданной точности вычислений.

3.2. С о с т а в л е н и е у р а в н е н и й Л а г р а н ж а.

В этом разделе составляется система уравнений Лагранжа, определяющая геоцентрическое расстояние светила ρ в момент среднего из трех наблюдений:

$$DP = U - n_1^0 U_1 - n_2^0 U_2, \quad (3)$$

$$DQ = c_1 U_1 + c_2 U_2.$$

$$\rho = P - \frac{Q}{r^3}, \quad (4)$$

$$r^2 = (\rho + C)^2 + S^2.$$

К р и т е р и й О п п о л ь ц е р а единственности орбиты, соответствующей используемому набору наблюдательных данных, состоит в удовлетворении неравенства:

$$3P \cos \psi > R.$$

Если последнее неравенство не удовлетворяется, то это означает, что используемому набору наблюдательных данных соответствует двойное решение задачи Лагранжа-Гаусса. В таком случае какое-либо одно из трех наблюдений должно быть исключено и заменено другим, чтобы новый набор трех наблюдений удовлетворял критерию Оппольцера.

3.3. Ч и с л е н н о е р е ш е н и е системы (4) у р а в н е н и й Л а г р а н ж а.

Система (4) уравнений Лагранжа - это система двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными: геоцентрическим расстоянием ρ и

гелиоцентрическим расстоянием r исследуемого небесного тела. Решение такой системы может быть найдено лишь приближенно, например, каким-либо из итерационных способов. Это, разумеется, предполагает выбор стартового значения для искомой переменной ρ из области сходимости применяемого итерационного процесса. С этой целью используется следующее одно уравнение:

$$p = 1 - (x^{\star 2} + 2x^{\star} \cos \psi + 1)^{\frac{-3}{2}} \dots \quad (5)$$

относительно другой (безразмерной) неизвестной $x^{\star}$, определяемой равенством:

$$x^{\star} = \frac{\rho}{r},$$

и с двумя параметрами p , $\cos \psi$, таких что

$$p = \frac{R}{P},$$

а

$$\cos \psi = \frac{C}{R}.$$

Уравнение (5) выводится из системы (4) путем исключения из последней гелиоцентрического расстояния r при условии, что коэффициенты P и Q связаны приближенным соотношением

$$Q \simeq PR^3.$$

Вышеупомянутое уравнение (5) в принципе позволяет найти значение искомой величины $x^{\star}$ по заданным значениям параметров p и $\cos \psi$. Однако безразмерное геоцентрическое расстояние $x^{\star}$ определяется уравнением (5) как неявная функция двух аргументов p и $\cos \psi$:

$$x^{\star} = \Phi(p, \cos \psi),$$

так что вычисление этой последней неявной функции связано с определенными трудностями, чреватых потерей точности. Эти трудности легко преодолимы, если обратить внимание на то обстоятельство, что приближенное значение $x^{\star}$ может быть получено из таблицы с двумя входами для значений p , вычисляемых непосредственно по формуле (а) как функции $x^{\star}$ и $\cos \psi$:

$$p = \Psi(x^{\star}, \cos \psi).$$

Такая таблица содержится в монографии (Субботин, 1968), с. 780-783, таблица X ("Приближенное решение уравнений Лагранжа"). Эта таблица позволяет легко находить значение x^* для заданных значений p и $\cos \psi$. Таким образом, стартовое значение геоцентрического расстояния $\rho^{(0)}$ определяется приближенно из равенства:

$$\rho^{(0)} = x^* R.$$

Это приближенное значение геоцентрического расстояния ρ подлежит уточнению с помощью какого-либо из итерационных способов решения алгебраических уравнений. Например, для применения метода касательных Ньютона уравнение (4) следует привести к виду:

$$f(\rho) = 0,$$

где для левой части этого уравнения использовано обозначение

$$f(\rho) = \rho - P + \frac{Q}{r^3},$$

так что ее первая производная $f'(\rho)$ представима формулой

$$f'(\rho) = 1 - \frac{3Q(\rho + C)}{r^5}.$$

Итерации начинаются со стартового значения:

$$\rho^{(0)} = x^* R,$$

причем итерационная схема метода касательных Ньютона приобретает вид:

$$\rho^{(k+1)} = \rho^{(k)} - \frac{f(\rho^{(k)})}{f'(\rho^{(k)})},$$

где номер итерации k принимает значения

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Напротив, если вместо метода касательных Ньютона для уточнения геоцентрического расстояния ρ используется классический метод итераций, то итерационная схема для системы (4) уравнений Лагранжа такова:

$$\rho^{(k+1)} = P - \frac{Q}{(r^{(k)})^3},$$

$$(r^{(k)})^2 = [\rho^{(k)} + C]^2 + S^2,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

причем по-прежнему через $\rho^{(0)}$ обозначено стартовое значение искомого геоцентрического расстояния ρ , определяемое равенством:

$$\rho^{(0)} = x^* R.$$

3.4. Вычисление геоцентрических расстояний ρ_1 и ρ_2 , соответствующих моментам крайних наблюдений.

Прежде всего по значению гелиоцентрического расстояния r , вычисленному в первом приближении (см. предыдущий раздел 3.3), по формулам Энке:

$$n_1^{(1)} = n_1^{(0)} + \frac{c_1}{r^3},$$

$$n_2^{(1)} = n_2^{(0)} + \frac{c_2}{r^3},$$

вычисляются отношения площадей треугольников $n_1^{(1)}$ и $n_2^{(1)}$. Затем геоцентрическое расстояние ρ_1 вычисляется по тому из трех нижеследующих уравнений, левая часть которого имеет наибольший коэффициент при определяемом неизвестном ρ_1 :

$$\begin{aligned} (n_1 \lambda_{12}) \rho_1 &= (\nu_2 \mu - \mu_2 \nu) \rho - \\ &- (\nu_2 Y - \mu_2 Z) + n_1 (\nu_2 Y_1 - \mu_2 Z_1) + n_2 (\nu_2 Y_2 - \mu_2 Z_2), \\ (n_1 \mu_{12}) \rho_1 &= (\lambda_2 \nu - \nu_2 \lambda) \rho - \\ &- (\lambda_2 Z - \nu_2 X) + n_1 (\lambda_2 Z_1 - \nu_2 X_1) + n_2 (\lambda_2 Z_2 - \nu_2 X_2), \\ (n_1 \nu_{12}) \rho_1 &= (\mu_2 \lambda - \lambda_2 \mu) \rho - \\ &- (\mu_2 X - \lambda_2 Y) + n_1 (\mu_2 X_1 - \lambda_2 Y_1) + n_2 (\mu_2 X_2 - \lambda_2 Y_2). \end{aligned} \tag{6}$$

Так, например, если λ_{12} по модулю превосходит как μ_{12} , так и ν_{12} :

$$|\lambda_{12}| \geq \max(|\mu_{12}|, |\nu_{12}|),$$

то для вычисления ρ_1 надо выбрать первое из трех соотношений (6).

Что же касается геоцентрического расстояния ρ_2 , оно определяется из трех следующих соотношений, превращающихся (после вычисления ρ и ρ_1) в уравнения с одним неизвестным ρ_2 :

$$\begin{aligned}(n_2\lambda_2)\rho_2 &= \lambda\rho - (n_1\lambda_1)\rho_1 - X + n_1X_1 + n_2X_2, \\(n_2\mu_2)\rho_2 &= \mu\rho - (n_1\mu_1)\rho_1 - Y + n_1Y_1 + n_2Y_2, \\(n_2\nu_2)\rho_2 &= \nu\rho - (n_1\nu_1)\rho_1 - Z + n_1Z_1 + n_2Z_2\end{aligned}\tag{7}$$

Например, при выполнении условия, что λ_2 по абсолютной величине превосходит как μ_2 , так и ν_2 , т.е.

$$|\lambda_2| \geq \max(|\mu_2|, |\nu_2|),$$

с наибольшей точностью последнее геоцентрическое расстояние ρ_2 определяется третьим соотношением (7).

3.5. В ы ч и с л е н и е г е л и о ц е н т р и ч е с к и х к о о р д и н а т и р а с с т о я н и й о б ъ е к т а .

Значения гелиоцентрических координат вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda_1\rho_1 - X_1, & x &= \lambda\rho - X, & x_2 &= \lambda_2\rho_2 - X_2 \\y_1 &= \mu_1\rho_1 - Y_1, & y &= \mu\rho - Y, & y_2 &= \lambda_2\rho_2 + Y_2 \\z_1 &= \nu_1\rho_1 - Z_1, & z &= \nu\rho - Z, & z_2 &= \nu_2\rho_2 - Z_2\end{aligned}\tag{8}$$

после чего вычисляются квадраты гелиоцентрических расстояний

$$\begin{aligned}(r_1)^2 &= (x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2, \\r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\(r_2)^2 &= (x_2)^2 + (y_2)^2 + (z_2)^2.\end{aligned}$$

К о н т р о л ь . Во-первых, вычисленное в этом разделе значение величины r должно совпадать с ее значением, полученным в процессе численного решения системы уравнений Лагранжа (см. раздел 3.3), то есть должно быть выполнено условие:

$$r = r^{(k)},$$

где через $r^{(k)}$ обозначено значение переменной r из последней итерации (в процессе уточнения геоцентрических расстояний). Во-вторых,

вычисленные в этом разделе значения гелиоцентрических координат небесного объекта должны удовлетворять (разумеется, в пределах заданной точности вычислений) также и соотношениям:

$$x = n_1 x_1 + n_2 x_2,$$

$$y = n_1 y_1 + n_2 y_2,$$

$$z = n_1 z_1 + n_2 z_2.$$

Примечание 1. Для астероидов иногда оказывается достаточно той точности, которую дает первое приближение гауссовой процедуры определения геоцентрических расстояний. Так, например, можно сразу переходить к вычислению элементов орбиты, предназначенных для вычисления так называемой "поисковой" эфемериды, чтобы астрономы-наблюдатели смогли продолжить наблюдения и, благодаря ей, сумели не потерять интересующий их небесный объект.

3.6. Учет планетной аберрации.

Эффект планетной аберрации является следствием того обстоятельства, что свет распространяется не мгновенно, т.е. скорость света имеет конечное значение. Поэтому за тот промежуток времени, пока свет проходит расстояние от источника света до наблюдателя, сам светящийся объект успевает передвинуться в пространстве на новое место. Таким образом, фиксируемое наблюдателем положение объекта на небесной сфере соответствуют не моменту наблюдения, а некоторому более раннему моменту времени. Следовательно, вычисленные в предыдущем разделе гелиоцентрические координаты светила: (x_1, y_1, z_1) , (x, y, z) , (x_2, y_2, z_2) должны относиться, соответственно, к исправленным (за планетную аберрацию) моментам времени:

$$t_1^* = t_1 - L\rho_1,$$

$$t^* = t - L\rho,$$

$$t_2^* = t_2 - L\rho_2,$$

где

$$L = 0^d.0057756$$

- это так называемое "световое время" (в средних солнечных сутках), за которое свет проходит расстояние, равное одной астрономической единице.

3.2.2.4. Второе и последующие приближения в гауссовой процедуре уточнения расстояний

4.1. В т о р о е п р и б л и ж е н и е начинается с вычисления новых значений промежутков времени между парами наблюдений (с исправленными за планетную аберрацию моментами наблюдений) по формулам:

$$\tau_1^* = k(t_2^* - t^*),$$

$$\tau_2^* = k(t^* - t_1^*),$$

$$\tau^* = k(t_2^* - t_1^*).$$

Затем вычисляются новые значения отношений промежутков времени между парами наблюдений:

$$n_1^0 = \frac{\tau_1^*}{\tau^*},$$

$$n_2^0 = \frac{\tau_2^*}{\tau^*}.$$

Далее во втором приближении вычисляются отношения площадей треугольников по формулам Гиббса:

$$n_1^{(2)} = n_1^0 \frac{[1 + B_1(r_1)^{-3}]}{(1 - Br^{-3})},$$

$$n_2^{(2)} = n_2^0 \frac{[1 + B_2(r_2)^{-3}]}{(1 - Br^{-3})},$$

где коэффициенты B , B_1 и B_2 суть постоянные величины, определяемые формулами:

$$B = \frac{1}{12} \tau^{*2} (1 + n_1^0 n_2^0),$$

$$B_1 = \frac{1}{12} \tau^{*2} (n_2^0 - n_1^0 n_1^0),$$

$$B_2 = \frac{1}{12} \tau^{*2} (n_1^0 - n_2^0 n_2^0).$$

П р и м е ч а н и е 1.

Не следует упускать из виду то обстоятельство, что во втором приближении значения величин τ^* , τ_1^* , τ_2^* , n_1^0 и n_2^0 предполагаются исправленными за планетную аберрацию (т.е. перевычисленными на моменты времени t_1^* , t^* , t_2^*).

Дальнейшие вычисления по уточнению значений геоцентрических расстояний производятся в соответствии с разделом 4.2.

В т р е т ь е м п р и б л и ж е н и и (а также во всех последующих приближениях) отношения площадей треугольников рассчитываются по формулам Гаусса:

$$n_1^{(k)} = n_1^0 \frac{\eta}{\eta_1},$$

$$n_2^{(k)} = n_2^0 \frac{\eta}{\eta_2},$$

где $(k \geq 3)$, причем n_1^0 , n_2^0 вычисляются по формулам

$$n_1^0 = \frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}},$$

$$n_2^0 = \frac{\tilde{\tau}_2}{\tilde{\tau}}$$

с исправленными за планетную аберрацию моментами наблюдений

$$\tilde{t}_1 = t_1 - L\rho_1,$$

$$\tilde{t} = t - L\rho,$$

$$\tilde{t}_2 = t_2 - L\rho_2,$$

а также с соответственно исправленными значениями промежутков времени между парами наблюдений:

$$\tilde{\tau} = k(\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1),$$

$$\tilde{\tau}_1 = k(\tilde{t}_2 - \tilde{t}),$$

$$\tilde{\tau}_2 = k(\tilde{t} - \tilde{t}_1).$$

В формулах Гаусса η , η_1 , η_2 суть отношения площадей секторов к площадям треугольников, образованных парами гелиоцентрических радиус-векторов объекта, соответствующих моментам используемых наблюдений. Указанные отношения площадей секторов к площадям соответствующих треугольников представляются цепными дробями Ганзена.

В частности величина η - это отношение площади эллиптического сектора, образованного "крайними" радиус-векторами, к площади треугольника, образованного теми же радиус-векторами и стягивающей их концы хордой, а вычисляется η с помощью следующих формул:

$$\eta = 1 + \frac{10}{11} \left(\frac{d}{1 + \frac{d}{1 + \frac{d}{1 + \dots}}} \right),$$

где

$$d = \frac{22\tilde{\tau}^2}{\kappa^2[6\kappa + 9(r_1 + r_2)]},$$

причем

$$\kappa^2 = 2(r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2).$$

Аналогичный смысл имеет величина η_1 , также представляемая соответствующей формулой в форме цепной дроби;

$$\eta_1 = 1 + \frac{10}{11} \left(\frac{d_1}{1 + \frac{d_1}{1 + \frac{d_1}{1 + \dots}}} \right),$$

где d_1 и κ_1 определяются двумя следующим далее равенствами:

$$d_1 = \frac{22\tilde{\tau}_1^2}{\kappa_1^2[6\kappa_1 + 9(r_2 + r)]},$$

и

$$\kappa_1^2 = 2(r_2 r + x_2 x + y_2 y + z_2 z).$$

Наконец, значение величины η_2 также определяет соответствующая цепная дробь Ганзена:

$$\eta_2 = 1 + \frac{10}{11} \left(\frac{d_2}{1 + \frac{d_2}{1 + \frac{d_2}{1 + \dots}}} \right),$$

где

$$d_2 = \frac{22\tilde{\tau}_2^2}{\kappa_2^2[6\kappa_2 + 9(r_1 + r)]},$$

а

$$\kappa_2^2 = 2(r_1 r + x_1 x + y_1 y + z_1 z).$$

4.2. После второго приближения (и всех последующих приближений) с уточненными значениями отношений площадей треугольников n_1 и n_2 вычисляются коэффициенты Энке c_1 и c_2 по формулам:

$$c_1 = (n_1 - n_1^0)r^{-3},$$

$$c_2 = (n_2 - n_2^0)r^{-3},$$

где в качестве n_1^0 и n_2^0 берутся их исправленные за планетную аберрацию значения, а

$$r = r^{(k)},$$

причем " k " означает номер последнего (из осуществленных) приближений в гауссовой процедуре уточнения расстояний.

4.3. Теперь по формулам (3) и (4) раздела 3.2 вычисляются новые значения расстояний до объекта (геоцентрического " ρ " и гелиоцентрического " r "), соответствующих моменту среднего наблюдения.

4.4. С помощью тех же самых уравнений из числа (6) и (7) раздела 3.3, которые использовались в первом приближении для нахождения "крайних" геоцентрических расстояний, после подстановки в вышеуказанные уравнения уточненных значений величин n_1 , n_2 , определяются новые значения ρ_1 и ρ_2 , соответствующие моментам крайних наблюдений.

4.5. По формулам (8) вычисляются уточненные значения гелиоцентрических координат x_i , y_i , z_i ($i = 1, 0, 2$), соответствующие моментам трех наблюдений небесного объекта.

П р и м е ч а н и е 2.

Если новые значения геоцентрических расстояний ρ_1 , ρ и ρ_2 отличаются более чем на $0,001a.e.$ от тех, что были употреблены для исправления моментов наблюдений за планетную аберрацию, то соответствующие (абберационные) поправки иногда бывает необходимо уточнить.

П р и м е ч а н и е 3.

Последующие приближения гауссовой процедуры уточнения геоцентрических расстояний исследуемого небесного объекта продолжаются до совпадения последующих значений отношений площадей треугольников с их предыдущими значениями (разумеется, в пределах той точности, с которой ведутся вычисления).

Таким образом, при выполнении условий:

$$|n_q^{(k+1)} - n_q^{(k)}| \leq \epsilon^* \quad (q = 1, 2; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

все расстояния до объекта считаются вычисленными с требуемой точностью ϵ^* , так что можно переходить к реализации второго этапа стратегии Леонарда Эйлера, то есть к вычислению элементов орбиты.

3.2.2.5. Вычисление элементов орбиты

В методе Лагранжа-Гаусса элементы орбиты вычисляются из краевых условий невозмущенного движения объекта, в качестве которых выбираются гелиоцентрические координаты, соответствующие моментам двух крайних наблюдений:

$$(t_1, x_1, y_1, z_1),$$

$$(t_2, x_2, y_2, z_2).$$

Эти значения выбираются из результатов последнего выполненного приближения гауссовой процедуры уточнения расстояний от наблюдателя до объекта.

5.1. В ы ч и с л е н и е к в а д р а т о в "крайних" гелиоцентрических расстояний r_1 и r_2 , а также вспомогательных величин σ , x_0 , y_0 , z_0 , r_0 по нижеприведенным формулам:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

$$\begin{aligned}
r_2^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \\
\sigma &= (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)r_1^{-2}, \\
x_0 &= x_2 - \sigma x_1, \\
y_0 &= y_2 - \sigma y_1, \\
z_0 &= z_2 - \sigma z_1, \\
r_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.
\end{aligned}$$

5.2. В ы ч и с л е н и е р а з н о с т и и с т и н н ы х а н о
м а л и й

$$(2f) = v_2 - v_1$$

в двух крайних положениях исследуемого объекта по формулам:

$$\begin{aligned}
\sin(2f) &= \frac{r_0}{r_2}, \\
\cos(2f) &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1r_2}.
\end{aligned}$$

Квадрант единичной окружности, в котором находится угол $2f$, находится по знакам $\sin(2f)$ и $\cos(2f)$, в то время как главное значение угла $2f$ точнее определяется соотношением:

$$2f = \operatorname{arctg} \frac{r_0r_1}{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}.$$

Основное к о н т р о л ь н о е с о о т н о ш е н и е таково:

$$(r_0r_1)^2 = (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

В целях д о п о л н и т е л ь н о г о к о н т р о л я за
вычислениями желательно использовать также равенство:

$$\arcsin \left(\frac{r_0}{r_2} \right) = \arccos \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1r_2},$$

обеспечивающее согласие значений разности истинных аномалий $2f$, выводимых из двух первых формул этого раздела.

5.3. В ы ч и с л е н и е ф о к а л ь н о г о п а р а м е т р а "р" орбиты с помощью соотношения:

$$\sqrt{p} = \eta \frac{(r_1)(r_0)}{\tau},$$

где через "η" обозначено отношение площади сектора к площади треугольника для среднего наблюдения (его значение уже вычислено после операций раздела 4.1., выполненных в последнем приближении гауссовой процедуры уточнения расстояний до объекта).

