Н.В.Емельянов

ПРАКТИЧЕСКАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие для студентов
на кафедрах астрономических специальностей
университетов

2018 г.

Е м е л ь я н о в Н. В. **Практическая небесная механика.** – М.: Физический факультет МГУ, 2018. 270 с.

ISBN 978-5-9500218-1-7

Предлагается учебное пособие для использования в образовательном процессе на кафедрах астрономических специальностей, геодезии и геодинамики. Материал составлен в соответствии с учебной программой кафедры небесной механики, астрометрии и гравиметрии физического факультета Московского Государственного Университета имени М.В.Ломоносова. В основу положено содержание специального курса, который читается автором пособия для студентов старших курсов кафедры на протяжении последних 20 лет.

Практическая небесная механика – это современная часть небесной механики, включающая знания, накопленные со времен Кеплера и Ньютона. Этот раздел астрономии в последние 50 лет является главным научным средством изучения космического пространства и расширения среды обитания человека в Солнечной системе. Материал, изложенный в учебном пособии, необходим для усвоения специалистами, осуществляющими проекты по практическому использованию околоземного пространства и по подготовке миссий к другим планетам с помощью автоматических и обитаемых космических аппаратов. Сведения о динамике Солнечной системы и знание научных методов ее освоения расширяют общий кругозор научного специалиста в области астрономии и космической техники.

Библиогр. 99 назв.

Р е ц е н з е н т ы:
- доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН *М.А. Вашковьяк.*
- доктор технических наук, профессор кафедры астрономии и космической геодезии МИИГАиК *С.Н.Яшкин.*

©Физический факультет МГУ
имени М.В. Ломоносова. 2018

©Емельянов Н.В. 2018

ISBN 978-5-9500218-1-7

Оглавление

Предисловие автора 7

Глава 1. **Цели, задачи и общий подход к изучению динамики небесных тел** 10
1.1. Введение. 10
1.2. Основные понятия и определения практической небесной механики 12
1.3. Задачи практической небесной механики 20
1.4. Особые свойства необходимых наблюдений. 23
1.5. Использование результатов практической небесной механики 27

Глава 2. **Механические модели и уравнения движения.** . . 30
2.1. Структура механических моделей в практической небесной механике 30
2.2. Дифференциальные уравнения движения небесных тел и системы координат 32
2.3. Задача двух тел. Модель кеплеровского движения. . 34
2.4. Уравнения ограниченной задачи трех тел и задача Хилла 48
2.5. Силовая функция притяжения несферичной планеты 55
2.6. Приближенный учет влияния главных спутников на движение далеких спутников планеты 59
2.7. Модель движения спутника сжатой планеты на основе решения обобщенной задачи двух неподвижных центров 60
2.8. Модели сил негравитационной природы, действующих на ИСЗ 64

Глава 3. **Решение дифференциальных уравнений движения небесных тел. Аналитические методы.** 69
3.1. Подходы и методы решения дифференциальных уравнений движения небесных тел 69
3.2. Построение аналитических теорий движения

небесных тел методами теории возмущений 70
3.3. Разложенние возмущающей функции относительно элементов промежуточной орбиты спутника 91
3.4. Определение возмущений элементов промежуточной орбиты спутника планеты 105

Глава 4. **Решение дифференциальных уравнений движения небесных тел. Методы численного интегрирования.** 128
4.1. Общий подход к решению дифференциальных уравнений движения небесных тел методами численного интегрирования 128
4.2. Общие свойства методов численного интегрирования уравнений движения 130
4.3. Метод Рунге-Кутта интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений 135
4.4. Алгоритм решения задач о движении небесного тела методами численного интегрирования 136
4.5. Инструкция к вычислительной программе численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений методом Э. Эверхарта 139
4.6. Программа М.В. Беликова численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений 144
4.7. Проверка и сравнение некоторых процедур численного интегрирования 146
4.8. Аппроксмация прямоугольных координат планет и спутников отрезками рядов по полиномам Чебышева 147

Глава 5. **Наблюдения небесных тел.** 150
5.1. Общие принципы наблюдений 150
5.2. Определение топоцентрических положений планет и спутников 152
5.3. Наблюдения планеты 152
5.4. Наблюдения спутника планеты 154
5.5. Наблюдения двух спутников планеты 158
5.6. Определение угловых измеряемых величин при наблюдениях спутников планет 158

5.7. Вычисление углового расстояния между спутниками и позиционного угла 162
5.8. Определение тангенциальных координат спутников . 163
5.9. Определение разности координат двух спутников планеты в случае фотометрических наблюдений взаимных затмений спутников 164
5.10. Заключение относительно измеряемых величин при наблюдениях спутников планет 167
5.11. Средства и техника наземных наблюдений спутников планет 167

Глава 6. **Построение моделей движения небесных тел на основе наблюдений** 171
6.1. Метод дифференциального уточнения параметров движения небесных тел на основе наблюдений. Применение метода наименьших квадратов 171
6.2. Вычисление измеряемых величин и частных производных от измеряемых величин по уточняемым параметрам 184
6.3. Назначение весов наблюдениям и условным уравнениям 198
6.4. Вычисление статистических характеристик невязок 201
6.5. Методы оценки точности эфемерид, основанных на наблюдениях 203

Глава 7. **Получение астрометрических данных из наблюдений взаимных покрытий и затмений спутников планет** 210
7.1. Описание явлений 210
7.2. Метод получения астрометрических данных 213
7.3. Упрощенный вариант модели взаимных покрытий и затмений спутников планет 219
7.4. Соотношение точности астрометрических результатов различных типов 221
7.5. Всемирные кампании наблюдений спутников планет во время их взаимных покрытий и затмений 223

Глава 8. **Современные модели движения тел Солнечной системы. Информационные ресурсы и эфемериды в интернете.** 225
8.1. Смена версий и вариантов терий движения и эфемерид спутников планет 225
8.2. Средства обеспечения доступа к базам данных, моделям движения и эфемеридам спутников планет . . 228
8.3. Возможности сервера эфемерид MULTI-SAT 234
8.4. Спутники планет в виртуальных обсерваториях . . . 235

Глава 9. **Состав и особенности динамики тел Солнечной системы** 237
9.1. Состав и размеры Солнечной системы 237
9.2. Теории и модели орбитального движения тел Солнечной системы 244
9.3. Особые случаи орбитального движения спутников планет . . . 249
9.4. Особенности формы и вращений тел Солнечной системы . . 251
9.5. Формы спутников планет и их вращение 254
9.6. Особые случаи вращения спутников планет 255
9.7. Динамические загадки Солнечной системы 256

Заключительные замечания. О задачах практической небесной механики, не рассмотренных в данной книге. 258

Список литературы. 260

Приложение 1 (к Главе 3). 268

Предисловие автора

Предлагаемое учебное пособие составлено в соответствии с учебной программой кафедры небесной механики, астрометрии и гравиметрии физического факультета Московского Государственного Университета имени М.В.Ломоносова.

В основу учебного пособия положено содержание специального курса, который читается автором для студентов старших курсов кафедры на протяжении последних 20 лет.

Практическая небесная механика – это современная часть небесной механики, включающая знания, накопленные со времен Кеплера и Ньютона. Этот раздел астрономии в последние 50 лет является главным научным средством изучения космического пространства и расширения среды обитания человека в Солнечной системе. Материал, изложенный в учебном пособии, необходим для усвоения специалистами, осуществляющими проекты по практическому использованию околоземного пространства и по подготовке миссий к другим планетам с помощью автоматических и обитаемых космических аппаратов. Сведения о динамике Солнечной системы и знание научных методов ее освоения расширяют общий кругозор научного специалиста в области астрономии и космической техники.

Бóльшая часть материала составлена из собственных разработок и научных публикаций автора.

В рамки учебного пособия невозможно вместить все аспекты современной научной деятельности специалистов мира в области практической небесной механики. В любом учебном материале может содержаться только некоторая часть всех накопленных на сегодняшний день знаний в рассматриваемой научной области. Выбор автора настоящего пособия основан на знании наиболее актуальных задач и на собственном научном опыте. В специальном параграфе перечисляются задачи и методы современной практической небесной механики, которые не вошли в настоящее учебное пособие

Чтобы получить представление о назначении материала и его месте в общем научном процессе, рассмотрим **резюме по каждой главе учебного пособия.**

Глава 1. В любом деле важно с самого начала выяснить и понять, для чего необходимы те или иные действия, в чем назначение ожидаемых результатов. Именно это обсуждается в первой главе книги.

В современной практической небесной механике возникла необхо-

димость в уточнении основных понятий. Это вызвано прогрессом в технике астрономических наблюдений и возникновением новых связей с современной астрометрией. В первой главе фиксируются основные понятия, отмечается специфика задач в рассматриваемой научной области и дается общая схема действий для их решения.

Глава 2. Любая модель движения небесных тел разрабатывается исходя из модели действующих сил для фиксированного состава объектов и их свойств. Эта совокупность установок образует стройную структуру, которая и рассматривается во второй Главе. Свойства объектов и модель действующих сил порождают систему дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах, которые неизбежно приходится вводить для решения задачи. Именно этапу составления дифференциальных равнений движения в прямоугольных координатах посвящена Глава 2. В виде исключения решение задачи двух тел дается уже этой Главе, методы решения в общем случае рассмотрены в следующих.

Глава 3. Решение поставленных задач сводится к решению дифференциальных уравнений движения. Для построения аналитического решения неизбежно приходится применять методы теории возмущений. Порядок действий описан в третьей Главе. На этом пути встречаются особые проблемы и препятствия, которые проявляются именно при попытках практического решения задач небесной механики. На практике применяются некоторые упрощенные модели возмущенного движения небесных тел. Эти модели описаны в третьей Главе.

Глава 4. В эпоху мощной вычислительной техники для решения задач практической небесной механики широко применяются методы численного интегрирования дифференциальных уравнений движения небесных тел. Преимущества такого подхода заключается в простоте по сравнению с аналитическими методами построения решений. Методы численного интегрирования имеют свои преимущества, но и ограничения в применении. Именно этим аспектам посвящена Глава 4. В этой главе даются практические рецепты численного интегрирования, вплоть до инструкций использования конкретных вычислительных программ.

Глава 5. Основой построения моделей движения небесных тел являются наблюдения. Именно они служат критерием истинности в небесной механике. Практическая небесная механика отличается от других разделов этой науки именно точной привязкой всех изысканий к конкретным наблюдениям небесных тел. Использование наблюде-

ний является наиболее трудоемкой частью небесной механики. Здесь мы вынуждены применять знания и новейшие достижения астрометрии. Разнообразие типов и методов астрометрических наблюдений небесных тел порождает огромный объем специфических проблем. Немногие исследователи способны пройти этот тернистый путь. В помощь им дается эта пятая Глава.

Глава 6. Небесная механика фактически состоит в изучении моделей движения небесных тел. Чтобы исследования не оказывались праздными, необходимо обеспечить близость моделей к реальной динамике естественных и искусственных небесных тел. Как обеспечить эту близость и какие проблемы при этом приходится преодолевать, рассмотрено в этой шестой Главе.

Глава 7. В последние 50 лет разработаны и эффективно применяются методы построения моделей движения естественных спутников планет с использованием наблюдений особых видимых с Земли явлений в системах этих спутников - взаимных покрытий и затмений. Это привело к активизации большого сообщества людей, занимающихся наблюдениями и моделированием движения спутников. Проводятся всемирные кампании наблюдений, привлекающие как профессионалов, так и наблюдателей-любителей, что расширило социальную область практической небесной механики. Методам решений этих задач посвящена седьмая Глава.

Глава 8. Исследователя, изучившего задачи и методы практической небесной механики, естественно заинтересует, а что же сделано в этой области научного мира к сегодняшнему дню. Как вообще происходит процесс? Какие имеются современные инструменты и информационные ресурсы для исследователя в практической небесной механике, рассмотрено в восьмой Главе.

Глава 9. Исследователь, принимающийся за дело в области практической небесной механики, разумеется, знает в нужной степени объекты исследований. Однако, хорошо бы всегда иметь под рукой фактические сведения о планетах и спутниках. Краткий набор таких сведений дается в девятой Главе. Приводится общий набор характеристик и параметров тел Солнечной системы.

Заключительные замечания в конце книги подводят некоторый итог всего материала. Перечисляются некоторые актуальные задачи и методы современной практической небесной механики, не рассмотренные в данной книге.

Лишь тогда есть толк в теории, когда она представляет собой не только абстрактные конструкции в воображении очарованного теоретика, а хорошо отлаженные процедуры, исправно служащие целям практического познания природы.

Глава 1. Цели, задачи и общий подход к изучению динамики небесных тел

1.1. Введение

Сознание того, что во все стороны от нас простирается необъятная Вселенная, всегда беспокоило человека. Это вызывает двоякое желание. Во-первых, хорошо бы понять наше место в необозримом пространстве и бесконечном разнообразии мира. У человека нередко возникает легкий дискомфорт от отсутствия ответа на подобные вопросы. Одновременно рождается желание извлечь из Космоса выгоду для удовлетворения своих постоянно возрастающих потребностей. Еще большее беспокойство испытывает человек, обнаружив угрозу своей жизни со стороны сил природы. Ничто так не пугает нас, как непонятное. Удивительно легко успокоить человека объяснением страшных явлений даже не совсем знакомыми словами. Сознание того, что хоть кто-то разбирается в деяниях природы, возвращает нас к привычному комфорту повседневной жизни. Вот почему мы должны быть благодарны тем немногим людям, которые работают, чтобы избавить нас от мучительных вопросов о космосе и судьбе.

С древних времен задумывались люди о влиянии небесных светил на земную жизнь. Попытки сопоставить небесные явления с судьбой человека делались как учеными, так и далекими от науки предприимчивыми личностями. Однако во все времена неизменно получался весьма ненадежный результат. Что касается судьбы самих небесных тел, то астрономы и математики давно рассчитали удивительно устойчивый характер движения планет и их спутников. Размеры и формы орбит планет, наклоны осей их вращения почти не изменились даже на космогонических интервалах времени.

Ученые-естествоиспытатели и философы пришли к выводу, что

главная причина существования Разума во Вселенной - это функция познания. Разумная жизнь характеризуется стремлением понять и объяснить происходящие вокруг явления. Разум чахнет без новых, необъясненных явлений.

Для всего естествознания небесная механика играет роль фундамента, без которого немыслимо познание Вселенной и освоение Космоса. Значение небесной механики для жизни на Земле состоит в использовании знаний о движении небесных тел и ближнем Космосе для лучшего удовлетворения потребностей человека и его защиты от сил природы. Теория движения искусственных спутников Земли позволяет использовать космические аппараты для средств коммуникации и исследования земных ресурсов. Теория движения астероидов, комет и метеоров дает оценку опасности попадания этих тел в атмосферу и выпадения на земную поверхность. Исследования движений тел Солнечной системы позволили создать фундаментальную систему отсчета - модель инерциальной системы, реализованную небесной механикой и астрометрией в форме астрономических ежегодников и фундаментальных звездных каталогов.

В недрах небесной механики возникли, оформились и развились многие наиболее эффективные методы математической физики и вычислительной математики.

В качестве примера (и отнюдь не единственного!) можно указать методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих различные природные явления и рукотворные процессы. Зародившись в небесной механике, эти и другие численные методы благодаря быстродействующим вычислительным машинам получили широчайшее распространение в науке и технике. В 17-18 веках с решения астрономических задач методами небесной механики началась, по существу, и вся теоретическая физика.

Не только преимущественно теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений, как это было в прошлом столетии, но, по сути дела, весь арсенал современных средств прикладной математики используется современной небесной механикой при моделировании движений космических объектов.

Результаты и выводы небесной механики явно и незримо присутствуют во многих других областях науки и практической деятельности человека.

На любом этапе познания Вселенной мы уже имеем более или менее адекватную ее модель. Новые, более точные наблюдения при-

водят к рассогласованию модели с действительностью. Чаще всего желаемое согласование модели восстанавливается путем уточнения известных параметров движения или состояния небесных тел. Иногда приходится значительно совершенствовать теории, методы построения модели или методы вычислений. Процесс невольно направлен на обнаружение новых, необъясненных явлений. На некотором этапе удается добыть эту столь необходимую Разуму "пищу", но этому всегда предшествует колоссальный труд ученых – наблюдателей, теоретиков, вычислителей. Модели движения небесных тел ценны еще тем, что позволяют нам предвычислять их расположение на любой момент времени в прошлом или будущем. Лишь тогда есть толк в теории, когда она представляет собой не только абстрактные конструкции в воображении очарованного теоретика, а хорошо отлаженные процедуры, исправно служащие целям практического познания природы. Одним из главных инструментов на таком пути является практическая небесная механика. Именно практическая небесная механика дает нам наиболее полные и точные знания о динамике небесных тел.

1.2. Основные понятия и определения практической небесной механики

Небесная механика – область астрономической науки, которая занимается изучением движений небесных тел под действием естественных сил природы.

Предметом небесной механики являются механические формы движения материи.

Объекты исследований.

Объекты исследований в небесной механике - всевозможные материальные образования от мельчайших частиц космической пыли до колоссальных систем типа звездных скоплений, галактик и скоплений галактик.

Основным понятием в небесной механике является небесное тело. Исследуются движения естественных и существующих или проектируемых искусственных небесных тел. Однако фактически на этом пути оперируют с моделями небесных тел, которых в природе не существует, но которые в известной мере мало отличаются от реальных небесных тел. Примерами таких объектов могут служить материальная точка или абсолютно твердое однородное тело, ограниченное поверхностью трехосного эллипсоида.

Цель небесной механики - познание законов природы, управляющих механическими движениями небесных тел.

Законы движения.

Реальным проявлением движения небесных тел является изменение их взаимного расположения, которое определяется взаимными расстояниями. Для задания движения системы небесных тел следует задать закон изменения их взаимных расстояний во времени. Для математического описания законов движения используются те или иные функции времени.

Для удобного отображения движения небесных тел оперируют понятиями системы отсчета, системы координат и шкалы времени. Абстрактное понятие системы координат так или иначе связывают с реальными объектами. Примерами могут служить Гринвичский меридиан на Земле или внегалактические радиоисточники излучения. Абстрактное понятие шкалы времени реализуется реальными физическими процессами. Примерами могут служить вращение Земли или электромагнитное излучение атома.

Законы взаимодействия.

Основой для изучения движения небесных тел являются строго установленные из наблюдений законы физики, которые описывают взаимодействия тел или воздействия на них той среды, в которой они движутся. Математической формой законов взаимодействия небесных тел оказываются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют взаимные расстояния между небесными телами или их координаты.

Методы исследований.

От других астрономических дисциплин небесная механика отличается лишь методами исследования, среди которых следует выделить следующие три группы методов: *аналитические, численные, качественные.*

Аналитические методы дают возможность получать набор аналитических соотношений, позволяющих рассчитывать положения и скорости небесных тел на заданные моменты времени, минуя какие-либо промежуточные их значения. Недостатками аналитических методов являются большая трудоемкость и нарастающая громоздкость выкладок с ростом необходимой точности расчета движения. Кроме того, аналитические методы не дают возможности судить о свойствах исследуемых движений на очень больших интервалах времени. Еще одним их недостатком является то, что применимы они не ко всем

космическим объектам.

Ограничения, свойственные аналитическим методам, не распространяются на *численные методы*, которые пригодны для расчета движений любых небесных тел и их систем с наперед заданной точностью. С внедрением в научные исследования мощных вычислительных машин или компьютеров считавшаяся прежде чрезмерной трудоемкость численных методов перестала быть препятствием для их применения. Но и у них есть своя ахиллесова пята — это неуклонное накопление погрешности с увеличением интервала интегрирования при невозможности строгих оценок роста этой погрешности. Еще один недостаток этих методов — численная форма представления результатов и неизбежность расчета промежуточных этапов, хотя зачастую целью исследования является конечная конфигурация после интегрирования.

Качественные методы небесной механики позволяют судить о свойствах движений небесных тел без полного интегрирования (аналитического или численного) дифференциальных уравнений.

