Кафедра небесной механики, астрометрии и гравиметрии физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Специальный практикум по небесной механике.

Задача № 5.

Емельянов Н. В.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДИМОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОЛЕЦ САТУРНА

Содержание

5.1. Введение

Изучение динамики планет и спутников делается на основе астрометрических наблюдений. Такие наблюдения проводятся с помощью наземных телескопов, телескопов размещенных на искусственных спутниках Земли, а также с помощью космических аппаратов, направляемых к другим планетам. Известно, что наиболее точная модель орбитального движения планеты или спутника получается из наблюдений, выполненных на больших интервалах времени. Космические аппараты, движущиеся вблизи других планет работают относительно короткое время. Поэтому роль наблюдений, полученных на космических аппаратах, бывает незначительной даже при их высокой точности. Поэтому необходимы регулярные наблюдения тел Солнечной системы с помощью наземных телескопов.

Одним из наиболее интересных объектов, наблюдаемых с Земли, является большая планета Сатурн вместе со своими спутниками и кольцом. Сатурн обращается по своей орбите вокруг Солнца с периодом около 28 лет. Плоскость кольца остается почти неизменной в пространстве, имея небольшой наклон к плоскости орбиты планеты. Поэтому раз в 14 лет направление от центра Сатурна в сторону Солнца и в сторону Земли оказывается вблизи плоскости кольца. Эти моменты имеют большое значение для наблюдений системы Сатурна по нескольким причинам. Во-первых, кольцо в эти моменты располагается к нам ребром и, будучи весьма тонким, становится невидимым. Кажущееся исчезновение кольца позволяет наблюдать с Земли малые спутники, которые движутся вблизи кольца. В другие моменты эти спутники заметить нельзя, так как их изображение засвечивается ореолом от яркого кольца. Во-вторых, плоскость кольца совпадает с плоскостью экватора планеты, а в этой же плоскости располагаются орбиты восьми главных спутников Сатурна. Поскольку в течение нескольких месяцев до и после исчезновения кольца орбиты располагаются ребром к Земле и к Солнцу, происходят явления видимых взаимных покрытий и взаимных затмений главных спутников Сатурна. Диски спутников и тени от них неразличимы при наблюдениях в наземные телескопы. Однако изменение яркости пар спутников, участвующих в каждом явлении, легко измеряется с помощью фотометров или ПЗС-камер. Спад яркости спутников непосредственно зависит от их взаимного расположения, которое, в свою очередь, зависит от параметров орбит. Таким образом, из обработки фотометрии спутников во время их взаимных покрытий и затмений получаются высокоточные астрометрические данные, уточняются параметры орбит спутников и улучшаются их эфемериды.

Любопытно, что после добавления к полной базе данных наблюдений главных спутников Сатурна астрометрических результатов фотометрии спутников во время их взаимных покрытий и затмений в 2009 году были определены коэффициенты квадратичных по времени изменений долгот спутников. Эти изменения обусловлены только диссипацией механической энергии, вызванной приливным трением в телах планеты и спутников. Оказалось, в частности, что спутник Сатурна Энцелад получает от приливного трения в десять раз больше тепловой энергии, чем считалось ранее. Это изменило некоторые выводы планетологии.

В силу всего сказанного становится очевидным, что моменты, когда кольцо Сатурна становится к нам ребром, оказываются весьма важными. Крупными эфемеридными службами мира эти моменты предвычисляются и публикуются. Однако полезно уметь делать независимые предвычисления обстоятельств рассматриваемого явления. В процессе решения этой задачи можно многому научиться.

5.2. Постановка задачи

При наблюдениях с Земли Сатурна и его спутников важно знать на любой момент времени ориентацию кольца по отношению к картинной плоскости, то есть к плоскости, перпендикулярной топоцентрическому направлению на Сатурн. Необходимо знать угол P_t между проекцией оси кольца на картинную плоскость и направлением из центра планеты в полюс мира. Положим, что этот угол, аналогично позиционному углу, будет положительным, когда северный полюс Сатурна наклонен от направления на северный полюс мира в сторону востока. Необходимо знать также угол Q, который образует ось кольца Сатурна с картинной плоскостью, и будем считать его положительным, если северный полюс Сатурна наклонен в сторону наблюдателя.