5.4. О п р е д е л е н и е и с т и н н ы х а н о м а л и й "v₁" и "v₂" в двух крайних положениях объекта, а также эксцентриситета "е" его орбиты, для чего используются соотношения:

$$e \sin v_1 = \frac{q_1 \cos(2f) - q_2}{\sin(2f)},$$

$$e \cos v_1 = q_1,$$

$$v_2 = v_1 + 2f.$$

Здесь через "q₁" и "q₂" обозначены величины:

$$q_1 = \frac{p}{r_1} - 1, \quad q_2 = \frac{p}{r_2} - 1.$$

К о н т р о л ь вычисления параметра орбиты, определенного в разделе 5.3, осуществляется с помощью соотношения:

$$p = r_2[1 + e \cos(v_2)].$$

5.5. В ы ч и с л е н и е б о л ь ш о й п о л у о с и "а" о р б и т ы, а также эксцентрических аномалий "E₁" и "E₂" в двух крайних положениях объекта.

Для этого служат формулы:

$$e = \sin \varphi,$$

$$a = \frac{p}{(1 - e)(1 + e)} = \frac{p}{\cos^2 \varphi},$$

где

$$\varphi = \arcsin(e)$$

- это так называемый "угол эксцентриситета".

Значения E_1 и E_2 вычисляются по формулам:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{E_1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg}\left(\frac{v_1}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{E_2}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg}\left(\frac{v_2}{2}\right).$$

В целях контроля вычислений используется равенство:

$$b \sin \frac{(E_2 - E_1)}{2} = \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{(v_2 - v_1)}{2},$$

где через "b" обозначена малая полуось эллиптической орбиты, так что

$$b = a\sqrt{(1 - e^2)} = a \cos(\varphi).$$

5.6. Вычисление средних аномалий " M_1 " и " M_2 " небесного объекта, соответствующих его крайним наблюдениям:

$$M_1 = E_1 - e^\circ \sin(E_1),$$

$$M_2 = E_2 - e^\circ \sin(E_2),$$

причем через e° обозначено значение эксцентриситета, выраженное в градусах дуги:

$$e^\circ = 57^\circ.2957795e.$$

5.7. Определение среднего суточного движения " n " объекта и его средней аномалии " M " "эпохи оскуляции" t_0 по формулам:

$$n = \frac{(M_2 - M_1)}{(t_2 - t_1)},$$

$$M_0 = M_1 + n(t_0 - t_1),$$

где в качестве "эпохи оскуляции" t_0 берется момент начала суток второго (то есть "среднего") наблюдения:

$$t_0 = [t].$$

5.8. В ы ч и с л е н и е "векторных элементов":

$$\vec{P} = (P_x, P_y, P_z),$$

$$\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z).$$

Значения этих шести компонент векторов $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ вычисляются с помощью формул:

$$P_x = \frac{x_1}{r_1} \cos(v_1) - \frac{x_0}{r_0} \sin(v_1),$$

$$P_y = \frac{y_1}{r_1} \cos(v_1) - \frac{y_0}{r_0} \sin(v_1),$$

$$P_z = \frac{z_1}{r_1} \cos(v_1) - \frac{z_0}{r_0} \sin(v_1),$$

$$Q_x = \frac{x_1}{r_1} \sin(v_1) + \frac{x_0}{r_0} \cos(v_1),$$

$$Q_y = \frac{y_1}{r_1} \sin(v_1) + \frac{y_0}{r_0} \cos(v_1),$$

$$Q_z = \frac{z_1}{r_1} \sin(v_1) + \frac{z_0}{r_0} \cos(v_1).$$

В качестве контрольных соотношений используются следующие тождественные равенства:

$$(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2 = a^2,$$

$$(B_x)^2 + (B_y)^2 + (B_z)^2 = b^2,$$

$$(A_x)(B_x) + (A_y)(B_y) + (A - z)(B_z) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_x &= aP_x, & A_y &= aP_y, & A_z &= aP_z, \\ B_x &= bQ_x, & B_y &= bQ_y, & B_z &= bQ_z, \end{aligned}$$

а через a и b обозначены соответственно большая и малая оси эллиптической орбиты астероида.

5.9. В ы ч и с л е н и е "у г л о в ы х э л е м е н т о в" о р б и т ы (долготы восходящего узла Ω на эклиптике, наклона орбиты i к эклиптике и углового расстояния перигелия ω от восходящего узла).

С этой целью для вычисления ω и i используются соотношения:

$$\sin(i) \sin(\omega) = P_z \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon,$$

$$\sin(i) \cos(\omega) = Q_z \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon,$$

откуда главное значение для ω определяется формулой

$$\omega = \arctg \frac{(P_z \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon)}{(Q_z \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon)},$$

а по знакам левых частей вышеупомянутых двух равенств для угла ω устанавливается соответствующий квадрант единичной окружности. В свою очередь Ω определяется из соотношений:

$$\sin \Omega = (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon,$$

$$\cos \Omega = P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega,$$

причем главное значение Ω задается формулой

$$\Omega = \arctg \frac{(P_e \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon}{(P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega)},$$

в то время как по знакам $\sin \Omega$ и $\cos \Omega$ устанавливается соответствующий углу Ω квадрант. Во всех вышеприведенных соотношениях через ε обозначен угол наклона эклиптики к экватору, значение которого должно браться для эпохи употребляемых небесных координат (например, из Астрономического Ежегодника за тот год, к которому отнесены используемые наблюдения исследуемого объекта).

К о н т р о л ь вычисления "у г л о в ы х э л е м е н т о в" осуществляется:

во-первых, по совпадению значений угла Ω , вычисленных по $\sin \Omega$ и $\cos \Omega$ в отдельности, так чтобы с заданной точностью ϵ^* выполнялось равенство:

$$\arcsin[(P_z \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon] = \arccos(P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega),$$

а во-вторых, по удовлетворению условия

$$(P_x) \sin \omega + (Q_x) \cos \omega = -\cos(i) \sin \Omega.$$

3.2.2.6. П р е д с т а в л е н и е н а б л ю д е н и й

Наиболее полный контроль (правильности) вычисленной орбиты небесного объекта дает процедура представления исходных наблюдений при помощи найденных орбитальных элементов. Однако иногда практически достаточным считается контроль, состоящий в представлении среднего наблюдения, непосредственно при нахождении элементов орбиты не используемого. Чтобы вычислить небесные координаты объекта, соответствующие моменту "t" среднего наблюдения, используются следующие формулы:

$$t^* = t - L\rho, \quad L = 0^d.0057756,$$

$$M = M_0 + n(t^* - t_0),$$

$$E - e^\circ \sin(E) = M,$$

где через t_0 , как и ранее, обозначена "эпоха оскуляции", то есть момент начала суток среднего из трех использованных наблюдений,

а e° - это введенное уже ранее значение эксцентриситета орбиты e , выраженное в градусной мере:

$$e^\circ = 57^\circ.2957795e.$$

Наконец, вычисленные геоцентрические небесные координаты ρ , α^c , δ^c объекта доставляются решением следующей системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\rho \cos(\alpha^c) \cos(\delta^c) = \Xi,$$

$$\rho \sin(\alpha^c) \cos(\delta^c) = \Phi,$$

$$\rho \sin(\delta^c) = \Psi,$$

правые части которых заданы выражениями:

$$\Xi = A_x[\cos(E) - e] + B_x \sin(E) + X,$$

$$\Phi = A_y[\cos(E) - e] + B_y \sin(E) + Y,$$

$$\Psi = A_z[\cos(E) - e] + B_z \sin(E) + Z.$$

Здесь используются значения компонент векторов

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

и

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z),$$

уже вычисленные в разделе 5.8.

Геоцентрические экваториальные координаты Солнца X , Y , Z берутся на момент "t" среднего наблюдения небесного объекта.

Решение системы трех уравнений с тремя неизвестными дает главные значения небесных координат объекта в форме:

$$\alpha^c = \arctan \left(\frac{\Xi}{\Phi} \right),$$

$$\delta^c = \arctan \left(\frac{\Psi}{\Phi} \sin \alpha^c \right),$$

а соответствующие квадранты единичной окружности определяются знаками функций Ξ , Φ , Ψ . Наконец, вычисленное значение геоцентрического расстояния определяется выражениями:

$$\rho = \Psi \csc(\delta^c),$$

$$\rho = \Xi \sec(\alpha^c) \sec(\delta^c),$$

$$\rho = \Phi \csc(\alpha^c) \sec(\delta_c).$$

Совпадение значений ρ , полученных по трем последним формулам, служит свидетельством отсутствия грубых ошибок в вычислениях.

Аберрационное время $(L\rho)$ получается путем интерполирования или экстраполирования из значений, имеющих для трех исходных наблюдений.

После вычисления величины геоцентрического расстояния ρ правильность принятого значения величины $(L\rho)$ проверяется и, в случае необходимости, вычисление повторяется.

В том случае, когда исходными данными для определения элементов орбиты астероида были его топоцентрические экваториальные координаты, сравниваемые небесные координаты среднего наблюдения исправляются за суточный параллакс.

П р и м е ч а н и е .

Точность представления небесных координат среднего наблюдения объекта должна быть не хуже $0''.1$, для чего все вычисления должны вестись с 7 (семью) значащими цифрами. Модули разностей "О - С"

("Observatum minus Calculatum"):

$$\Delta(\alpha) = \alpha - \alpha^c,$$

$$\Delta(\delta) = \delta - \delta^c$$

по прямому восхождению порядка

$$\Delta(\alpha) = 0^s.07$$

и по склонению

$$\Delta(\delta) = 0'' .5$$

свидетельствуют о наличии в проведенных вычислениях значительных ошибок. Вычисленные элементы орбиты можно считать удовлетворительно представляющими используемые наблюдения астероида при выполнении условий:

$$|\Delta(\alpha)| \leq (0'' .1),$$

$$|\Delta(\delta)| \leq (0'' .1).$$

Здесь, как и прежде, геоцентрические небесные координаты "светила" для момента среднего наблюдения обозначены через α и δ , в то время как через α^c и δ^c обозначены их вычисленные значения.

3.2.3. Схема алгоритма Лагранжа-Гаусса

На рис.1 изображена блок-схема алгоритма Лагранжа-Гаусса.

3.3. Порядок решения задачи практикума и форма отчета

1. Вычисление параллактических поправок к координатам малой планеты.
2. Вычисление координат Солнца интерполированием по таблицам Астрономического ежегодника.
3. Выполнение процедур по блок-схеме алгоритма Лагранжа-Гаусса:
а) определение геоцентрических расстояний, б) определение элементов орбиты, в) представление наблюдений.
4. Подготовка печатного отчета с титульным листом и с проверкой точности, с которой выполняются предусмотренные алгоритмом контрольные соотношения.
5. Устная защита отчета о выполненной работе.

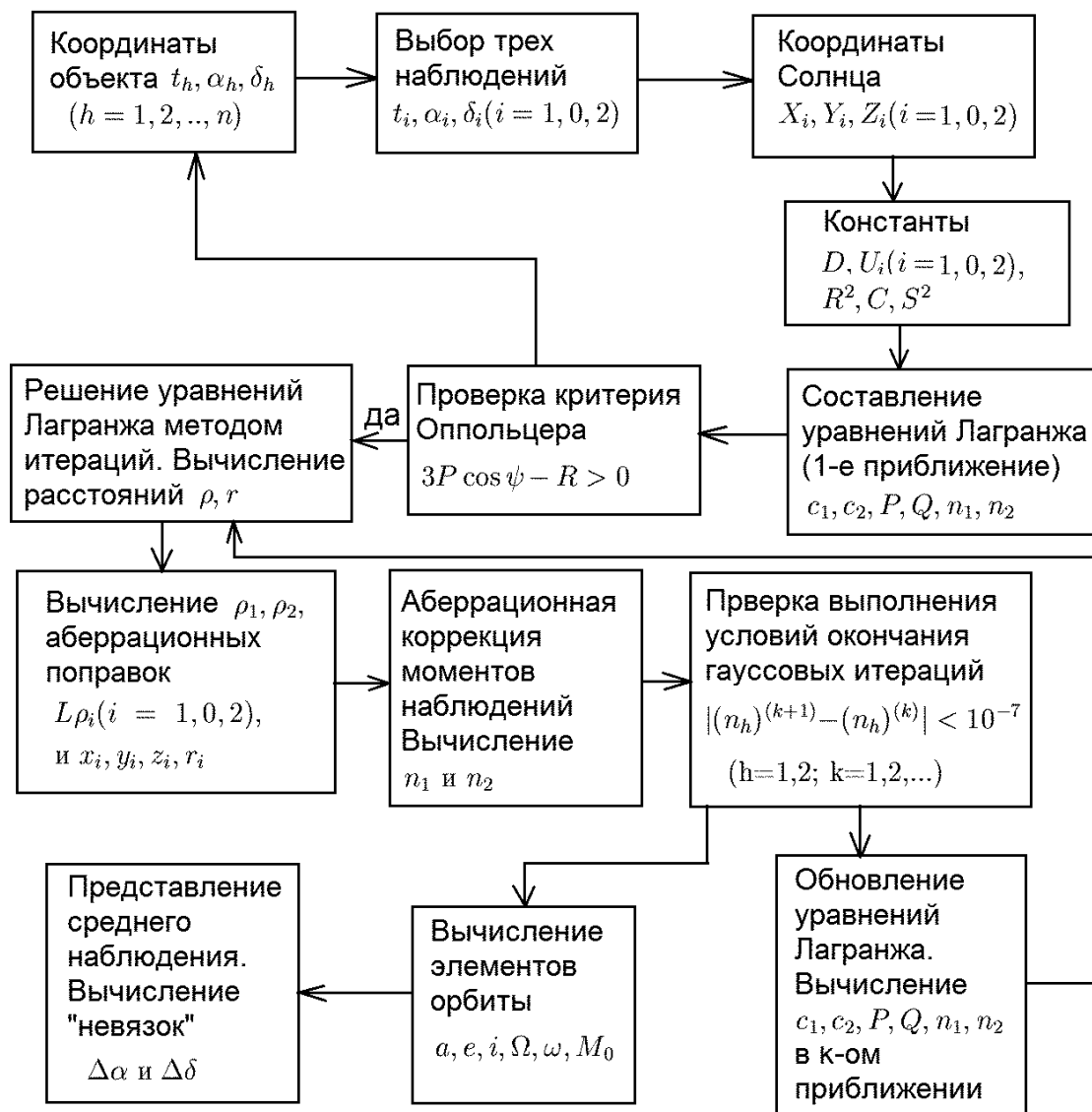


Рис. 1: Блок-схема алгоритма Лагранжа-Гаусса.

Литература

Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. – М.: "Наука", 1968, 800 с.

Задача № 4.

Емельянов Н. В.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ НА ГЕОСТАЦИОНАРНЫЙ СПУТНИК

Содержание

- 4.1. Введение в задачу практикума.
- 4.2. Постановка задачи.
- 4.3. Системы координат, применяемые в задаче.
- 4.4. Определение геоцентрической широты и геоцентрического расстояния геостационарного спутника.
- 4.5. Порядок вычисления искомых величин.
- 4.6. Методическое указание о формулировке задачи каждому студенту.
- 4.7. Форма отчета по задаче практикума.
- 4.8. Примеры вычислений.
- Литература.
- Приложение. Вывод формул связи между земной экваториальной и горизонтальной системами прямоугольных координат.

4.1. Введение в задачу практикума

Человеком создано много искусственных небесных тел. Нужны они для изучения окружающей нас Вселенной, а также для улучшения условий жизни людей на Земле. В частности, для обеспечения радиосвязи по всей Земле в диапазоне ультракоротких радиоволн служат искусственные спутники Земли (ИСЗ). На спутниках устанавливают ретрансляторы радиосигналов. Таким образом обеспечивается прием телевизионных передач на всей Земле. Наиболее подходящими для этой цели оказываются спутники, движущиеся на геостационарных орбитах. Один геостационарный спутник может обеспечить постоянный прием телевизионного сигнала на огромной части поверхности Земли. Такие ИСЗ остаются почти неподвижными относительно поверхности нашей планеты. Поэтому для приема радиосигнала со спутника на Земле устанавливают антенны с чувствительностью в узком телесном угле в направлении на спутник. Это дает выигрыш в мощности принимаемого сигнала и в информативности радиоканала. Направление антенны на геостационарный спутник остается неизменным.

Все эти обстоятельства приводят к проблеме точного наведения антенны на спутник. Геостационарные спутники можно видеть только с помощью мощных телескопов ночью в очень хорошую погоду. На практике необходимо наводить антенны в любых условиях, даже на балконах жилых домов. Естественно приходит идея рассчитать направление на известный геостационарный спутник в заданной точке на поверхности Земли. Поскольку ИСЗ является небесным телом, то первоначально расчет направления делается на основе методов небесной механики. Азимут и высота спутника над горизонтом используются для предварительного наведения антенны. Более точная настройка может делаться путем вариаций направления для получения наилучшего приема телевизионного сигнала.

Весьма вероятно, что для решения описанной задачи на каком-то этапе может быть привлечен выпускник Астрономического отделения физфака МГУ. Чтобы научить его это делать, служит предлагаемая задача практикума.

4.2. Постановка задачи

Задача N G1 формулируется следующим образом. Для заданного

места на Земле требуется определить азимут и угловую высоту над горизонтом заданного геостационарного спутника. Место на Земле задается географическими координатами. Спутник может идентифицироваться только долготой подспутниковой точки на экваторе Земли. Введем обозначения для заданных и искомых величин.

Пусть даны

φ_0 - географическая широта наземной точки,

λ_0 - географическая долгота, отсчитываемая от Гринвичского меридиана,

λ_s - долгота подспутниковой точки.

Требуется определить следующие величины:

A - азимут спутника,

H - угловая высота спутника над горизонтом.

Для определенности будем измерять угловые величины в градусах. Азимут отсчитывается от южного направления меридиана в сторону востока от 0 до 360 градусов. В данной задаче можно пренебречь несферичностью Земли. Широту и долготу будем измерять в геоцентрической системе координат. Радиус Земли R примем равным 6378 км.

Для решения задачи необходимо знать положение спутника в пространстве. Однако нам дана только одна его координата – долгота. Информация о том, чему равны широта и геоцентрическое расстояние геостационарного спутника содержится в его названии.

4.3. Системы координат, применяемые в задаче

Поскольку геостационарный спутник неподвижен по отношению к поверхности Земли, мы будем применять экваториальную систему декартовых координат, связанную с Землей. Ось z' направим от центра Земли в северный полюс, ось x' в Гринвичский меридиан, а ось y' будет дополнять систему координат до правой.

Наряду с рассмотренной геоцентрической земной экваториальной системой координат рассмотрим горизонтальную систему координат, связанную с плоскостью горизонта данной точки на поверхности Земли. Здесь мы будем применять упрощенное понятие горизонта как плоскости, перпендикулярной геоцентрическому радиусу-вектору пункта на земной поверхности.

В дальнейшем пункт на поверхности Земли, в котором располагается антенна, направленная на спутник, будем называть также об-

серваторией.

Оси горизонтальной системы координат с началом в точке наблюдений обозначим через x'', y'', z'' . Ось x'' направим в плоскости горизонта по местному меридиану на юг, а ось z'' - в зенит. Обозначим через λ_0, φ_0 долготу и широту точки поверхности в земной экваториальной системе координат. Тогда связь между земной экваториальной и горизонтальной системами координат выразится соотношениями

$$\begin{aligned}x'' &= x' \cos \lambda_0 \sin \varphi_0 + y' \sin \lambda_0 \sin \varphi_0 - z' \cos \varphi_0, \\y'' &= -x' \sin \lambda_0 + y' \cos \lambda_0, \\z'' &= x' \cos \lambda_0 \cos \varphi_0 + y' \sin \lambda_0 \cos \varphi_0 + z' \sin \varphi_0 - R,\end{aligned}\tag{1}$$

где R - геоцентрическое расстояние точки наблюдения. Вывод этих соотношений дается в Приложении 1.