Аналитические, численные и качественные методы продолжают применяться в современной небесной механике, причем красота и высокая эффективность аналитических методов удачно сочетается с простотой и универсальностью методов численных, а все это дополняется космогонической важностью выводов, получаемых качественными методами исследований.

Механическая модель.

В небесной механике используют понятие механической модели. Модель описывается составом движущихся объектов, их свойствами, заданием сил, действующих на отдельные компоненты модели. Механические модели используются либо для приближенного описания движений небесных тел, либо как основа для разработки более точных методов описания их движений.

Задачей небесной механики считается построение и исследование различных механических моделей. Конечная цель – это изучение и описание движений реальных небесных тел.

Механическая модель, будучи, как правило, приближенным описанием движения системы реальных небесных тел, может принципиально от нее отличаться. В частности, свойства тел в модели могут не соответствовать реальности, а законы действующих сил могут задаваться специальным образом. Примерами могут служить задача о движении конечного числа **материальных точек**, в которой

небесные тела не имеют размеров, или **ограниченная задача трех тел**, в которой взаимодействие тел не удовлетворяет третьему закону Ньютона. Когда принимаются во внимание формы и размеры небесных тел, говорят о **поступательно-вращательном движении**. Рассматривают относительное движение в задаче двух тел, когда начало системы отсчета помещается в центр масс одного из них, и барицентрическое движение, при котором начало помещено в центр масс обоих тел. Механической моделью движения трех и более материальных точек может быть модель движения в неизменной плоскости. В ограниченной задаче трех тел может рассматриваться модель кругового движения двух из них.

Результат решения задачи небесной механики – это либо вычисленные на заданный момент времени положение и скорость небесного тела, либо найденные свойства его движения. Если изучается движение реального небесного тела, то решение должно быть максимально близким к результатам наблюдений. При этом точность теории должна быть лучше точности наблюдений. В этом случае успешный прогноз движения небесного тела обеспечивается не только точностью наблюдений, но также достаточной величиной интервала времени, на котором выполнены наблюдения.

Мы не знаем точно, как устроены небесные тела и по каким точным законам они движутся. Поэтому приходится довольствоваться изучением моделей движения, выдвигая ту или иную смелую гипотезу о том, что наши модели мало отличаются от действительности.

Время.

Изменение измеряемой величины во времени обусловлено движением небесных тел. Измерение выполняется в некоторый момент времени. Момент отсчитывается по часам обсерватории. В практической небесной механике измеряемой величине всегда приписывают момент измерения.

Время является абстрактным понятием, для его определения нужны какие-нибудь измерительные приборы. Любой прибор имеет погрешность измерения. Сначала время измеряли углом вращения Земли. Такое время назвали всемирным и обозначили через UT. Когда были обнаружены расхождения теории движения Луны с наблюдениями стало ясно, что Земля вращается неравномерно, и эталоном стало время, как независимая переменная в теории движения Луны. Время измерялось по наблюдениям Луны, называлось эфемеридным временем и обозначалось ET. Однако точность наблюдений Луны все

же ограничена. Поиски более точного измерителя времени привели к атомным часам. Этот датчик времени является сейчас наиболее точным. Время, осредненное по нескольким наиболее точным атомным часам мира, называют международным атомным временем и обозначают IAT .

Наблюдения. Измеряемые величины.

Источником наших знаний о небесных телах являются наблюдения. Наблюдая, мы не можем довольствоваться констатацией факта наличия небесного тела на небе. В процессе астрономических наблюдений выполняются измерения тех или иных величин. Делается это с помощью разнообразных приборов. В отличие от координат, измеряемая величина всегда реальна. Она образуется в измерительном приборе. Астрономы имеют дело с богатым разнообразием приборов и измеряемых величин. Примерами могут служить углы поворота оси телескопа относительно отвесной линии и плоскости меридиана, расстояния между изображениями небесных тел на фотопластинках, промежуток времени между вспышкой лазерного дальномера и фиксацией в телескопе отраженного от небесного тела светового импульса, интенсивность засветки отдельного пиксела полупроводникового приемника света, разность продолжительностей записи фрагмента излучения космического радиоисточника на двух радиотелескопах.

В дальнейшем мы будем говорить о наблюдениях небесных тел, всегда предполагая при этом получение значений той или иной *измеряемой величины* на некоторый момент времени – *момент измерения.*

Точность наблюдений.

Приборам присуща погрешность. Таинства процессов, происходящих в измерительных приборах, оставляют нам лишь возможность строить гипотезы относительно ошибок измерений. Никогда не бывает известна величина ошибки отдельного измерения. Очень часто мы предполагаем, что погрешности чисто случайны, и рассматриваем различные статистические характеристики ошибок. Больше всего оперируют с понятием наиболее вероятной среднеквадратической величины ошибки. Конструктивные свойства измерительных приборов позволяют иногда приближенно установить точность измерений. В общем случае мы говорим о *точности наблюдений.*

Точность астрономических измерений достигла уже такого уровня, что стала заметной неадекватность ньютоновой механики наблюдаемому движению небесных тел. В более точной общей теории отно-

сительности (ОТО) время течет различно в любых двух точках пространства. Для связи шкал времени в рамках ОТО нужно учитывать движение тел и их массы.

Параметры движения.

Изучая планеты и спутники, звезды и галактики, мы неявно предполагаем, что все время остаются постоянными некоторые параметры, присущие небесным телам и их движению. К ним относятся массы, размеры и формы тел, параметры орбит и многие другие величины. Эти параметры невозможно непосредственно измерить с помощью имеющихся приборов. Однако их значения реально проявляют себя в наблюдаемом движении небесных тел. Будем называть в дальнейшем такие величины *параметрами движения* небесных тел.

В небесной механике также изучается движение небесных тел с переменными массами. Например, движение так называемой нормальной звезды, масса которой уменьшается со временем, и темп потери масс составляет от $10^{-12}M_\odot$ до $10^{-7}M_\odot$ в год. Масса нейтронной звезды увеличивается с темпом акреции от $10^{-7}M_\odot$ до $10^{-4}M_\odot$ в год. Здесь $M_\odot$ – масса Солнца. Возможны случаи, когда не только массы, но и формы и размеры звезд могут изменяться, например, в задаче о движении звезды в тесных двойных звездных системах.

Системы координат.

Измеряемые величины не дают наглядных представлений о конфигурации системы тел и тем более непригодны непосредственно для выражения общих законов движения. Удобным средством описания пространственного расположения тел и направлений на небесные светила являются системы координат. Когда говорят о положении светила или об ориентации тела в некоторой системе координат, имеются в виду абстрактные оси координат в пространстве и воображаемые линии на небе. Системы координат выбираются так, чтобы дать ясное представление о законах и свойствах движения небесных тел.

Выбор системы координат обусловлен удобством описания и изучения движения конкретного небесного тела. Начало и оси координат связывают либо с деталями объекта, например с гринвичским меридианом Земли, либо с его динамическими свойствами, например, с главными осями инерции тела, либо со свойствами движения, например с осью вращения тела, либо с положением тела в некоторый момент времени, либо выбирают систему координат другим специальным образом.

Чаще других используются системы прямоугольных или декарто-

вых координат и обозначают ее начало буквой O, а оси буквами x, y, z. Столь же часто применяются системы сферических координат с обозначением центрального расстояния буквой r, широты - буквой φ и долготы - буквой λ.

Любые системы координат с началом, расположенным в точке наблюдений, называются топоцентрическими. Направления осей топоцентрической системы связывают с линией отвеса и местным меридианом. Говорят о геоцентрических системах координат, когда начало помещено в центр масс Земли.

Законы движения небесных тел – это зависимости координат тел от времени и параметров движения. Зависимости могут принимать различные формы. Чаще всего используются аналитические функции, описывающие явную зависимость координат от времени. В некоторых случаях зависимость дается в неявной форме, тогда координаты получаются путем вычислений по формулам последовательными приближениями. Закон движения может иметь форму числовых таблиц, в которых значения координат небесных тел заданы на ряд фиксированных моментов времени, обычно следующих с каким-то постоянным шагом. При таком численном задании закона движения теряется зависимость координат от параметров движения небесного тела. В этом случае затруднен анализ свойств движения, и мы ограничены тем интервалом времени, для которого координаты были вычислены.

Координаты небесных тел являются абстрактными понятиями. Их нельзя измерить никакими приборами. Системы координат моделируются с помощью формул и алгоритмов и являются составной частью модели движения небесных тел.

Модель движения небесного тела.

В общем случае под моделью движения небесного тела мы будем подразумевать некоторую совокупность средств, позволяющих определять значения измеряемой величины на любые заданные моменты времени при известных значениях параметров движения небесных тел.

Реализации модели движения небесного тела могут иметь весьма различные формы. Это могут быть математические формулы, написанные вручную на бумаге или опубликованные в виде печатного материала. Это могут быть напечатанные числовые таблицы значений координат. В настоящее время и формулы, и таблицы отображаются в памяти компьютеров. При этом формулы преобразуются в алгорит-

мы вычислений, а таблицы доступны вычислительным программам, решающим те или иные задачи. Однако даже в эпоху мощной вычислительной техники в нескольких научных центрах мира создаются и печатаются в форме астрономических ежегодников координаты основных небесных тел, вычисленные на несколько лет вперед.

Откуда же берутся законы движения небесных тел? В старые времена они устанавливались в кинематической форме почти эмпирически из простых наблюдений. Сейчас же, конечно, законы движения находят в процессе решения дифференциальных уравнений движения относительно координат небесных тел. Составляют эти уравнения на основе строго установленных законов физики, которые описывают взаимодействия тел или воздействия на них той среды, в которой они движутся. Это делается в рамках какой-либо механической модели. Четко фиксируются все факторы, влияющие на движение каждого тела системы и включенные в рассматриваемую модель. Процесс установления законов движения небесных тел, а также его результат – сами законы движения, называют теорией движения. Именно этим занимается небесная механика.

В подавляющем большинстве задач небесной механики невозможно получить точное решение дифференциальных уравнений движения. Приходится довольствоваться либо приближенным решением используемых точных уравнений, либо точным решением приближенных уравнений. Применяются как аналитические, так и численные методы решения дифференциальных уравнений. В обоих случаях решение обладает погрешностью. Эта погрешность может быть более или менее достоверно оценена с помощью самой теории.

Точность модели движения небесного тела.

Исходными данными для модели движения небесного тела являются параметры движения, которые в свою очередь известны с некоторой погрешностью. Эта погрешность также повлияет на точность предвычисления координат небесного тела и точность предвычисления измеряемой величины. В дальнейшем мы будем говорить о *точности модели*, подразумевая погрешность вычисления измеряемой величины. При этом мы разделяем два источника этой погрешности : приближенность найденного решения уравнений движения и неточность параметров движения. Погрешность решения уравнений движения мы будем также называть погрешностью вычислений или погрешностью метода. Говоря о точности теории движения небесного тела всегда нужно уточнять, включена ли в погрешность теории

неточность параметров движения или имеется в виду точность теории в предположении абсолютно точных параметров.

1.3. Задачи практической небесной механики

Итак, мы определили основные понятия небесной механики. Теперь выясним, в каких соотношениях они находятся, и как они служат целям практического познания природы.

Решая задачи небесной механики, мы получаем возможность находить положение и скорость небесного тела на заданные моменты времени в прошлом или в будущем. Этот результат должен наилучшим образом согласовываться с данными наблюдений. Пример таких результатов – это вычисление эфемерид небесных тел.

В результате решения задач небесной механики могут определяться свойства движения небесного тела. При этом само движение, т. е. положение и скорость на заданные моменты времени, может оставаться неизвестным. В качестве свойства движения небесных тел может рассматриваться его устойчивость. В других случаях нас интересует близость движения группы тел к резонансному движению. Известна также и проблема неопределенности решения детерминированных уравнений движения.

Рассмотрим подробнее порядок построения модели движения реальных небесных тел.

На Рис. 1 изображена схема изучения динамики небесных тел на основе наблюдений. На любом этапе исследований мы фиксируем состав изучаемой системы небесных тел. Установленные на текущий момент времени законы взаимодействия тел (гравитационное притяжение, сопротивление среды) позволяют записать дифференциальные уравнения движения. Используя аналитические методы, можно найти общее решение уравнений движения. Подставляя в это общее решение значения произвольных постоянных (параметров движения), получим искомую модель движения системы небесных тел. Решая уравнения движения методами численного интегрирования при известных начальных условиях (параметров движения), также получаем модель движения системы небесных тел. Некоторые предварительные значения параметров движения обычно бывают известны из предшествующих исследований. Для построения модели движения потребуются также значения физических праметров, входящих в уравнения движения посредством законов взаимодействия (напри-

мер, массы тел).

Основным процессом изучения динамики небесных тел является уточнение модели на основе астрономических наблюдений. Наблюдения дают нам значения измеряемых величин. Назовем их измеренными значениями. С другой стороны мы имеем модель движения, которая для того и служит, чтобы предвычислять измеряемые величины. Мы можем вычислить измеряемые величины именно на моменты наблюдений. Результаты называются вычисленными значениями измеряемой величины. Разные по происхождению значения одной и той же величины будут различаться между собой. Эту разность значений мы обозначаем на Рис. 1 символически через "O-C"(O – observatum, C – calculatum). Разность естественна, так как в ней присутствует погрешность наблюдений и погрешность модели движения небесного тела. Однако в некоторых случаях разности "O-C"будут превышать погрешность модели и погрешность наблюдений. Новые, более точные наблюдения обнаруживают рассогласование модели с действительностью. В этих случаях рассогласованию приписывают наиболее простую и наиболее вероятную причину – неточность принятых значений параметров движения небесного тела. В дело включается процесс, называемый уточнением параметров движения из наблюдений. Чаще всего желаемое согласование теории с наблюдениями достигается путем уточнения параметров, и разности "O-C"снова оказываются в пределах погрешностей модели и наблюдений.

В некоторых редких случаях не удается добиться согласования теории с наблюдениями – разности "O-C"остаются значительными. Тогда приходится совершенствовать применяемые методы решения уравнений движения и методы вычислений. Это наиболее трудоемкая часть небесной механики. Заново пересматриваются факторы, влияющие на движение каждого небесного тела. Выводятся новые, более точные формулы теории. Как следствие, формулы становятся более длинными. Разрабатываются и применяются более точные методы вычислений. Как следствие, необходимое вычислительное время существенно увеличивается. В результате выполнения всей этой весьма трудоемкой работы удается согласовать результаты теории и наблюдений.

В еще более редких случаях рассогласование теории с наблюдениями остается существенным, сколько ни пытаются исследователи уточнить параметры движения и усовершенствовать модель дви-

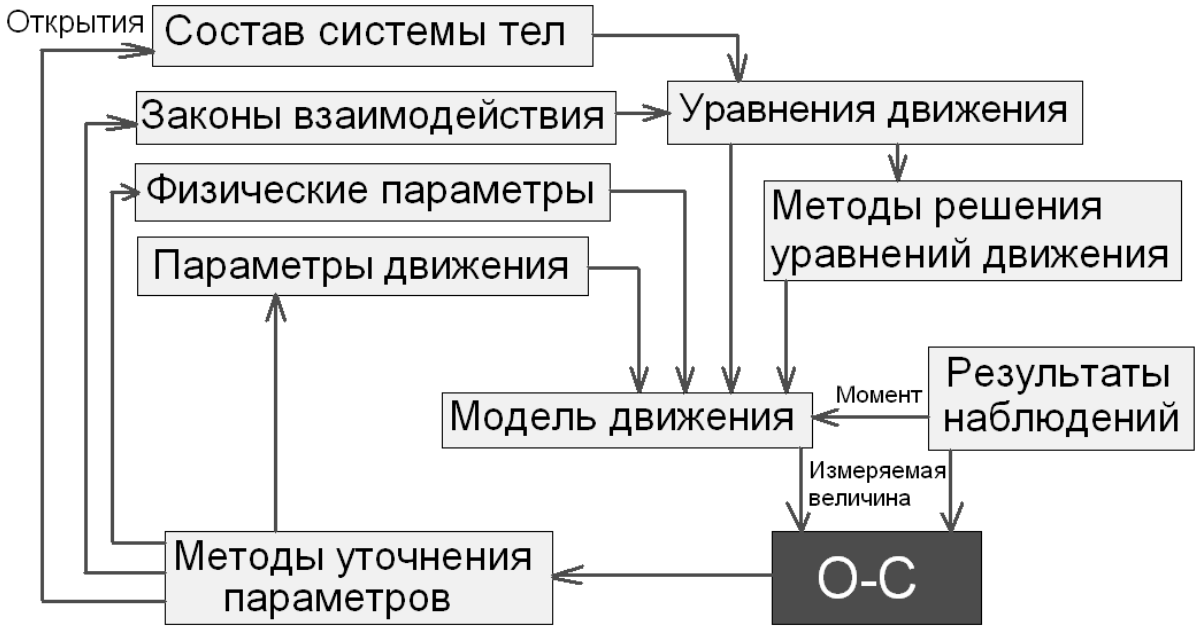

Рис. 1: Схема процесса изучения динамики небесных тел.

жения. В результате обобщения фактов, проверки новых гипотез и высшего напряжения интеллекта совершается открытие. Могут быть открыты ранее неизвестные небесные тела или новые законы взаимодействия небесных тел. В такой ситуации резко расширяются наши общие представления об окружающем мире. Делается обобщение основных законов природы. Примером может служить экспериментальное подтверждение общей теории относительности при анализе необъяснимой части скорости движения перигелия орбиты Меркурия.

Приведенная здесь схема, как любая схема, суха и ограниченна, так как она лишь в общем виде отражает разнообразные научные изыскания и накопление фактов, фантазии и ошибки.

Отметим, что описанный процесс имеет также сугубо практическую направленность. Модель движения небесных тел является основой для отслеживания возможных опасностей со стороны космоса. Модель движения небесных тел также непосредственно используется для проектирования и обеспечения полетов автоматических и пилотируемых околоземных и межпланетных аппаратов – искусственных небесных тел различного назначения.

1.4. Особые свойства необходимых наблюдений

Движение большинства реальных и воображаемых небесных тел имеет характер обращений одних тел вокруг других. Изучаются также собственные вращения небесных тел. Обращение или вращение тела описывается углом, величина которого монотонно возрастает во времени. Рассмотрим подробнее, как определяются эти процессы из наблюдений.

Угол орбитального обращения или угол вращения небесного тела назовем условно *долготой* и обозначим ее здесь через λ. В большинстве механических моделей скорость изменения долготы $\dot{\lambda}$ приближенно оказывается постоянной.

Прогресс может быть достигнут повышением точности наблюдений. На этом пути может произойти открытие либо нового свойства известного небесного тела, либо новой планеты или спутника. Поясним это на примере.

Допустим, что мы построили хорошую модель движения и с ее помощью вычислили разности значений орбитальной долготы, полученных из наблюдений, и вычисленных по теории, т. е. так называемые «О-С». При наличии ошибок наблюдений график этих разностей может выглядеть так, как показано на рис. 2а. Мы видим здесь только «шум» и ничего интересного. Допустим, что прогресс в технике наблюдений позволил улучшить точность наблюдений. Шум уменьшился. На его фоне возникает что-то подозрительное на вид. Это мы видим на рис. 2б. При дальнейшем повышении точности наблюдений очевидно наличие некоторого синусоидального изменения разностей «О-С». Смотрите на рис. 2в. Этот «сигнал» послужит определению того, чего мы раньше не учли в нашей теории.

Свойство орбитальных движений небесных тел таково, что орбитальная долгота увеличивается монотонно со временем. Если исключить из ее значений, полученных из наблюдений, функцию ее теоретического изменения, то можно получить то, что изображено на рис. 3а. Снова ничего интересного. Если поискать старые наблюдения и продолжать наблюдать интересующее нас небесное тело, то можно получить то, что показано на рис. 3б. Мы видим почти квадратичное по времени изменение долготы. Такой эффект может появиться только из-за неучтенной диссипации механической энергии небесного тела, что может быть вызвано, например, приливными силами.

