Кафедра небесной механики, астрометрии и гравиметрии физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Специальный практикум по небесной механике.

Задача № 10.

Емельянов Н.В.

Численное интегрирование уравнений движения звезды в галактике.

Рассмотрим движение материальной точки P в пространстве под дейсвием некоторой силы. По отношению к действующей силе примем следующие предположения.

1. Сила зависит только от расстояния R точки P до некоторой неподвижной точки O.

2. Сила имеет силовую функцию $U(R)$.

Можно доказать, что в этом случае траектория движения будет плоской.

Выберем систему прямоугольных невращающихся координат x, y, z с началом в точке O. Оси координат x, y направим произвольным образом в плоскости движения. Расстояние R выразится формулой

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Тогда при сделанных предположениях уравнения движения точки P будут иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Задача состоит в нахождении искомых функций $x(t)$, $y(t)$ при начальных условиях: при $t = t_0$ имеем $x = x_0$, $y = y_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$, где x_0, y_0 $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ – заданные постоянные, а верхняя точка в $\dot{x}$, $\dot{y}$ означает производную по времени.

Рассмотрим несколько примеров действующей силы.

Пример 1. **Задача Кеплера**.

Силовая функция имеет вид

$$U(R) = \frac{\mu}{R},$$

где μ - некоторая заданная постоянная, называемая гравитационным параметром.

Уравнения движения примут вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{x}{R^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu\frac{y}{R^3}.$$

Пример 2. **Задача Засова**.

Силовая функция имеет вид

$$U(R) = -V_c^2 \ln\left(\frac{R}{R_0}\right),$$

где V_c и R_0 - некоторые заданные постоянные.

Уравнения движения в этой задаче имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -V_c^2 \frac{x}{R^2},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -V_c^2 \frac{y}{R^2}.$$

Заметим, что здесь правые части уравнений оказались независящими от постоянной R_0.

В этой задаче будем искать решение при $V_c = 1$
и начальных условиях: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0 = \sqrt{1 - \dot{x}_0^2}$, где постоянную $\dot{x}_0$ будем варьировать в некоторых пределах вблизи нулевого значения.

Задача практикума. Определить минимальное R_{min} и максимальное R_{max} значения центрального расстояния R движущейся точки (звезды) на интервале времени, за которое точка совершает не менее десяти оборотов вокруг центральной точки. Определение R_{min} и R_{max} выполнить для ряда значений $\dot{x}_0$ с шагом 0.02. Определить диапазон возможных значений $\dot{x}_0$. Значение параметра V_c взять равным единице, как указано выше.

Для решения задачи необходимо последовательно вычислять значения координат x, y и центрального расстояния R на ряд моментов времени с шагом $H = 0.05$ от 0 до 50.

Пример результатов таких вычислений при $\dot{x}_0 = -0.2$ дается на следующих графиках. На первом графике показана траектория точки в координатах x, y, а на втором – показано изменение центрального расстояния, как функция времени. На графиках видны точки, соответствующие значениям времени с указанным выше шагом H.