Формулы обратного перехода имеют вид

$$\begin{aligned}x' &= x'' \sin \varphi_0 \cos \lambda_0 - y'' \sin \lambda_0 + (z'' + R) \cos \varphi_0 \cos \lambda_0, \\y' &= x'' \sin \varphi_0 \sin \lambda_0 + y'' \cos \lambda_0 + (z'' + R) \cos \varphi_0 \sin \lambda_0, \\z' &= -x'' \cos \varphi_0 + (z'' + R) \sin \varphi_0.\end{aligned}\tag{2}$$

4.4. Определение широты и геоцентрического расстояния геостационарного спутника

Геостационарный спутник почти неподвижен относительно земной поверхности. Это происходит от того, что Земля вращается, а спутник движется синхронно вокруг Земли почти в плоскости экватора по почти круговой орбите. Его движение подвержено влиянию различных факторов: нецентральности гравитационного поля Земли, притяжению Луны и Солнца, световому давлению. Поэтому если бы можно было запустить спутник точно на круговую орбиту в плоскости экватора Земли, через некоторое время его траектория перестала бы быть круговой и вышла бы из плоскости экватора. Чтобы выполнять свои функции ретранслятора, орбита спутника корректируется орбиту время от времени с помощью микродвигателей по командам с Земли.

В задаче практикума мы будем пренебрегать отклонениями спутника от точной геостационарной орбиты. При этом спутник должен двигаться в плоскости экватора. Следовательно, его небесная широта известна и равна нулю.

Из предположения о геостационарности спутника сразу находится период его обращения. Он равен периоду вращения Земли, т. е. звездным суткам. Отсюда определяется среднее движение спутника

$$n = 1.002737811906325 \text{ оборот/сутки.}$$

Что касается геоцентрического расстояния спутника, то теперь его можно найти по закону небесной механики. Обозначим большую полуось орбиты спутника через a . В нашем случае это радиус орбиты, а следовательно и геоцентрическое расстояние. Третий закон Кеплера формулируется так:

$$n^2 a^3 = Gm,$$

где G - универсальная гравитационная постоянная, а m - масса Земли. Можно приближенно принять

$$Gm = 398601.3 \text{ км}^3/\text{с}^2.$$

Теперь вполне хватает данных, чтобы вычислить геоцентрическое расстояние спутника a .

4.5. Порядок вычисления искомых величин

Сначала находим прямоугольные координаты спутника в геоцентрической системе:

$$x' = a \cos \lambda_s, \quad y' = a \sin \lambda_s, \quad z' = 0.$$

Далее по формулам (1) вычисляем координаты спутника x'', y'', z'' в горизонтальной системе координат с началом в заданном наземном пункте. Далее искомые небесные угловые координаты спутника вычисляются по формулам

$$\operatorname{tg} A = \frac{y''}{x''}, \quad \operatorname{tg} H = \frac{z''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}.$$

Для однозначного определения A следует учесть, что $\cos A$ имеет тот же знак, что и x'' .

4.6. Методическое указание о формулировке задачи каждому студенту

Формулировка задачи для каждого студента заключается в задании значений величин: φ_0 - широта наземной точки наблюдения,

λ_0 - долгота, отсчитываемая от Гринвичского меридиана,

λ_s - долгота подспутниковой точки.

Это могут быть любые значения в пределах возможных.

Для реализации метода и выполнения практикума можно предложить студенту составление вычислительной программы на любом языке программирования.

4.7. Форма отчета по задаче практикума

Каждому студенту предлагается один вариант исходных данных. После решения задачи студент должен подготовить письменный отчет по следующему плану:

1. Введение (О чем идет речь? Почему возникают рассматриваемые проблемы? Зачем это нужно?).
2. Постановка задачи (Цель исследования. Что дано? Что определить?).
3. Описание последовательности вычислений с приведением применяемых формул.
4. Задание исходных данных.
5. Полученные результаты.

В целом такой отчет может иметь объем 2-3 страницы.

4.8. Примеры вычислений

Пример 1.

Исходные данные:

$$\varphi_0 = 55.0 \text{ град.},$$

$$\lambda_0 = 37.0 \text{ град.},$$

$$\lambda_s = 15.0 \text{ град.}$$

Результаты вычислений:

$$a = 42164.202626042599 \text{ км},$$

$$A = 333.746335059321 \text{ град.},$$

$$H = 24.197165673464 \text{ град.}$$

Пример 2.

Исходные данные:

$$\varphi_0 = 45.0 \text{ град.},$$

$$\lambda_0 = 67.0 \text{ град.},$$

$$\lambda_s = 55.0 \text{ град.}$$

Результаты вычислений:

$$a = 42164.202626042599 \text{ км},$$

$$A = 343.269202452725 \text{ град.},$$

$$H = 36.804744895847 \text{ град.}$$

Пример 3.

Исходные данные:

$$\varphi_0 = 66.0 \text{ град.},$$

$$\lambda_0 = 35.0 \text{ град.},$$

$$\lambda_s = 40.0 \text{ град.}$$

Результаты вычислений:

$$a = 42164.202626042599 \text{ км},$$

$$A = 5.470433967700 \text{ град.},$$

$$H = 15.522337715346 \text{ град.}$$

Литература

1. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Издание 2-е, переработанное и дополненное. / Под ред. Г.Н.Дубошина. – М.: Наука, 1976, 862 с.

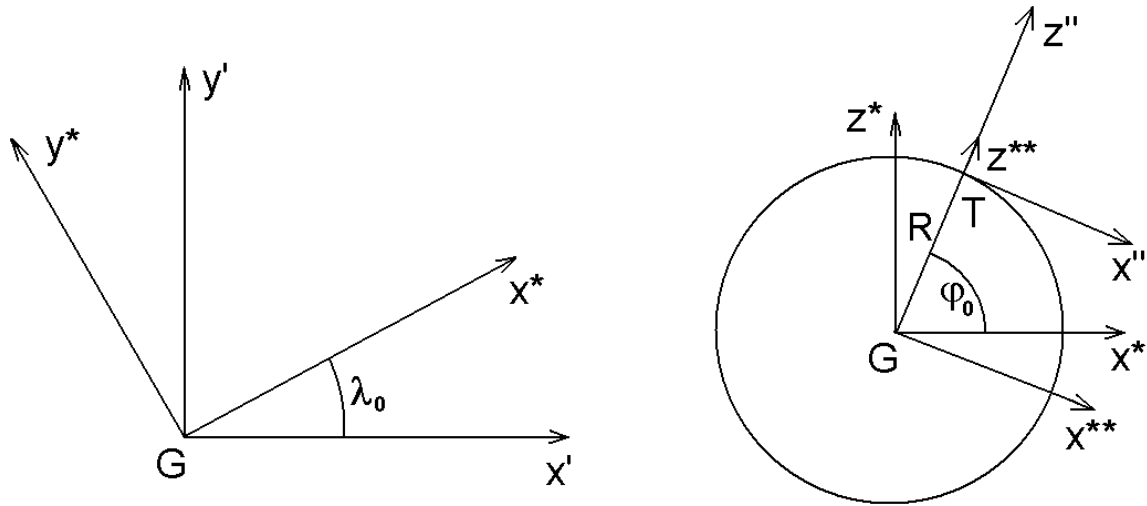


Рис. 1: Геоэкваториальная, горизонтальная и промежуточные системы координат.

Приложение. Вывод формул связи между земной экваториальной и горизонтальной системами координат.

Выведем здесь формулы связи между земной экваториальной и горизонтальной системами координат. Оси этих систем координат и промежуточных систем изображены на Рис. 1. На рисунках G обозначает геоцентр, а T – положение пункта наблюдения или топоцентр. Начало земной экваториальной системы координат x', y', z' расположено в геоцентре, а начало земной горизонтальной системы x'', y'', z'' – в топоцентре. Оси x'', z'' лежат в меридиональной плоскости, проходящей через топоцентр, причем ось x'' направлена в плоскости горизонта в сторону юга, а ось z'' направлена в зенит. Ось y'' дополняет систему координат до правой и направлена в плоскости горизонта в точку востока.

Рассмотрим дополнительно две промежуточные системы координат. Система G, x^*, y^*, z^* геоцентрическая, оси x^*, y^* лежат в плоскости земного экватора, ось x^* направлена по меридиану пункта наблюдения. Очевидно, что связь между системами x'', y'', z'' и x^*, y^*, z^* выразится формулами

$$\begin{aligned} x^* &= x' \cos \lambda_0 + y' \sin \lambda_0, \\ y^* &= -x' \sin \lambda_0 + y' \cos \lambda_0, \\ z^* &= z', \end{aligned} \tag{3}$$

где λ_0 - географическая долгота пункта наблюдения.

Рассмотрим еще одну промежуточную геоцентрическую систему координат $G, x^{**}, y^{**}, z^{**}$. Оси x^{**}, z^{**} лежат на меридиане пункта наблюдения, ось z^{**} направлена в топоцентр, ось y^{**} дополняет систему до правой. Легко видеть на Рис.1, что системы координат x^*, y^*, z^* и x^{**}, y^{**}, z^{**} связаны формулами

$$\begin{aligned} x^{**} &= x^* \sin \varphi_0 - z^* \cos \varphi_0, \\ y^{**} &= y^*, \\ z^{**} &= x^* \cos \varphi_0 + z^* \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, что системы координат $G, x^{**}, y^{**}, z^{**}$ и T, x'', y'', z'' различаются сдвигом на величину геоцентрического расстояния R пункта наблюдения. Таким образом имеем

$$\begin{aligned} x'' &= x^{**}, \\ y'' &= y^{**}, \\ z'' &= z^{**} - R. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь, подставляя формулы (3) в (4), а затем в формулы (5), получим соотношения (1).

Задача № 5.

Емельянов Н. В.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДИМОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОЛЕЦ САТУРНА

Содержание

- 5.1. Введение.
- 5.2. Постановка задачи.
- 5.3. Системы координат, применяемые в задаче.
- 5.4. Порядок вычисления искомых величин.
- 5.5. Методическое указание о формулировке индивидуального задания каждому студенту.
- 5.6. Форма отчета.
- 5.7. Примеры вычислений.
- Литература.
- Приложение. Вывод формул для вычисления координат в картинной плоскости.

5.1. Введение

Изучение динамики планет и спутников делается на основе астрометрических наблюдений. Такие наблюдения проводятся с помощью наземных телескопов, телескопов размещенных на искусственных спутниках Земли, а также с помощью космических аппаратов, направляемых к другим планетам. Известно, что наиболее точная модель орбитального движения планеты или спутника получается из наблюдений, выполненных на больших интервалах времени. Космические аппараты, движущиеся вблизи других планет работают относительно короткое время. Поэтому роль наблюдений, полученных на космических аппаратах, бывает незначительной даже при их высокой точности. Поэтому необходимы регулярные наблюдения тел Солнечной системы с помощью наземных телескопов.

Одним из наиболее интересных объектов, наблюдаемых с Земли, является большая планета Сатурн вместе со своими спутниками и кольцом. Сатурн обращается по своей орбите вокруг Солнца с периодом около 28 лет. Плоскость кольца остается почти неизменной в пространстве, имея небольшой наклон к плоскости орбиты планеты. Поэтому раз в 14 лет направление от центра Сатурна в сторону Солнца и в сторону Земли оказывается вблизи плоскости кольца. Эти моменты имеют большое значение для наблюдений системы Сатурна по нескольким причинам. Во-первых, кольцо в эти моменты располагается к нам ребром и, будучи весьма тонким, становится невидимым. Кажущееся исчезновение кольца позволяет наблюдать с Земли малые спутники, которые движутся вблизи кольца. В другие моменты эти спутники заметить нельзя, так как их изображение засвечивается ореолом от яркого кольца. Во-вторых, плоскость кольца совпадает с плоскостью экватора планеты, а в этой же плоскости располагаются орбиты восьми главных спутников Сатурна. Поскольку в течение нескольких месяцев до и после исчезновения кольца орбиты располагаются ребром к Земле и к Солнцу, происходят явления видимых взаимных покрытий и взаимных затмений главных спутников Сатурна. Диски спутников и тени от них неразличимы при наблюдениях в наземные телескопы. Однако изменение яркости пар спутников, участвующих в каждом явлении, легко измеряется с помощью фотометров или ПЗС-камер. Спад яркости спутников непосредственно зависит от их взаимного расположения, которое, в свою очередь, зависит от параметров орбит. Таким образом, из обработки фотометрии спутников во время их взаимных покрытий и затмений получают

высокоточные астрометрические данные, уточняются параметры орбит спутников и улучшаются их эфемериды.

Любопытно, что после добавления к полной базе данных наблюдений главных спутников Сатурна астрометрических результатов фотометрии спутников во время их взаимных покрытий и затмений в 2009 году были определены коэффициенты квадратичных по времени изменений долгот спутников. Эти изменения обусловлены только диссипацией механической энергии, вызванной приливным трением в телах планеты и спутников. Оказалось, в частности, что спутник Сатурна Энцелад получает от приливного трения в десять раз больше тепловой энергии, чем считалось ранее. Это изменило некоторые выводы планетологии.

В силу всего сказанного становится очевидным, что моменты, когда кольцо Сатурна становится к нам ребром, оказываются весьма важными. Крупными эфемеридными службами мира эти моменты предвычисляются и публикуются. Однако полезно уметь делать независимые предвычисления обстоятельств рассматриваемого явления. В процессе решения этой задачи можно многому научиться.

5.2. Постановка задачи

При наблюдениях с Земли Сатурна и его спутников важно знать на любой момент времени ориентацию кольца по отношению к картинной плоскости, то есть к плоскости, перпендикулярной топоцентрическому направлению на Сатурн. Необходимо знать угол P_t между проекцией оси кольца на картинную плоскость и направлением из центра планеты в полюс мира. Положим, что этот угол, аналогично позиционному углу, будет положительным, когда северный полюс Сатурна наклонен от направления на северный полюс мира в сторону востока. Необходимо знать также угол Q , который образует ось кольца Сатурна с картинной плоскостью, и будем считать его положительным, если северный полюс Сатурна наклонен в сторону наблюдателя.

Неизменная ориентация оси кольца Сатурна, совпадающая с осью вращения Сатурна, задается экваториальными небесными координатами: прямым восхождением α_0 и склонением δ_0 северного полюса планеты. На самом деле известна незначительная прецессия этой оси. Для упрощения задачи мы пренебрежем прецессией и возьмем координаты α_0 и δ_0 такими, как они заданы на эпоху 12 часов 1 января

2000 года. Эти значения можно найти в соответствующей справочной литературе. Первоисточником этих данных можно считать публикуемый раз в три года доклад Рабочей группы по картографическим координатам и элементам вращения Международного астрономического союза. Последний такой доклад опубликован в виде статьи (Archinal et al., 2011). Вот эти значения, заданные в системе координат ICRF:

$$\alpha_0 = 40.589 \text{ град.},$$

$$\delta_0 = 83.537 \text{ град.}$$

Чтобы определить искомые углы P_t и Q , нужно знать ориентацию картинной плоскости в той же системе координат ICRF. Эта плоскость определяется топоцентрическим прямым восхождением α и склонением δ центра Сатурна, заданными на момент наблюдения в ICRF. Для упрощения задачи будем пренебрегать отличиями топоцентрических координат от геоцентрических. Значения геоцентрических координат Сатурна α и δ на момент наблюдения можно определить с помощью эфемеридных служб в интернете. Одна из таких служб называется MULTI-SAT (Emel'yanov, Arlot, 2008). Ее адрес в интернете:

<http://www.sai.msu.ru/neb/nss/indexr.htm>

В русскоязычном варианте Службы естественных спутников планет следует выбрать "Эфемериды". Далее "Эфемериды с постоянным шагом по времени" для Сатурна. В списке спутников нужно найти "Центр планеты Сатурн". Остальные параметры можно взять такими, какие заданы на странице по умолчанию. В окне после слов "Введите начальный момент" нужно ввести дату (год, месяц, день) и время (час, мин, сек) в заданной на странице шкале времени. При нажатии на экранную кнопку "Вычислить" появляется новая страница, на которой в первой строке таблицы эфемерид даются искомые координаты Сатурна α и δ .

На этом этапе будут известны все необходимые исходные данные задачи.

5.3. Системы координат, применяемые в задаче

В процессе использования наблюдений небесных тел рассматриваются различные системы координат. Одной из них является система прямоугольных координат с началом в центре наблюдаемого тела и основной плоскостью, перпендикулярной топоцентрическому направ-

лению на это тело. Такую плоскость называют картинной плоскостью.

Обозначим через x, y, z оси геоэквиаториальной системы координат некоторой эпохи, например, эпохи J2000, с началом в центре наблюдаемого тела.

Будем полагать, что топоцентрическое направление на наблюдаемое тело задано прямым восхождением α и склонением δ в топоцентрической системе координат с осями, параллельными осям x, y, z .

Наряду с картинной плоскостью рассмотрим плоскость, проходящую через топоцентрический радиус-вектор наблюдаемого тела и ось z . Направим ось y'' по линии пересечения этих плоскостей так, чтобы оси z и y'' образовывали угол, не превышающий 90 градусов. Ось x'' расположим в картинной плоскости в направлении увеличения прямых восхождений. Ось z'' будет дополнять систему координат до правой и окажется направленной вдоль топоцентрического вектора наблюдаемого тела.

Обозначим через R топоцентрическое расстояние наблюдаемого тела. Тогда для любой точки, расположенной в картинной плоскости и имеющей в этой плоскости координаты x'', y'' , можно определить ее так называемые *тангенциальные относительные топоцентрические координаты*

$$X_t = \frac{x''}{R}, \quad Y_t = \frac{y''}{R}. \quad (1)$$

Соответственно определяется *тангенциальный позиционный угол* P_t точки из соотношения

$$\operatorname{tg} P_t = \frac{x''}{y''}. \quad (2)$$

Тангенциальный позиционный угол P_t отсчитывается в картинной плоскости от направления на север к востоку от 0 до 360 градусов.

Пусть одновременно с первым небесным телом, для которого определена картинная плоскость, наблюдается второе небесное тело. Топоцентрический вектор второго тела пересечет картинную плоскость первого тела в некоторой точке с координатами x'', y'' . Таким образом тангенциальные относительные топоцентрические координаты X_t, Y_t и соответствующий тангенциальный позиционный угол P_t задают положение второго тела относительно первого.

Как было указано выше, топоцентрическое направление каждого тела задается геоэквиаториальными координатами. Обозначим через

α и δ прямое восхождение и склонение первого тела. Пусть соответствующие координаты второго тела заданы выражениями $\alpha + \Delta\alpha$, $\delta + \Delta\delta$. Тогда тангенциальные относительные топоцентрические координаты X_t, Y_t, P_t можно вычислить по формулам (Introduction aux éphémérides astronomiques, 1997)

$$X_t = \frac{\cos(\delta + \Delta\delta) \sin \Delta\alpha}{\sin(\delta + \Delta\delta) \sin \delta + \cos(\delta + \Delta\delta) \cos \delta \cos \Delta\alpha}, \quad (3)$$

$$Y_t = \frac{\sin(\delta + \Delta\delta) \cos \delta - \cos(\delta + \Delta\delta) \sin \delta \cos \Delta\alpha}{\sin(\delta + \Delta\delta) \sin \delta + \cos(\delta + \Delta\delta) \cos \delta \cos \Delta\alpha}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} P_t = \frac{Y_t}{X_t}. \quad (5)$$

Введенная здесь система координат $x''y''z''$ применяется также для описания видимой ориентации оси вращения планеты. Особенно наглядно ось вращения планеты представлена изображением колец Сатурна. Ось симметрии колец с высокой точностью совпадает с осью вращения планеты.

Изображение колец Сатурна изменяется со временем. Кольца временами больше "раскрыты" к наблюдателю, в другие моменты они видны очень узкой полоской, а иногда совсем исчезают, так как видны к нам с ребра. Толщина колец столь мала, что они становятся практически невидимыми.

Видимую ориентацию оси вращения планеты можно описать двумя углами: тангенциальным позиционным углом северного направления оси P_t и углом наклона к картинной плоскости Q . При этом положительный наклон Q будет соответствовать отклонением северного направления оси вращения планеты в сторону наблюдателя.

В случае изображений колец Сатурна при положительных P_t кольца будут повернуты против часовой стрелки, а при положительных Q мы увидим кольца со стороны северного полюса планеты.

Ориентацию оси вращения планеты в пространстве обычно задают прямым восхождением α_0 и склонением δ_0 северного по отношению к эклиптике направления оси. Рассмотрим в качестве второго наблюдаемого объекта некоторую точку на оси вращения планеты, расположенную на единичном расстоянии от ее центра. Координаты P_t, Q этой точки, а, следовательно и координаты оси вращения относительно картинной плоскости можно тогда определить из сле-

дующих соотношений:

$$\begin{aligned}x_0 &= \cos \delta_0 \cos \alpha_0, \\y_0 &= \cos \delta_0 \sin \alpha_0, \\z_0 &= \sin \delta_0,\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}x'' &= -x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha, \\y'' &= -x_0 \sin \delta \cos \alpha - y_0 \sin \delta \sin \alpha + z_0 \cos \delta, \\z'' &= x_0 \cos \delta \cos \alpha + y_0 \cos \delta \sin \alpha + z_0 \sin \delta,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\operatorname{tg} P_t = \frac{x''}{y''}, \quad \operatorname{tg} Q = \frac{-z''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}.\tag{8}$$

Заметим, что угол Q в точности равен планетоцентрической планетоэкваториальной широте наблюдателя, в частности, центра Земли.