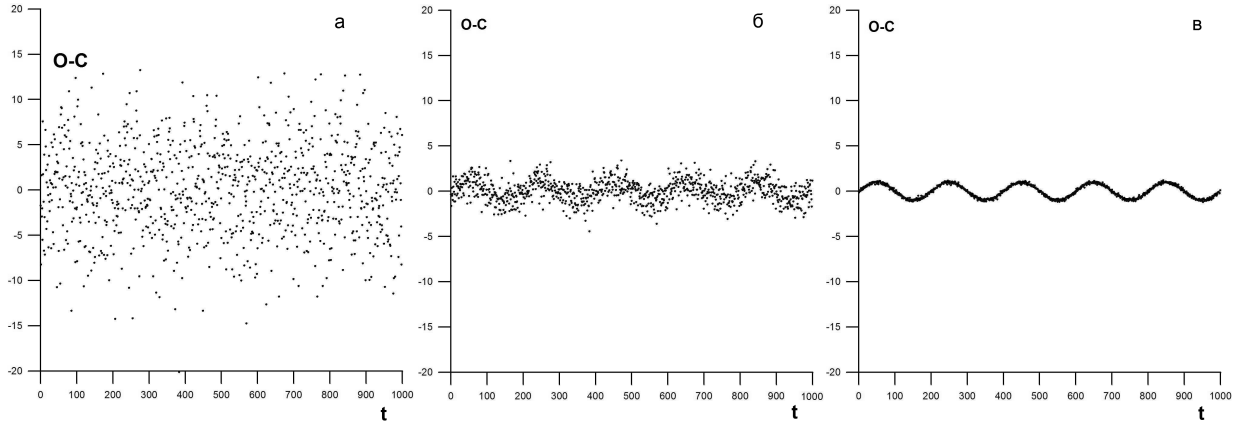

Рис. 2: Примеры остаточных отклонений O-C орбитальной долготы небесного тела при различной точности наблюдений.

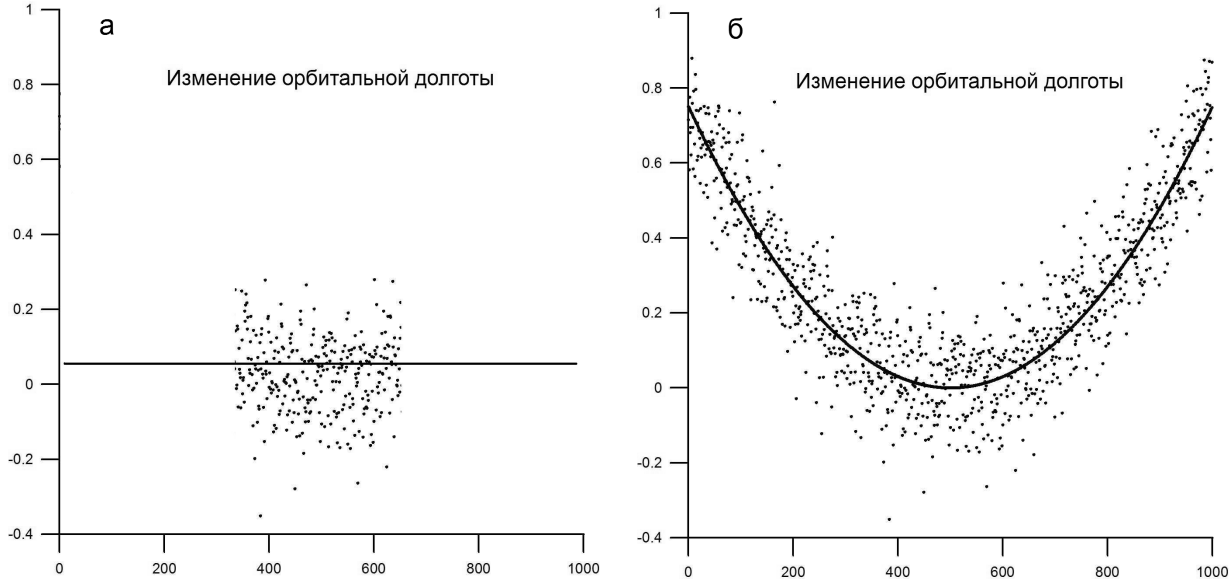

Рис. 3: Примеры остаточных отклонений O-C орбитальной долготы небесного тела на различных интервалах времени.

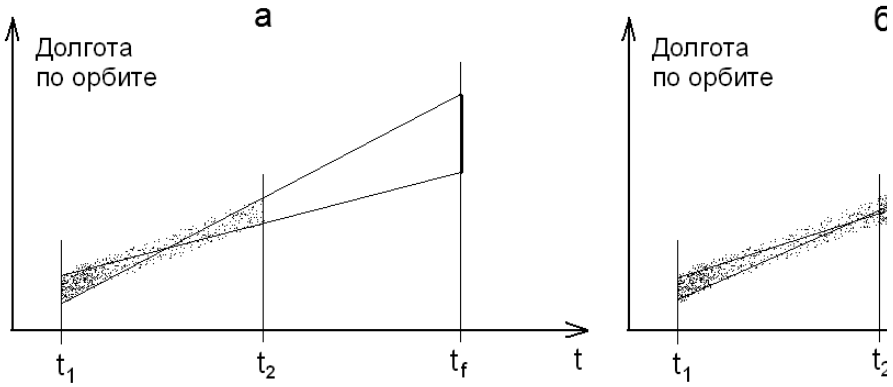

Рис. 4: Демонстрация зависимости точности эфемерид небесного тела от интервала времени наблюдений.

Теперь ясно, что для прогресса необходимо расширение интервала времени наблюдений.

Какова же связь интервала времени наблюдений и точности эфемерид? Посмотрим на рис. 4а. Показаны значения орбитальной долготы небесного тела, полученные из наблюдений на интервале времени (t_1 ,t_2). Налицо некоторый «шум» и линейное изменение. На основе теории и наблюдений мы можем вычислить возможные значения долготы на интересующий нас момент времени t_f , ограниченные прямыми линиями на рисунке. Если мы продолжим наблюдения с прежней точностью до момента t_3, то точность эфемериды улучшится, что и видно на рис. 4б.

Очевидно, что мы не можем измерять орбитальную долготу непосредственно при наблюдениях. Мы наблюдаем лишь проекцию орбитального движения на небесную сферу. Однако можно вывести приближенную формулу относительно точности определения орбитальной долготы.

Теория рассматриваемого здесь процесса состоит в описании линейного изменения долготы во времени. Параметром теории движения будет $\dot{\lambda}$. Измеряемой величиной – сама долгота λ.

При выполнении однотипных наблюдений погрешность измерения долготы будет одинаковой в любые моменты времени. Обозначим эту погрешность через σ_λ . Пусть измерение долготы выполнено в два момента времени t_1 и t_2. Тогда погрешность определения параметра

движения $\sigma_{\dot\lambda}$ находится из соотношения

$$\sigma_{\dot\lambda} = \frac{\sigma_\lambda}{t_2 - t_1},$$

откуда видно, что точность определения параметра движения улучшается с ростом интервала измерений $t_2 - t_1$.

Посмотрим теперь, какова роль точности параметра движения при реализации основной цели теории – предвычисления долготы на заданные моменты времени. Допустим, что нужно вычислить долготу на момент времени t_f в будущем, то есть $t_f > t_2$. Погрешность такого предвычисления определится по формуле

$$\sigma_{\lambda(t_f)} = \sigma_{\dot\lambda}\ (t_f - t_2) = \frac{\sigma_\lambda}{t_2 - t_1}\ (t_f - \frac{t_1 + t_2}{2}).$$

Эта погрешность также уменьшается с ростом интервала измерений.

Допустим, что наблюдения продолжались после момента t_2. Пусть последнее новое наблюдение выполнено в некоторый момент t_3 ($t_3 > t_2$). Теперь погрешность предвычисления долготы на момент t_f стала равной

$$\sigma_{\lambda(t_f)} = \frac{\sigma_\lambda}{t_3 - t_1}\ (t_f - \frac{t_1 + t_3}{2}) < \frac{\sigma_\lambda}{t_2 - t_1}\ (t_f - \frac{t_1 + t_2}{2}).$$

Таким образом точность предвычисления долготы улучшилась.

Посмотрим, что может дать привлечение более точных наблюдений, но выполненных на небольшом интервале времени. Пусть, например, посередине интервала измерений $t_1 - t_2$ в моменты t_1^*, t_2^* выполнены два измерения долготы с погрешностью σ_λ^* . Пусть при этом

$$\sigma_\lambda^* = 0.5\ \sigma_\lambda, \quad t_2^* - t_1^* = 0.1\ (t_2 - t_1), \quad \frac{t_1^* + t_2^*}{2} = \frac{t_1 + t_2}{2},$$

то есть новые наблюдения в два раза точнее прежних, а интервал измерений в десять раз меньше.

Точность предвычисления долготы на основе более точных наблюдений найдется из соотношений

$$\sigma_{\lambda(t_f)} = \frac{\sigma_\lambda^*}{t_2^* - t_1^*}\ (t_f - \frac{t_1^* + t_2^*}{2}) = 5\ \frac{\sigma_\lambda}{t_2 - t_1}\ (t_f - \frac{t_1 + t_2}{2}),$$

откуда видно, что эта точность оказалась в пять раз хуже, чем на основе прежних, менее точных наблюдений.

Рассмотренный здесь анализ общих свойств построения модели на основе наблюдений приводит к следующим выводам.

1. Для построения модели движения любого небесного тела всегда стараются использовать набор всех существующих в мире наблюдений, начиная с момента открытия этого небесного тела.

2. Продолжение наблюдений небесных тел даже с прежней точностью оказывается полезным.

3. Использование наблюдений, выполненных с лучшей точностью, не всегда приводит к уточнению модели. Преимущества одних наблюдений по сравнению с другими определяются не только их точностью, но также интервалом времени, на котором они выполнены.

4. Любые новые наблюдения, даже более точные, почти всегда используются только как дополнение к уже существующей базе данных.

Эти выводы составляют особенность практической небесной механики по сравнению с многими другими исследованиями небесных тел, при которых новые ценные научные результаты получаются на основе только новейших наблюдений, по точности перекрывающих старые. В практической небесной механике более точная и более адекватная действительности модель движения небесного тела строится на основе более полной базы данных наблюдений.

Кроме того, очевидна необходимость поиска новых способов наблюдений, дающих новые данные о движении небесных тел.

1.5. Использование результатов практической небесной механики

Небесная механика служит пониманию структуры, происхождения и развития Солнечной системы, звездных систем и систем галактик. Движение вещества вблизи черных дыр также описывается небесной механикой.

Пока никому еще не удалось доказать устойчивость Солнечной системы, однако меру этой устойчивости удалось оценить. Еще классиками небесной механики, Лагранжем и Лапласом, было показано, что даже если Солнечная система и неустойчива, то ее распад может происходить лишь в масштабах времени, сравнимых с временем существования планет и спутников. Изучена и обоснована устойчивость отдельных структур небесных тел – системы планет, движущихся по почти компланарным орбитам, и аналогичных систем спут-

ников планет. Доказана взаимосвязь устойчивых конструкций орбит и резонансных движений в ряде систем небесных тел.

Все эти выводы уже сами по себе представляют собой ценный научный продукт. Они используются при решении фундаментальных задач космологии и в физике небесных тел. Постоянно делаются попытки связать выводы небесной механики с науками о Земле и Человеке.

С практической небесной механикой тесно связана астрометрия. Модели движения Луны и планет, модель вращения Земли служат основой для координатно-временного обеспечения навигационных служб и некоторых производственных процессов. До изобретения атомных часов небесная механика обеспечивала единственный надежный способ отсчета времени.

Особую роль в науке и практике играет теория движения искусственных спутников Земли. ИСЗ используются в нескольких качествах.

Во-первых, они являются весьма подходящими носителями приборов для наблюдений земной поверхности и устройств, обеспечивающих глобальную радиосвязь на Земле. Уникальные научные результаты получаются из наблюдений небесных тел и космических излучений приборами, размещенными на орбитах спутников Земли.

Во-вторых, ИСЗ используются в качестве пассивно гравитирующих тел. Их движение происходит в гравитационном поле Земли, подвержено влиянию геодинамических и геофизических процессов. Внутреннее строение Земли определяет ее гравитационное поле. Приливы твердой Земли и океанов, другие деформации в теле Земли являются причинами изменений гравитационного поля во времени.

На основе теории движения ИСЗ работают совершенные спутниковые навигационные системы такие, как GPS, и ГЛОНАСС. Сложные модели движения ИСЗ были разработаны в весьма сжатые сроки, продиктованные практическими нуждами людей, живущих на Земле.

ИСЗ являются самыми близкими к Земле небесными телами. Поэтому их легче всего наблюдать с Земли. При наблюдениях измеряются дальность до спутника и скорость изменения этой дальности – так называемая лучевая скорость. Делается это с помощью лазерных дальномеров и радиотехнических средств. Измеряемые величины зависят от положений спутника, а они в свою очередь зависят от параметров, определяющих факторы, влияющие на его движение. Вот почему по наблюдениям ИСЗ выполняется эффективное определение

параметров гравитационного поля Земли и параметров, определяющих его изменения.

Поскольку наблюдения спутников делаются с поверхности Земли, измеряемые величины зависят не только от координат спутника, но также от координат пункта наблюдения. Это дает возможность определения приливных перемещений точек земной поверхности и дрейфа континентов.

Результаты и выводы небесной механики явно и незримо присутствуют во многих других областях науки и практической деятельности человека.

Глава 2. Механические модели и уравнения движения

2.1. Структура механических моделей в практической небесной механике

Структура изучаемой Вселенной чрезвычайно сложна. Поэтому построить строгую структуру механических моделей в практической небесной механике весьма затруднительно. В рамках учебного пособия по практической небесной механике нет возможности даже перечислить все встречающиеся в науке механические модели. Однако можно рассматривать некоторые соотношения между моделями. Рассмотрим здесь только некоторые из механических моделей, которые чаще других встречаются в современных работах по небесной механике. Некоторые из них рассматривались еще в классических работах прошлых веков.

Прежде всего следует отделить понятие материальной точки от понятия протяженного тела. Материальной точкой мы называем абстрактный объект, который не имеет размеров, но имеет массу. Материальные точки испытывают гравитационное взаимодействие, но не могут сталкиваться. Им это практически нечем делать, так как у них нулевые размеры. Однако мы можем рассматривать состояние совпадения двух материальных точек.

Протяженное тело имеет конечные размеры. При этом могут быть несколько вариантов свойств протяженных тел. Предполагается, что протяженное тело имеет границы и некоторое распределение масс внутри границ. Тела могут быть абсолютно твердыми, то есть недеформируемыми, или деформируемыми под действием внешних сил. Деформируемые тела могут быть абсолютно упругими, когда они мгновенно восстанавливают свои свойства после снятия воздействия сил, или вязко-упругими, когда восстановление формы и распределения масс происходит за конечное время.

Протяженные тела могут вращаться вокруг своих центров масс. Мгновенная ось вращения может изменять свое положение как относительно самого тела, так и относительно других тел. Примерами таких изменений могут служить рассматриваемые в астрометрии движение полюса и прецессия. Движением полюса принято называть изменение мгновенной оси вращения относительно самого тела, а прецессией – изменение оси вращения относительно звезд или внегалактических радиоисточников, которые предполагаются вообще неподвижными.

Помимо вращения самих протяженных тел, их центры масс могут совершать относительное движение. Изучение таких комбинированных движений называют задачей поступательно-вращательного движения системы тел. Для упрощения решения этой общей задачи ее часто разделяют на две отдельные. Сначала решают отдельно задачу изучения относительного движения центров масс и отдельно задачу изучения вращения тел относительно центров масс. На следующих этапах учитывают влияние вращения на движение центров масс и влияние движения центров масс на вращение.

В Солнечной системе размеры тел малы по сравнению с расстояниями между ними. Поэтому во многих практических задачах небесной механики планеты и их спутники считают материальными точками. В таком предположении строились модели движения планет еще в прошлых веках Лагранжем, Лапласом, Леверье. Так же поступают и при построении многих современных моделей. Для упрощения изложения теорий часто говорят о задаче многих тел, подразумевая материальные точки.

В небесной механике изучают движение в задаче N тел. Особые случаи представляют задача двух тел и задача трех тел.

Тела Солнечной системы образуют некоторую иерархию. Планеты движутся вокруг Солнца, спутники вокруг планет. При этом массы планет малы по сравнению с массой Солнца, а массы спутников малы по сравнению с массой планеты. В этих обстоятельствах встречаются комбинации трех тел, в которых влияние остальных тел мало, и на некотором этапе построения теории им можно пренебречь. В комбинации трех тел часто оказывается, что одно из тел столь мало, что его влиянием на движение остальных двух можно пренебречь. Так приходят к ограниченной задаче трех тел. Формально это механическая система, состоящая из трех материальных точек. Все три имеют ненулевые массы. Однако законы взаимодействия весьма необычны. Две основные точки действуют своим притяжением взаимно и на третью точку, а эта третья точка просто никак не действует на две основные. Эта абстрактная модель оказывается довольно близкой к комбинациям реальных небесных тел, поэтому модель ограниченной задачи трех тел находит широкие применения.

В ограниченной задаче трех тел имеется частный случай, когда два основных тела движутся по круговым орбитам вокруг их центра масс. Третье тело, по-прежнему не влияя на движение первых двух, движется под действием их притяжения. Траектории этого третьего

тела могут быть весьма замысловатыми.

Совершенно особый случай представляет собой задача двух тел (материальных точек). В этой задаче имеется точное аналитическое решение. Именно в этой задаче Кеплер эмпирически открыл свои законы, потом Ньютон обосновал их применяя закон всемирного тяготения.

Ниже мы рассмотрим отдельно перечисленные выше и некоторые другие механические модели, применяемые в практической небесной механике.

2.2. Дифференциальные уравнения движения небесных тел и системы координат

Законы взаимодействия небесных тел приводят к необходимости составления и решения дифференциальных уравнений движения. В механических моделях тела разделены реальными взаимными расстояниями. Делались попытки составления дифференциальных уравнений движения относительно взаимных расстояний. Однако это привело к чрезвычайно сложным выражениям, а решение оказалось весьма проблематичным. Более простой путь оказался к созданию абстрактных моделей систем координат. Системы координат опираются на реальные объекты, однако представляют собой модели, которые разрабатываются на основе некоторых предположений или гипотез. Принимая те или иные предположения, мы получаем некоторую версию системы координат, которая потом может быть заменена другой ее версией. Всякий раз необходимо помнить о модели системы координат.

Во многих задачах используется понятие абсолютной системы координат. Оси этой системы жестко связаны с некоторыми реальными телами, которые предполагаются неподвижными. Гипотеза о неподвижности этих тел может быть опровергнута. Тогда нужно искать новые тела с новой гипотезой об их неподвижности. Так случилось с абсолютной системой координат, опирающейся на звезды. Когда выяснилось, что гипотеза об их неподвижности несостоятельна, пришлось заменить опорные тела на внегалактические радиоисточники.

Принимая ту или иную гипотезу, мы пользуемся понятием абсолютной системы координат и составляем соответствующие дифференциальные уравнения движения. Уравнения движения задачи N тел в абсолютной системе координат можно найти в учебниках по

небесной механике, например, (Субботин, 1968; Дубошин, 1975).

Во многих случаях более удобными оказываются уравнения движения задачи $N+1$ тел в относительной системе прямоугольных координат. Начало системы координат помещается в одно из тел. Ему присваивается номер "0". Остальные тела нумеруются от 1 до N. Относительная система координат связана с неинерциальной системой отсчета. Однако к уравнениям из-за этого не нужно ничего добавлять, они получены из уравнений в абсолютной системе координат путем простой замены искомых функций, а поэтому они правильные.

Рассмотрим движение N тел в относительной системе координат с началом в теле номер "0". Запишем дифференциальные уравнения движения в векторной форме в следующем общем виде:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_i, t)$$

Здесь $\mathbf{r}_i$ - радиус-вектор тела номер i, а правые части могут явно зависеть от времени t и от скорости тела $\dot{\mathbf{r}}_i$.