Неизменная ориентация оси кольца Сатурна, совпадающая с осью вращения Сатурна, задается экваториальными небесными координатами: прямым восхождением α_0 и склонением δ_0 северного полюса планеты. На самом деле известна незначительная прецессия этой оси. Для упрощения задачи мы пренебрежем прецессией и возьмем координаты α_0 и δ_0 такими, как они заданы на эпоху 12 часов 1 января

2000 года. Эти значения можно найти в соответствующей справочной литературе. Первоисточником этих данных можно считать публикуемый раз в три года доклад Рабочей группы по картогарфическим координатам и элементам вращения Международного астрономического союза. Последний такой доклад опубликован в виде статьи (Archnal et al., 2011). Вот эти значения, заданные в системе координат ICRF:
$\alpha_0 = 40.589$ град.,
$\delta_0 = 83.537$ град.

Чтобы определить искомые углы P_t и Q, нужно знать ориентацию картинной плоскости в той же системе координат ICRF. Эта плоскость определяется топоцентрическими прямым восхождением α и склонением δ центра Сатурна, заданными на момент наблюдения в ICRF. Для упрощения задачи будем пренебрегать отличиями топоцентрических координат от геоцентрических. Значения геоцентрических координат Сатурна α и δ на момент наблюдения можно определить с помощью эфемеридных служб в интернете. Одна из таких служб называется MULTI-SAT (Emel'yanov, Arlot, 2008). Ее адрес в интернете:
http://www.sai.msu.ru/neb/nss/indexr.htm
В русскоязычном варианте Службы естественных спутников планет следует выбрать "Эфемериды". Далее "Эфемериды с постоянным шагом по времени"для Сатурна. В списке спутников нужно найти "Центр планеты Сатурн". Остальные параметры можно взять такими, какие заданы на странице по умолчанию. В окне после слов "Введите начальный момент"нужно ввести дату (год, месяц, день) и время (час, мин, сек) в заданной на странице шкале времени. При нажатии на экранную кнопку "Вычислить"появляется новая страница, на которой в первой строке таблицы эфемерид даются искомые координаты Сатурна α и δ.

На этом этапе будут известны все необходимые исходные данные задачи.

5.3. Системы координат, применяемые в задаче

В процессе использования наблюдений небесных тел рассматриваются различные системы координат. Одной из них является система прямоугольных координат с началом в центре наблюдаемого тела и основной плоскостью, перпендикулярной топоцентрическому направлению на это тело. Такую плоскость называют картинной плоскостью.

Обозначим через x, y, z оси геоэкваториальной системы координат некоторой эпохи, например, эпохи J2000, с началом в центре наблюдаемого тела.

Будем полагать, что топоцентрическое направление на наблюдаемое тело задано прямым восхождением α и склонением δ в топоцентрической системе координат с осями, параллельными осям x, y, z.

Наряду с картинной плоскостью рассмотрим плоскость, проходящую через топоцентрический радиус-вектор наблюдаемого тела и ось z. Направим ось y'' по линии пересечения этих плоскостей так, чтобы оси z и y'' образовывали угол, не превышающий 90 градусов. Ось x'' расположим в картинной плоскости в направлении увеличения прямых восхождений. Ось z'' будет дополнять систему координат до правой и окажется направленной вдоль топоцентрического вектора наблюдаемого тела.

Обозначим через R топоцентрическое расстояние наблюдаемого тела. Тогда для любой точки, расположенной в картинной плоскости и имеющей в этой плоскости координаты x'', y'', можно определить ее так называемые *тангенциальные относительные топоцентрические координаты*

$$X_t = \frac{x''}{R}, \quad Y_t = \frac{y''}{R}. \tag{1}$$

Соответственно определяется *тангенциальный позиционный угол* P_t точки из соотношения

$$\operatorname{tg} P_t = \frac{x''}{y''}. \tag{2}$$

Тангенциальный позиционный угол P_t отсчитывается в картинной плоскости от направления на север к востоку от 0 до 360 градусов.