Вывод формул (7) дан в Приложении.

В некоторых задачах необходим обратный переход от координат x'', y'', z'' к координатам x, y, z . В этом случае можно воспользоваться формулами

$$\begin{aligned}x &= -x'' \sin \alpha - y'' \sin \delta \cos \alpha + z'' \cos \delta \cos \alpha, \\y &= x'' \cos \alpha - y'' \sin \delta \sin \alpha + z'' \cos \delta \sin \alpha, \\z &= y'' \cos \delta + z'' \sin \delta.\end{aligned}\tag{9}$$

Наряду с тангенциальными относительными топоцентрическими координатами X_t, Y_t, P_t рассматриваются *дифференциальные относительные топоцентрические координаты*, которые определяются следующим образом. Пусть топоцентрическое направление первого наблюдаемого объекта задано прямым восхождением α и склонением δ . Пусть одновременно наблюдается второе небесное тело, имеющее прямое восхождение $\alpha + \Delta\alpha$ и склонение $\delta + \Delta\delta$. Дифференциальные относительные топоцентрические координаты X, Y второго тела, определяются соотношениями

$$X = \Delta\alpha \cos \delta, \quad Y = \Delta\delta.\tag{10}$$

Рассмотрим на небесной сфере большой круг, проходящий через первое и второе небесные тела. Угол на небесной сфере между кругом склонений первого тела и указанным большим кругом называют позиционным углом P . Он отсчитывается от северного направления

круга склонений первого тела в восточном направлении, то есть против часовой стрелки, от 0 до 360 градусов. Рассматривается также топоцентрическое угловое расстояние s между двумя телами. Оно является дугой большого круга на небесной сфере.

Если заданы прямое восхождение α и склонение δ первого тела, а также прямое восхождение $\alpha + \Delta\alpha$ и склонение $\delta + \Delta\delta$ второго тела, то позиционный угол P и угловое расстояние s можно вычислить из следующих соотношений:

$$\operatorname{tg} P = \frac{\cos(\delta + \Delta\delta) \sin \Delta\alpha}{\sin \Delta\delta + 2 \cos(\delta + \Delta\delta) \sin \delta \sin^2 \frac{\Delta\alpha}{2}}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} a_{yz} = & 2 \cos \delta \sin \delta \sin \alpha \cos \Delta\delta \sin^2 \frac{\Delta\alpha}{2} + \\ & + \cos^2 \delta \sin \alpha \sin \Delta\delta - \\ & - \cos \delta \sin \delta \cos \alpha \cos \Delta\delta \sin \Delta\alpha + \\ & + \sin^2 \delta \sin \alpha \sin \Delta\delta \cos \Delta\alpha + \\ & + \sin^2 \delta \cos \alpha \sin \Delta\delta \sin \Delta\alpha, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} a_{zx} = & -2 \cos \delta \sin \delta \cos \alpha \cos \Delta\delta \sin^2 \frac{\Delta\alpha}{2} - \\ & - \cos^2 \delta \cos \alpha \sin \Delta\delta - \\ & - \cos \delta \sin \delta \sin \alpha \cos \Delta\delta \sin \Delta\alpha - \\ & - \sin^2 \delta \cos \alpha \sin \Delta\delta \cos \Delta\alpha + \\ & + \sin^2 \delta \sin \alpha \sin \Delta\delta \sin \Delta\alpha, \end{aligned} \quad (13)$$

$$a_{xy} = \cos \delta \cos(\delta + \Delta\delta) \sin \Delta\alpha, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} b_{xyz} = & \cos(\delta + \Delta\delta) \cos(\alpha + \Delta\alpha) \cos \delta \cos \alpha + \\ & + \cos(\delta + \Delta\delta) \sin(\alpha + \Delta\alpha) \cos \delta \sin \alpha + \\ & + \sin(\delta + \Delta\delta) \sin \delta, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\operatorname{tg} s = \frac{\sqrt{a_{yz}^2 + a_{zx}^2 + a_{xy}^2}}{b_{xyz}}. \quad (16)$$

Для однозначного определения позиционного угла P из соотношения (11) следует учесть, что знак $\cos P$ равен знаку знаменателя в правой части соотношения (11). Формулы (11)-(16) выводятся из формул сферической тригонометрии (Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, 1976).

5.4. Порядок вычисления искомых величин

Итак, нам известны координаты северного полюса Сатурна α_0 и δ_0 (см. выше). С помощью сервера эфемерид MULTI-SAT мы нашли

также топоцентрические координаты Сатурна α и δ . Теперь искомые параметры ориентации оси колец Сатурна найдутся по формулам (6), (7), (8).

5.5. Методическое указание о формулировке задачи каждому студенту

Формулировка задачи для каждого студента заключается в задании даты и момента времени, для которого требуется определить видимую ориентацию кольца Сатурна. Далее можно предложить студенту провести вычисления для ряда моментов, выбирая их самостоятельно, с целью попытаться простым перебором моментов найти моменты кажущегося исчезновения кольца. В 2009 году это произошло 4 сентября примерно в 13 ч. 42 мин. 11 с. по шкале всемирного координированного времени UTC. Следует искать аналогичный момент через половину периода орбитального движения Сатурна, т. е. примерно через 14 лет.

Для реализации метода и выполнения практикума можно предложить студенту составление вычислительной программы на любом языке программирования.

5.6. Форма отчета по задаче практикума

Каждому студенту предлагается один вариант исходных данных. После решения задачи студент должен подготовить письменный отчет по следующему плану:

1. Введение (О чем идет речь? Почему возникают рассматриваемые проблемы? Зачем это нужно?).
2. Постановка задачи (Цель исследования. Что дано? Что определить?).
3. Описание последовательности вычислений с приведением применяемых формул.
4. Задание исходных данных.
5. Полученные результаты.

В целом такой отчет может иметь объем 2-3 страницы.

5.7. Примеры вычислений

Ряд примеров вычислений содержится в таблице. Смысл чисел в колонках таблицы следующий:

Дата (год, месяц, день), момент (час, мин, сек), α (час, мин, сек), δ (град, мин, сек), P_t (град), Q (град).

Моменты заданы в шкале *UTC*.

2008	1	01	0	0	0.00	10	42	21.409887	10	00	51.724476	-5.63	-6.74
2008	1	31	0	0	0.00	10	37	12.161049	10	38	26.785379	-5.71	-7.49
2008	3	01	0	0	0.00	10	28	32.794739	11	32	55.170956	-5.85	-8.61
2008	3	31	0	0	0.00	10	20	33.877827	12	18	34.226566	-5.96	-9.56
2008	4	30	0	0	0.00	10	16	57.931107	12	35	56.704300	-6.01	-9.94
2008	5	30	0	0	0.00	10	19	14.983314	12	19	11.838789	-5.98	-9.61
2008	6	29	0	0	0.00	10	26	54.132931	11	32	13.264709	-5.87	-8.64
2008	7	29	0	0	0.00	10	38	25.820280	10	23	01.163529	-5.69	-7.20
2008	8	28	0	0	0.00	10	52	05.292632	09	01	05.754706	-5.48	-5.52
2008	9	27	0	0	0.00	11	06	06.911490	07	37	00.758286	-5.24	-3.80

Литература

Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н.Дубошина. – М.: Наука, 1976, 862 с.

Archinal B. A., A’Hearn M. F., Bowell E., Conrad A., Consolmagno G. J., Courtin R., Fukushima T., Hestroffer D., Hilton J.L., Krasinsky G.A., and 7 coauthors. Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. V. 109. P. 101-135.

Emel’yanov N. V., Arlot J.-E. The natural satellites ephemerides facility MULTI-SAT. *Astronomy and Astrophysics*. 2008. V. 487. P. 759–765.

Introduction aux éphémérides astronomiques. Supplément explicatif à la connaissance des temps. (eds. Simon J.-L., Chapront-Touzé M., Morando B., Thuillot W.). 1997, Paris: BDL, 450 с.

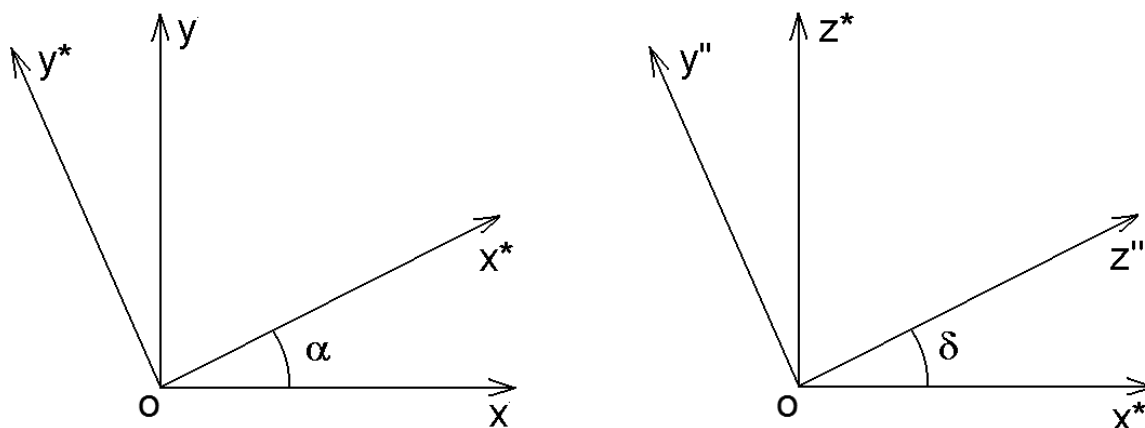


Рис. 1: Объектоцентрические системы координат.

Приложение. Вывод формул для вычисления координат в картинной плоскости.

Выведем здесь формулы связи между объектоцентрической геоэкваториальной системой координат и системой координат, связанной с картинной плоскостью.

Оси этих систем координат и промежуточной системы координат изображены на Рис. 1. Начало систем координат расположено в центре объекта наблюдений O . В системе координат O, x, y, z Плоскость x, y параллельна плоскости экватора Земли, поэтому будем называть систему координат O, x, y, z геоэкваториальной.

Рассмотрим некоторую вспомогательную промежуточную систему координат O, x^*, y^*, z^* такую, что оси x^*, y^* лежат в плоскости x, y , при этом ось x^* расположена в плоскости, образуемой осью z и вектором топоцентрического направления объекта наблюдений. В этом случае, как это видно на левой части Рис. 1, координаты x^*, y^*, z^* и x, y, z связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x^* &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y^* &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\ z^* &= z. \end{aligned} \tag{17}$$

Определим связь координат этой промежуточной системы с введенными выше координатами x'', y'', z'' . На правой части Рис. 1 изображены оси координат в плоскости, образуемой осью z^* , совпадающей с осью z , и вектором топоцентрического направления объекта

наблюдений. Ось z'' по определению направлена по топоцентрическому направлению объекта, ось y'' направлена по линии пересечения картинной плоскости и плоскости, образуемой осью z и вектором топоцентрического направления объекта наблюдений. Напомним, что ось x^* лежит в геоэкваториальной плоскости. Теперь видно, что угол между осями x^* и z'' равен склонению объекта. Очевидно также, что оси y^* и x'' совпадают. Отсюда следует, что координаты x^*, y^*, z^* и x'', y'', z'' связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x'' &= y^* , \\ y'' &= -x^* \sin \delta + z^* \cos \delta, \\ z'' &= x^* \cos \delta + z^* \sin \delta . \end{aligned} \tag{18}$$

Теперь, подставляя (17) в формулы (18), получим соотношения (7).

Задача № 6.

Емельянов Н. В.

ТРАЕКТОРИЯ ПОДСПУТНИКОВОЙ ТОЧКИ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ ДЛЯ ГЕОСИНХРОННЫХ СПУТНИКОВ

Содержание

- 6.1. Введение.
 - 6.2. Постановка задачи.
 - 6.3. Порядок решения задачи.
 - 6.4. Методическое указание о формулировке индивидуального задания каждому студенту.
 - 6.5. Форма отчета по задаче практикума.
 - 6.6. Примеры вычислений.
- Литература.

6.1. Введение в задачу практикума

Геосинхронные искусственные спутники Земли имеют самое важное значение для науки и практики использования космоса в интересах жизни людей на Земле. Так же, как наши предки привыкли к электричеству, мы привыкли к метровым тарелкам на балконах наших домов и, когда смотрим телевизор, даже не задумываемся над тем, какой путь проделал телевизионный сигнал, оказавшийся в нашем доме. Очень часто оказывается, что этот сигнал побывал в космосе и пришел к нам с расстояния более 36 тысяч километров, что почти в шесть раз больше радиуса земного шара. Чтобы наземным антеннам не нужно было вращаться, все время отслеживая положение движущегося спутника-ретранслятора, запускают спутники на такую орбиту, по которой он делает один оборот за полный оборот Земли вокруг своей оси. Такие спутники называют геосинхронными. Часто говорят о геостационарных спутниках, которые вообще должны быть неподвижны относительно поверхности Земли. На самом деле такой спутник создать нельзя. Даже если его запустить на геостационарную орбиту, то очень быстро из-за влияния различных возмущающих факторов спутник сойдет с такой орбиты и будет колебаться возле геостационарного положения. Основными возмущающими факторами, влияющими на движение геосинхронного спутника, являются несферичность Земли, а также притяжение Луны и Солнца. Качания спутника вокруг геостационарного положения приводят к тому, что он фактически занимает на орбите намного больше места, чем его размеры. По этой причине, а также в результате большой востребованности спутников-ретрансляторов, все места на такой орбите уже заняты. Новые аппараты можно установить на геостационарной орбите только взамен старых спутников, отслуживших свой срок. Как и куда свести с орбиты старый аппарат, эту проблему мы оставим пока в стороне. В данной задаче сосредоточимся на вопросе о том, сколько места занимает геосинхронный спутник на орбите из-за своих колебаний относительно геостационарной точки.

Орбита абсолютно геостационарного спутника должна быть круговой и лежать точно в плоскости экватора Земли. Возмущения, действующие на спутник из-за несферичности Земли, притяжения Луны и Солнца, приводят к тому, что орбита приобретает ненулевой эксцентриситет и некоторый малый наклон к плоскости земного экватора. Именно из-за наклона и эксцентриситета орбиты спутник колеблется относительно геостационарного положения. Наиболее нагляд-

но такие движения можно представить траекторией подспутниковой точки на поверхности Земли. Форма этой траектории и ее размер представляют интерес при эксплуатации геосинхронного спутника-ретранслятора.

Задача практикума состоит в построении траектории подспутниковой точки для геосинхронного спутника Земли при заданных эксцентриситете и наклоне его орбиты к плоскости земного экватора.

6.2. Постановка задачи

Рассмотрим движение геосинхронного спутника Земли. Будем полагать, что движение происходит по неизменной кеплеровской эллиптической орбите. Исходными данными будут значения эксцентриситета e и наклона i орбиты. Факт геосинхронности спутника дает нам также значение среднего движения n . Впрочем, само это значение никак не будет использовано. Главное обстоятельство состоит в том, что среднее движение должно быть в точности равно частоте вращения Земли. Требуется построить траекторию подспутниковой точки на поверхности Земли.

Поскольку движение по кеплеровской орбите является периодическим, достаточно построить траекторию спутника на интервале времени в одни звездные сутки. Конечно, траектория будет зависеть от ориентации орбиты спутника в пространстве, то есть от долготы восходящего узла Ω и углового расстояния перигея от восходящего узла орбиты ω . Элементы орбиты i , Ω и ω мы будем отсчитывать в гео-экваториальной системе координат x, y, z с осью x , направленной в точку весны. Обозначим через φ , λ широту и долготу спутника в этой неподвижной системе координат.

6.3. Порядок решения задачи

Нас интересует положение подспутниковой точки относительно поверхности вращающейся Земли. Поэтому задача состоит в вычислении астрономических широты φ и долготы спутника λ' , отсчитываемой от гринвичского меридиана. Траекторию подспутниковой точки будем строить путем табулирования значений φ и λ' с некоторым шагом по времени на интервале одного оборота спутника по орбите. Координаты φ , λ вычисляются по формулам кеплерового движения.

Тогда λ' найдется из соотношения

$$\lambda' = \lambda - S, \quad (1)$$

где S - угол поворота гринвичского меридиана относительно направления на точку весны, то есть звездное время. Естественно, что S изменяется на 2π за одни звездные сутки.

Траекторию подспутниковой точки на поверхности Земли удобно строить относительно точки, в которой спутник находится в некоторый начальный момент времени. Без ограничения на общность решения задачи можно положить долготу узла орбиты, равной нулю, и строить траекторию подспутниковой точки относительно точки на поверхности Земли, лежащей на экваторе и на гринвичском меридиане. Очевидно, что траектория подспутниковой точки относительно поверхности Земли будет замкнутой. Поэтому начальную точку на этой траектории можно выбрать произвольно. Пусть в начальный момент времени спутник находится в восходящем узле орбиты. В этот момент долгота подспутниковой точки λ' будет равна нулю. В этот момент также $S = 0$. В момент прохождения спутником восходящего узла орбиты его истинная аномалия v равна $-\omega$, а средняя аномалия M равна некоторому начальному значению M_0 . Это начальное значение нужно вычислить по формулам кеплеровского движения как значение M при $v = -\omega$.

Так как спутник геосинхронный, то средняя аномалия M изменяется во времени с такой же скоростью, как и S . Поэтому можно положить

$$M = M_0 + S. \quad (2)$$

Теперь можно табулировать λ' , изменяя S с некоторым шагом от нуля до 2π . Для каждого значения S вычисляем M по формуле (2), затем λ по формулам кеплеровского движения и, наконец, λ' по формуле (1).

6.4. Методическое указание о формулировке задания каждому студенту

К началу выполнения работы по данной задаче практикума студенты должны знать формулы кеплеровского движения. Эти формулы можно найти, например, в книгах (Субботин, 1968; Дубошин, 1975).

Формулировка задачи для каждого студента заключается в задании значений эксцентриситета e и наклона i орбиты геосинхронного спутника. Задача для каждого студента состоит в построении семейства траекторий подспутниковой точки для ряда значений углового расстояния перигея от восходящего узла орбиты ω . Можно порекомендовать значения $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ$.

Угол S можно измерять в градусах и брать равным в пределах $0^\circ - 359^\circ$ с шагом 1° .

Для реализации метода и выполнения задания по задаче практикума можно предложить студенту составление вычислительной программы на любом языке программирования.

6.5. Форма отчета по задаче практикума

Каждому студенту предлагается один вариант исходных данных. После выполнения задания студент должен подготовить письменный отчет по следующему плану:

1. Введение (О чем идет речь? Зачем это нужно?).
2. Постановка задачи (Цель исследования. Что дано? Что определить?).
3. Описание последовательности вычислений с приведением применяемых формул.
4. Задание исходных данных.
5. Полученные результаты.

В целом такой письменный отчет может иметь объем 2-3 страницы.