Предполагаем, что на каждое из N тел действуют силы со стороны других тел по закону притяжения Ньютона. Причем среди этих тел могут быть тела внешние, не входящие в систему N тел. Все тела, кроме центрального, будем считать материальными точками. Еще на каждое из N тел могут действовать и другие силы гравитационной и негравитационной природы. Притяжение центрального тела можно выделить особо. Тогда дифференциальные уравнения движения можно записать в виде

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -G(m_0+m_i)\frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r_i}|^3} - \sum_{j=1}^{N}{}' Gm_j\left(\frac{\mathbf{\Delta}_{ij}}{|\mathbf{\Delta}_{ij}|^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3}\right) -$$

$$-\sum_{j=1}^{N'} Gm'_j\left(\frac{\mathbf{\Delta}'_{ij}}{|\mathbf{\Delta}'_{ij}|^3} + \frac{\mathbf{r}'_j}{|\mathbf{r}'_j|^3}\right) + \mathbf{F}(t, \mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) \quad , \qquad (1)$$

где G – универсальная гравитационная постоянная, m_j – масса одного из N тел, m_0 – масса цетрального тела, m'_j – масса внешнего тела. В уравнениях обозначены: $\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ – радиус-вектор тела номер i $(i = 1, 2..., N)$, $\mathbf{r}'_j = \{x_j, y_j, z_j\}$ – радиус-вектор внешнего тела номер j $(j = 1, 2..., N')$, $\mathbf{\Delta}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, $\mathbf{\Delta}'_{ij} = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j$, Через $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$ обозначен вектор ускорения, обусловленного другими силами гравитационной и негравитационной природы. В частности, это

может быть сила, обусловленная несферичностью центрального тела или сила сопротивления среды. В последнем случае сила может зависеть от скорости тела $\dot{\mathbf{r}}_i$. В первой сумме штрих означает, что слагаемое при $j = i$ опущено.

В уравнениях движения векторы $\mathbf{r}_i$ $(i = 1, 2, 3, ..., N)$ фигурируют как искомые функции, а векторы $\mathbf{r'}_j$ должны быть вычисляемыми на любой заданный момент времени. Эти векторы определяются по эфемеридам внешних тел на основе ранее разработанных моделей их движения.

В следующих разделах мы рассмотрим несколько механических моделей, применяемых в задачах практической небесной механики.

2.3. Задача двух тел. Модель кеплеровского движения

2.3.1. Основные формулы кеплеровского движения

Модель кеплеровского движения появляется как решение задачи двух тел. Тела считаются материальными точками, изолированными от других тел и любых других воздействий. Они движутся только под действием взаимного притяжения по закону Ньютона. Такое движение еще называется невозмущенным.

Рассматривают относительное движение в задаче двух тел, когда начало системы отсчета помещается в центр масс одного из них, и барицентрическое движение, при котором начало помещено в центр масс обоих тел.

Траектория движения в задаче двух тел всегда лежит в неизменной плоскости. Она представляет собой эллипс, параболу или гиперболу. Центральное тело в относительном движении или барицентр двух тел в барицентрическом движении расположен в фокусе одной из указанных кривых. Существуют также прямолинейные и круговые траектории в задаче двух тел.

Точку траектории с минимальным расстоянием до начала системы отсчета называют перицентром, а точку с максимальным расстоянием (в случае эллиптического движения) — апоцентром. Апоцентр в гиперболической и параболической траекториях не существует. Линию, соединяющую перицентр орбиты с ее апоцентром, называют линией апсид. В гиперболической и параболической траекториях за линию апсид можно принять линию, походящую через перицентр и начало координат.

Движение описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка. Следовательно, общее решение зависит от шести независимых произвольных постоянных.

Рассмотрим уравнения движения задачи двух тел с массами m_1 и m_2 в произвольной невращающейся системе прямоугольных координат x, y, z. Начало системы координат O расположим либо в первое тело, либо во второе, либо в барицентр системы. Для всех трех случаев уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + x^2}$, а μ – постоянная, называемая гравитационным параметром.

Если начало координат помещено в одно из тел, то уравнения описывают движение другого из них, а гравитационный параметр μ задается равенством

$$\mu = G(m_1 + m_2),$$

где G – универсальная гравитационная постоянная.

Если начало координат помещено в барицентр системы, то уравнения описывают движение первого тела с гравитационным параметром

$$\mu = G\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Уравнения движения второго тела относительно барицентра имеют такой же вид, но гравитационный параметр в этом случае задается равенством

$$\mu = G\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Существуют семь первых интегралов уравнений движения, содержащих семь произвольных постоянных интегрирования, пять из которых являются независимыми. Недостающей шестой независимой произвольной постоянной является константа, определяющая положение тела на орбите в заданный момент времени.

Траекторию движения в задаче двух тел описывают параметрами (элементами) кеплеровской орбиты.

Поскольку известно, что движение тел происходит в некоторой неизменной плоскости, рассмотрим систему координат ξ, η, ζ с началом в точке O, ось ξ которой направлена в перицентр орбиты, а ось

η располагается в плоскости движения так, что радиус-вектор тела вращается от оси ξ в сторону оси η. Третью ось ζ направим так, чтобы система координат оказалась правой. Систему координат ξ, η, ζ называют орбитальной.

Формулы перехода от орбитальной системы координат $O\xi\eta\zeta$ к системе координат $Oxyz$ имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= P_x \cdot \xi + Q_x \cdot \eta + R_x \cdot \zeta, \\ y &= P_y \cdot \xi + Q_y \cdot \eta + R_y \cdot \zeta, \\ z &= P_z \cdot \xi + Q_z \cdot \eta + R_z \cdot \zeta, \end{aligned} \tag{2}$$

где через $P_i, Q_i, R_i (i = 1, 2, 3)$ обозначены направляющие косинусы линии апсид, направляющие косинусы перпендикуляра к линии апсид в плоскости орбиты, и направляющие косинусы перпендикуляра к плоскости орбиты соответственно. Направляющие косинусы принято выражать через три угла поворота орбитальной системы координат $O\xi\eta\zeta$ по отношению к системе координат $Oxyz$:

Ω — долгота восходящего узла орбиты,

ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты,

i — наклон орбиты.

Выражения для направляющих косинусов имеют вид

$$\begin{array}{lcrlcl} P_x & = & & \cos\omega \cdot \cos\Omega & - & \sin\omega \cdot \sin\Omega \cdot \cos i, \\ P_y & = & & \cos\omega \cdot \sin\Omega & + & \sin\omega \cdot \cos\Omega \cdot \cos i, \\ P_z & = & & \sin\omega \cdot \sin i, & & \\ Q_x & = & - & \sin\omega \cdot \cos\Omega & - & \cos\omega \cdot \sin\Omega \cdot \cos i, \\ Q_y & = & - & \sin\omega \cdot \sin\Omega & + & \cos\omega \cdot \cos\Omega \cdot \cos i, \\ Q_z & = & & \cos\omega \cdot \sin i, & & \\ R_x & = & & \sin\Omega \cdot \sin i, & & \\ R_y & = & - & \cos\Omega \cdot \sin i, & & \\ R_z & = & & \cos i. & & \end{array}$$

Ориентацию орбиты в пространстве можно увидеть на Рис.5.

Траектория движения в задаче двух тел в орбитальной системе координат описывается следующим соотношением:

$$\mu \cdot r = c^2 - f \cdot \xi,$$

где $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ — модуль радиуса-вектора тела, c — постоянная площадей, f — постоянная Лапласа.

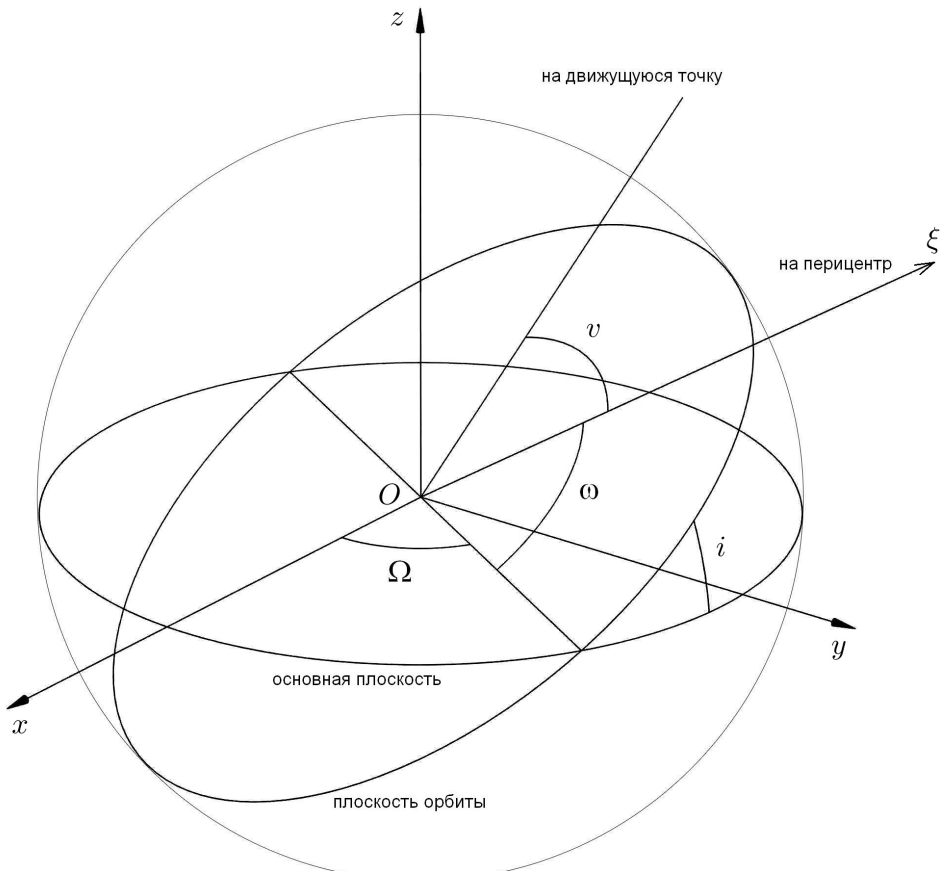

Рис. 5: Геометрия систем координат и плоскости орбиты кеплеровского движения.

Вырожденный случай прямолинейного движения в задаче двух тел, когда постоянная интеграла площадей c равна нулю, мы не рассматриваем. Здесь допустим, что $c > 0$, и рассмотрим уравнение траектории в полярных координатах.

Введем в плоскости орбиты полярные координаты r и v по формулам

$$\xi = r\cos(v), \quad \eta = r\sin(v),$$

где угол v называется истинной аномалией и отсчитывается от перицентра в направлении движения точки. Уравнение орбиты в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(v)},$$

где обозначено $p = c^2/\mu,\ e = f/\mu$. При этом p называется фокальным параметром орбиты, а e — ее эксцентриситетом.

Из первых интегралов уравнений движения в задаче двух тел следует, что постоянная энергии зависит от введенных параметров следующим образом :

$$h = \frac{\mu^2}{c^2}(e^2 - 1).$$

Изменение полярного угла v во времени описывается дифференциальным уравнением

$$\Big(\frac{p}{1 + e\cos(v)}\Big)^2 \frac{dv}{dt} = c.$$

Решение этого уравнения записывают в различных формах в зависимости от типа движения. Тип движения определяется значением эксцентриситета e. Поэтому форма зависимости координат от времени t будет различной. Существуют следующие типы орбит.

1) К р у г о в а я орбита : $e = 0, \quad h < 0,\ r = const.$
2) Э л л и п т и ч е с к а я орбита : $0 < e < 1, \quad h < 0.$
3) П а р а б о л и ч е с к а я орбита : $e = 1, \quad h = 0.$
4) Г и п е р б о л и ч е с к а я орбита : $e > 1, \quad h > 0.$

В практической небесной механике в основном рассматривается движение небесных тел на конечных траекториях. Поэтому далее мы

ограничимся рассмотрением только кругового и эллиптического движений в задаче двух тел. Тогда эксцентриситет $e < 1$. Круговое движение будет при $e = 0$.

В круговом и эллиптическом движениях рассматривают большую полуось орбиты a. При этом фокальный параметр и интеграл энергии выражаются через большую полуось следующим образом:

$$p = a(1 - e^2), \quad h = -\frac{\mu}{a}.$$

Из полярного уравнения следует, что минимальное расстояние тела до начала координат будет равно $a(1 - e)$, а максимальное $a(1 + e)$.

Для нахождения r и v, как функций времени введем в качестве вспомогательной переменной эксцентрическую аномалию E:

$$r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad r \cos v = a(\cos E - e),$$

$$r = a(1 - e \cos E).$$

Зависимость E от времени t описывается соотношениями

$$E - e \sin E = M,$$

$$M = n(t - t_0) + M_0,$$

$$n = \sqrt{\mu/a^3},$$

t_0 — начальный момент времени, а M_0 — произвольная постоянная интегрирования. Величина M называется средней аномалией, n называется средним движением, а M_0 — средней аномалией в эпоху.

Уравнение

$$E - e \sin E = M$$

относительно эксцентрической аномалии E называется уравнением Кеплера. Его численное решение обычно выполняется методом последовательных приближений. Оптимальное построение приближений описано ниже.

Отметим, что при изменении M на 2π углы E и v также изменяются на 2π. Точно так же обстоит дело при изменении на π. Разница между ними заключается в том, что M изменяется равномерно во времени, а E и v — с переменной угловой скоростью. Лишь в частном случае кругового движения ($e = 0$) все три угла совпадают.

В практике вычислений координат в кеплеровском движении иногда используется функция времени $u = v + \omega$, которая называется аргументом широты. Фактически u – это центральный угол в плоскости орбиты между направлением на движущееся тело и направлением на восходящий узел орбиты. Используется также величина $\lambda = v + \omega + \Omega$, называемая долготой в орбите, которая является суммой двух углов u и Ω, отсчитываемых в разных плоскостях. Рассматривается еще величина $\overline{\lambda} = M + \omega + \Omega$, которая называется средней долготой.

Период T обращения тела по орбите связан со средним движением n соотношением

$$T = \frac{2\pi}{n}.$$

Исходными элементами эллиптической орбиты в задаче двух тел, задающими движение в плоскости орбиты, считаются три параметра

n — среднее движение,
e — эксцентриситет,
M_0 — средняя аномалия в эпоху.

Существует важное соотношение между средним движением n и большой полуосью a

$$n^2\, a^3 = \mu,$$

которое соответствует 3-му закону Кеплера и имеет важное практическое значение. Если в относительном движении двух тел из наблюдений независимо определяются среднее движение n и большая полуось a, то сразу находится сумма масс двух тел

$$m_1 + m_2 = \frac{\mu}{G}.$$

В качестве параметра орбиты вместо n можно задать большую полуось a. Однако следует отметить, что наблюдаемое положение тела на орбите задается средней аномалией M. Поэтому после наблюдения нескольких оборотов тела по орбите среднее движение n определяется точнее, из соотношения

$$n = \frac{M - M_0}{t - t_0},$$

чем большая полуось a.

В качестве параметров кеплеровской орбиты рассматриваются также параметр $\varpi = \omega + \Omega$, который называется долготой перицентра, а

также параметр $\overline{\lambda_0} = M_0 + \omega + \Omega$, который называют средней долготой в эпоху. Для обратных орбит долгота перицентра определяется как разность долготы узла и аргумента перицентра.

Вместо средней аномалии в эпоху M_0 иногда задают момент t' прохождения телом перицентра орбиты. Т.е.

$$n(t' - t_0) + M_0 = 0.$$

Рассмотрим, как лучше решать уравнение Кеплера. В простом методе последовательных приближений итерации выполняются по правилам:

1. В нулевом приближении полагаем $E_0 = M$.
2. Вычисляем последовательно $E_{n+1} = M + e \sin E_n$ для $n = 0, 1, \ldots$ до тех пор, пока $|E_{n+1} - E_n| > \varepsilon$,

где ε – задает требуемую точность вычислений.

Более эффективным оказывается метод последовательных приближений по Денби. Итерации производятся по схеме:

1. В нулевом приближении полагаем $E_0 = M + 0.85\, e$.
2. Вычисляем последовательно

$$E_{n+1} = E_n -$$
$$-\frac{(M + e \sin E_n - E_n)^2}{E_n - 2(M + e \sin E_n) + M + e \sin(M + e \sin E_n)}$$

для $n = 0, 1, \ldots$ до тех пор, пока $|E_{n+1} - E_n| > \varepsilon$.

2.3.2. Вычисление координат в эллиптическом кеплеровом движении

В некоторых случаях вместо преобразования координат из орбитальной системы в заданную систему x, y, z, как указано выше (2), удобно ввести переменную $u = v + \omega$, называемую аргументом широты, и вычислять координаты в заданной системе по следующим формулам:

$$x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i),$$

$$y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$

$$x = r \sin u \sin i.$$

2.3.3. Вычисление скорости в эллиптическом кеплеровом движении

После того, как найдены расстояние r и истинная аномалия v, можно вычислить модуль скорости V, радиальную компоненту скорости V_r и трансверсальную компоненту скорости V_n из соотношений

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e \sin(v),$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, (1 + e \cos(v)).$$

Далее можно найти скорости изменения прямоугольных координат по формулам

$$\dot{x} = \frac{x}{r}\, V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i)\, V_n,$$

$$\dot{y} = \frac{y}{r}\, V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i)\, V_n,$$

$$\dot{z} = \frac{z}{r}\, V_r + \cos u \sin i\, V_n.$$

2.3.4. Вычисление частных производных от кординат и компонент скорости по элементам кеплеровой орбиты в эллиптическом движении

В практической небесной механике решаются задачи уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений. В качестве параметров могут использоваться элементы кеплеровой орбиты. Уточнение орбиты делается дифференциальным уточнением с применением метода наименьших квадратов. Для построения условных уравнений необходимы частные производные от координат и скорости по элементам. Приведем здесь формулы для этих производных в предположении, что координаты и скорость связаны с параметрами и временем

формулами эллиптического кеплерова движения. Формулы следуют в той последовательности, какая нужна для вычислений. Сначала вычисляются вспомогательные величины

$$c_1 = \sin i \sin \Omega, \quad c_2 = -\sin i \cos \Omega, \quad c_3 = \cos i,$$

$$l_1 = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i.$$

$$l_2 = \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i.$$

$$l_3 = \sin \omega \sin i,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos v = \frac{l_1 x + l_2 y + l_3 z}{r}$$

$$\sin v = \frac{(c_2 l_3 - c_3 l_2)x + (c_3 l_1 - c_1 l_3)y + (c_1 l_2 - c_2 l_1)z}{r}$$

$$a_1 = \frac{1 + e \cos v}{1 - e^2}, \quad r_1 = a_1 \cos v - \frac{e}{1 - e^2},$$

$$r_2 = \frac{n\, a_1 \sin v\, (1 + e \cos v + e^2)}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

$$p_1 = -\frac{\mu}{n\, r^3}, \quad q_1 = \frac{2}{3n},$$

$$p_2 = -a_1 \cos v, \quad q_2 = \left(a_1 + \frac{1}{1 - e^3}\right) \sin v.$$

Затем находятся искомые производные

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\dot{x}}{n}(t - t_0) - q_1 x, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\dot{y}}{n}(t - t_0) - q_1 y, \quad \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\dot{z}}{n}(t - t_0) - q_1 z,$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial n} = p_1 x(t - t_0) + \frac{1}{2} q_1 \dot{x}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial n} = p_1 y(t - t_0) + \frac{1}{2} q_1 \dot{y}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial n} = p_1 z(t - t_0) + \frac{1}{2} q_1 \dot{z},$$

$$\frac{\partial x}{\partial i} = z \sin \Omega, \quad \frac{\partial y}{\partial i} = -z \cos \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial i} = y \cos \Omega - x \sin \Omega,$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial i} = \dot{z} \sin \Omega, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial i} = -\dot{z} \cos \Omega, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial i} = \dot{y} \cos \Omega - \dot{x} \sin \Omega,$$

$$\frac{\partial x}{\partial M} = \frac{\dot{x}}{n}, \quad \frac{\partial y}{\partial M} = \frac{\dot{y}}{n}, \quad \frac{\partial z}{\partial M} = \frac{\dot{z}}{n},$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial M} = p_1 x, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial M} = p_1 y, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial M} = p_1 z,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = c_2 z - c_3 y, \quad \frac{\partial y}{\partial \omega} = c_3 x - c_1 z, \quad \frac{\partial z}{\partial \omega} = c_1 y - c_2 x,$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \omega} = c_2 \dot{z} - c_3 \dot{y}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \omega} = c_3 \dot{x} - c_1 \dot{z}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \omega} = c_1 \dot{y} - c_2 \dot{x},$$

$$\frac{\partial x}{\partial e} = q_2 \frac{\partial x}{\partial \omega} + p_2 x, \quad \frac{\partial y}{\partial e} = q_2 \frac{\partial y}{\partial \omega} + p_2 y, \quad \frac{\partial z}{\partial e} = q_2 \frac{\partial z}{\partial \omega} + p_2 z,$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial e} = q_2 \frac{\partial \dot{x}}{\partial \omega} + r_2 x + r_1 \dot{x}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial e} = q_2 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \omega} + r_2 y + r_1 \dot{y}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial e} = q_2 \frac{\partial \dot{z}}{\partial \omega} + r_2 z + r_1 \dot{z},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -y, \quad \frac{\partial y}{\partial \Omega} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \Omega} = -\dot{y}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \Omega} = \dot{x}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \Omega} = 0,$$

При выводе этих формул предполагалось, что независимыми параметрами орбиты являются шесть элементов n, e, i, M_0, ω, Ω, обозначения которых объяснены в предыдущем разделе. При этом производные по M_0 равны производным по M.