Пусть одновременно с первым небесным телом, для которого определена картинная плоскость, наблюдается второе небесное тело. Топоцентрический вектор второго тела пересечет картинную плоскость первого тела в некоторой точке с координатами x'', y'' . Таким образом тангенциальные относительные топоцентрические координаты X_t, Y_t и соответствующий тангенциальный позиционный угол P_t задают положение второго тела относительно первого.

Как было указано выше, топоцентрическое направление каждого тела задается геоэкваториальными координатами. Обозначим через

α и δ прямое восхождение и склонение первого тела. Пусть соответствующие координаты второго тела заданы выражениями $\alpha + \Delta\alpha$, $\delta + \Delta\delta$. Тогда тангенциальные относительные топоцентрические координаты X_t, Y_t, P_t можно вычислить по формулам (Introduction aux éphémérides astronomiques, 1997)

$$X_t = \frac{\cos(\delta + \Delta\delta)\sin\Delta\alpha}{\sin(\delta + \Delta\delta)\sin\delta + \cos(\delta + \Delta\delta)\cos\delta\cos\Delta\alpha}, \tag{3}$$

$$Y_t = \frac{\sin(\delta + \Delta\delta)\cos\delta - \cos(\delta + \Delta\delta)\sin\delta\cos\Delta\alpha}{\sin(\delta + \Delta\delta)\sin\delta + \cos(\delta + \Delta\delta)\cos\delta\cos\Delta\alpha}, \tag{4}$$

$$\operatorname{tg} P_t = \frac{Y_t}{X_t}. \tag{5}$$

Введенная здесь система координат $x''y''z''$ применяется также для описания видимой ориентации оси вращения планеты. Особенно наглядно ось вращения планеты представлена изображением колец Сатурна. Ось симметрии колец с высокой точностью совпадает с осью вращения планеты.

Изображение колец Сатурна изменяется со временем. Кольца временами больше "раскрыты"к наблюдателю, в другие моменты они видны очень узкой полоской, а иногда совсем исчезают, так как видны к нам с ребра. Толщина колец столь мала, что они становятся практически невидимыми.

Видимую ориентацию оси вращения планеты можно описать двумя углами: тангенциальным позиционным углом северного направления оси P_t и углом наклона к картинной плоскости Q . При этом положительный наклон Q будет соответствовать отклонением северного направления оси вращения планеты в сторону наблюдателя.

В случае изображений колец Сатурна при положительных P_t кольца будут повернуты против часовой стрелки, а при положительных Q мы увидим кольца со стороны северного полюса планеты.

Ориентацию оси вращения планеты в пространстве обычно задают прямым восхождением α_0 и склонением δ_0 северного по отношению к эклиптике направления оси. Рассмотрим в качестве второго наблюдаемого объекта некоторую точку на оси вращения планеты, расположенную на единичном расстоянии от ее центра. Координаты P_t, Q этой точки, а, следовательно и координаты оси вращения относительно картинной плоскости можно тогда определить из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \cos\delta_0 \cos\alpha_0, \\
y_0 &= \cos\delta_0 \sin\alpha_0, \\
z_0 &= \sin\delta_0,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
x'' &= -x_0 \sin\alpha + y_0 \cos\alpha, \\
y'' &= -x_0 \sin\delta \cos\alpha - y_0 \sin\delta \sin\alpha + z_0 \cos\delta, \\
z'' &= \quad x_0 \cos\delta \cos\alpha + y_0 \cos\delta \sin\alpha + z_0 \sin\delta,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\operatorname{tg} P_t = \frac{x''}{y''}, \quad \operatorname{tg} Q = \frac{-z''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}. \tag{8}$$

Заметим, что угол Q в точности равен планетоцентрической планетоэкваториальной широте наблюдателя, в частности, центра Земли.