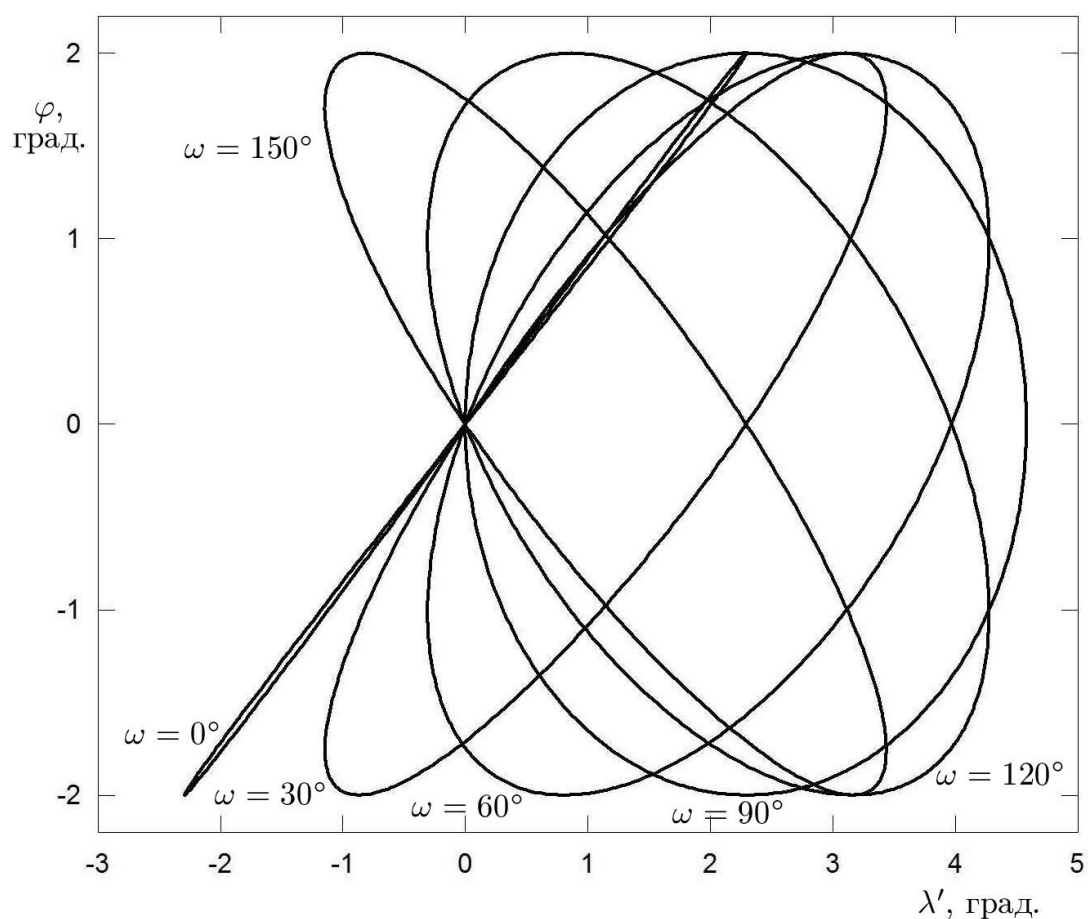


Рис. 1: Примеры траекторий подспутниковой точки геосинхронного спутника с параметрами орбиты: эксцентриситет $e = 0.02$, наклон $i = 2$ град. Значения ω , для которых получены траектории, даны возле графиков.

6.6. Примеры вычислений

Примеры вычислений сделаны для трех вариантов значений эксцентриситета и наклона орбиты геосинхронного спутника. Результаты показаны на Рис. 1, 2, 3. Принятые значения исходных параметров приведены в подписях к рисункам. Значения ω даны прямо на рисунках возле соответствующих графиков.

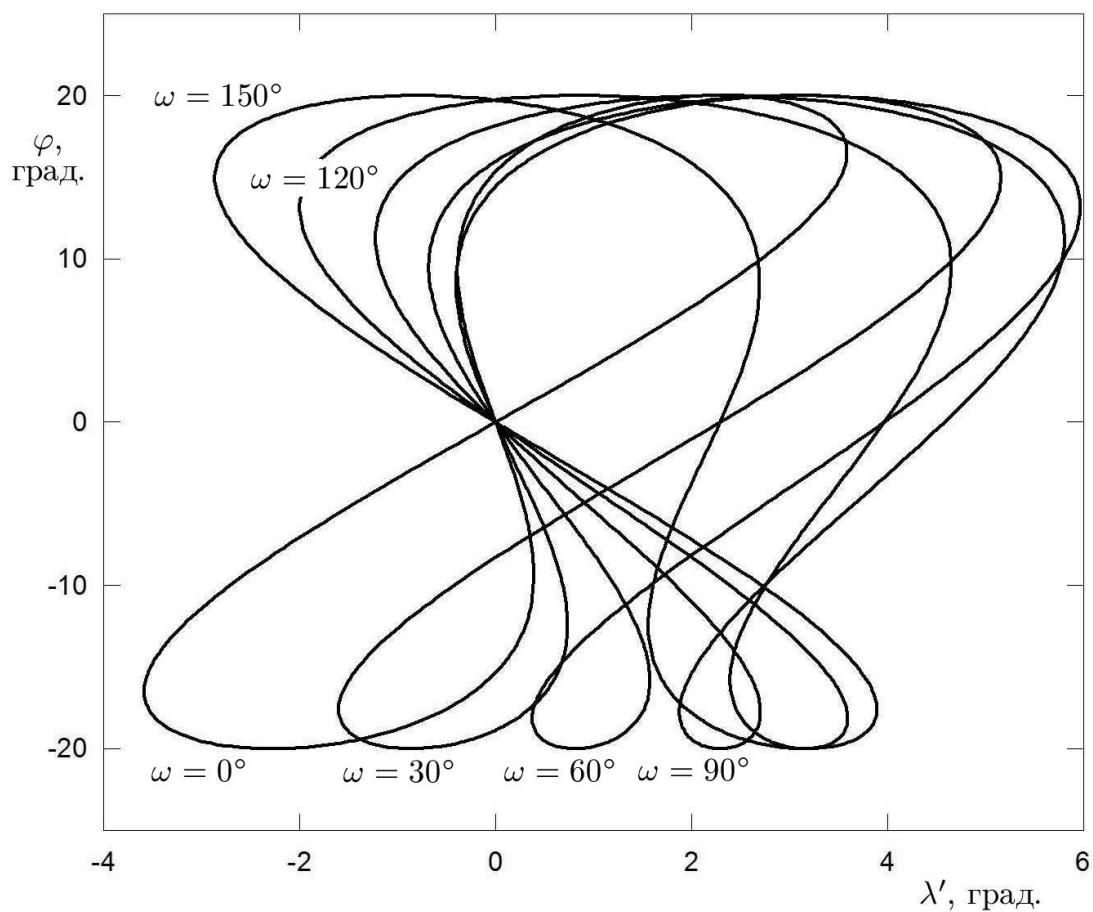


Рис. 2: Примеры траекторий подспутниковой точки геосинхронного спутника с параметрами орбиты: эксцентриситет $e = 0.02$, наклон $i = 20$ град. Значения ω , для которых получены траектории, даны возле графиков.

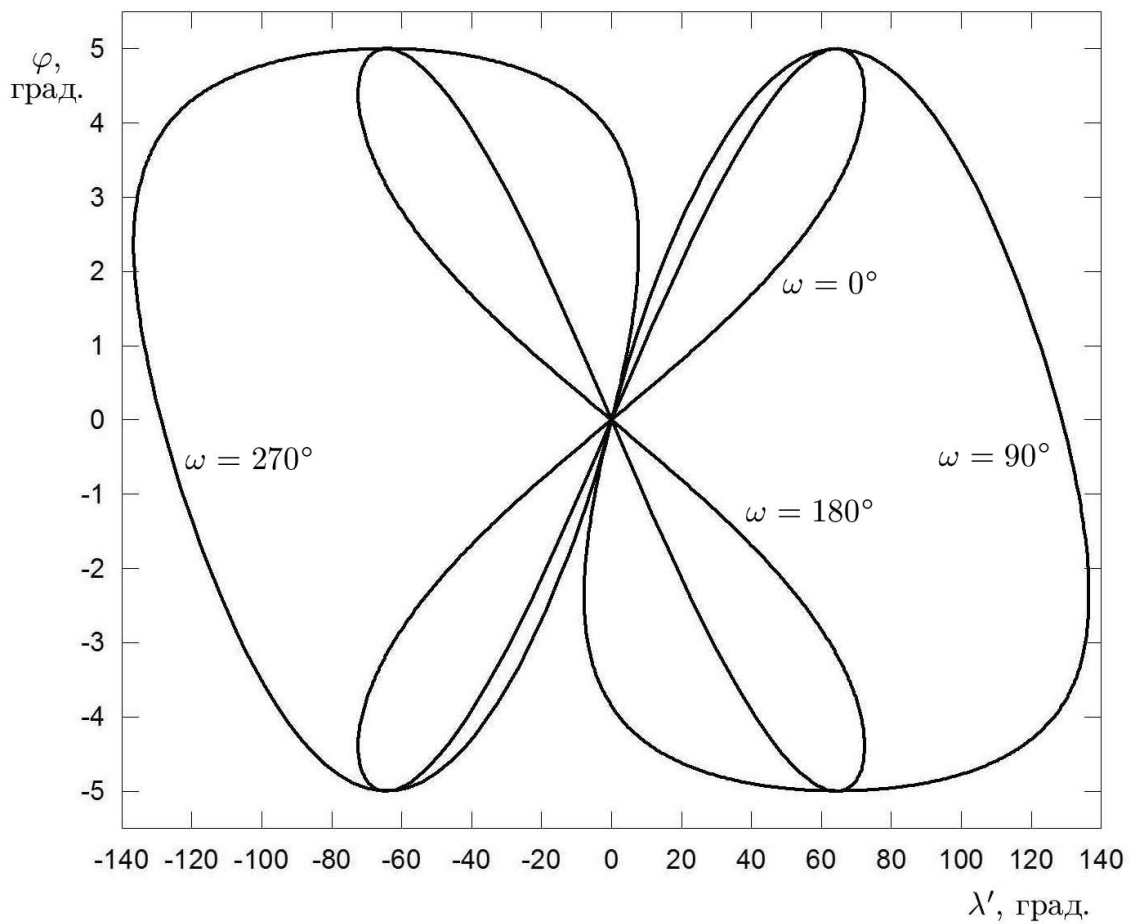


Рис. 3: Примеры траекторий подспутниковой точки геосинхронного спутника с параметрами орбиты: эксцентриситет $e = 0.6$, наклон $i = 5$ град. Значения ω , для которых получены траектории, даны возле графиков.

Литература

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Учебник для студентов университетов, обучающихся по специальности "Астрономия". Издание 3-е, дополненное. М: Наука, 1975 . 800 с.
2. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М: Наука, 1968 . 800 с.

Задача № 7.

Емельянов Н. В.

СРАВНЕНИЕ ЭФЕМЕРИД ПЛАНЕТ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ РАЗНЫХ ИСТОЧНИКОВ АСТРОМЕТРИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Содержание

- 7.1. Введение.
 - 7.2. Постановка задачи.
 - 7.3. Порядок решения задачи и примеры.
 - 7.4. Методическое указание о формулировке индивидуального задания каждому студенту.
 - 7.5. Форма отчета по индивидуальному заданию практикума.
- Литература.

7.1. Введение

Планеты являются главными объектами при изучении Солнечной системы. Это обосновывается несколькими причинами. Во-первых, планеты движутся по небу относительно звезд. Во-вторых, некоторые из них – Марс, Юпитер и Сатурн принадлежат к самым ярким небесным светилам. В третьих, планеты и их спутники – часть расширяющейся среды обитания людей. Уже сейчас автоматические агенты человека работают на поверхностях тел Солнечной системы. В четвертых, движение планет влияет на движение Луны, которое в свою очередь влияет на вращение Земли. Знание тонкостей вращения Земли необходимо для решения многих научных и практических задач.

Основой всех дел, связанных с планетами, являются модели их движения или эфемериды. Модель движения планет строится на основе общих законов природы. Применяются самые совершенные математические методы и методы вычислений. Модель включает в себя физические параметры, характеризующие планеты и спутники планет. Уточнение параметров делается по всем имеющимся наблюдениям. Эфемериды являются конечным результатом исследований, так как содержат в себе все знания о динамике планет и спутников, включая все имеющиеся результаты астрономических наблюдений. В то же время эфемериды являются средством исследований, так как содержат в себе все знания о динамике планет и спутников.

Постоянное стремление исследователей – уточнение модели движения планет. Прогресс в этом деле определяется главным образом точностью наблюдений, но также интервалом времени наблюдений. Поэтому продолжение наблюдений планет и их спутников даже с прежней точностью всегда актуально.

В былые времена, когда не было в распоряжении исследователей мощных компьютеров, строились аналитические теории движения планет методами небесномеханической теории возмущений. Аналитические теории и сейчас остаются востребованными. Однако для моделирования движения планет и вычисления эфемерид на не очень отдаленное будущее эффективнее работают методы численного интегрирования уравнений движения, хотя они и требуют значительных затрат времени работы компьютеров. Поэтому для вычисления эфемерид по построенной модели движения обычно не возобновляют всякий раз интегрирование дифференциальных уравнений, а пользуются заранее запасенными файлами, хранящими коэффициенты разложения прямоугольных гелиоцентрических координат планет в ря-

ды по полиномам Чебышева на каждом из небольших подинтервалов времени отдельно.

Доступ к эфемеридам может осуществляться несколькими способами. Обычно эфемериды планет используются в какой-нибудь вычислительной программе, решающей ту или иную научную или практическую задачу. К этой программе добавляют некоторый стандартный блок, который вычисляет координаты планет с помощью полиномов Чебышева, постоянно читая для этого файл с коэффициентами разложения координат. В некоторых случаях вычислительная программа пользователя эфемеридами сама обращается за такими вычислениями через интернет на какой-то другой компьютер в мире, на котором имеется необходимая для этого программа и файлы данных.

В процессе научных исследований, связанных с планетами, часто возникает необходимость получения эфемерид в виде таблиц координат на ряд заданных моментов времени. Обычно манипулируют таблицами эфемерид, записанными в виде простых текстовых файлов. Чтобы получить такие таблицы, нет необходимости обладать файлами с коэффициентами разложения координат планет и соответствующими вычислительными программами. Для этой цели в мире служат эфемеридные серверы, разрабатываемые в крупных научных центрах на основе максимума знаний о движении планет. Доступ к услугам таких эфемеридных служб осуществляется через интернет с помощью интернет-навигаторов или "браузеров". Заказ эфемерид делается на странице интернета, а результат получается на компьютере на таких же страницах.

Разработка высокоточных моделей движения планет на основе всех имеющихся в мире наблюдений ведется лишь в нескольких научных центрах, которые и осуществляют доступ к своим эфемеридам через страницы интернета. Это весьма весьма сложное и трудоемкое дело. Между такими научными центрами устанавливается некоторая состязательность. Соревнуются они между собой в основном по количеству и точности используемых наблюдений, но также по полноте учета эффектов, влияющих на движение планет. Труднее всего дается учет притяжения астероидов на движение Марса. Это из-за того, что астероидов очень много, а массы этих блуждающих в Солнечной системе малых тел известны с довольно низкой точностью. Для большинства астероидов массы вообще неизвестны.

Самыми продвинутыми в деле создания высокоточных моделей движения и эфемерид планет являются три научных центра.

Один из них – это Лаборатория реактивного движения (Jet propulsion laboratory, JPL) в Соединенных штатах Америки, работающая под присмотром агентства NASA. Сокращенно этот научный центр обозначают так: JPL. Эфемериды планет и Луны, предоставляемые этим институтом имеют обозначение DEXXX/LEXXX, где XXX означает номер версии эфемерид.

Другой первоисточник эфемерид планет – это парижский Институт небесной механики и вычисления эфемерид (Institut de mecanique celeste et de calcul des ephemerides), сокращенно IMCCE. Этот институт имеет богатую научную историю. Он под названием "Бюро долгот" был основан в 1795 году. В нем работали Лагранж и Лаплас, Пуанкаре и Тиссеран, Леверье и Гайо. Прославился институт Бюро долгот своими достижениями в небесной механике. Аналитическая теория движения планет, созданная Урбеном Леверье, и развивающаяся до настоящего времени в течение полутора веков была единственным источником самых точных эфемерид планет. В последние годы в IMCCE методами численного интегрирования дифференциальных уравнений движения на основе всех имеющихся наблюдений разработана новая, одна из самых точных моделей движения планет. IMCCE предоставляет соответствующие эфемериды, которые имеют обозначение INPOPXX, где XX означает номер версии.

Независимо от американских и французских специалистов разрабатывает высокоточные эфемериды планет русская женщина, сотрудница Института прикладной астрономии РАН (ИПМ РАН) в С.-Петербурге Елена Владимировна Питьева. В последние годы она создала модель движения планет и Луны по точности конкурирующую с американскими и французскими эфемеридами. Свою модель движения планет и Луны Е.В.Питьева назвала ЕРМ-УУУУ, где УУУУ – это год, к которому приписывается очередная версия. В модель движения включены все возмущающие факторы, необходимые для обеспечения наивысшей точности эфемерид. Ею использован обширный наблюдательный материал, включая современные наблюдения, сделанные с помощью межпланетных космических аппаратов.

Каждый из указанных здесь институтов предоставляет свои эфемериды в виде файлов данных с прилагаемой к ним программой, написанной на нескольких самых распространенных языках программирования. Программа может быть вставлена в программу решения задачи пользователя. Для вычисления эфемерид программа по мере необходимости читает файлы данных. Файлы и тексты программ

размещены для свободного заимствования на сайтах институтов.

Кроме предоставления эфемерид планет в виде файла данных и прилагаемой к нему программы некоторые из эфемерид доступны по запросу на страницах интернета.

На сайте JPL для этого служит интерактивная среда HORIZONS Web-Interface. Выйти на нее можно по адресу:

<http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

В среде HORIZONS можно получить эфемериды планет, Луны, спутников планет, а также большинства известных астероидов. Запрос эфемерид формулируется заполнением полей ввода на страницах. Моменты эфемерид задаются начальным моментом, конечным моментом и шагом по времени. Имеется возможность ввести до 15 произвольных моментов одновременно и получить для них эфемериды. Предоставляется на выбор множество различных типов координат, шкал времени и форматов выдачи. Что касается версии эфемерид, то всегда доступна только одна, самая последняя версия. В настоящее время это эфемериды DE431/LE431.

Французские эфемериды, сделанные в IMCCE, тоже доступны на страницах интернета путем заказа таблиц координат планет для ряда моментов времени с постоянным шагом. Страница для заказа эфемерид имеет адрес

http://www.imcce.fr/en/ephemerides/formulaire/form_ephepos.php

Можно получить эфемериды любой большой планеты, Луны, некоторых спутников планет, а также большинства известных астероидов. Предоставляются на выбор несколько типов координат, шкал времени и форматов выдачи.

Для эфемерид планет и Луны Е.В.Питьевой (ЕРМ-YYYY) нет соответствующих страниц в интернете на сайте ИПА РАН.

Кроме перечисленных выше средств доступа к эфемеридам существует особый сервер эфемерид, разработанный Н.В. Емельяновым одновременно в парижском институте IMCCE и в Государственном астрономическом институте имени П.К. Штернберга Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Этот сервер, имеющий название MULTI-SAT, обладает следующими особенностями.

Служба эфемерид MULTI-SAT предназначена для получения эфемерид спутников планет и самих планет, имеющих спутники, то есть Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона. Моменты времени можно задавать начальным моментом, шагом по времени и ко-

личеством моментов с этим заданным шагом. Кроме того, имеется исключительно только в сервере MULTI-SAT возможность вводить целую таблицу результатов наблюдений и получать для этих наблюдений разности наблюденных и вычисленных по эфемеридам значений координат. Моменты наблюдений могут следовать в произвольном порядке, а число наблюдений не ограничено. Вместо наблюдений можно ввести таблицу произвольных моментов времени любой длины, и эфемериды будут вычислены сразу для всей таблицы моментов. Можно заказать разности координат планеты и ее спутника или разности координат двух спутников. Предоставляются на выбор несколько версий американских эфемерид DEXXX, несколько версий французских планетных эфемерид INPOPXX, а также планетные эфемериды EPM-YYYY, разработанные в ИПА РАН Е.В. Питьевой. Благодаря такому выбору можно сравнивать между собой разные планетные эфемериды непосредственно в топоцентрических координатах. Можно получить разности эфемерид из любого внешнего источника и эфемерид, доступных в сервере MULTI-SAT. Для этого эфемериды из внешнего источника следует ввести в форме наблюдений. В сервере MULTI-SAT имеется целый ряд дополнительных возможностей, отсутствующих в других таких средствах. В частности, страницы интернета предоставляются на выбор на одном из трех языков: на английском, на французском или на русском. Адреса сайтов службы эфемерид MULTI-SAT следующие:

на web-сервере ГАИШ МГУ

<http://www.sai.msu.ru/neb/nss/indexr.htm>

на web-сервере IMCCE

http://www.imcce.fr/hosted_sites/saimirror/nssephe.php

Как уже указывалось выше, эфемериды планет, получаемые из разных источников, различаются между собой. Нельзя сказать, какие из них наиболее точные. Однако, сравнивая эфемериды из разных источников между собой, можно получить некоторую внешнюю оценку их точности.

Задача спецпрактикума состоит в сравнении эфемерид планет, полученных из разных источников, используя возможности службы эфемерид MULTI-SAT. Целью будет научить пользоваться различ-

ными средствами получения эфемерид планет в интернете.