В практике исследований часто рассматривается задача независимого определения из наблюдений среднего движения n и большой полуоси a орбиты. Это бывает в тех случаях, когда масса притягивающего центра неизвестна, и ее желательно определить из наблюдений. Тогда необходимы частные производные от координат или скорости по элементам n и a, рассматриваемым как независимые параметры. В этих случаях в приведенных выше формулах для производных по n следует отбросить вторые слагаемые, а производные по a вычислять согласно следующим равенствам

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a}, \quad \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{y}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{z}{a}, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} = -\frac{\dot{x}}{2a}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial a} = -\frac{\dot{y}}{2a}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial a} = -\frac{\dot{z}}{2a}.$$

2.3.5. Формулы кеплеровского движения относительно несингулярных элементов (элементов Лагранжа)

Кеплеровское движение является простейшим законом движения небесных тел. Выражения для координат и компонент скорости, как функций времени, следуют из общего решения уравнений движения задачи двух тел. Общее решение зависит также от шести независимых произвольных постоянных. Выбор независимых произвольных постоянных не является однозначным. В предыдущих разделах в качестве произвольных постоянных рассматривались кеплеровские элементы орбиты, которые имеют наглядный геометрический смысл.

Однако в ряде практических задач выбор кеплеровских элементов в качестве параметров орбиты приводит к потере точности при вычислениях с ограниченным числом значащих цифр в значениях переменных. При применениях теории возмущений возникают проблемы, связанные с неравноценным вкладом различных членов в выражениях для возмущений кеплеровских элементов. В конечном счете это также приводит к потере точности теории. Такие проблемы возникают в случаях, когда эллиптическая орбита очень близка к круговой. Круговая орбита является вырождением эллиптической при стремлении эксцентриситета к нулю. Аналогичная ситуация возникает в случаях очень малых наклонов орбиты. В этих случаях угловое расстояние от восходящего узла орбиты и долгота узла определяются из наблюдений с пониженной точностью при неизменной точности самих наблюдений.

Преодолеть указанные трудности при малых эксцентриситетах и наклонах кеплеровской орбиты позволяют элементы Лагранжа, выбранные в качестве независимых произвольных постоянных в общем решении уравнений задачи двух тел. Рассмотрим ниже формулы, которые позволяют непосредственно из элементов Лагранжа вычислять прямоугольные координаты тела.

Элементы орбиты связывают с произвольной невращающейся системой прямоугольных координат x, y, z , начало которой либо размещают в центре масс двух тел, либо совмещают с одним из тел.

Для введения элементов Лагранжа воспользуемся принятыми в литературе обозначениями для кеплеровских элементов орбиты:

n — среднее движение, размерность радиан/ед.времени;
e — эксцентриситет, безразмерный;
i — наклон (двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью Oxy), рад.;
M_0 — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии M в начальный момент времении — эпоху), рад.;
ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;
Ω — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости Oxy между осью x и линией узлов), рад.;
t_0 — начальный момент времени — эпоха элементов;
t — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

В некоторых случаях вместо среднего движения n в качестве ис-

ходного параметра орбиты рассматривают большую полуось орбиты a, связанную с n соотношением

$$a^3 n^2 = \mu, \tag{3}$$

где μ - гравитационный параметр двух тел.

Средняя аномалия M в любом случае вычисляется по формуле

$$M = n(t - t_0) + M_0. \tag{4}$$

Будем полагать, что для вычисления прямоугольных координат на заданный момент времени известны пять элементов кеплеровской орбиты a, e, i, ω, Ω и средняя аномалия M. Элементами Лагранжа считаются величины $a, \overline{\lambda}, k, h, q, p$, пять из которых определяются соотношениями

$$\begin{gathered} \overline{\lambda} = M + \omega + \Omega, \\ k = e\cos(\omega + \Omega), \quad h = e\sin(\omega + \Omega), \\ q = \sin\tfrac{i}{2}\cos\Omega, \quad p = \sin\tfrac{i}{2}\sin\Omega. \end{gathered} \tag{5}$$

Заметим, что $\overline{\lambda}$ называется средней долготой и является линейной функцией времени.

Если заданы элементы Лагранжа $a, \overline{\lambda}, k, h, q, p$, то прямоугольные координаты x, y, z и компоненты скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ можно вычислить по следующей последовательности формул. Сначала вычисляем

$$\begin{gathered} S = \sin\overline{\lambda}, \quad C = \cos\overline{\lambda}, \\ k' = k\,C + h\,S, \quad h' = k\,S - h\,C. \end{gathered} \tag{6}$$

Далее итерациями решаем уравнения

$$C_\nu = \cos\nu, \quad S_\nu = \sin\nu, \quad \nu = h'C_\nu + k'S_\nu, \tag{7}$$

полагая в нулевом приближении $\nu = h'$.

Вычисляем вспомогательные величины

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \sqrt{1 - k^2 - h^2}}, \tag{8}$$

$$S' = \frac{S_\nu - \nu' k' + h'}{1 - k'C_\nu + h'S_\nu}, \quad C' = \frac{C_\nu - \nu' h' - k'}{1 - k'C_\nu + h'S_\nu}, \tag{9}$$

$$S_\lambda = SC' + CS' \quad C_\lambda = CC' - SS'. \tag{10}$$

Теперь центральное расстояние r и прямоугольные координаты тела x, y, z найдутся по формулам

$$r = \frac{a\,(1 - k^2 - h^2)}{1 + k\,C_\lambda + h\,S_\lambda}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} x &= r\,C_\lambda(1 - 2p^2) + 2\,r\,S_\lambda p\,q, \\ y &= r\,S_\lambda(1 - 2q^2) + 2\,r\,C_\lambda p\,q, \\ z &= 2\,r\,\sqrt{1 - p^2 - q^2}(q\,S_\lambda - p\,C_\lambda). \end{aligned} \tag{12}$$

Для вычисления компонент скорости необходимо найти вспомогательные величины

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - k^2 - h^2)}}(k\,S_\lambda - h\,C_\lambda), \tag{13}$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - k^2 - h^2)}}(1 + k\,C_\lambda + h\,S_\lambda), \tag{14}$$

$$\begin{aligned} R_x &= 2\,C_\lambda p\,q - S_\lambda(1 - 2\,p^2), \\ R_y &= C_\lambda(1 - 2\,q^2) - 2\,S_\lambda p\,q, \\ R_z &= 2\,\sqrt{1 - p^2 - q^2}(q\,C_\lambda + p\,S_\lambda). \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь следует учесть, что для обратных орбит z и R_z должны быть взяты с обратным знаком. После этого компоненты скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ вычисляются с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tfrac{x}{r}V_r + R_x V_n, \\ \dot{y} &= \tfrac{y}{r}V_r + R_y V_n, \\ \dot{z} &= \tfrac{z}{r}V_r + R_z V_n. \end{aligned} \tag{16}$$

2.3.6. Примеры использования элементов Лагранжа

Укажем здесь два примера, когда элементы Лагранжа нашли удачное применение.

Первый пример – это теория вековых возмущений планет, построенная Лагранжем. В возмущающей функции были оставлены только вековые члены (независящие от долгот планет). Учитывая малость

эксцентриситетов и взаимных наклонов орбит больших планет Солнечной системы, вековая часть возмущающей функции была разложена в степенной ряд относительно эксцентриситетов и взаимных наклонов, и в разложении оставлены члены до второй степени включительно. При этом большие полуоси орбит планет считались неизменными. Относительно элементов Лагранжа удалось записать линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Решение этих уравнений получено Лагранжем в виде суммы тригонометрических функций относительно линейных по времени аргументов. Это позволило описать эволюцию орбит планет на больших промежутках времени и обнаружить интересные свойства взаимных возмущений планет. Хорошее описание метода Лагранжа можно найти в монографии М. Ф. Субботина (1968).

Второй пример является фактически применением метода Лагранжа для построения аналитической теории движения главных спутников Урана. Эта теория, созданная Ляскаром и Якобсоном (1987), до недавнего времени была единственным средством получения самых точных эфемерид главных спутников Урана.

2.4. Уравнения ограниченной задачи трех тел и задача Хилла

Ограниченная задача трех тел.

Ограниченная задача трех тел представляет собой механическую модель, состоящую из трех материальных точек, имеющих массы, и взаимодействующих особым образом: третья точка не действует своим притяжением на первые две. В общем случае первые два тела называют основными. Обычно такая модель соответствует существующей иерархии тел Солнечной системы. Спутники движутся под действием притяжения планеты и Солнца, а планета имеет свой закон движения, не зависящий от движения спутника.

Модель ограниченной задачи трех тел очень широко применяется в практической небесной механике. Выполнено и опубликовано огромное множество работ, начиная со времени Эйлера и Лагранжа, до наших дней. Эта модель уже достаточно точно описывает движение спутников планет, но также служит основой для построения более точных моделей движения спутников методами теории возмущений.

В соответствии предыдущему изложению первые два тела обозначим через M_0 и M_1, а третье тело, которое не влияет на движение

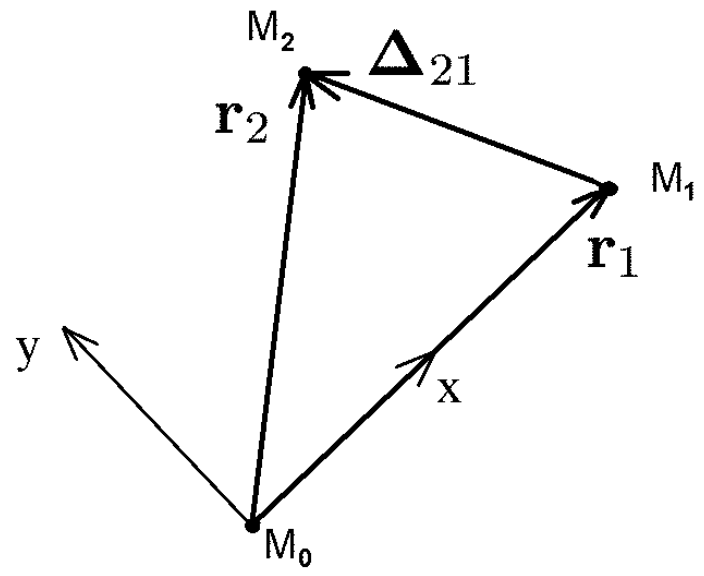

Рис. 6: Расположение трех тел и взаимные векторы в ограниченной задаче трех тел.

первых двух, обозначим как M_2. Конфигурацию поясняет Рис. 6.

Уравнения ограниченной задачи трех тел выводятся следующим образом. Записываются уравнения движения общей задачи трех тел в абсолютной системе координат (Субботин, 1968; Дубошин, 1975). В этих уравнениях накладывается условие: третье тело не действует своим притяжением на первые два. После преобразования к относительной системе с началом в теле M_0 получаются следующие уравнения:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -G(m_0 + m_1)\frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3}, \tag{17}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -Gm_0\frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r_2}|^3} - Gm_1\left(\frac{\mathbf{\Delta}_{21}}{|\mathbf{\Delta}_{21}|^3} + \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3}\right), \tag{18}$$

где

$$\mathbf{\Delta}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \tag{19}$$

Уравнения (17) представляют собой уравнения задачи двух тел и описывают кеплерово движение тела M_1 относительно тела M_0. Это движение будет происходить в некоторой неподвижной плоскости. Уравнения (18) описывают движение тела M_2 относительно тела M_0 под действтем притяжения обоих тел (M_0 и M_1).

Отметим, что в литературе встречается и другое определение ограниченной задачи трех тел, при котором вводится понятие пренебрежимо малой массы третьего тела. При этом масса третьего тела не объявляется равной нулю, но везде в уравнениях пренебрегается отношениями массы третьего тела к каждой из масс первого и второго тел.

Уравнения (18) можно записать более компактно, используя оператор Гамильтона, примененный к некоторой функции W по отношению к вектору $\mathbf{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$, то есть

$$\nabla_2 = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right\} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2}.$$

Тогда имеем

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \nabla_2 W = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}_2}, \tag{20}$$

где

$$W = \frac{Gm_0}{|\mathbf{r}_2|} + \frac{Gm_1}{|\mathbf{\Delta}_{21}|} - Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1|^3}. \tag{21}$$

Поскольку движение двух основных тел происходит в неподвижной плоскости, удобно выбрать ее в качестве основной с началом координат в теле M_0. Кроме того, можно рассмотреть движение тела M_2 во вращающейся системе координат $\{x, y, z\}$, связанной с вектором $\mathbf{r}_1$ (См. Рис. 6). Тогда компоненты векторов $\{x_2, y_2, z_2\}$ и $\{x, y, z\}$ будут связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x_2 &= x\cos v - y\sin v, \\ y_2 &= x\sin v + y\cos v, \\ z_2 &= z, \end{aligned} \tag{22}$$

где v - истинная аномалия тела M_1.

Теперь уравнения движения ограниченной задачи трех тел преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{v}\dot{y} - \dot{v}^2 x - \ddot{v} y &= \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{v}\dot{x} - \dot{v}^2 y + \ddot{v} x &= \frac{\partial W}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial W}{\partial z}, \end{aligned} \tag{23}$$

где верхняя точка означает дифференцирование по времени. При вычислении частных производных в правых частях уравнений следует воспользоваться соотношениями (19), (21), (22), а также учесть, что вектор $\mathbf{r}_1$ не зависит от координат тела M_2 и имеет компоненты $\{r_1 \cos v, r_1 \sin v, 0\}$, где r_1 - центральное расстояние тела M_1, т. е. $r_1 = |\mathbf{r}_1|$. На самом деле функция W является сложной функцией от x, y, z, зависящей от координат $\{x_2, y_2, z_2\}$, которые в свою очередь зависят от x, y, z.

Произведя указанные действия, получим

$$W = \frac{Gm_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{Gm_1}{\sqrt{(x-r_1)^2+y^2+z^2)}} - Gm_1 \frac{x}{r_1^2}. \tag{24}$$

Уравнения движения ограниченной задачи трех тел во вращающейся системе координат x, y, z найдем в следующем явном виде:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{v}\dot{y} - \dot{v}^2 x - \ddot{v} y &= -Gm_0 \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \\
&-Gm_1 \left\{ \frac{x-r_1}{[(x-r_1)^2+y^2+z^2]^{3/2}} + \frac{1}{r_1^2} \right\}, \\
\ddot{y} + 2\dot{v}\dot{x} - \dot{v}^2 y + \ddot{v} x &= -Gm_0 \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \\
&-Gm_1 \frac{y}{[(x-r_1)^2+y^2+z^2]^{3/2}}, \\
\ddot{z} = -Gm_0 \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} &- Gm_1 \frac{z}{[(x-r_1)^2+y^2+z^2]^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Здесь функции $\dot{v}$ и $\ddot{v}$ можно выразить через элементы кеплеровского движения и функцию v:

$$\dot{v} = \sqrt{\frac{Gm_0}{p}}\ \frac{1}{p}(1+e\cos v)^2,$$

$$\ddot{v} = -\frac{2Gm_0}{p^3} e \sin v (1+e\cos v)^3.$$

Итак, уравнения движения ограниченнной задачи трех тел (23) представляют собой систему дифференциальных уравнений шестого порядка с коэффициентами, явно зависящими от времени посредством функций r_1 и v.

Уравнения ограниченной задачи трех тел (23),(25) имеют пять частных решений. В трех из них тело M_2 постоянно расположено

на линии, соединяющей тела M_0 и M_1. Еще два частных решения соответствуют расположениям тела M_2 в вершинах равносторонних треугольников, образуемых тремя телами. В этих пяти решениях все три тела описывают относительно невращающейся системы координат траектории кеплерова движения: окружности, эллипсы, параболы или гиперболы в зависимости от начальных условий движения. Несколько подробнее эти решения рассмотрены в следующей главе.

Круговая ограниченная задача трех тел.

Для ограниченной задачи трех тел существует частный случай, когда тело M_1 описывает окружность вокруг тела M_0. Это частный случай кеплерова движения тел M_0 и M_1. Третье тело M_2 может двигаться произвольно, описывая столь же замысловатые траектории, как и в случае некругового движения тел M_0 и M_1. Такой частный случай называют *круговой ограниченной задачей трех тел.* В этом случае имеем $\ddot{v} = 0$, $\dot{v} = n = const$, при этом n есть постоянная угловая скорость обращения тела M_1 вокруг M_0. Дифференциальные уравнения движения тела M_2 в этом частном случае примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x &= \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y &= \frac{\partial W}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial W}{\partial x}, \end{aligned} \tag{26}$$

а в выражении (24) для W нужно заменить r_1 на постоянную a – радиус орбиты M_1 вокруг M_0. Постоянные n и a связаны между собой соотношением

$$n^2 a^3 = G(m_0 + m_1). \tag{27}$$

Свойство иметь пять частных решений остается и для уравнений круговой ограниченной задачи трех тел, только теперь все три точки описывают круговые траектории.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Omega = \frac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2) + W,$$

которую для круговой ограниченной задачи трех тел с учетом (24) можно записать еще в виде

$$\Omega = \frac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2) + \frac{Gm_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{Gm_1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2)}} - Gm_1 \frac{x}{a^2}. \tag{28}$$

Тогда уравнения движения круговой ограниченной задачи трех тел (26) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}. \end{aligned} \tag{29}$$

Оказывается, что для этих уравнений можно вывести первый интеграл. Умножим уравнения (29) последовательно на $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, сложим почленно результаты и проинтегрируем полученное равенство по времени. Получим

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\Omega + C, \tag{30}$$

где C - произвольная постоянная. Соотношение (30) называют *интегралом Якоби*, а C - *постоянной Якоби*. Это соотношение позволяет делать весьма важные выводы о свойствах возможных решений уравнений (29) и об областях возможных движений тела M_2 в зависимости от значения постоянной Якоби C, а фактически от начальных координат и составляющих начальной скорости этого тела.

Круговой ограниченной задаче трех тел посвящено огромное множество работ и публикаций.

Задача Хилла.

Задача Хилла является специальным случаем круговой ограниченной задачи трех тел, Она получается в результате принятия некоторых допущений. Сформулируем здесь эти допущения и выведем уравнения задачи Хилла.

Возьмем снова функцию Ω, заданную формулой (28). Учитывая соотношение (27), запишем для этой функции следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Omega = \frac{1}{2}n^2(x^2+y^2) + \frac{Gm_0}{r} + \\ +n^2a^2\left(1+\frac{m_0}{m_1}\right)^{-1}\left[\left(1-\frac{2x}{a}+\frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x}{a}\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь мы положили

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Теперь предположим, что движение тела M_2 всегда происходит вблизи тела M_1, и масса этого тела M_1 мала по сравнению с массой тела M_0. Для реальных тел это соответствует движению спутника M_2 планеты M_1 с возмущениями от Солнца M_0.