Вывод формул (7) дан в Приложении.

В некоторых задачах необходим обратный переход от координат x'', y'', z'' к координатам x, y, z . В этом случае можно воспользоваться формулами

$$\begin{aligned}
x &= -x'' \sin\alpha - y'' \sin\delta \cos\alpha + z'' \cos\delta \cos\alpha, \\
y &= \quad x'' \cos\alpha - y'' \sin\delta \sin\alpha + z'' \cos\delta \sin\alpha, \\
z &= y'' \cos\delta + z'' \sin\delta.
\end{aligned} \tag{9}$$

Наряду с тангенциальными относительными топоцентрическими координатами $X_t,\ Y_t,\ P_t$ рассматриваются *дифференциальные относительные топоцентрические координаты* , которые определяются следующим образом. Пусть топоцентрическое направление первого наблюдаемого объекта задано прямым восхождением α и склонением δ . Пусть одновременно наблюдается второе небесное тело, имеющее прямое восхождение $\alpha + \Delta\alpha$ и склонение $\delta + \Delta\delta$. Дифференциальные относительные топоцентрические координаты X, Y второго тела, определяются соотношениями

$$X = \Delta\alpha\ \cos\delta, \quad Y = \Delta\delta. \tag{10}$$

Рассмотрим на небесной сфере большой круг, проходящий через первое и второе небесные тела. Угол на небесной сфере между кругом склонений первого тела и указанным большим кругом называют позиционным углом P. Он отсчитывается от северного направления круга склонений первого тела в восточном направлении, то есть против часовой стрелки, от 0 до 360 градусов. Рассматривается также топоцентрическое угловое расстояние s между двумя телами. Оно является дугой большого круга на небесной сфере.

Если заданы прямое восхождение α и склонение δ первого тела, а также прямое восхождение $\alpha + \Delta\alpha$ и склонение $\delta + \Delta\delta$ второго тела, то позиционный угол P и угловое расстояние s можно вычислить из следующих соотношений:

$$\operatorname{tg} P = \frac{\cos(\delta + \Delta\delta)\sin\Delta\alpha}{\sin\Delta\delta + 2\cos(\delta+\Delta\delta)\sin\delta\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2}}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} a_{yz} = {} & 2\cos\delta\sin\delta\sin\alpha\cos\Delta\delta\sin^2\tfrac{\Delta\alpha}{2} + \\ & + \cos^2\delta\sin\alpha\sin\Delta\delta - \\ & - \cos\delta\sin\delta\cos\alpha\cos\Delta\delta\sin\Delta\alpha + \\ & + \sin^2\delta\sin\alpha\sin\Delta\delta\cos\Delta\alpha + \\ & + \sin^2\delta\cos\alpha\sin\Delta\delta\sin\Delta\alpha, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} a_{zx} = {} & -2\cos\delta\sin\delta\cos\alpha\cos\Delta\delta\sin^2\tfrac{\Delta\alpha}{2} - \\ & - \cos^2\delta\cos\alpha\sin\Delta\delta - \\ & - \cos\delta\sin\delta\sin\alpha\cos\Delta\delta\sin\Delta\alpha - \\ & - \sin^2\delta\cos\alpha\sin\Delta\delta\cos\Delta\alpha + \\ & + \sin^2\delta\sin\alpha\sin\Delta\delta\sin\Delta\alpha, \end{aligned} \tag{13}$$

$$a_{xy} = \cos\delta\cos(\delta+\Delta\delta)\sin\Delta\alpha, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} b_{xyz} = {} & \cos(\delta+\Delta\delta)\cos(\alpha+\Delta\alpha)\cos\delta\cos\alpha + \\ & + \cos(\delta+\Delta\delta)\sin(\alpha+\Delta\alpha)\cos\delta\sin\alpha + \\ & + \sin(\delta+\Delta\delta)\sin\delta, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\operatorname{tg} s = \frac{\sqrt{a_{yz}^2 + a_{zx}^2 + a_{xy}^2}}{b_{xyz}}. \tag{16}$$

Для однозначного определения позиционного угла P из соотношения (11) следует учесть, что знак $\cos P$ равен знаку знаменателя в правой части соотношения (11). Формулы (11)-(16) выводятся из формул сферической тригонометрии (Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, 1976).