7.2. Постановка задачи

В предлагаемой задаче нет исходных данных. Их требуется получить с помощью служб эфемерид планет и спутников, доступных через интернет. Предлагается использовать службу эфемерид MULTI-SAT (ГАИШ МГУ, IMCCE) и интерактивную среду HORIZONS (JPL). Адреса этих средств указаны выше.

Задача ставится следующим образом. Выберем небесное тело - планету или спутник большой планеты. Зададим интервал времени для эфемерид: начальный момент, конечный момент и шаг таблицы по времени. В некоторых случаях вместо конечного момента времени следует задать количество строк выдачи, то есть количество моментов времени, для которых нужно вычислить эфемериды. Необходимо получить координаты выбранного небесного тела, с помощью двух разных теорий или разных моделей движения и вычислить разности этих координат для каждого момента времени. При этом вычитание координат специально можно не делать, нужно воспользоваться средством вычитания эфемерид, заложенным в службе эфемерид MULTI-SAT.

Примеры небесных тел можно выбирать самостоятельно. Предпочтительно выбирать большие планеты, имеющие спутники или сами спутники планет (кроме Луны).

7.3. Порядок решения задачи и примеры

Рассмотрим несколько задач сравнения эфемерид.

Задача 1. Сравним эфемериды планеты Уран, вычисляемые с помощью одной из последних планетных теорий, разработанных в JPL, с последней версией эфемерид планет, разработанной в IMCCE. Пусть это будут модели DE421 (JPL) и INPOP10 (IMCCE). Для решения задачи нет необходимости получать эфемериды Урана на сайте JPL. Эти эфемериды доступны в службе MULTI-SAT. Будем сравнивать эфемериды в геоцентрических экваториальных координатах - прямом восхождении и склонении. В службе естественных спутников планет MULTI-SAT в разделе "Эфемериды с постоянным шагом по времени" выбираем планету Уран. Далее в списке спутников (в кон-

це списка) выбираем "Центр планеты Уран". Выберем в специальном меню "Относительно геоэкватора и точки весны". Код обсерватории и эпоху экватора и равноденствия оставим так, как это уже стоит по умолчанию: 500 и ICRF, соответственно. В списке версий планетной теории выбираем DE421. Вводим в специальное поле начальный момент в форме "Год месяц день час мин сек с долями например, 2013 12 12 12 12 12

Проверяем, правильно ли выбран формат ввода начального момента. Выбираем из меню "ед. шага" единицу: день. Вводим в специальные поля величину шага, например, 1 и число шагов, например, 20. Нажимаем экранную кнопку "Вычислить". Получаем в отдельном окне заголовочные строки и таблицу вида

```
2013 12 12 12 12 12.00 0 31 58.308674 2 41 23.733353
2013 12 13 12 12 12.00 0 31 57.361481 2 41 20.197449
2013 12 14 12 12 12.00 0 31 56.602276 2 41 17.877171
2013 12 15 12 12 12.00 0 31 56.031403 2 41 16.775036
```

...

Теперь выделяем (мышкой) в окне только строки таблицы и записываем их в папке обмена.

Далее входим в окно службы эфемерид MULTI-SAT "Эфемериды для таблицы моментов и (О-С) для наблюдений". Для этого можно вернуться в окно, где мы заказывали эфемериды Урана, и, держа нажатой кнопку "ctrl", нажать мышкой на слова "Эфемериды для таблицы моментов и (О-С) для наблюдений", находящиеся вверху страницы. Появится новое окно заказа разностей "О-С", в нашем случае разностей эфемерид. На этой странице в списке спутников выбираем "Центр планеты Уран" и оставляем выбранную по умолчанию планетную теорию INPOP10. В окно ввода внизу страницы копируем из папки обмена запомненные там эфемериды. Проверяем выбор остальных параметров на странице (в данном примере все остается выбранным по умолчанию) и нажимаем кнопку "Вычислить". В отдельном окне получаем таблицу вида

```
2013 12 12 12 12 12.00 -0.0829 -0.1184
2013 12 13 12 12 12.00 -0.0828 -0.1183
2013 12 14 12 12 12.00 -0.0828 -0.1182
2013 12 15 12 12 12.00 -0.0827 -0.1181
```

...

Как видно из данного примера, эфемериды двух сравниваемых планетных теорий отличаются по прямому восхождению и склонению

на величины, порядка 0.1 секунды дуги.

Далее можно повторить процедуру для других дат эфемерид. Можно выбрать такую начальную дату:

1950 1 1 1 1 1

В этом случае нужно учитывать следующее обстоятельство. На странице для главных спутников планеты Уран (U1 - U5) по умолчанию отмечена теория V.Lainey. Эта теория дает эфемериды только на интервале времени (1995/01/01.0-2015/04/15.7). Несмотря на то, что мы выбрали не спутник, а центр планеты Уран, сервис не будет выдавать эфемериды, поскольку наша дата (1950 год) не входит в этот интервал. Проблема решается так. Нужно для спутников выбрать версию GUST86, которая работает для любых дат, поскольку это аналитическая теория движения спутников. Далее поступаем аналогично предыдущему примеру. Нужно только не забыть на странице сравнения эфемерид также отметить версию GUST86 для спутников Урана. Получим таблицу вида

1950 1 1 1 1 1.00 -0.0361 -0.0278

1950 1 2 1 1 1.00 -0.0361 -0.0278

1950 1 3 1 1 1.00 -0.0361 -0.0277

1950 1 4 1 1 1.00 -0.0360 -0.0277

...

Как видно из полученной таблицы для 1950 года различия эфемерид по сравниваемым теориям оказываются существенно меньшими, чем для 2013 года.

Задача 2. Сравним эфемериды Галилеева спутника Юпитера Ио, получаемые с помощью сервера эфемерид HORIZONS JPL, с эфемеридами этого спутника, разработанными V.Lainey в IMCCE (версия V2.0). Для этого выдадим таблицу эфемерид с помощью HORIZONS, введем ее в качестве наблюдений в MULTI-SAT и получим разности эфемерид как разности "О-С".

На сервере HORIZONS нужно выбрать в качестве объекта (Target Body) спутник Юпитера Ио. Следует задать на страницах HORIZONS: Ephemeris Type: OBSERVER

Observer Location: Geocentric [500]

Time Span: Start=2013-1-1, Stop=2014-1-20, Step=1 d

Table Settings: QUANTITIES=1; date/time format=JD;
extra precision=YES

Полученную таблицу эфемерид вида

2456293.500000000 04 23 34.7371 +20 52 29.580

2456294.500000000 04 23 16.1117 +20 51 46.136
2456295.500000000 04 22 55.7040 +20 51 26.126

...

следует запомнить в папке обмена и ввести ее затем в соответствующее окно в сервере MULTI-SAT.

В сервере MULTI-SAT нужно вызвать страницу “Ephemerides and (O-C) for a file of dates and positions” для главных и близких спутников Юпитера. На этой странице все установки можно взять по умолчанию, за исключением поля

Choose planet theory version:

для которого нужно выбрать вариант DE431

и поля choose format of the moment

для которого нужно выбрать вариант JD (Julian Day).

Далее можно нажать экранную кнопку Calculate и получить в новом окне на экране компьютера таблицу вида

2456293.500000 0.0014 -0.0002

2456294.500000 -0.0083 0.0002

2456295.500000 0.0038 -0.0027

Вторая и третья колонки этой таблицы показывают разности эфемерид в экваториальных геоцентрических координатах (прямое восхождение и склонение), выраженные в секундах дуги.

Заметим, что в эфемеридном сервере HORIZONS в настоящее время используется планетная эфемерида DE431. В сервере MULTI-SAT мы также выбрали эту планетную эфемериду. Следовательно, полученные разности эфемерид обусловлены только различиями в теориях движения спутника Юпитера Ио в двух службах эфемерид.

7.4. Методическое указание о формулировке индивидуальных заданий каждому студенту

К началу выполнения работы по данной задаче практикума студенты должны уметь оперировать средствами меню и полей ввода на страницах интернета. Необходимо иметь представление о составе тел Солнечной системы. Нужно знать основы астрометрии, в частности, шкалы времени и эпохи систем экваториальных координат.

В качестве примеров можно выбирать большие планеты и спутники из тех, которые показаны в сервере MULTI-SAT.

Формулировка задания для каждого студента заключается в задании небесного тела, начальной даты эфемерид, шага по времени и

числа строчек таблицы эфемерид. Можно варьировать шкалы времени (UTC, TT), выбирать топоцентр в разных обсерваториях, демонстрируя влияние суточного параллакса на значения вычисляемых топоцентрических координат небесных тел. Можно показать, насколько различаются эфемериды, вычисленные в разных системах координат.

7.5. Форма отчета по индивидуальному заданию практикума

Каждому студенту предлагается один вариант исходных данных. После решения задачи студент должен подготовить письменный отчет по следующему плану:

1. Введение (О чем идет речь? Зачем это нужно?).
2. Постановка задачи (Цель исследования).
3. Описание последовательности использования окон при работе в интернете.
4. Задание начальных дат и шага по времени для эфемерид.
5. Полученные результаты с указанием всех использованных параметров эфемерид.

В целом такой отчет может иметь объем 2-3 страницы.

Литература

1. Emel'yanov N. V., Arlot J.-E. The natural satellites ephemerides facility MULTI-SAT. *Astronomy and Astrophysics*. 2008. V. 487. P. 759–765.

Задача № 8.

Емельянов Н. В.

ОБСТОЯТЕЛЬСТВА СОЛНЕЧНЫХ ЗАТМЕНИЙ НА МАРСЕ

Содержание

- 8.1. Введение в задачу практикума.
 - 8.2. Постановка задачи.
 - 8.3. Порядок решения задачи.
 - 8.4. Форма отчета по индивидуальному заданию.
- Литература.

8.1. Введение в задачу практикума

Среди множества явлений, происходящих на небе, затмения Солнца - самые интересные. На Земле это эффектное и значительное событие. Однако астрономы не ограничиваются созерцанием происходящего на небе, они пытаются извлечь из наблюдений максимум информации о небесных телах. Поскольку солнечные затмения - далеко не единственный источник астрономических данных, ценность профессиональных наблюдений солнечных затмений определяется точностью получаемых данных по сравнению с точностью данных из других источников. Уже давно в распоряжении астрономов имеются средства измерений орбитальных движений Земли и Луны, которые обеспечивают гораздо большую точность, чем наблюдения Солнечных затмений.

Совсем другая ситуация складывается при солнечных затмениях на других планетах. Удаленность планет и их спутников от Земли дает другие соотношения между точностью наблюдений различных типов. Солнечные затмения на Юпитере наблюдаемы с Земли как прохождения теней от Галилеевых спутников по диску планеты. В 19-м веке наблюдения этих прохождений давали ценную информацию для уточнения орбит спутников. Солнечные затмения происходят также на спутниках планет. На одном из спутников Солнце может заслоняться другим спутником. Такие взаимные затмения наблюдаемы с Земли как явление временного ослабления блеска спутника, иногда до полного его видимого исчезновения. Фотометрия таких явлений с Земли позволяет получить позиционную информацию о спутниках. Этот источник астрометрических данных в случаях спутников Сатурна и Урана обеспечивает точность в десятки раз лучшую, чем точность обычных астрометрических наблюдений. Для спутников Юпитера эти точности сравнимы.

Особый случай солнечных затмений в настоящее время составляют солнечные затмения на Марсе. Затмения устраивают спутники Марса Фобос и Деймос. С Земли эти явления практически не наблюдаемы. Тень от спутников на поверхности Марса с Земли не видна даже в мощные телескопы. Взаимные затмения Фобоса и Деймоса чрезвычайно редки. Поэтому с Земли эти явления еще никто не наблюдал. Однако вокруг Марса и на его поверхности трудятся наблюдатели-роботы. С орбиты спутника Марса они фотографируют тени от спутников на Марсе. С поверхности планеты аппараты фиксируют ослабление света от Солнца во время солнечного затмения.

Астрометрические данные, получаемые из этих наблюдений, дают существенную и весьма ценную добавку к другим астрометрическим наблюдениям. Для построения всех современных моделей движения Фобоса использовались наблюдения солнечных затмений на Марсе.

Из сказанного ясно, что расчеты эфемерид солнечных затмений на Марсе должны быть обычным делом для астронома. Задача практика состоит в том, чтобы научить студентов делать такие расчеты. Для вычислений точных координат тени от спутника на поверхности планеты в заданный момент времени необходимы эфемериды орбитального движения Марса, эфемериды орбитального движения спутника и модель вращения планеты. Эти данные в настоящее время вполне доступны для любого исследователя. Однако для обычного практика такая задача была бы слишком громоздка. Поэтому мы ограничимся выяснением более общих обстоятельств солнечных затмений на Марсе. Поставим следующие вопросы. Попадают ли тени от спутников на поверхность Марса всегда при каждом обороте спутника или только в определенные периоды времени? Каковы размеры тени и полутени от спутника на поверхности Марса? С какой скоростью пробегает тень по поверхности? Сколь долго длится затмение?

8.2. Постановка задачи

Рассмотрим первую из перечисленных выше задач. Попадают ли тени от спутников на поверхность Марса всегда при каждом обороте спутника или только в определенные периоды времени? Для ответа на этот вопрос нужно в первую очередь знать, какова бывает планетоэкваториальная широта Солнца за время полного оборота Марса по своей орбите. Максимальное по модулю значение этой широты равно наклону экватора планеты к плоскости ее орбиты. Искомый наклон можно определить как угол между планетоцентрическим направлением на северный полюс Марса и осью его орбиты (перпендикуляра к плоскости орбиты). Поскольку и ось вращения Марса и ось орбиты поворачиваются из-за различных возмущений, для упрощения задачи возьмем средние положения этих осей на эпоху J2000 (12 часов всемирного времени 1 января 2000 г.). Исходные данные возьмем из первоисточников. Геоэкваториальные координаты полюса Марса в системе координат эклиптики и равноденствия эпохи J200 даются в работе (Archinal et al., 2011). Прямое восхождение α_0 и склонение

δ_0 на эпоху J2000 имеют следующие значения:

$$\alpha_0 = 317.68143 \text{ град.}, \quad \delta_0 = 52.88650 \text{ град.}$$

Средние значения наклона I_{orb} и долготы восходящего узла Ω_{orb} орбиты Марса в эклиптической системе координат эпохи J2000 на момент J2000 возьмем из работы (Simon et al, 1994) следующими:

$$I_{orb} = 1.84972648 \text{ град.}, \quad \Omega_{orb} = 49.55809321 \text{ град.}$$

Заметим, что приведенные здесь углы даны в разных системах координат. Для связи этих систем потребуется значение угла наклона земного экватора к эклиптике ε . Возьмем это значение из работы (Брумберг и др., 2004):

$$\varepsilon = 23.439291111111 \text{ град.}$$

Для ответа на поставленный вопрос необходимо знать также орбиты Фобоса и Деймоса. Наклоны орбит спутников к экватору Марса не превышают двух градусов. Для упрощения задачи можно приближенно считать их равными нулю. Эксцентриситеты орбит Фобоса и Деймоса весьма малы. Для Фобоса он равен 0.01511, для Деймоса - 0.00024. В нашей задаче будем полагать, что орбиты спутников круговые с радиусами, равными известным значениям больших полуосей орбит. Для решения задачи практикума нам потребуются значения больших полуосей орбит и угловые скорости их орбитальных движений. Обозначим большую полуось орбиты Фобоса через a_P , Деймоса – через a_D . Угловые скорости орбитальных движений обозначим для Фобоса через n_P , Деймоса – через n_D . Возьмем эти значения из работы (Jacobson, 2010):

$$a_P = 9375.0 \text{ км}, \quad a_D = 23458.0 \text{ км},$$

$$n_P = 1128.844409 \text{ град./сут.}, \quad n_D = 285.161886 \text{ град./сут.}$$

Теперь рассмотрим, какие данные нам потребуются для ответа на другие вопросы. Каковы размеры тени и полутени от спутника на поверхности Марса? С какой скоростью пробегает тень по поверхности? Сколь долго длится затмение? Для ответов необходимо знать взаимное расположение центра Солнца, центра Марса и точки наблюдений на поверхности планеты. Потребуется также радиус Солнца R_S . В нашей задаче мы пренебрежем эллиптичностью орбиты Марса

и несферичностью его поверхности. Радиус орбиты a_M примем равным большой полуоси. Из работы (Simon et al, 1994) возьмем

$$a_M = 1.5236793419 \text{ а.е.}$$

Для перевода единиц расстояния из астрономических единиц в километры можно использовать значение астрономической единицы, равное 149597870.70 км (Брумберг и др., 2004).

Считая Марс шарообразным, в качестве его радиуса R_M возьмем его экваториальный радиус из работы (Брумберг и др., 2004):

$$R_M = 3396.19 \text{ км.}$$

Угловая скорость вращения Марса (Archinal et al., 2011)

$$W_M = 350.89198226 \text{ град./сут.}$$

Угловая скорость движения Марса по орбите (Simon et al, 1994)

$$n_M = 0.52403283515087 \text{ град./сут.}$$

Для радиуса Солнца примем значение (Archinal et al., 2011)

$$R_S = 696000 \text{ км.}$$

По фотографиям, сделанным с космических аппаратов, определено, что спутники Марса имеют сложные формы. В частности Фобос имеет размеры 13.0 x 11.4 x 9.1 км (Archinal et al., 2011). Ясно, что формы теней на поверхности Марса могут быть весьма замысловатыми. Однако для упрощения задачи мы будем приближено считать, что спутники имеют сферичные формы с радиусами (Archinal et al., 2011)

$$R_P = 11.08 \text{ км.}$$

для Фобоса и

$$R_D = 6.2 \text{ км.}$$

для Деймоса.

Для ответов на поставленные вопросы нам потребуется вычислить следующие величины:

ε_M - угол наклона экватора Марса к плоскости его орбиты,

$r_P^{(sh)}$ - радиус тени от Фобоса на поверхности планеты,

$r_P^{(pen)}$ - радиус полутени от Фобоса на поверхности планеты,

$r_D^{(sh)}$ - радиус тени от Деймоса на поверхности планеты,
 $r_D^{(pen)}$ - радиус полутени от Деймоса на поверхности планеты,
 $V_P^{(sh)}$ - скорость пробегания тени от Фобоса,
 $V_D^{(sh)}$ - скорость пробегания тени от Деймоса.

Ограничимся частным случаем конфигурации планеты и спутника, когда Солнце находится в плоскости экватора Марса, а центры трех тел (Солнце, планета и спутник) находятся на одной линии. В этом случае размеры теней и скорости их движений окажутся минимальными.

8.3. Порядок решения задачи

Начнем решение первой задачи. Определим наклон экватора Марса к плоскости его орбиты ε_M . Этот угол равен углу между двумя единичными векторами в пространстве, один из которых это вектор $\mathbf{A}_{eq}$, направленный из центра Марса в его северный полюс, другой - вектор $\mathbf{A}_{orb}$, перпендикулярный плоскости орбиты Марса. Компоненты вектора $\mathbf{A}_{eq}$ в геоэкваториальной системе координат нам известны, так как даны прямое восхождение α_0 и склонение δ_0 этого вектора. Поэтому имеем

$$\mathbf{A}_{eq} = \{\cos \delta_0 \cos \alpha_0, \cos \delta_0 \sin \alpha_0, \sin \delta_0\}.$$

Компоненты вектора $\mathbf{A}_{orb}$ нам даны в эклиптической системе координат, поскольку эклиптическая долгота равна $\Omega_{orb} - 90^\circ$, а эклиптическая широта $90^\circ - I_{orb}$. Чтобы получить угол между векторами, следует перевести компоненты вектора $\mathbf{A}_{orb}$ в геоэкваториальную систему координат. Это можно сделать с помощью формулы

$$\mathbf{A}_{orb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ - I_{orb}) \cos(\Omega_{orb} - 90^\circ) \\ \cos(90^\circ - I_{orb}) \sin(\Omega_{orb} - 90^\circ) \\ \sin(90^\circ - I_{orb}) \end{pmatrix}.$$

Искомый угол ε_M затем найдется из соотношения

$$\operatorname{tg} \varepsilon_M = \frac{\|[\mathbf{A}_{eq}, \mathbf{A}_{orb}]\|}{(\mathbf{A}_{eq}, \mathbf{A}_{orb})},$$

где скобки $[\dots, \dots]$ обозначают векторное, а скобки $(\dots, \dots)$ - скалярное произведение соответствующих векторов. По определению угла ε_M это максимальное по модулю возможное значение широты Солнца.