Будем полагать, что малые величины $\frac{m_0}{m_1}$ и $\frac{r^3}{a^3}$ имеют один и тот же первый порядок малости. Тогда, разлагая правую часть равенства (31) в ряд по степеням малых параметров и отбрасывая все члены первого и более высоких порядков, получим

$$\Omega = \frac{1}{2}n^2(x^2+y^2) + \frac{Gm_0}{r} + n^2\left(a^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}r^2\right). \tag{32}$$

Постоянный член n^2a^2 здесь можно отбросить, поскольку Ω входит в уравнения движения только под знаком частной производной по координатам. В итоге выражение для Ω принимает вид

$$\Omega = n^2\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}z^2\right) + \frac{Gm_0}{r}. \tag{33}$$

После подстановки этого выражения в уравнения движения (29) они примут явный вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x + \frac{Gm_0x}{r^3} &= 0, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} + \frac{Gm_0y}{r^3} &= 0, \\ \ddot{z} + n^2z + \frac{Gm_0z}{r^3} &= 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Эти уравнения называются уравнениями движения задачи Хилла.

Напомним, что в уравнениях (34) x, y, z суть прямоугольные координаты тела M_2 (спутник) во вращающейся системе координат с началом в теле M_1 и осью x, направленной от тела M_1 к телу M_0 (Солнце). В задаче Хилла спутник движется под действием притяжения планеты, находящейся в начале координат, и однородного гравитационного поля, создаваемого Солнцем. Вектор силы со стороны Солнца вращается в пространстве с постоянной угловой скоростью кругового орбитального движения планеты.

Решение уравнений движения (34) Хилл искал в виде рядов по степеням малого параметра

$$m = \frac{n}{n_s - n},$$

где n_s есть частота обращения спутника вокруг планеты. Хилл нашел частные периодические решения с траекториями в плоскости осей x, y, симметричными относительно этих осей. Ряды, представляющие прямоугольные координаты x, y, содержат нулевую, вторую и следующие степени малого параметра m. Траектории приближенно представляют собой эллипсы с центром в теле M_1 (планета). Малая полуось эллипса всегда расположена по линии, соединяющей тела M_1 (планета) и M_0 (Солнце).

Частные решения Хилла послужили основой для создания аналитической теории орбитального движения Луны. Несколько подробнее об этом можно узнать из учебников (Субботин, 1968; Дубошин, 1975).

2.5. Силовая функция притяжения несферичной планеты

Учет влияния несферичности планеты делается с использованием разложения силовой функции притяжения несферичной планеты в ряд по сферическим функциям. Коэффициенты разложения зависят от выбора системы координат. Обычно используется система координат, связанная с телом планеты и основной плоскостью, совпадающей с ее экватором. Экватор планеты связывают с осью ее вращения. При этом предполагают, что ось вращения неизменна в теле планеты. Тела больших планет оказываются близкими к осесимметричным телам, вращающимися вокруг оси симметрии. Поэтому основная плоскость системы координат, в которой ведется разложение силовой функции ее притяжения, выбирается так, чтобы третья ось (ось z) совпадала с осью симметрии некоторого тела близкого по форме с планетой.

В литературе встречаются различные формы разложения силовой функции притяжения планет. Приведем здесь формулу, которая была рекомендована Комиссией 7 Международного астрономического союза. Она имеет вид

$$U(r,\varphi,\overline{\lambda}) = \frac{Gm_0}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\varphi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)(C_{nk}\cos k\overline{\lambda} + S_{nk}\sin k\overline{\lambda})\right], \qquad (35)$$

где r, φ и $\overline{\lambda}$ – широта и долгота точки в системе координат, связанной с планетой, $P_n(\sin\varphi)$ – полиномы Лежандра, $P_n^{(k)}(\sin\varphi)$ – присоединенные функции Лежандра, аргументами которых является $\sin\varphi$.

Значение постоянной r_0 фиксируется заранее равной радиусу круга наиболее близкого к экваториальному сечению планеты. Тогда постоянные коэффициенты J_n, C_{nk}, S_{nk} задают гравитационное поле планеты. Их значения определяют из наблюдений различных типов.

Следует указать на важные свойства членов разложения. Если тело строго осесимметрично и основная плоскость системы координат перпендикулярна оси симметрии, то в разложении остается только часть с коэффициентами J_n. Эти члены разложения называются зональными гармониками. Если, кроме того, тело имеет еще и плоскость симметрии, проходящую через начало координат перпендикулярно к оси симметрии, то в разложении остаются только зональные гармоники с четными номерами.

Отметим, что для Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна с приемлемой точностью известны только значения коэффициентов J_2, J_4, J_6.

При записи уравнений движения (1) не фиксируется способ выбора направления осей координат. После этого делается попытка связать направления осей с геоэкватором эпохи J2000, то есть с Международной системой небесных координат (ICRF – International Celestial Reference Frame). Следует отметить, что эту связь невозможно осуществить записью уравнений. Привязка системы, в которой отсчитываются координаты спутника, к ICRF может быть сделана только путем уточнения параметров движения спутника так, чтобы его модельное движение оказалось наиболее близким к результатам наблюдений, выполненных в системе ICRF. Только близость результатов наблюдений к системе ICRF и дальнейшее уточнение орбит спутников на основе наблюдений могут обеспечить близость системы координат к ICRF.

В уравнениях движения спутников (1) фигурирует слагаемое $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$ – функция, задающая вектор ускорения, обусловленного несферичностью планеты. Аргументом этой функции являются координаты спутника в системе координат x, y, z. Однако в разложении силовой функции (35) фигурирут координаты в системе, связанной с телом, в частности, с экватором планеты. Прямоугольные координаты в этой системе обозначим через $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$. Соотношения с координатами, фигурирующими в выражении 35, очевидны:

$$\overline{x} = r\cos\varphi\cos\overline{\lambda}, \quad \overline{y} = r\cos\varphi\sin\overline{\lambda}, \quad \overline{z} = r\sin\varphi.$$

Для вычисления правых частей уравнеий движения (1) сначала находят компоненты ускорения $\mathbf{F} = \{F_{\overline{x}}, F_{\overline{y}}, F_{\overline{z}}\}$ в системе координат

$\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$, связанной с телом. Это делается путем взятия частных производных

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \overline{x}} \left(U - \frac{Gm_0}{r} \right), \frac{\partial}{\partial \overline{y}} \left(U - \frac{Gm_0}{r} \right), \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(U - \frac{Gm_0}{r} \right) \right\}.$$

Затем компоненты вектора $\mathbf{F}$ переводятся в систему координат x, y, z с помощью матрицы перехода

$$\{F_x, F_y, F_z\}^T = \mathbf{R_0} \{F_{\overline{x}}, F_{\overline{y}}, F_{\overline{z}}\}^T.$$

Здесь при записи координат мы для краткости опускаем индекс, обозначающий номер спутника. Матрица $\mathbf{R_0}$ непосредственно определяется координатами полюса планеты α_0, δ_0 и углом ее вращения W, выраженными в системе координат x, y, z. Если в качестве основной системы координат принимается ICRF, то параметры α_0, δ_0, W можно взять из публикации доклада Рабочей группы по картографическим координатам и элементам вращения Международного астрономического союза (IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements) Archinal et al. (2011).

В частном случае, когда планета считается строго осесимметричной, ось $\overline{x}$ можно направить по линии пересечения экватора планеты с плоскостью (x, y). Для определенности это следует сделать так, чтобы ось $\overline{x}$ была направлена в восходящий узел плоскости $\overline{x}, \overline{y}$ относительно плоскости (x, y). В этом частном случае матрица $\mathbf{R_0}$ будет иметь вид

$$\mathbf{R_0} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha_0 & -\cos\alpha_0 \sin\delta_0 & \cos\alpha_0 \cos\delta_0 \\ \cos\alpha_0 & -\sin\alpha_0 \sin\delta_0 & \sin\alpha_0 \cos\delta_0 \\ 0 & \cos\delta_0 & \sin\delta_0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку планеты Юпитер, Сатурн, Урана, Нептун и некоторые другие планеты почти осесимметричны, то часто возникает вопрос, какой из полюсов планеты считать северным. Чтобы избежать путаницы Рабочей группой по картографическим координатам и элементам вращения Международного астрономического союза принято решение (Archinal et al., 2011) считать северным полюсом планеты тот, который лежит в северной полусфере по отношению к так называемой неизменной плоскости Солнечной системы (The north pole is that pole of rotation that lies on the north side of the invariable plane

Таблица 1: Координаты полюса в системе ISRF эпохи J2000 для некоторых больших планет. Аргумент T – время в юлианских столетиях (по 36525 суток) от эпохи J2000.

Планета	Прямое восхождение α_0, град	Склонение δ_0, град
Юпитер	268.056595 -0.006499 T	64.495303 +0.002413 T
Сатурн	40.589 -0.036 T	83.537 -0.004 T
Уран	257.311	-15.175
Нептун	299.36	43.46

of the Solar System). Координаты полюса (перпендикуляра к плоскости) неизменной плоскости Солнечной системы в системе ISRF эпохи J2000 равны: прямое восхождение $\alpha_0 = 273.85$ град, склонение $\delta_0 = 66.99$ град.

В Таблице 1 даются координаты полюсов Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Как видно в таблице, для Юпитера, Сатурна, Урана известна прецессия полюсов.

Заметим, что северный полюс Урана направлен в южное полушарие небесной сферы, так как склонение полюса отрицательно. Однако вращение планеты вокруг этого северного полюса происходит в обратном направлении (от оси y к оси x), и вектор угловой скорости направлен к южному полюсу.

Приведем здесь выражения для компонент вектора $\mathbf{F}$ в планетоэкваториальной системе координат $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ с учетом только зональных гармоник с коэффициентами J_2 и J_4.

$$F_{\overline{x}} = \frac{3}{2} G m_0 J_2 \frac{r_0^2}{r^5} \left(5\frac{\overline{z}^2}{r^2} - 1\right) \overline{x} + \frac{5}{8} G m_0 J_4 \frac{r_0^4}{r^7} \left(63\frac{\overline{z}^4}{r^4} - 42\frac{\overline{z}^2}{r^2} + 3\right) \overline{x},$$

$$F_{\overline{y}} = \frac{3}{2} G m_0 J_2 \frac{r_0^2}{r_5} \left(5\frac{\overline{z}^2}{r^2} - 1\right) \overline{y} + \frac{5}{8} G m_0 J_4 \frac{r_0^4}{r^7} \left(63\frac{\overline{z}^4}{r^4} - 42\frac{\overline{z}^2}{r^2} + 3\right) \overline{y},$$

$$F_{\overline{z}} = \frac{3}{2} G m_0 J_2 \frac{r_0^2}{r_5} \left(5\frac{\overline{z}^2}{r^2} - 3\right) \overline{z} + \frac{5}{8} G m_0 J_4 \frac{r_0^4}{r^7} \left(63\frac{\overline{z}^4}{r^4} - 42\frac{\overline{z}^2}{r^2} + 15\right) \overline{z}.$$

При вычислении правых частей уравнений заданными являются координаты спутника в системе координат x, y, z, а в предыдущие

формулы нужно подставлять координаты $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$. Вычислить эти координаты можно, используя преобразование

$$\{\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\}^T = \mathbf{R_0}^{-1}\{x, y, z\}.$$

Здесь вместо $\mathbf{R_0}^{-1}$ можно использовать транспонированную матрицу $\mathbf{R_0}^T$, поскольку $\mathbf{R_0}^{-1} = \mathbf{R_0}^T$ в силу ортогональности этих матриц.

2.6. Приближенный учет влияния главных спутников на движение далеких спутников планеты

Рассмотрим здесь один прием, который применяется для учета влияния притяжения главных спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна при моделировании движения далеких спутников этих планет. Расстояния далеких спутников до планеты значительно превосходят размеры почти круговых орбит главных спутников, которые движутся почти в плоскости экватора планеты. Приближенно можно принять, что орбиты главных спутников точно круговые и точно расположены в плоскости экватора планеты. Периоды обращений главных спутников вокруг планеты значительно меньше периодов обращения далеких спутников. Можно равномерно распределить по времени положения главных спутников при учете их влияния на далекие. Тогда мы заменяем реальные главные спутники на бесконечно тонкие массивные круговые кольца, расположенные в плоскости экватора планеты. Массы колец будут равны массам соответствующих спутников, а радиусы равны радиусам их круговых орбит. В небесной механике подобные кольца называют гауссовыми по имени К.Ф. Гаусса, который впервые ввел их в рассмотрение. Зная массу m_c и радиус r_c кольца можно легко найти силовую функцию U_c его притяжения в форме разложения по сферическим функциям. Вот что получается:

$$U_c = \frac{Gm_c}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n J_n^{(c)} P_n(\sin\varphi)\right],$$

где коэффициенты $J_n^{(c)}$ находятся из соотношения

$$J_n^{(c)} = -\frac{r_c^n}{r_0^n} P_n(0).$$

При этом для нечетных значений n оказывается, что $P_n(0) = 0$, а при четных $n = 2k$, где k - целое, $P_{2k}(0)$ вычисляются по формуле

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}.$$

Такой прием замены главных спутников на притягивающие кольца в модели движения далеких спутников был применен в работах (Emelyanov, 2005; Емельянов, Кантер, 2005), где показано, что при точности современных наземных наблюдений эта замена вполне допустима.

2.7. Модель движения спутника сжатой планеты, основанная на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров

Для больших планет характерно свойство сжатости тела. Это самый главный фактор несферичности. Внешней сжатой форме сопутствует нецентральность гравитационного поля планеты. Поэтому в разложении силовой функции притяжения (35) после главного члена $\frac{Gm}{r}$ доминирует вторая зональная гармоника с коэффициентом J_2. Разложение специально было записано в такой форме, чтобы этот коэффициент был положительным для больших планет.

В небесной механике делались разные попытки учета второй зональной гармоники в решении дифференциальных уравнений движения спутника. В ряде работ это называется главной проблемой.

В небесной механике давно рассматривается модельная задача о движении материальной точки в поле притяжения двух неподвижных центров. Легко видеть, что гравитационное поле двух неподвижных центров близко по структуре полю вытянутого тела. Однако все большие планеты сжаты.

Силовая функция притяжения двух неподвижных центров имеет вид

$$W = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}, \tag{36}$$

где m_1, m_2 – массы центров, а r_1, r_2 – расстояния от притягиваемой массы до каждого из них. Если в прямоугольной системе кординат x, y, z ось z направить по линии, соединяющей центры, то выражения расстояний через координаты будет иметь вид

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_2)^2},$$

где z_1, z_2 суть координаты центров.

Впервые эту задачу для случая плоского движения исследовал и свел к квадратурам Леонард Эйлер (Euler, 1760, 1764). Поэтому задачу двух неподвижных центров называют также *задачей Эйлера.* В начале 20-го века Гастон Дарбу (Darboux, 1901) указал на возможность обобщения задачи Эйлера в случае плоского движения путем введения комплексно сопряженных масс и мнимого расстояния между ними. Силовая функция притяжения при этом всегда принимает действительные значения, а решение задачи также сводится к квадратурам. Это обобщение Дарбу получил как некоторый чисто математический результат и не рассматривал возможности для его практического применения.

В работе (Аксенов, Гребеников, Демин, 1963) и в последующем цикле работ авторов рассмотрена задача о пространственном движении материальной точки в поле двух неподвижных центров с комплексно сопряженными массами и мнимым расстоянием между ними. Авторы назвали эту модель *обобщенной задачей двух неподвижных центров.*

Главный интерес задача представляет благодаря тому, что гравитационное поле такой системы двух неподвижных центров близко к полю притяжения сжатой планеты. Покажем это. Положим

$$m_1 = \frac{m}{2}(1+\sqrt{-1}\sigma), \;\; m_2 = \frac{m}{2}(1-\sqrt{-1}\sigma),$$

$$r_1 = \sqrt{x^2+y^2+\left[z-c(\sigma+\sqrt{-1})\right]^2},$$

$$r_2 = \sqrt{x^2+y^2+\left[z-c(\sigma-\sqrt{-1})\right]^2},$$

где c, σ – действительные параметры. Тогда силовая функция притяжения в такой модели примет вид

$$W \;=\; \frac{G\,m}{2}\left[\frac{1+\sqrt{-1}\,\sigma}{r_1} \;+\; \frac{1-\sqrt{-1}\,\sigma}{r_2}\right]. \tag{37}$$

Очевидно, что будучи суммой двух комплексно сопряженных величин, силовая функция будет действительной величиной.

Разложим функцию W в ряд по сферическим функциям. Запишем разложение в виде

$$W = \frac{Gm}{r}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n J'_n P_n(\sin\varphi)\right], \tag{38}$$

где r_0 искусственно введенный параметр, а коэффициенты J'_n определяются соотношениями

$$J'_n = -\frac{1}{2}\Big(\frac{c}{r_0}\Big)^n \Big[(1+\sqrt{-1}\,\sigma)(\sigma+\sqrt{-1})^n + (1-\sqrt{-1}\,\sigma)(\sigma-\sqrt{-1})^n\Big],$$

$$(n = 2, 3, ...).$$

В частности, имеем

$$J'_2 = \Big(\frac{c}{r_0}\Big)^2 (1+\sigma^2),$$

$$J'_3 = 2\Big(\frac{c}{r_0}\Big)^3 \sigma(1+\sigma^2).$$

Разложение (38) совершенно аналогично разложению силовой функции осесимметричного тела. При этом видно, что $J'_2 > 0$, а это соответствует разложению силовой функции сжатого тела.

Если теперь представить силовую функцию притяжения планеты U в виде $U = W + R$, то для R получим

$$R = -\frac{Gm}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^n (J_n - J'_n)P_n(\sin\varphi). \tag{39}$$

Неопределенными до сих пор параметрами c, σ можно распорядиться так, чтобы оказалось

$$J'_2 = J_2, \quad J'_3 = J_3.$$

Тогда сумма в выражении (39) будет начинаться с $n = 4$, т. е. не будет содержать второй и третьей зональных гармоник. Кроме того для Земли, Марса, Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна оказывается, что $|J'_n| < |J_n|$ по крайней мере для $n = 4, 5, 6$.

Уравнения движения с силовой функцией (37) называются уравнениями движения обобщенной задачи двух неподвижных центров.

В следующей главе рассмотрены методы теории возмущений для приближенного решения уравнений движения в общем случае, когда точное решение не найдено. В теории возмущений решение находится в виде рядов по степеням малых параметров. Малость параметров обеспечивается малостью отношения возмущающей функции R к основной части силовой функции невозмущенного движения. Если за невозмущенное движение принимается движение в задаче двух тел, то основная часть силовой функции есть $V = \frac{GM}{r}$, а возмущающая

функция R в своем разложении содержит вторую и третью зональные гармоники. Тогда, например, для не очень далеких искусственных спутников Земли (ИСЗ) отношение отношене R/V имеет порядок 10^{-3}.

Если в качестве силовой функции невозмущенного движения взять силовую функцию обобщенной задачи двух неподвижных центров W (37), то разложение возмущающей функции R не будет содержать вторую и третью зональные гармоники. В этом случае для ИСЗ отношение R/W будет иметь порядок 10^{-6}. Такое уменьшение малого параметра в теории возмущений значительно повышает точность теории при тех же процедурах построения. Однако для применения теории возмущений необходимо иметь точное решение уравнений движения с силовой функцией W (37).

Теперь вспомним, что задача двух неподвижных центров сведена Л.Эйлером к квадратурам. Полученное решение пригодно также и при силовой функции (37). Этим обстоятельством воспользовался Е. П. Аксенов (Аксенов, 1977). Он выполнил обращение квадратур и построил новую некеплеровскую промежуточную орбиту спутника сжатой планеты. Формулы промежуточной орбиты представляют координаты и компоненты скорости как функции времени. Они содержат разложения по степеням малых параметров, пропорциональных J_2' и J_3'/J_2'. На основе промежуточной орбиты обобщенной задачи двух неподвижных центров методами теории возмущений Е. П. Аксенов (Аксенов, 1977) построил аналитическую теорию движения искусственных спутников Земли. Теория успешно применялась в течении ряда лет. В дальнейшем эта теория была уточнена и реализована в виде вычислительных программ в работах Н.В.Емельянова (Емельянов, 1986). Более подробно с обобщенной задачей двух неподвижных центров можно познакомиться в обзорной статье (Лукьянов, Емельянов, Ширмин, 2005).