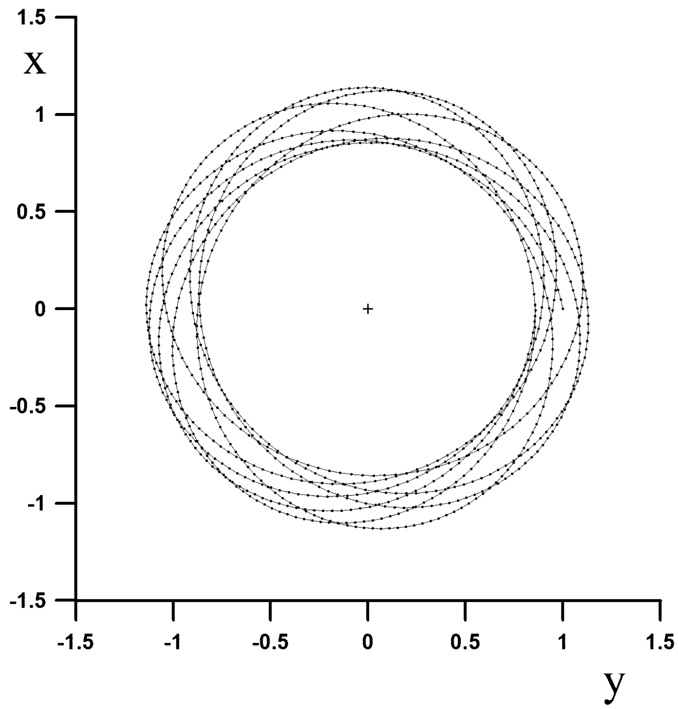

Рис. 1: Траектория движения точки в задаче Засова. Исходные значения параметров указаны в тексте.

Программирование таких выдач результатов можно осуществить так, как приводится в следующем примере фрагмента программы на языке программирования Си.

```
double x[5];
double H, h, t;
int i;
...
H = 0.05; h = 0.0001; t = 0.0;
...
fprintf(out, <format>, t, x[1], x[2], sqrt(x[1] * x[1] + x[2] * x[2]));
for(i = 0; i < 500; i++)
{
ruku(x, H, h); t = t + H;
fprintf(out, <format>, t, x[1], x[2], sqrt(x[1] * x[1] + x[2] * x[2]));
}
```

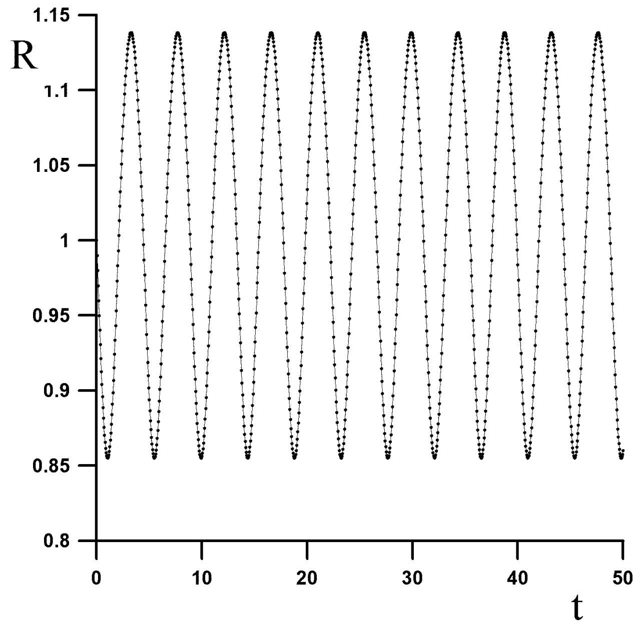

Рис. 2: Зависимость центрального расстояния точки от времени в задаче Засова. Исходные значения параметров указаны в тексте.

В этом фрагменте процедура $ruku$ выполняет численное интегрирование методом Рунге-Кутты на интервале времени H. При входе в процедуру массив x содержит значения искомых функций на момент времени в начале интервала. При выходе она присваивает элементам массива x значения искомых функций на конец интервала. Момент конца предыдущего интервала будет началом следующего интервала. Значения искомых функций на конец предыдущего интервала времени будут начальными значениями функций для следующего интервала.

Параметр h задает шаг численного интегрирования. Численное интегрирование должно выполняться с шагом h от некоторого момента времени до следующего, отстоящего от предыдущего на величину H. При программировании используется факт независимости правых частей уравнений от времени.

Оператор $fprintf(...)$; выдает очередные значения искомых функций на печать. При этом вместо $< format >$ следует написать подходящий формат выдачи.

Результатом вычислений по задаче практикума должна быть таблица, состоящая из трх столбцов:
1. Значение $\dot{x}_0$
2. Значение R_{min}
3. Значение R_{max}.

Следует приложить также таблицу с примером результатов зависимости координат и центрального расстояния от времени для любого одного значения $\dot{x}_0$.