5.4. Порядок вычисления искомых величин

Итак, нам известны координаты северного полюса Сатурна α_0 и δ_0 (см. выше). С помощью сервера эфемерид MULTI-SAT мы нашли также топоцентрические координаты Сатурна α и δ. Теперь искомые параметры ориентации оси колец Сатурна найдутся по формулам (6), (7), (8).

5.5. Методическое указание о формулировке задачи каждому студенту

Формулировка задачи для каждого студента заключается в задании даты и момента времени, для которого требуется определить видимую ориентацию кольца Сатурна. Далее можно предложить студенту провести вычисления для ряда моментов, выбирая их самостоятельно, с целью попытаться простым перебором моментов найти моменты кажущегося исчезновения кольца. В 2009 году это произошло 4 сентября примерно в 13 ч. 42 мин. 11 с. по по шкале всемирного координированного времени UTC. Следует искать аналогичный момент через половину периода орбитального движения Сатурна, т. е. примерно через 14 лет.

Для реализации метода и выполнения практикума можно предложить студенту составление вычислительной программы на любом языке программирования.

5.6. Форма отчета по задаче практикума

Каждому студенту предлагается один вариант исходных данных. После решения задачи студент должен подготовить письменный отчет по следующему плану:
1. Введение (О чем идет речь? Почему возникают рассматриваемые проблемы? Зачем это нужно?).
2. Постановка задачи (Цель исследования. Что дано? Что определить?).
3. Описание последовательности вычислений с приведением применяемых формул.
4. Задание исходных данных.
5. Полученные результаты.

В целом такой отчет может иметь объем 2-3 страницы.

5.7. Примеры вычислений

Ряд примеров вычислений содержится в таблице. Смысл чисел в колонках таблицы следующий:
Дата (год, месяц, день), момент (час, мин, сек), α (час, мин, сек), δ (град, мин, сек), P_t (град), Q (град).
Моменты заданы в шкале UTC.

```
2008 1 01 0 0 0.00 10 42 21.409887 10 00 51.724476 -5.63 -6.74
2008 1 31 0 0 0.00 10 37 12.161049 10 38 26.785379 -5.71 -7.49
2008 3 01 0 0 0.00 10 28 32.794739 11 32 55.170956 -5.85 -8.61
2008 3 31 0 0 0.00 10 20 33.877827 12 18 34.226566 -5.96 -9.56
2008 4 30 0 0 0.00 10 16 57.931107 12 35 56.704300 -6.01 -9.94
2008 5 30 0 0 0.00 10 19 14.983314 12 19 11.838789 -5.98 -9.61
2008 6 29 0 0 0.00 10 26 54.132931 11 32 13.264709 -5.87 -8.64
2008 7 29 0 0 0.00 10 38 25.820280 10 23 01.163529 -5.69 -7.20
2008 8 28 0 0 0.00 10 52 05.292632 09 01 05.754706 -5.48 -5.52
2008 9 27 0 0 0.00 11 06 06.911490 07 37 00.758286 -5.24 -3.80
```

Литература

Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н.Дубошина. – М.: Наука, 1976, 862 с.

Archinal B. A., A'Hearn M. F., Bowell E., Conrad A., Consolmagno G. J., Courtin R., Fukushima T., Hestroffer D., Hilton J.L., Krasinsky G.A., and 7 coauthors. Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2011. V. 109. P. 101-135.

Emel'yanov N. V., Arlot J.-E. The natural satellites ephemerides facility MULTI-SAT. Astronomy and Astrophysics. 2008. V. 487. P. 759–765.