Аналитическая теория движения естественных спутников больших планет может быть также построена на основе решения обобщенной задачи двух неподвижных центров. Это оказывается эффективным, если достаточно учета второй и третьей зональных гармоник в разложении силовой функции притяжения планеты и возмущений первого порядка для остальных возмущающих факторов. Ддя определения возмущений более высоких порядков такой подход приводит к довольно громоздким выкладкам и оказывается неэффективным.

При необходимости воспользоваться промежуточной орбитой спут-

ника, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров, формулы для вычисления координат и скорости спутника для любого момента времени лучше взять из работы (Аксенов и др., 1988), где они даются в форме, удобной для программирования вычислений, Кроме того, в этой работе приводится текст вычислительной программы на языке программирования Фортран.

2.8. Модели сил негравитационной природы, действующих на ИСЗ

Построение модели орбитального движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) представляет собой весьма актуальную задачу практической небесной механики. Это связано с широким использованием ИСЗ для нужд людей, живущих на Земле. Трудно перечислить все аспекты использования ИСЗ. В основном, это глобальная навигация, ретрансляция информационных и видео сигналов вокруг Земли, исследование Земли из космоса, спутниковая геодинамика. Для всех этих задач необходимо максимально точное предвычисление положений спутников на заданные моменты времени.

Движение ИСЗ моделируется на основе дифференциальных уравнений движения. Решение уравнений зависит от параметров или от начальных условий численного интегрирования. Параметры или начальные условия уточняются из наблюдений. Всегда желательно иметь решение уравнений движения с точностью лучшей, чем точность наблюдений. Для этого прежде всего сами уравнения должны быть составлены самым точным образом.

Для не очень удаленных ИСЗ доминирующим влиянием на движение является несферичность Земли. Выражение для возмущающих сил, обусловленных несферичностью Земли, подробно рассмотрены в предыдущих разделах. Параметры гравитационного поля Земли определены с необходимой точностью.

Для далеких спутников, движущихся на геосинхронных орбитах и выше, значительное влияние на движение имеет притяжение Луны и Солнца. Учет этого фактора может быть сделан путем включения в уравнения движения ИСЗ соответствующих слагаемых в рамках задачи N тел, как это рассмотрено выше. Для вычисления правых частей уравнений нужно максимально точно знать положение Луны и Солнца. Это делается с необходимой точностью с использованием имеющихся высокоточных эфемерид планет и Луны.

Кроме указанных факторов на движение ИСЗ оказывают существенное влияние факторы негравитационной природы. Прежде всего это сопротивление атмосферы и световое давление. Оказалось, что прогнозирование и предвычисление этих сил с необходимой точностью представляет собой весьма трудную задачу. В итоге именно учет факторов негравитационной природы в основном и ограничивает точность модели движения ИСЗ.

Рассмотрим последовательно, как можно учитывать сопротивление атмосферы и световое давление в уравнениях движения спутников. Начнем с сопротивления атмосферы.

Модель силы сопротивления атмосферы.

Спутник движется в верхних слоях атмосферы Земли, испытывая сопротивление воздуха. Физический процесс взаимодействия спутника с набегающими молекулами воздуха имеет то свойство, что сила сопротивления пропорциональна квадрату относительной скорости. Так же, как и при полете самолета, направление силы сопротивления зависит от аэродинамических свойств конструкции спутника и от его ориентации относительно налетающего потока воздуха. Направление этой силы весьма близко к направлению, обратному вектору скорости относительно сопротивляющейся среды. Учесть всевозможные вариации весьма сложно, поэтому остается предположить, что направление силы сопротивления точно противоположно вектору относительной скорости спутника. Поскольку скорость движения атмосферы мала по сравнению со скоростью движения спутника, можно допустить, что вектор скорости относительно атмосферы совпадает с вектором скорости относительно Земли. Обозначим модуль этого вектора скорости через V.

Главным фактором, определяющим силу сопротивления, является плотность атмосферы в точке, где находится спутник. Обозначим эту плотность через ρ. Сопротивление пропорционально площади, "заметающей"воздух. Обозначим эту площадь через A. Поскольку спутник может вращаться, то эта площадь может быть переменной во времени. Если невозможно учесть вариации, то остается принять некоторое среднее значение A. Процесс взаимодействия с молекулами воздуха зависит от соотношения между размерами спутника и длиной свободного пробега молекул. На высотах 160 км средняя длина свободного пробега составляет 50 метров. На больших высотах она еще больше. Это больше обычных размеров ИСЗ. В таком случае сила сопротивления атмосферы удваивается по сравнению с ее действием в плотных

слоях. В итоге проще ввести в рассмотрение коэффициент аэродинамического сопротивления C_D, который в обычных случаях ИСЗ следует принять равным 2. В итоге возмущающее ускорение F_A, действующее на спутник со стороны атмосферы, выражается формулой

$$F_A = \frac{1}{2}\rho V^2 C_D \frac{A}{m_s}$$

где m_s - масса спутника. Характерное для данного спутника отношение $\frac{A}{m_s}$ является определяющим при учете влияния сопротивления атмосферы. Малые тяжелые спутники будут испытывать меньшее сопротивление, чем спутники-баллоны.

Самой сложной проблемой при учете рассматриваемого эффекта является определение плотности атмосферы в точке, где летит спутник. Пространственное распределение плотности атмосферы вокруг Земли весьма сложное. Оно к тому же сильно меняется со временем. Давление воздуха на высотах траекторий ИСЗ может изменяться в несколько раз, причем непредсказумым образом. Это хуже, чем предсказание погоды на поверхности Земли. Самые существенные свойства распределения плотности заключаются в следующем. В некоторой локальной области пространства можно принять следующий закон распределения:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right),$$

где ρ_0 – плотность на некотором исходном расстоянии от Земли, h – высота спутника относительно этого исходного расстояния, H – некоторая постоянная, которая зависит от исходного расстояния. Из этой формулы следует, что в локальной области плотность воздуха убывает по экспоненциальному закону с увеличением высоты. Такая аналитическая зависимость позволяет вывести зависимость плотности ρ от координат спутника. Это уже давало бы возможность строить аналитическую теорию движения ИСЗ с учетом сопротивления атмосферы. Однако возникает трудность на таком пути из-за того, что параметр ρ_0 не поддается достаточно точному прогнозированию а параметр H, называемый шкалой высот, может быть определен только эмпирически. Эти два параметра определяются для данного спутника по измерениям движения этого самого спутника или других, движущихся в той же области. Самой не поддающейся предвычислению величиной является плотность ρ_0. Наиболее существенная особенность распределения ее значения в пространстве следует из того, что атмосфера

Земли сильно вытянута в сторону Солнца. Поскольку Земля вращается относительно медленно изменяющегося направления на Солнце, то говорят о суточном горбе атмосферы. Имеются и другие особенности распределения плотности воздуха в пространстве. Изменения ρ_0 во времени оказываются весьма значительными (в несколько раз) и трудно предсказуемыми. Прослеживается зависимость плотности атмосферы от солнечной активности, а точнее от так называемого геомагнитного индекса F, который регулярно измеряется, но почти не прогнозируем во времени. Существуют модели атмосферы, которые задают распределение плотности воздуха в верхних слоях как аналитические или табличные функции от координат и геомагнитного индекса F. Такие модели называют стандартными атмосферами. Некоторые из них публикуются как государственные стандарты.

Именно непредсказуемость плотности атмосферы является главным препятствием перед повышением точности моделирование движения ИСЗ на высотах, меньших 800 км.

На практике принимают ту или иную модель атмосферы и делают учет сопротивления атмосферы либо численным интегрированием уравнений движения, либо построением приближенной аналитической теории. Одна из таких аналитических теорий описана в книге (Аксенов, 1977). Следствия этой теории, то есть описание свойств возмущенного движения спутника по действием сопротивления атмосферы, дается ниже в специальном разделе.

Модель силы давления света.

Теперь рассмотрим механическую модель ИСЗ, движущегося под действием притяжения Земли и светового давления.

Спутник освещается в основном со стороны Солнца. В первом приближении этот источник света можно считать точечным и расположенным в центре Солнца. Поскольку сила светового давления обратно пропорциональна расстоянию до точечного источника света, то напрашивается идея ввести соответствующую поправку к гравитационной постоянной Солнца, и световое давление будет принято во внимание в рамках учета гравитационных возмущений. Однако на практике на так все просто.

Трудности возникают по двум основным причинам. Первая – различные ориентации конструкции ИСЗ по отношению к направлению на Солнце, и, соответственно, различные поверхности, освещаемые Солнцем. Вторая – вхождение спутника в тень от Земли. Когда спутник находится в тени, сила светового давления отсутствует. В пра-

вых частях дифференциальных уравнений движения соответствующее слагаемое просто "выключается".

Обе причины доставляют непреодолимые препятствия для построения аналитической теории движения спутника. Попытки учета возмущений от светового давления в движении ИСЗ аналитическими методами делались в работе (Вашковьяк, 1974). Некоторые результаты изложены ниже в специальном разделе.

При решении уравнений движения методами численного интегрирования тоже возникают трудности. Особенно это важно при моделировании движения спутников, используемых для навигации и геодинамики, когда требуется особо высокая точность. Освещаемая площадь поверхности спутника может может моделироваться лабораторным способом до запуска на орбиту, а ориентация спутника задается при его эксплуатации. Однако проблемы возникают при выходе спутника из тени, когда датчики света производят поиск Солнца, а ориентация спутника не определена. Дополнительную трудность доставляет свет, рассеянный в атмосфере. При восходе Солнца возникает ”заря”, свет от которой трудно моделировать.

Рассмотрим выражение для возмущающего ускорения F_S, действующего на ИСЗ из-за света, приходящего от точечного Солнца. Выражение можно записать в виде

$$F_S = k_s P_0 \frac{A}{m_s} \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^2 ,$$

где a' – среднее расстояние спутника от Солнца, P_0 – постоянная солнечноцй радиации на этом среднем расстоянии A – площадь поперечного сечения спутника относительно направления на Солнце, m_s – масса спутника, k_s – коэффициент, определяющий отражательные свойства спутника. Для сферического спутника и случаев зеркального отражения и полного поглощения света $k_s = 1$. В других случаях значение коэффициента k_s может находиться опытным путем при лабораторных исследованиях конструкции спутника.

Как видно из последней формулы, возмущающее ускорение от светового давления пропорционально отношению $\frac{A}{m_s}$. Отсюда следует, что наибольшее влияние светового давления на движение получается в случае спутников-баллонов.

Учет светового давления для навигационных и геодинамических спутников представляет наибольшие трудности. На практике применяется множество методов, изложенных в специальной литературе.

Глава 3. Решение дифференциальных уравнений движения небесных тел. Аналитические методы

3.1. Подходы и методы решения дифференциальных уравнений движения небесных тел

Движение небесных тел описывается законами движения, которые задаются функциями, представляющими координаты тела в зависимости от времени. Получить эти функции можно различными способами. Различными оказываются и способы их отображения. Обычно под функциями понимают аналитические выражения, содержащие операции сложения, умножения, деления, возведения в степень, элементарные функции: логарифм, тригонометрические функции, а также специальные функции. Однако закон движения может быть задан табличным описанием функций: численные значения координат на ряд моментов времени.

В теории движения небесных тел закон движения всегда является решением дифференциальных уравнений движения. Принципиальное различие заключается в способе получения решения уравнений движения. Первый подход заключается в получении аналитического решения, представляемого набором функций, последовательное вычисление которых позволяет найти координаты небесного тела на любой заданный момент времени. Аналитические методы позволяет получить сразу семейство решений, задаваемых различными значениями параметров, буквенно входящих в формулы. Все модели движения семейства описываются одними и теми же формулами. Параметрами являются произвольные постоянные аналитического решения дифференциальных уравнений. Выбор постоянных можно сделать различными способами. Один из них – это так называемые начальные условия решения, т. е. значения координат и компонент скорости на некоторый один начальный момент времени t_0.

Пользоваться аналитическим решением можно так: задаем один раз параметры движения. Затем любое число раз задаем произвольный момент времени, подставляем в аналитические функции, представляющие решение уравнений движения, и получаем значения координат и компонент скорости. На каждый момент времени операция одна и та же. Поэтому время вычислений пропорционально количеству моментов, на которые нужно знать координаты, и не зависит от интервала времени между начальным и конечным моментами.

Получение формул аналитического решения – весьма сложный и

трудоемкий процесс. Одно хорошо – сделать это нужно всего один раз. Поскольку точного решения уравнений, кроме нескольких простейших случаев, получить невозможно, то решение всегда получается приближенным. Точность зависит оттого, насколько развито аналитическое решение. Чем точнее нужно решение, тем более трудоемкий получается процесс его получения. Предел налагают возможности производства аналитических выкладок с огромными формулами. В этом деле хорошо помогают методы компьютерной алгебры. Однако и эти возможности небеспредельны.

Аналитическое решение дифференциальных уравнений движения небесного тела получают методами теории возмущений. Этих методов имеется большое разнообразие. Ниже рассмотрены некоторые из них, а также некоторые модели движения, построенные аналитическими методами.

Принципиально другим является метод численного интегрирования дифференциальных уравнений движения. К настоящему времени разработано множество методов численного интегрирования уравнений движения. Основные свойства методов численного интегрирования рассмотрены ниже в отдельной главе.

Методов построения моделей движения небесных тел к настоящему времени разработано чрезвычайно много. Приемлемый обзор всех методов получился бы неоправданно большим. Здесь рассмотрены только некоторые из них. Выбор того, что рассмотреть, основан только на опыте автора.

3.2. Построение аналитических теорий движения небесных тел методами теории возмущений

3.2.1. Общая схема теории возмущений

Простейшая модель движения спутника планеты – кеплеровское движение. Модель и закон движения получаются путем точного решения дифференциальных уравнений задачи двух тел. Следующие этапы усовершенствования модели – учет влияния других факторов. Для этого в уравнения движения добавляются соответствующие дополнительные члены. При этом точного аналитического решения уравнений найти уже невозможно.

Всегда доступны различные методы численного интегрирования дифференциальных уравнений. Этим методам посвящен специаль-

ный раздел книги. Другой путь – построение приближенного аналитического решения методами теории возмущений.

Теория возмущений применяется во многих областях науки. Основная идея всюду одна и та же. Различаются лишь формы методов и вид формул. Рассмотрим здесь один из методов теории возмущений в форме, наиболее часто применяемой в небесной механике.

Для простоты и наглядности изложения основной идеи метода ограничимся рассмотрением механической модели, в которой движение материальной точки описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{40}$$

где x, y, z – координаты материальной точки в некоторой системе прямоугольных координат, t – время, а U – силовая функция. Как правило, в практических задачах силовая функция имеет такой вид, при котором точное аналитическое решение уравнений движения найти невозможно.

Основная идея теории возмущений заключается в следующем. Разложим силовую функцию на два слагаемых

$$U = V + R$$

при соблюдении следующих двух условий:

1. После замены в уравнениях движения силовой функции U на функцию V может быть найдено их общее аналитическое решение.

2. По крайней мере в области рассматриваемого движения выполняется неравенство $|R| \ll |V|$.

Разумеется, не в любой задаче такое разбиение возможно. По крайней мере выполнение первого условия уже позволяет формально строить решение первоначальных уравнений (40) методами теории возмущений. Однако практический интерес представляют случаи, когда выполняется также и второе условие.

Уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z} \tag{41}$$

называют уравнениями невозмущенного движения, исходные уравнения (40) – уравнениями возмущенного движения, а R – возмущающей функцией. Исходные уравнения (40) можно записать в форме

$$\begin{aligned} &\tfrac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \tfrac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \tfrac{dz}{dt} = \dot{z}, \\ &\tfrac{d\dot{y}}{dt} = \tfrac{\partial(V+R)}{\partial y}, \quad \tfrac{d\dot{z}}{dt} = \tfrac{\partial(V+R)}{\partial z}, \quad \tfrac{d\dot{x}}{dt} = \tfrac{\partial(V+R)}{\partial x}, \end{aligned} \tag{42}$$

где переменные $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ являются искомыми функциями.

Общее решение уравнений невозмущенного движения будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ y &= y(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ z &= z(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{x} &= \dot{x}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \end{aligned} \tag{43}$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – произвольные постоянные.

В методе теории возмущений последние формулы используются как формулы замены переменных $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ на переменные c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 в уравнениях возмущенного движения (42). Заменяются зависимые переменные – искомые функции. В итоге преобразований получают дифференциальные уравнения возмущенного движения относительно новых переменных $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ в виде

$$\frac{dc_i}{dt} = C_i(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \tag{44}$$

Точное аналитическое решение этих уравнений так же, как и уравнений (40), найти невозможно. Однако они имеют одно очевидное преимущество. Если в уравнениях (42) положить $R = 0$, то они превратятся в уравнения (41), а в соответствующем решении (43) аргументы c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 будут постоянными величинами. Следовательно, в преобразованных уравнениях (44) правые части окажутся равными нулю. При R, не равной нулю, и соблюдении второго условия применения теории возмущений $|R| \ll |V|$ правые части уравнений (44) будут содержать множителем некоторый малый параметр. Это позволяет находить приближенное решение уравнений возмущенного движения методом малого параметра. Успех его применения зависит в первую очередь от величины самого малого параметра, то

есть от отношения $|R|/|V|$. Поэтому при разложении силовой функции U на два слагаемых V и R естественно стремление уменьшить величину $|R|$ при сохранении первого условия применения методов теории возмущений.

В разнообразии задач небесной механики вид уравнений движения при применении методов теории возмущений может быть различным, однако общая схема изложенного здесь подхода сохраняется.

3.2.2. Обстоятельства в движении реальных небесных тел, позволяющие применять методы теории возмущений

В общем случае при рассмотрении движения произвольного числа небесных тел совсем не очевидно, что выполняются условия применения методов теории возмущений. Однако в соотношениях размеров большинства реальных небесных тел, расстояний между ними и свойствах их движения существует определенная иерархия. Параметры движения планет Солнечной системы и почти всех их спутников удовлетворяют условиям, необходимым для решения уравнений движения методами теории возмущений. Рассмотрим несколько конкретных случаев, которые приводят к фундаментальным задачам теории движения тел Солнечной системы.

Сначала упростим рассмотрение системы Солнца, планет и спутников, полагая, что все эти тела являются материальными точками. Тогда к ним подойдет механическая модель задачи о движении $n+1$ материальной точки. Среди этих точек будут Солнце, планеты и их спутники. Поместим начало координат в одну из них. Опишем движение системы $n+1$ материальных точек уравнениями относительного движения

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial(V_i + R_i)}{\partial x_i}, \quad \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial(V_i + R_i)}{\partial y_i}, \quad \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial(V_i + R_i)}{\partial z_i}, \tag{45}$$

где

$$V_i = \frac{G(m_0 + m_i)}{r_i}, \quad R_i = G\sum_{j=1}^{n}{}' m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3}\right),$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}, \quad r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2},$$

$$r_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2},$$

G – гравитационная постоянная, x_i, y_i, z_i, m_i $(i = 1, 2, ..., n)$ – прямоугольные координаты и массы тел, соответственно, а m_0 – масса центрального тела. Штрих у знака суммы означает, что отсутствует слагаемое при $j = i$.

Рассмотрим несколько практических задач.

Планетная задача.

Будем изучать движение n планет под действием притяжения Солнца и их взаимного притяжения. Малым влиянием других тел пренебрежем. В уравнениях относительного движения центральным телом будет Солнце. В данном случае для уравнений невозмущенного движения при $R_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ известно общее решение, так как система уравнений распадается на n независимых систем уравнений движения двух тел, для каждого из которых известно общее решение. Таким образом, первое условие применения методов теории возмущений выполняется. Проверим теперь выполнение второго условия. Рассмотрим отношение R_i/V_i. Из уравнений относительного движения следует

$$\frac{R_i}{V_i} = \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{m_0 + m_i} \left[\frac{r_i}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j)}{r_j^3} \right]. \qquad (46)$$

Здесь $i = 1, 2, ..., n$.