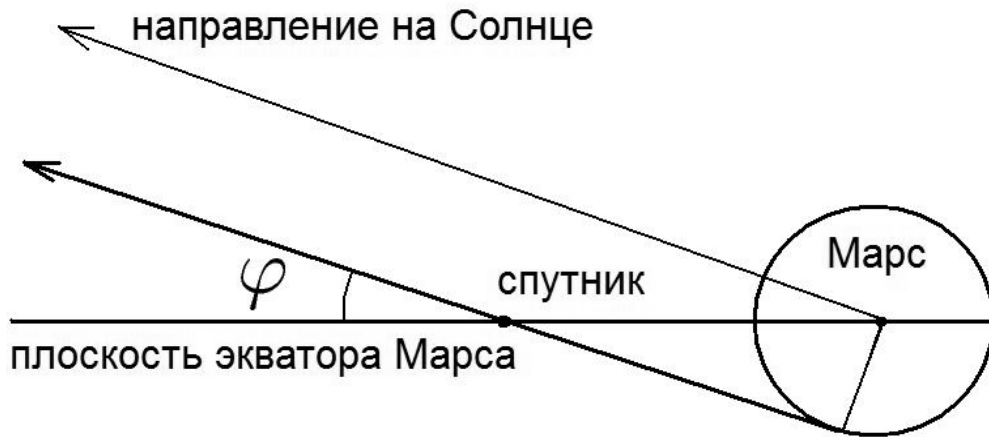


Рис. 1: Предельная конфигурация Солнца, Марса и спутника, когда тень от спутника еще попадает на поверхность планеты.

Рассмотрим случай, когда центры Солнца, Марса и спутника лежат в одной плоскости, а экватор Марса и орбита спутника перпендикулярны этой плоскости. Пусть при этом тень от спутника едва касается поверхности Марса. Такие обстоятельства изображены на Рис. 1. Это предельный случай, когда затмение еще возможно. При незначительном увеличении широты Солнца по сравнению с φ или при выходе Солнца из рассматриваемой плоскости тень от спутника уже не будет попадать на планету, и затмение не будет наблюдаться. Можно легко вычислить это предельное значение широты Солнца φ для Фобоса и Деймоса. Как видно на рисунке, синус этого угла равен отношению радиуса Марса к радиусу орбиты спутника.

Если получится, что максимальное значение широты Солнца меньше, чем φ , это будет означать, что солнечные затмения от рассматриваемого спутника будут происходить всегда на каждом обороте спутника вокруг Марса. В противном случае часть времени в течение марсианского года затмений не будет, тень будет проходить мимо планеты.

Рассмотрим решение второй задачи. Как было условлено, мы рассматриваем случай, когда центры Солнца, Марса и спутника располагаются на одной линии. Сначала определим размер тени и полутени

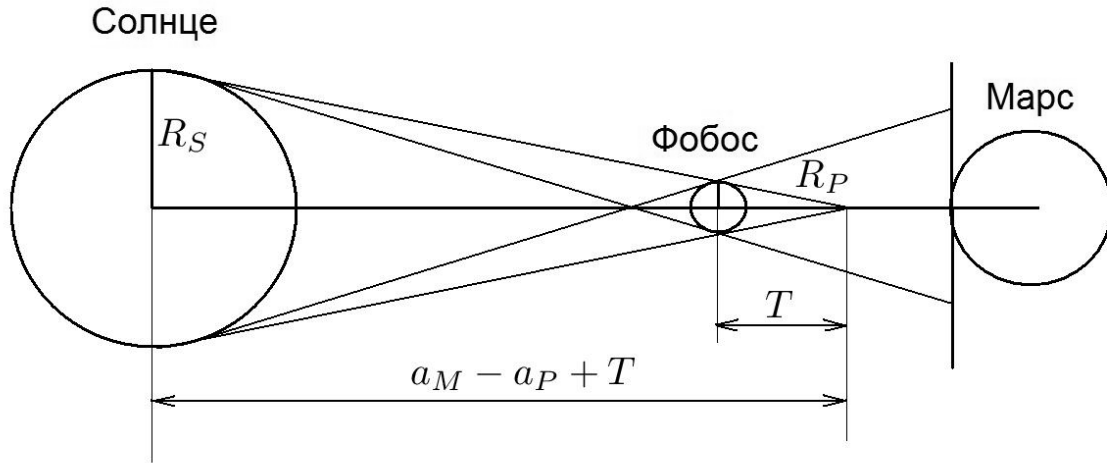


Рис. 2: Схема формирования тени и полутени от спутника на поверхности Марса.

на поверхности планеты. Поскольку Солнце имеет значительно больший размер, чем спутник, то полная тень от него будет ограничена конусом, основание которого расположено на спутнике, а вершина указывает место в пространстве, где заканчивается эта тень.

Схему явления иллюстрирует Рис. 2. Соблюсти масштабы изображений тел не представляется возможным. Рисунок построен в предположении, что конус тени не достигает поверхности планеты. Расстояние от спутника до вершины конуса тени обозначено через T . Для определенности на рисунке обозначены параметры, относящиеся к Фобосу. Из соотношения сторон треугольников, получающихся на рисунке, следует соотношение

$$\frac{R_S}{R_P} = \frac{a_M - a_P + T}{T},$$

откуда легко выводится формула для вычисления T . Имеем

$$T = R_P \frac{a_M - a_P}{R_S - R_P}.$$

Подставляя сюда значения, приведенные в постановке задачи, получим для Фобоса $T = 3628.596$ км. Поскольку расстояние от Фобоса до поверхности Марса составляет $a_P - R_M = 5978.81$, оказывается, что

конус тени не достает до поверхности Марса. На поверхности будет только полутень. Аналогично вычисляется T и $a_P - R_M$ для Деймоса. Это должен сделать исполнитель индивидуального задания по практикуму.

Вывод формулы для вычисления радиуса полутени на основе построений на Рис. 2 предлагается сделать исполнителю задания по практикуму самостоятельно. По выведенным формулам следует вычислить искомые радиусы для полутени от Фобоса и полутени от Деймоса.

Далее нужно заняться определением скорости пробегания теней по поверхности Марса. Тень от спутника будет двигаться с той же скоростью, что и сам спутник то есть величина скорости будет равна n_{PA_P} для Фобоса и n_{DA_D} для Деймоса, соответственно. Однако поверхность Марса будет двигаться в ту же сторону. Предположим, что тень пробегает по экватору. Тогда скорость движения поверхности будет равна $W_M R_M$. В итоге скорость движения тени от Фобоса относительно поверхности определится формулой

$$V_P^{(sh)} = n_{PA_P} - W_M R_M.$$

Для Деймоса это будет

$$V_D^{(sh)} = n_{DA_D} - W_M R_M.$$

Следует подставить сюда заданные в постановке задачи значения параметров и получить значение искомой скорости для Фобоса. Аналогично следует выполнить эти действия и для Деймоса. Обе тени будут двигаться относительно поверхности в одну и ту же сторону, в сторону движения спутников, поскольку спутники движутся быстрее поверхности.

8.4. Форма отчета по индивидуальному заданию

Каждому студенту первоначально предлагается вариант исходных данных, приведенный выше в данном описании. Однако далее можно предложить студентам выполнить вычисления для других вариантов исходных данных, слегка отличающихся от приведенных выше.

После решения задачи студент должен подготовить письменный отчет по следующему плану:

1. Введение (О чем идет речь? Зачем это нужно?).
2. Постановка задачи.
3. Формулы для вычислений и описание последовательности действий.
5. Полученные результаты с приведением всех использованных исходных данных.

В целом такой отчет может иметь объем 2-3 страницы.

Литература

1. Брумберг В.А., Глебова Н.И., Лукашова М.В., Малков А.А., Питьева Е.В., Румянцева Л.И., Свешников М.Л., Фурсенко М.А. Расширенное объяснение к астрономическому ежегоднику. Труды ИПА РАН. Вып. 10. СПб.: ИПА РАН. 2004. 488 с.
2. Archinal B. A., A'Hearn M. F., Bowell E., Conrad A., Consolmagno G. J., Courtin R., Fukushima T., Hestroffer D., Hilton J.L., Krasinsky G.A., and 7 coauthors. Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. V. 109. P. 101-135.
3. Jacobson R. A. The Orbits and Masses of the Martian Satellites and the Libration of Phobos. *The Astronomical Journal*. 2010. V. 139. P. 668-679.
4. Simon J.L., Bretagnon P., Chapront J., Chapront-Touze M., Francou G., Laskar J. Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets. *Astronomy and Astrophysics*. 1994. V. 282. P. 663-683.

Задача № 9.

Ширмин Г.И.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФЕМЕРИДЫ МАЛОЙ ПЛАНЕТЫ

Содержание

- 9.1. Введение в задачу практикума.
 - 9.2. Модель движения малой планеты и системы координат.
 - 9.3. Вычисления по формулам кеплерова движения.
 - 9.4. Определение координат Земли по средним элементам кеплеровой орбиты.
 - 9.5. Исходные данные и порядок вычислений.
 - 9.6. Примеры вычислений эфемерид малых планет
 - 9.7. Порядок выполнения работы по задаче практикума и форма отчета.
- Литература.

9.1. Введение в задачу практикума.

Малые планеты, называемые также астероидами, движутся вокруг Солнца по весьма разнообразным орбитам. Траектории малых планет пролегают как в области орбит больших планет, так и далеко за орбитой Нептуна. Число малых планет с определенными из наблюдений орбитами в настоящее время превышает 700 тыс.

Эфемеридой малой планеты мы называем совокупность ее небесных координат, заданных на ряд моментов времени. Эфемериды необходимы для решения широкого круга задач исследования динамики Солнечной системы, а также для планирования и проведения космических миссий.

Высокоточная астрономическая эфемерида незаменима при сравнении какого-либо длительного ряда наблюдений с теорией движения уже известного небесного объекта. Что же касается только что открытых (то есть, ранее не известных) тел Солнечной системы, то для них совершенно необходима так называемая "поисковая" эфемерида, позволяющая не упустить объект из поля зрения наблюдателей. Дело в том, что в истории астрономии неоднократно бывали случаи потери небесных объектов из-за плохой поисковой эфемериды.

Задачей практикума как раз и является вычисление эфемерид малых планет. Заданными будут параметры движения планеты и моменты времени. Требуется определить ее небесные координаты на заданные моменты.

Небесные координаты светила отсчитываются в некоторой принимаемой системе координат. Система координат описывается моделью, которая опирается на координаты реальных небесных объектов. В прошлом это были "неподвижные" звезды, в современную эпоху – внегалактические радиоисточники.

Движение малой планеты происходит под действием притяжения Солнца и других тел Солнечной системы. На ее движение влияют также динамическое сжатие Солнца и эффекты негравитационной природы. Динамика малых планет обычно рассматривается в рамках ньютоновой механики. Для более точного описания движения учитываются так называемые релятивистские эффекты, обусловленные отличием ньютоновой механики от общей теории относительности. В любом случае в каждой задаче берется некоторая более или менее приближенная динамическая модель.

Для многих практических задач, а также для данной задачи практикума, может применяться приближенная модель движения малой

планеты и приближенная модель системы координат.

В практике современных исследований по практической небесной механике иногда приходится обращаться к старым источникам данных, опубликованных в раритетных печатных изданиях и трудах астрономических обсерваторий. Это оказывается не простым делом, поскольку в прошлом привычными были допущения и действия, которые сейчас уже забыты. Умение работать со старыми источниками данных может оказаться востребованным самым неожиданным образом. Поэтому в данную задачу практикума введены задания такого рода.

9.2. Модель движения малой планеты и системы координат

Мы будем использовать следующую динамическую модель. Движение малой планеты происходит только под действием притяжения Солнца, которое рассматривается как точечная масса. Пренебрегаем смещением центра Солнца по отношению к барицентру Солнечной системы. В рамках этой модели движение считается происходящим по невозмущенной кеплеровой орбите.

Небесные координаты светила зависят от того, из какой точки пространства мы его наблюдаем. Эту точку принято называть топоцентром. В нашей задаче будем пренебрегать смещением геоцентра по отношению к центру масс системы Земля-Луна и полагать, что топоцентр совпадает с геоцентром.

Итак, мы рассматриваем взаимное расположение трех точек: Солнца, Земли и малой планеты. Расположение небесных тел при вычислении эфемериды малой планеты в задаче № 9 практикума показано на рис. 1.

Обозначим через t_{eph} тот момент времени, на который вычисляется эфемерида. Вектор, определяющий эфемериду малой планеты, обозначен через $\mathbf{P}_T$. Начало вектора $\mathbf{P}_T$ совпадет с положением геоцентра в момент t_{eph} , а конец – с положением малой планеты в тот момент t , когда с нее стартовали фотоны, прибывшие к наблюдателю на момент эфемериды t_{eph} . Гелиоцентрическое положение малой планеты в момент t определяется вектором $\mathbf{P}(t)$, а гелиоцентрическое положение геоцентра в момент t_{eph} – вектором $\mathbf{T}(t_{eph})$. Очевидно век-

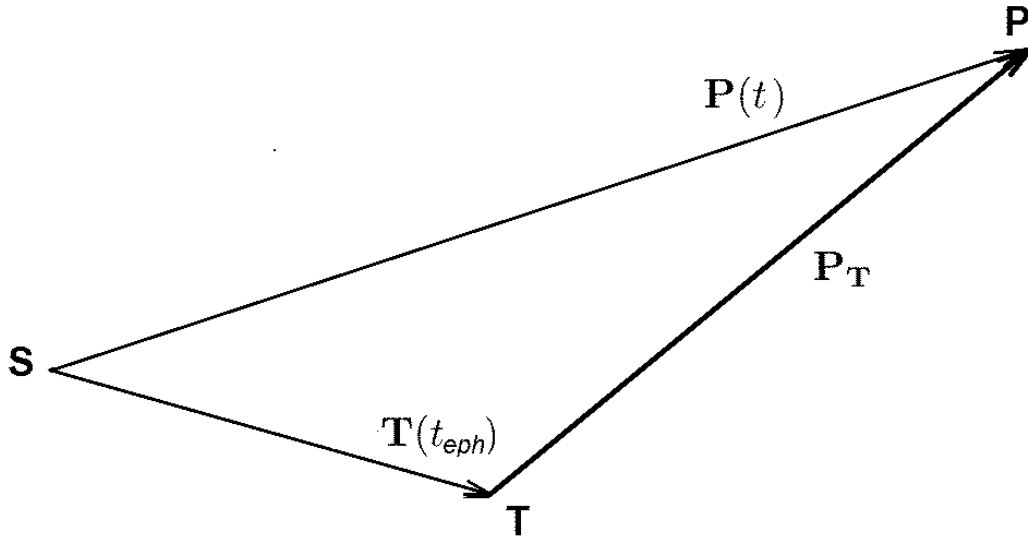


Рис. 1: Пространственное расположение малой планеты $\mathbf{P}$, наблюдателя $\mathbf{T}$ и Солнца $\mathbf{S}$.

торное соотношение

$$\mathbf{P}_T = \mathbf{P}(t) - \mathbf{T}(t_{eph}). \quad (1)$$

Каждое событие имеет момент времени. Время отсчитывается в некоторой шкале. Эфемериды малой планеты будем получать в шкале земного времени ТТ, пренебрегая разностью времени в шкалах TDB и ТТ и считая это последнее время равномерным.

Рассматриваемые векторы задаются своими компонентами в какой-либо системе координат. Будем применять две системы неврацающихся координат: эклиптическую и экваториальную. Для связи систем будем использовать постоянный угол наклона экватора к эклиптике ε . Фиксация систем координат определяется эпохой небесного экватора и точки весеннего равноденствия. Могут применяться различные эпохи. В частности, это может быть эпоха J2000 или эпоха B1950. Эпоха J2000 – это 12 ч. 1 января 2000 г. Юлианский день в этот момент равен $JD=2451545.0$.

Элементы кеплеровых орбит малых планет обычно задаются в гелиоцентрической эклиптической системе координат. Эпоха средней аномалии задается в шкале ТТ. Эфемериды нам нужны в геоэкваториальной системе небесных координат. Моменты эфемерид также будем отсчитывать в шкале земного времени ТТ, пренебрегая разностью времени в шкалах ТДВ и ТТ. Шкала времени ТТ является продолжением шкалы эфемеридного времени, которая применялась в старых работах прошлого столетия. Сейчас во многих случаях эфемериды задаются в шкале времени UTC. В 2017 году разность времени ТТ-UTC составляла 69.183 секунды.

Если при вычислении эфемериды мы учтем конечность скорости распространения света, то получаемые координаты малой планеты будут астрометрическими.

В задаче № 9 практикума требуется получить сферические координаты вектора $\mathbf{P}_T$ в гео-экваториальной системе, то есть прямое восхождение и склонение малой планеты.

Вектор $\mathbf{P}(t)$ находится из теории гелиоцентрического движения малой планеты. Вектор $\mathbf{T}(t_{eph})$ может быть найден разными способами. Если в нашем распоряжении имеется какая-либо модель гелиоцентрического движения Земли, будем пользоваться этой моделью, определяя гелиоцентрический вектор Земли на эфемеридный момент t_{eph} . Но можно поступить иначе. В некоторых обстоятельствах бывает доступна эфемерида Солнца в виде таблицы его прямоугольных координат. Эфемерида Солнца в различных источниках дается в астрометрических прямоугольных координатах. При этом конец геоцентрического радиуса-вектора Солнца соответствует его положению в момент $(t_{eph} - \tau)$ старта тех фотонов с Солнца, которые прибывают на Землю в момент t_{eph} , где τ – световое время от Солнца до Земли. Чтобы получить из таких эфемерид геоцентрический вектор Солнца на момент t_{eph} , нужно эфемериду брать на момент $t_{eph} + \tau$. Световое время τ приближенно можно принять равным 500 секунд. Обозначая геоцентрический вектор Солнца в момент t_{eph} через $\mathbf{S}(t_{eph})$, будем иметь

$$\mathbf{T}(t_{eph}) = -\mathbf{S}(t_{eph}). \quad (2)$$

Что касается эфемериды малой планеты, то неизвестный момент времени t определяется из соотношения

$$t = t_{eph} - \frac{|\mathbf{P}(t) - \mathbf{T}(t_{eph})|}{c},$$

где c - скорость света. Последнее соотношение называют уравнением времени. Поскольку t входит в него еще как аргумент теории движения малой планеты, то уравнение времени решают последовательными приближениями, полагая в нулевом приближении $t = t_{eph}$. Для выполнения этой процедуры необходимо уметь вычислять компоненты вектора $\mathbf{P}(t)$ на любые заданные моменты времени.

Введем обозначения для компонент рассматриваемых векторов в принятых системах эклиптических и экваториальных координат.

Обозначим через x, y, z гелиоцентрические координаты малой планеты в эклиптической системе координат, через x', y', z' гелиоцентрические координаты малой планеты в экваториальной системе координат, Эти координаты будут относиться к моменту времени t .

Далее обозначим через X_T, Y_T, Z_T - гелиоцентрические экваториальные координаты Земли, а через X_s, Y_s, Z_s - геоцентрические экваториальные координаты Солнца. Эти координаты будут относиться к моменту времени t_{eph} . Очевидно, что

$$X_s = -X_T, \quad Y_s = -Y_T, \quad Z_s = -Z_T.$$

Компоненты вектора $\mathbf{P}_T$ в экваториальной системе обозначим через X, Y, Z .

На основании соотношений (1), (2) можно записать

$$X = x' + X_s, \quad Y = y' + Y_s, \quad Z = z' + Z_s, \quad (3)$$

где x', y', z' определяются на момент времени t , а X_s, Y_s, Z_s - на момент t_{eph} .

Эфемерида нам нужна в виде таблицы экваториальных небесных координат малой планеты: прямого восхождения α и склонения δ . Их главные значения лучше вычислять с помощью соотношений

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (4)$$

При определении квадранта угла α следует учитывать, что знак $\cos \alpha$ совпадает со знаком X .

Геоцентрическое расстояние малой планеты R вычисляется по формуле

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (5)$$

Теперь уравнение времени выражается в виде

$$t = t_{eph} - \frac{R}{c}. \quad (6)$$

Теория движения малой планеты дает нам гелиоцентрические эклиптические координаты малой планеты x, y, z , как функции времени t . Связь экваториальных x', y', z' и эклиптических координат x, y, z дается соотношениями

$$x' = x, \quad y' = y \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon, \quad z' = y \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon, \quad (7)$$

где ε – угол наклона экватора к эклиптике.

Вычисление координат Земли, то есть вектора $\mathbf{T}(t_{eph})$, на момент времени t_{eph} можно делать приближенно по средним элементам ее кеплеровой орбиты. Как это делать, рассмотрено ниже.