Introduction aux éphémérides astronomiques. Supplément explicatif à la connaissance des temps. (eds. Simon J.-L., Chapront-Touzé M., Morando B., Thuillot W.). 1997, Paris: BDL, 450 c.

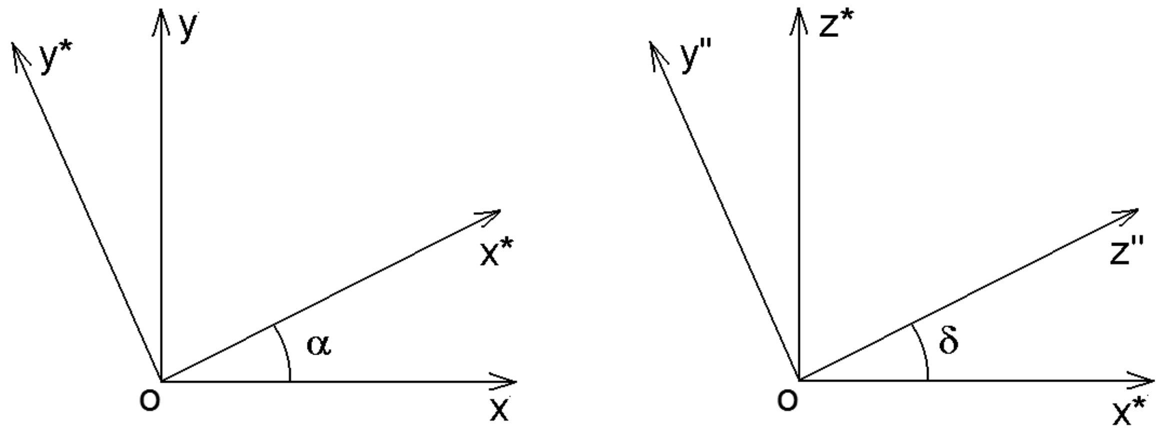

Рис. 1: Объектоцентрические системы координат.

Приложение. Вывод формул для вычисления координат в картинной плоскости.

Выведем здесь формулы связи между объектоцентрической геоэкваториальной системой координат и системой координат, связанной с картинной плоскостью.

Оси этих систем координат и промежуточной системы координат изображены на Рис. 1. Начало систем координат расположено в центре объекта наблюдений O. В системе координат O, x, y, z Плоскость x, y параллельна плоскости экватора Земли, поэтому будем называть систему координат O, x, y, z геоэкваториальной.

Рассмотрим некоторую вспомогательную промежуточную систему координат O, x^*, y^*, z^* такую, что оси x^*, y^* лежат в плоскости x, y, при этом ось x^* расположена в плоскости, образуемой осью z и вектором топоцентрического направления объекта наблюдений. В этом случае, как это видно на левой части Рис. 1, координаты x^*, y^*, z^* и x, y, z связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x^* &= \ \ x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y^* &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \\ z^* &= z\ . \end{aligned} \tag{17}$$

Определим связь координат этой промежуточной системы с введенными выше координатами x'', y'', z''. На правой части Рис. 1 изображены оси координат в плоскости, образуемой осью z^*, совпадающей с осью z, и вектором топоцентрического направления объекта наблюдений. Ось z'' по определению направлена по топоцентрическому направлению объекта, ось y'' направлена по линии пересечения картинной плоскости и плоскости, образуемой осью z и вектором топоцентрического направления объекта наблюдений. Напомним, что ось x^* лежит в геоэкваториальной плоскости. Теперь видно, что угол между осями x^* и z'' равен склонению объекта. Очевидно также, что оси y^* и x'' совпадают. Отсюда следует, что координаты x^*, y^*, z^* и x'', y'', z'' связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x'' &= y^* \ , \\ y'' &= -x^* \sin\delta + z^* \cos\delta, \\ z'' &= \ x^* \cos\delta + z^* \sin\delta \ . \end{aligned} \tag{18}$$

Теперь, подставляя (17) в формулы (18). получим соотношения (7).