В задаче № 9 практикума согласно принятой модели движения малой планеты гелиоцентрические эклиптические координаты x, y, z вычисляются по формулам кеплеровой орбиты. Как это делать – описано в следующем параграфе.

9.3. Вычисления по формулам кеплерова движения

В модели кеплерова движения положение и скорость движущейся пассивно гравитирующей материальной точки отсчитываются в произвольной невращающейся системе прямоугольных координат x, y, z . В случае данной задачи практикума – это гелиоцентрическая эклиптическая система небесных координат.

Для определения координат на заданный момент времени t считаются известными элементы кеплеровой орбиты:

- n – среднее движение, размерность радиан/ед.времени;
- e – эксцентриситет, безразмерный;
- i – наклон (двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью Oxy), рад.;
- M_0 – средняя аномалия в эпоху t_0 – значение средней аномалии M в начальный момент времени t_0 , рад.;
- ω – угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;
- Ω – долгота восходящего узла орбиты – угол в плоскости Oxy между осью x и линией узлов, рад.;

Задан также начальный момент времени t_0 – эпоха средней аномалии.

Наклон i может принимать значения от 0 до π . При $i > \pi/2$ движение небесного объекта по орбите считается обратным.

Наряду со средним движением n в качестве параметра орбиты может рассматриваться также большая полуось орбиты a , связанная с n третьим законом Кеплера:

$$a = \left(\frac{\mu}{n^2} \right)^{1/3}. \quad (8)$$

Движение происходит в неизменной плоскости, проходящей через начало координат. В этой плоскости определена орбитальная система прямоугольных координат ξ, η с началом, совпадающим с началом системы координат x, y, z , причем ось абсцисс $O\xi$ направлена по линии апсид в направлении на перигецентр орбиты.

Для вычисления координат сначала находится средняя аномалия M на момент t по формуле

$$M = M_0 + n(t - t_0). \quad (9)$$

Затем решается уравнение Кеплера относительно эксцентрической аномалии E :

$$E - e \sin E = M. \quad (10)$$

Решение находится классическим методом итераций. Каждая новая итерация E_n находится из предыдущей E_{n-1} по формуле

$$E_n = M + \sin E_{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (11)$$

При этом в качестве начального приближения берется $E_0 = M$, а итерации продолжаются до тех пор, пока модуль разности между последовательными итерациями $|E_{n-1} - E_n|$ не станет меньше заданного числа ε^* .

Заметим здесь, что в литературе встречаются более эффективные итерационные формулы для решения уравнения Кеплера.

Как только эксцентрическая аномалия найдена, следует сразу определить прямоугольные координаты движущейся точки в орбитальной системе координат по формулам

$$\xi = a(\cos E - e), \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (12)$$

Далее необходимо найти коэффициенты перехода от орбитальной

системы к гео-эклиптической системе координат x, y, z

$$\begin{aligned}
 P_x &= \cos \omega \cdot \cos \Omega - \sin \omega \cdot \sin \Omega \cdot \cos i, \\
 P_y &= \cos \omega \cdot \sin \Omega + \sin \omega \cdot \cos \Omega \cdot \cos i, \\
 P_z &= \sin \omega \cdot \sin i, \\
 Q_x &= -\sin \omega \cdot \cos \Omega - \cos \omega \cdot \sin \Omega \cdot \cos i, \\
 Q_y &= -\sin \omega \cdot \sin \Omega + \cos \omega \cdot \cos \Omega \cdot \cos i, \\
 Q_z &= \cos \omega \cdot \sin i
 \end{aligned} \tag{13}$$

и вычислить прямоугольные координаты по формулам

$$\begin{aligned}
 x &= P_x \cdot \xi + Q_x \cdot \eta, \\
 y &= P_y \cdot \xi + Q_y \cdot \eta, \\
 z &= P_z \cdot \xi + Q_z \cdot \eta.
 \end{aligned} \tag{14}$$

В итоге на заданный момент времени t по формулам кеплерова движения вычислены гелиоцентрические эклиптические координаты малой планеты x, y, z .

При вычислении эфемерид малых планет нужно четко согласовывать используемые шкалы времени, положение начал используемых систем координат, ориентацию координатных осей. В различных задачах пренебрегают теми или иными различиями шкал времени и систем координат. Это снижает точность эфемерид. Сделанные допущения должны сообщаться вместе с самими эфемеридами, чтобы иметь представление о точности получаемых данных.

9.4. Определение координат Земли по средним элементам кеплеровой орбиты

Для приближенного вычисления эфемерид малой планеты координаты Земли на момент эфемериды могут вычисляться тоже приближенно. Это можно делать по формулам кеплерового движения при заданных средних элементах орбиты. Выражения для средних элементов орбиты Земли в виде полиномов по степеням времени можно взять из статьи (Simon, Bretagnon, Chapront, 1994). Эти полиномы являются частью одной из наиболее точных аналитических теорий движения планет. Для вычисления эфемерид малых планет можно ограничиться формулами линейного по времени изменения элементов. Элементы отсчитываются в невращающейся системе координат

и относятся к эклиптике и равноденствию эпохи J2000. Представлены формулы для следующих элементов:

a - большая полуось,

e - эксцентриситет,

i - наклон к эклиптике,

λ - средняя долгота,

ϖ - долгота перигелия,

Ω - долгота восходящего узла.

Приведем здесь эти формулы. Единицы измерения величин даны после численных значений в скобках. Аргумент времени T выражен в юлианских тысячелетиях от эпохи J2000, т. е. $T = (t - 2451545.0)/365250.0$, где t - время в юлианских днях в шкале времени TDB.

$$a = 1.00000101778(\text{астрономические единицы}),$$

$$e = 0.0167086342,$$

$$i = 469.97289(\text{секунды дуги}) \cdot t,$$

$$\lambda = 100.46645683(\text{градусы}) + 1295977422.83429(\text{секунды дуги}) \cdot t,$$

$$\varpi = 102.93734808(\text{градусы}) + 11612.35290(\text{секунды дуги}) \cdot t,$$

$$\Omega = 174.87317577(\text{градусы}) - 8679.27034(\text{секунды дуги}) \cdot t.$$

Среднюю аномалию M и аргумент перигелия ω можно затем вычислить по формулам

$$M = \lambda - \varpi, \quad \omega = \varpi - \Omega.$$

Вычисления прямоугольных гелиоцентрических эклиптических координат Земли по элементам можно выполнить по формулам кеплерова движения, приведенным выше. Затем можно перейти к экваториальным координатам по формулам (7).

Полные формулы для средних элементов орбиты Земли при необходимости можно взять из статьи (Simon, Bretagnon, Chapront, 1994).

9.5. Исходные данные и порядок вычислений

Прежде всего нужно выбрать малую планету и найти элементы ее кеплеровой орбиты $n, e, i, M_0, \omega, \Omega$, заданные на некоторую начальную эпоху t_0 . Это могут быть элементы начальной орбиты неизвестного объекта, определенные по трем наблюдениям, либо оскулирующие элементы известной малой планеты.

Элементы кеплеровой орбиты малой планеты обычно задаются в гелиоцентрической эклиптической системе координат. Эти данные можно найти в справочниках по малым планетам, например, в издании Эфемериды малых планет, ИТА РАН, или на сайте Центра малых планет (Minor Planet Center - MPC) по адресу <http://www.minorplanetcenter.net/iau/MPCORB.html>.

В последнем случае нужно пройти по одной из ссылок MPCORB.DAT (uncompressed), MPCORB.DAT.gz и скопировать в компьютер файл с элементами орбит всех малых планет. Далее следует выбрать из файла оскулирующие элементы интересующей нас малой планеты.

Описание формата данных находится на странице

<http://www.minorplanetcenter.net/iau/info/MPOrbitFormat.html>

а расшифровку закодированной начальной эпохи можно сделать по инструкции, которая находится на странице

<http://www.minorplanetcenter.net/iau/info/PackedDates.html>

Для вычисления эфемерид потребуются значения некоторых постоянных: скорости света c , гравитационного параметра Солнца μ , наклона земного экватора к эклиптике ε и, возможно, астрономической единицы a_0 . Современные значения этих постоянных возьмем из работы (Folkner et al., 2014): $c = 299792.458$ км/с,
 $\mu = 132712440041.939400$ км³/с²,
 $\varepsilon = 84381.448$ сек. дуги,
 $a_0 = 149597870.700$ км.

Далее следует выбрать момент эфемерид t_{eph} для интересующей нас малой планеты. При решении задачи практикума выбираем t_{eph} так, чтобы на этот момент в нашем распоряжении имелись бы уже вычисленные эфемериды, и можно было бы сверить получаемые результаты. Где можно найти заранее вычисленные эфемериды малых планет, написано ниже.

Эфемериды находятся в результате следующей последовательности действий:

1. Полагаем $t = t_{eph}$.
2. Если большая полуось орбиты не задана, то ее нужно вычислить по формуле (8). Если она задана в астрономических единицах, то нужно перевести значение в километры, используя приведенное выше значение астрономической единицы a_0 .
3. Находим прямоугольные гелиоцентрические эклиптические координаты малой планеты x, y, z на момент t по формулам (9)-(14).
4. Вычисляем гелиоцентрические экваториальные координаты малой

планеты x' , y' , z' по формулам (7).

5. Находим гелиоцентрические прямоугольные координаты Земли X_T , Y_T , Z_T на момент t_{eph} .

Это можно сделать одним из трех способов:

- вычислить по средним элементам, данным выше в специальном разделе,
- найти по прямоугольным координатам Солнца в Астрономическом ежегоднике,
- найти по координатам Солнца в одной из служб эфемерид в интернете.

6. Вычисляем геоцентрическое расстояние по формуле (5) и находим новый, исправленный за световое время момент t из соотношения (6).

7. Переходим к следующей итерации вычислений, т. е. к пункту 3. Если точность вычисления светового времени достигнута, то выполняем заключительные вычисления угловых экваториальных координат малой планеты α , δ по формулам (4).

В заключение необходимо выразить полученное значение прямого восхождения малой планеты в часах, минутах и секундах времени, а склонение в градусах, минутах и секундах дуги.

Для проверки правильности полученной эфемериды можно сравнить ее с данными из других источников. Эфемериды малых планет публикуются в различных ежегодниках. Примером может служить издание Эфемериды малых планет, ИТА РАН.

Эфемериды малых планет получают на специальных службах, доступных через интернет. Вот адреса некоторых из них:

Minor Planet Center

<http://www.minorplanetcenter.net/iau/MPEph/MPEph.html>

HORIZONS Web-Interface, Jet Propulsion Laboratory,
California Institute of Technology, USA

<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

The IMCCE Virtual Observatory Solar System Portal,
Observatoire de Paris, France

<http://vo.imcce.fr/webservices/miriade/?forms>

В качестве дополнительных исследований можно провести вычисления при различных принимаемых упрощениях. В частности, можно пренебречь световым временем при вычислении координат малой планеты, можно пренебречь световым временем при вычислении ко-

ординат Солнца, можно пренебречь разностью шкал UTC и TDB.

9.6. Примеры вычислений эфемерид малых планет

Пример 1.

Для первого примера возьмем "бумажные" источники данных, т. е. ежегодник Эфемериды малых планет, ИТА АН СССР и Астрономический ежегодник СССР на 1978 год. Выберем малую планету 220 *Stephania*. Элементы орбиты этой малой планеты даны на стр. 20 ежегодника Эфемериды малых планет, а эфемериды – на стр. 108. Эпоха средней аномалии задана в форме 0 час. эфемеридного времени 2 декабря 1962 года. Необходимо перевести этот момент в юлианскую дату. Для перевода можно воспользоваться таблицами Астрономического ежегодника СССР или найти соответствующий онлайн сервис в интернете. Для данной эпохи средней аномалии получим $t_0 = 2438000.5$. Угловые элементы выражены в градусах, а среднее движение n , обозначенное в таблице через μ – в секундах дуги в сутки. Большая полуось орбиты a дана в астрономических единицах. В эпоху этих публикаций было принято выражать эксцентриситет орбиты как арксинус некоторого угла φ . Именно этот угол и дан в таблице ежегодника Эфемериды малых планет за 1978 год. Итак, берем из таблицы следующие значения:

$$M_0 = 162.860, \quad \omega = 77.569, \quad \Omega = 258.031, \quad i = 7.589,$$

$$\varphi = 14.899, \quad \mu = 985.395, \quad a = 2.3493.$$

Момент эфемерид возьмем 0 час. эфемеридного времени 13 марта 1978 года. Именно на этот момент дана эфемерида малой планеты 220 *Stephania* на стр. 108. Выражая эту дату в юлианских днях, получим $t_{eph} = 2443580.5$.

Заметим, что интервал времени между моментом эфемериды и эпохой средней аномалии равен 5580 суток. За это время малая планета совершила 4.24 оборота вокруг Солнца.

Прямоугольные координаты Солнца на 0 час. эфемеридного времени 13 марта 1978 года найдем на стр. 35 Астрономического ежегодника СССР на 1978 год. Имеем следующие значения, выраженные в астрономических единицах:

$$X_s = 0.9834527, \quad Y_s = -0.1321738, \quad Z_s = -0.0573197.$$

Это астрометрические координаты Солнца. Они даны с учетом светового времени. В данном примере пренебрежем световым временем. Будем считать, что это координаты, заданные на момент t_{eph} .

Все координаты в исходных данных, а также эфемериды, отсчитываются в системе экватора и равноденствия эпохи В1950. Во всех данных используется шкала эфемеридного времени.

Возьмем выписанные здесь исходные данные и проведем вычисления как предписано выше. На первом этапе положим $t = t_{eph}$. Для контроля вычислений приведем промежуточный результат – полученные гелиоцентрические эклиптические координаты малой планеты, выраженные в километрах:

$$x = -368846000.2, \quad y = -147444555.0, \quad z = -44000208.6.$$

Продолжая вычисления, получаем искомую эфемериду малой планеты:

$$\alpha = 14^h 7^m 15.312^s, \quad \delta = -22^\circ 24' 33.524''.$$

Топоцентрическое расстояние получилось равным $R = 282236511.7$ км. Соответствующее топоцентрическому расстоянию световое время равно 941.440 сек.

Попробуем сделать следующую итерацию – вычислим снова эфемериду, полагая $t = t_{eph} - 941.440$ сек. Теперь получаем

$$\alpha = 14^h 7^m 14.498^s, \quad \delta = -22^\circ 24' 30.693''.$$

Как видно из этих результатов, учет светового времени до малой планеты уточняет эфемериду примерно на 18 секунд дуги.

Сравним теперь результат с тем, что дано в ежегоднике Эфемериды малых планет. В ежегоднике на дату эфемериды экваториальные координаты малой планеты составляют

$$\alpha = 14^h 9.9^m, \quad \delta = -22^\circ 34'.$$

Различия составляют примерно 0.5 градуса. Мы не можем объяснить эти различия, так как не знаем точно, какая модель была использована при вычислении эфемериды в ИТА АН СССР.

Пример 2.

Теперь для этой же малой планеты 220 *Stephania* возьмем данные Центра Малых планет через интернет по адресу, указанному выше. Оскулирующие элементы орбиты в момент нашего туда обращения

были заданы на эпоху 0 ч. 16 февраля 2017 года в шкале времени TDB. Этот момент соответствует юлианской дате JD=2475800.5. Элементы орбиты малой планеты 220 Stephania имеют следующие значения:

$$M_0 = 184.40985, \quad \omega = 78.44681, \quad \Omega = 257.96526, \quad i = 7.58837,$$

$$e = 0.2580771, \quad n = 0.27387279, \quad a = 2.3483895.$$

Здесь угловые элементы измерены в градусах, среднее движение n в градусах в сутки, большая полуось a в астрономических единицах. Элементы относятся к эклиптической системе координат, эпоха экватора и равноденствия J2000.

Выберем следующие моменты эфемерид (год/месяц/день):

2017/ 2/ 16 (JD=2457800.5) – эпоха элементов,

2020/ 9/ 22 (JD=2459114.5) – через период обращения малой планеты,

2032/ 5/ 28 (JD=2463380.5) – тот же интервал 5580 суток, какой был в предыдущем примере.

Для определения координат Земли воспользуемся моделью ее кеплерова движения, как описано выше. Средние элементы орбиты Земли также, как и элементы орбиты малой планеты, относятся к системе координат с эпохой экватора и равноденствия J2000. Эпоха элементов в обоих случаях задана в шкале времени TDB.

Вычисления проведем по плану, предписанному выше. Учтем световое время, сделаем две итерации. У нас получились следующие результаты.

Момент эфемерид 2017/ 2/ 16 (JD=2457800.5). Полученные экваториальные координаты малой планеты имеют значения

$$\alpha = 10^h 47^m 17.633^s, \quad \delta = -4^\circ 15' 25.186''.$$

Момент эфемерид 2020/ 9/ 22 (JD=2459114.5). Экваториальные координаты

$$\alpha = 10^h 52^m 35.143^s, \quad \delta = 1^\circ 2' 20.505''.$$

Момент эфемерид 2032/ 5/ 28 (JD=2463380.5). Экваториальные координаты

$$\alpha = 13^h 19^m 57.174^s, \quad \delta = -16^\circ 0' 38.599''.$$

Для сравнения возьмем эфемериды, вычисляемые с помощью службы Центра Малых Планет, доступную через интернет по адресу, указанному выше. На странице службы следует задать Observatory code:

500, что соответствует геоцентру. В окне Ephemeris start date: нужно ввести дату момента эфемерид. Следует учесть, что введенный момент эфемерид получится соответствующим 0 часов указанной даты в шкале времени UTC. Наши вычисления сделаны для моментов времени, выраженных в шкале TDT. Разность TDT-UTC в 2017 году составляла 69.184 секунд. Мы пренебрегаем этой разностью, считая, что моменты эфемерид заданы в шкале TDB.

Эфемериды Центра Малых Планет получились следующими:
Момент 2017/ 2/ 16 (JD=2457800.5). Экваториальные координаты

$$\alpha = 10^h 47^m 18.0^s, \quad \delta = -4^\circ 15' 27''.$$

Момент 2020/ 9/ 22 (JD=2459114.5). Экваториальные координаты

$$\alpha = 10^h 52^m 21.5^s, \quad \delta = 1^\circ 3' 29''.$$

Момент 2032/ 5/ 28 (JD=2463380.5). Экваториальные координаты

$$\alpha = 13^h 18^m 46.9^s, \quad \delta = -15^\circ 51' 29''.$$

Сравнение с нашими результатами показывает следующие разности по прямому восхождению и склонению.

Момент 2017/ 2/ 16 (JD=2457800.5), $\Delta\alpha = 0.4^s$, $\Delta\delta = 1.8''$.

Момент 2020/ 9/ 22 (JD=2459114.5), $\Delta\alpha = -13.6^s$, $\Delta\delta = 68.5''$.

Момент 2032/ 5/ 28 (JD=2463380.5), $\Delta\alpha = -70.3^s$, $\Delta\delta = 549.6''$.

Для последнего из трех моментов разность эфемерид составляет примерно 0.3 градуса. Эта разность аналогична той, что получилась в первом примере. Разности можно объяснить в первую очередь тем, что в ИТА АН СССР и в Центре Малых Планет движение малой планеты моделировалось с учетом различных возмущений. В нашем методе использовалась приближенная модель – кеплерова модель движения.

9.7. Порядок выполнения работы по задаче практикума и форма отчета

Каждому студенту предлагается выбрать свою малую планету и решить для нее задачу в двух вариантах аналогично приведенным выше примерам. "Бумажные" источники данных нужно взять в библиотеке, а данные Центра малых планет получить через интернет.

Отчет должен быть составлен по следующему плану:

1. Введение.
2. Постановка задачи.
3. Метод решения.
4. Полученные результаты.
5. Заключение.

Во введении нужно кратко описать цель решения задачи, указать, для чего нужны эфемериды малых планет. В разделе "Постановка задачи" привести все численные значения исходных данных. В разделе "Метод решения" перечислить все упрощения, которые были сделаны при решении задачи. Полученные результаты должны содержать результат сравнения с контрольными эфемеридами. В заключении можно высказать свои впечатления о процессе решения задачи.

Литература

Эфемериды малых планет на 1978 год. Издательство "Наука", Ленинградское отделение, Ленинград - 1977.

Астрономический ежегодник СССР на 1978 год.

Folkner W.M., Williams J.G., Boggs D.H., Park R.S., Kuchynka P. The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431. The Interplanetary Network Progress Report. 2014. V. 42-196. P. 1-81.

Simon J.L., Bretagnon P., Chapront J., Chapront-Touze M., Francou G., Laskar J. Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets *Astronomy and Astrophysics*. 1994. V. 282, no. 2, p. 663-683.