Параметры орбит девяти больших планет таковы, что планеты не испытывают ни тесных сближений с Солнцем, ни тесных взаимных сближений. Поэтому величины $x_i, y_i, z_i, \Delta_{ij}, r_i$ можно считать величинами примерно одного порядка. С другой стороны, слагаемые в формуле (46) имеют множители

$$\frac{m_j}{m_0 + m_i},$$

которые являются малыми параметрами в силу малости масс планет по сравнению с массой Солнца. Таким образом выполнение второго условия применения методов теории возмущений в планетной задаче обеспечивается малостью масс планет по сравнению с массой Солнца. При решении уравнений возмущенного движения (44) малыми параметрами в планетной задаче будут отношения

$$\varepsilon_j = \frac{m_j}{m_0} \quad (j = 1, 2, ..., n) \ .$$

Спутниковая задача.

Рассмотрим движение системы спутников планеты под действием притяжения планеты, Солнца и взаимного притяжения спутников. Притяжением других планет пренебрежем в силу их удаленности. Притяжением Солнца, несмотря на его удаленность, пренебречь нельзя, так как оно имеет большую массу. В уравнениях относительного движения центральным телом будет планета. С ней и совместим начало координат. Солнце будем считать телом номер 1 $(i = 1)$. Уравнения при $i = 1$ рассматривать не будем, так как они определяют относительное движение планеты и Солнца.

В рассматриваемой спутниковой задаче для уравнений невозмущенного движения при $R_i = 0 \quad (i = 2, 3, ..., n)$ также известно общее решение, так как система уравнений распадается на независимые системы уравнений движения двух тел. Таким образом, первое условие применения методов теории возмущений выполняется. Проверим теперь выполнение второго условия. Рассмотрим выражение

$$\frac{R_i}{V_i} = \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{m_0 + m_i} \left[\frac{r_i}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j)}{r_j^3} \right] \tag{47}$$

для $i = 2, ..., n$. Малость слагаемых при $j = 2, ..., n$ та кже, как и в планетной задаче, обеспечивается малостью масс спутников m_j по сравнению с массой планеты m_0. Слагаемое при $j = 1$ (влияние притяжения Солнца) требует особого рассмотрения. Обозначим это слагаемое в величине R_i через $(R_i)_1$, а в величине $\frac{R_i}{V_i}$ – через $(\frac{R_i}{V_i})_1$.

Воспользуемся соотношениями

$$x_i x_1 + y_i y_1 + z_i z_1 = r_i r_1 \cos H_{1i}, \quad \Delta_{i1}^2 = r_i^2 + r_1^2 - 2\, r_i r_1 \cos H_{1i}.$$

Здесь r_i – планетоцентрическое расстояние спутника, r_1 – гелиоцентрическое расстояние планеты, а H_{1i} – угол между планетоцентрическими направлениями на спутник и на Солнце. Очевидно, что пока спутник остается спутником планеты, отношение r_i/r_1 будет малым. Разложим величину $\frac{1}{\Delta_{i1}}$, а затем и $(R_i)_1$ в ряд по степеням малого параметра r_i/r_1. Будем иметь

$$(R_i)_1 = G\, m_1\, \frac{1}{r_1} \left[1 + \left(\frac{r_i}{r_1} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right) + ... \right],$$

где невыписанные члены имеют более высокий порядок малости, чем $(\frac{r_i}{r_1})^2$.

Возмущающая функция R_i входит в уравнения движения только под знаком производных по x_i, y_i, z_i. Производные от первого слагаемого дадут нуль. Поэтому его можно опустить. Оставляя только самое существенное слагаемое в разложении, получим

$$(R_i)_1 = G\, m_1\, \frac{r_i^2}{r_1^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right).$$

Тогда пренебрегая массой спутника m_i по сравнению с массой планеты m_0 слагаемое в величине $\frac{R_i}{V_i}$, обусловленное притяжением Солнца, можно записать в виде

$$\left(\frac{R_i}{V_i} \right)_1 = \frac{m_1}{m_0}\, \frac{r_i^3}{r_1^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right).$$

Несмотря на то, что масса Солнца m_1 во много раз больше массы планеты m_0, отношение $(\frac{R_i}{V_i})_1$ для спутников планет оказывается малой величиной за счет того, что расстояния спутников до планеты r_i малы по сравнению с расстоянием r_1 планеты до Солнца. Таким образом, выполнение второго условия применения методов теории возмущений в спутниковой задаче обеспечивается малостью масс спутников $m_2, m_3, ..., m_n$ по сравнению с массой планеты m_0, а также малостью расстояний спутников до планеты по сравнению с расстоянием планеты до Солнца. При решении уравнений возмущенного движения (44) в спутниковой задаче используются следующие малые параметры:

$$\varepsilon'_j = \frac{m_1}{m_0}\, \frac{r_j^3}{r_1^3} \quad (j = 2, 3, ..., n).$$

Здесь расстояния r_j $(j = 2, 3, ..., n)$ изменяются во времени. Чтобы параметры были действительно постоянными, изменяющиеся расстояния заменяют на приближенные их значения, равные большим полуосям кеплеровых орбит, которые используются как нулевое приближение модели движения. Можно также использовать средние движения кеплерового движения. Тогда малыми параметрами будут

$$\varepsilon'_j = \frac{m_1}{m_0}\, \frac{a_j^3}{a_1^3} = \frac{n_1^2}{n_j^2} \quad (j = 2, 3, ..., n),$$

где a_1, a_j – большие полуоси, а n_1, n_j – средние движения.

Задача о движении спутника несферичной планеты.

Рассмотрим теперь пример движения в задаче двух тел, когда одно из тел (спутник) можно считать материальной точкой, а другое (планета) создает гравитационное поле, отличное от гравитационного поля материальной точки. Уравнения движения спутника в этом случае можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial z}, \tag{48}$$

где

$$V = \frac{G\,m}{r}, \quad R = \frac{G\,m}{r}\,J\,X(x,y,z),$$

x, y, z – планетоцентрические прямоугольные координаты спутника, m - масса планеты, G – гравитационная постоянная, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, J – постоянный параметр, а $X(x,y,z)$ – некоторая известная функция. Последними двумя величинами можно распорядиться так, чтобы функция $X(x,y,z)$ в области движения спутника принимала значения, немного отличающиеся от единицы. Параметр J в этом случае будет характеризовать отличие планеты от шара с концентрическим распределением плотности. Известные гравитационные поля Земли, других планет и многих естественных спутников планет мало отличаются от поля притяжения материальной точки. Поэтому условия применимости методов теории возмущений в данном случае также выполняются, а J является характерным малым параметром.

Формы больших планет и их основных спутников близки к форме сжатого осесимметричного тела. Поэтому в качестве параметра J берется коэффициент при второй зональной гармонике разложения силовой функции притяжения планеты в ряд по сферическим функциям.

Другие случаи применения теории возмущений.

Рассмотренные выше конфигурации небесных тел являются лишь примерами многочисленных применений теории возмущений в небесной механике. Отметим здесь еще только одну группу задач, когда в качестве невозмущенного движения рассматривается частное решение уравнений движения. Возмущенное движение происходит вблизи этого частного решения. Малые параметры в таких задачах характеризуют разности координат в возмущенном и невозмущенном движениях, а дополнительным условием применимости теории возмущений является сохранение малости этих разностей по крайней мере на исследуемом интервале времени.

При рассмотрении различных малых параметров в задачах небесной механики следует выделять параметры, которые характеризуют малость возмущающей функции. Возмущающая функция может разлагаться в ряды по степеням также и других малых параметров. Это часто делается для обеспечения возможности решения уравнений возмущенного движения в форме (44).

Отметим еще случаи, когда силы, действующие на небесное тело, не имеют силовой функции. Примером таких сил служат силы, вызванные приливной деформацией вязко-упругих тел планеты и спутника. В таких случаях исходные уравнения движения в прямоугольных координатах записываются в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = V_x + R_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = V_y + R_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = V_z + R_z, \tag{49}$$

где слагаемые V_x, V_y, V_z должны выбираться так, чтобы можно было найти общее решение уравнений движения при отбрасывании слагаемых R_x, R_y, R_z. Эти последние слагаемые называются компонентами возмущающего ускорения. Для возможности применения теории возмущений необходимо, чтобы R_x, R_y, R_z были малы по сравнению с V_x, V_y, V_z .

3.2.3. Уравнения относительно элементов промежуточной орбиты

Уравнения возмущенного движения небесного тела в теории возмущений в общем виде уже были построены выше. Чтобы изложение было непрерывным, будем исходить снова из уравнений движения в прямоугольных координатах

Для простоты понимания общей схемы теории возмущений ограничимся случаем движения одного небесного тела под действие сил, имеющих силовую функцию.

Исходные уравнения движения в прямоугольных координатах имеют общий вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{50}$$

где V и R являются функциями от координат x, y, z и времени t. Согласно теории возмущений слагаемое V выбирается так, чтобы можно

было найти общее решение уравнений невозмущенного движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{51}$$

Тогда R называется возмущающей функцией.

Воспроизведем здесь для удобства изложения повторно некоторые соотношения из общей схемы теории возмущений.

Предположим, что решение уравнений (51) найдено в форме

$$\begin{aligned} x &= x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ y &= y(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ z &= z(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{x} &= \dot{x}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \end{aligned} \tag{52}$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – произвольные постоянные.

На этом вспомогательная роль уравнений (51) заканчивается. Достаточно того, что они породили нам соотношения (52). Далее эти соотношения рассматриваются как формулы, связывающие координаты и скорость тела в возмущенном движении с некоторыми новыми неизвестными функциями времени $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$. Соотношения (52) используют как формулы замены переменных в уравнениях (50) от переменных $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ к переменным c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6. Таким образом получаются новые уравнения возмущенного движения

$$\frac{dc_i}{dt} = C_i(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \tag{53}$$

преимущества которых заключаются в том, что правые части этих уравнений обращаются в нули, если в исходных уравнениях (50) положить $R = 0$. Это позволяет решать уравнения методом малого параметра.

Формулы (52), если в них c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 считаются заданными постоянными, определяют закон движения, который называют промежуточной орбитой. Сами эти формулы называются формулами промежуточной орбиты. Уравнения (53) называются уравнениями для элементов промежуточной орбиты.

Успех дальнейших действий существенно зависит оттого, как выбраны произвольные постоянные $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$. Выбирать их можно бесконечным числом способов. В практике исследователей за

последние три столетия были рассмотрены и успешно применялись множество вариантов. Для простоты понимания основных принципов, рассмотрим здесь один из них, который имел большое число применений.

В качестве силовой функции невозмущенного движения V выбираем силовую функцию задачи двух тел, рассматриваемых здесь, как материальные точки. Такой выбор обусловлен общей иерархией в движении тел Солнечной системы. Движение каждой планеты происходит под действием притяжения Солнца. Другие планеты и другие небесные тела влияют своим притяжением относительно слабо. Спутник потому и является спутником планеты, поскольку движется под действием ее притяжения. Другие спутники и даже Солнце лишь слегка искажают движение спутника по закону задачи двух тел.

Таким образом, в данном рассмотрении мы имеем

$$V = \frac{\mu}{r}, \tag{54}$$

где μ – постоянная, а r – расстояние между двумя телами. Чаще всего начало координат помещают в одно из тел, которому присвоим номер 0. Тогда $\mu = G(m_0 + m_1)$, где G – универсальная гравитационная постоянная, а $m_0 + m_1$ – сумма масс тел. В случае, когда начало координат располагается в барицентре двух тел, имеем $\mu = G\,\frac{m_0^3}{(m_0+m_1)^2}$

Решение задачи двух тел описывает движение, которое называется кеплеровым, поскольку происходит по законам Кеплера. Поскольку мы рассматриваем движение тел Солнечной системы, имеющее определенную иерархию, ограничимся эллиптическим типом движения. В соответствии с кеплеровым движением выбирают и произвольные постоянные, которые называются кеплеровыми элементами. Их смысл подробно объяснен в специальном параграфе. Перечислим здесь кеплеровы элементы, а также связанные с ними моменты времени.

n — среднее движение, размерность радиан/ед.времени;

e — эксцентриситет, безразмерный;

i — наклон (двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью Oxy), рад.;

M_0 — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии M в начальный момент времени — эпоху), рад.;

ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;

Ω — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости Oxy между осью x и линией узлов), рад.;

t_0 — начальный момент времени — эпоха элементов;

t — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

Наряду со средним движением n, в качестве параметра орбиты будем рассматривать также большую полуось орбиты a, связанную с n законом

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \ .$$

Замену переменных в уравнениях (50) делают с помощью формул кеплерова движения. Эти формулы описаны в предыдущих разделах. Частные производные от возмущающей функции R по координатам выражаются через частные производные по кеплеровым элементам. Процедура такой замены подробно описана в книге (Дубошин, 1975). Процедура называется "основной операцией".

Применения теории возмущений оказываются проще, если в качестве новых искомых функций взять величины $a, e, i, M, \omega, \Omega$. Вместо средней аномалии в эпоху M_0 взята средняя аномалия M , которая в кеплеровом движении является известной линейной функцией времени

$$M = M_0 + n(t - t_0) \ .$$

Для краткости записи уравнений для элементов промежуточной орбиты сделаем простые переобозначения:

$$\alpha_1 = a, \ \ \alpha_2 = e, \ \ \alpha_3 = i, \ \ \beta_1 = M, \ \ \beta_2 = \omega, \ \ \beta_3 = \Omega. \qquad (55)$$

В результате замены переменных уравнения возмущенного движения небесного тела можно записать в следующем общем виде:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j} \ ,$$

$$\frac{d\beta_i}{dt} = n_i - \sum_{j=1}^{3} a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \qquad (56)$$

$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

В этих уравнениях n_i, a_{ij} – функции, зависящие только от от элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и постоянной μ. В случае кеплеровской промежуточной

орбиты n_1, n_2 , а также некоторые из девяти функций a_{ij} , равны нулю. Однако это обстоятельство не упрощает решение уравнений. Запись уравнений (56) в таком общем виде позволяет применять их также для некоторых некеплеровых промежуточных орбит. Методы решения этих уравнений рассмотрены в следующих разделах.

Заметим, что в уравнениях (56) возмущающая функция R обозначена той же буквой, что и в уравнениях (50). Однако здесь она является функцией от элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ и времени t.

Рассмотрим теперь явный вид уравнений для элементов промежуточной орбиты в случае элементов (55)

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial M}\,, \\
\frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{ena^2}\,\frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\,\frac{\partial R}{\partial \omega}\,, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial \Omega}\,,
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2}\,\frac{\partial R}{\partial e}\,, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\,\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial i}\,, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial i}\,.
\end{aligned} \tag{58}$$

Множители в правых частях уравнений можно заменить согласно соотношениям

$$\frac{1}{na^2} = \frac{na}{\mu}\,, \quad \frac{1}{na} = \frac{na^2}{\mu}\,. \tag{59}$$

В практической небесной механике применяются и другие варианты элементов кеплеровой промежуточной орбиты. Особого внимания заслуживают два из них. Орбиты множества естественных спутников планет являются почти круговыми и лежат вблизи плоскости экватора планеты. В таких случаях положение спутника на орбите в первую очередь определяется средней долготой λ, а ориентация орбиты – долготой перицентра π. Эти величины связаны с M, ω, Ω соотношениями

$$\lambda = M + \omega + \Omega\,, \quad \pi = \omega + \Omega\,. \tag{60}$$

Для обратных орбит вместо суммы ω и Ω используется их разность. Уравнения составляются относительно функций λ, π и Ω. Элементами промежуточной орбиты считаются π, Ω и λ_0 – средняя долгота в эпоху t_0 . В этом случае вместо уравнений (57), (58) нужно решать уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial \lambda}\,, \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\,\frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\,\frac{\partial R}{\partial \pi}\,, \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda}\right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial \Omega}\,,
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{dt} &= n - \frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial a} + e\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\,\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial i}\,, \\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\,\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial i}\,, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial i}\,.
\end{aligned} \tag{62}$$

Правые части уравнения для i и Ω имеют особенности при $i = 0$, а правые части уравнений для e и ω имеют особенности при $e = 0$. Эти обстоятельства требуют особого внимания при решении уравнений.

Заметим, что в публикациях на английском языке часто вместо π для обозначения долготы перицентра используется буква ϖ .

Теперь рассмотрим вариант элементов промежуточной орбиты, в котором уравнения не имеют особенностей при эксцентриситете и наклоне орбиты, равных нулю. Такие элементы придумал Лагранж для изучения вековых возмущений планет. Они теперь так и называются – элементы Лагранжа. Уравнения для a и λ не имеют особенностей, а остальные элементы нужно заменить. Обычно элементы Лагранжа обозначаются в литературе через h, k, p, q . С рассмотренными выше элементами они связаны соотношениями

$$h = e\sin\pi, \quad k = e\cos\pi\,, \tag{63}$$

$$p = \operatorname{tg} i\sin\Omega, \quad q = \operatorname{tg} i\cos\Omega\,. \tag{64}$$

После замены переменных уравнения для элементов Лагранжа будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\left(\frac{\partial R}{\partial k} - \frac{h}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \lambda}\right) + \frac{k\,\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}\,, \\
\frac{dk}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\left(-\frac{\partial R}{\partial h} - \frac{k}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \lambda}\right) - \frac{h\,\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}\,, \qquad (65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= \frac{\sec^3 i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p}{2na^2\sqrt{1-e^2}\cos i\cos^2\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda}\right)\,, \\
\frac{dq}{dt} &= -\frac{\sec^3 i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial p} - \frac{q}{2na^2\sqrt{1-e^2}\cos i\cos^2\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda}\right)\,. \qquad (66)
\end{aligned}$$

Для полного состава к ним нужно добавить приведенные уже выше уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \lambda}\,, \\
\frac{d\lambda}{dt} &= n - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + e\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}\,. \qquad (67)
\end{aligned}$$

В правых частях уравнений (65), (66), (67) содержатся частные производные от возмущающей функции по величинам, которые не являются искомыми функциями в этих уравнениях. Это нормально. Так следует оставить. Дело в том, что возмущающая функция получается сначала, как функция от переменных $a, e, i, \lambda, \pi, \Omega$. Поэтому лучше сначала ее продифференцировать по этим элементам, а потом переходить к переменным h, k, p, q уже в полученных производных.

3.2.4. Решение уравнений для элементов промежуточной орбиты. Метод малого параметра

Рассмотрим метод решения уравнений (56). Это наиболее часто применяемые уравнения. В случаях других вариантов элементов решение строится аналогично.

Метод решения основан на малости возмущающей функции R по сравнению с функцией V, поэтому он называется методом малого параметра. В литературе этот метод называется методом малого параметра А. Пуанкаре.

Для изложения метода малого параметра нужно ввести понятие порядка малости. Введение порядка малости неоднозначно. Дело в том, что на практике возмущающая функция R, выраженная через элементы промежуточной орбиты, содержит множество членов – слагаемых разных по величине. Для выражения возмущающей функции применяют разложения по степеням различных малых параметров. Присвоение каждому слагаемому того или иного порядка малости является иногда условным. При построении решения многократно перемножаются величины разных порядков малости. Чаще всего заранее полагается максимальный учитываемый порядок малости. В каждой конкретной теории движения имеются свои особенности.

Для общего изложения метода мы примем, что малость возмущающей функции обеспечивается некоторым малым параметром, содержащимся в ней как общий множитель. Будем считать этот параметр первого порядка малости. На практике возмущающая функция оказывается разложенной по степеням этого и других малых параметров. Таким образом, ее разложение начнется с члена первого порядка малости.

Для краткости изложения не будем выписывать явно сами малые параметры. Однако каждой величине будет присвоен определенный порядок малости. Этот порядок будем записывать с помощью верхнего индекса величины в круглых скобках. Таким образом, разложение возмущающей функции будет иметь вид

$$R = R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)} + \dots \,. \tag{68}$$

Введем еще обозначения

$$\begin{gathered} A_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j} \quad , \\ B_i = -\sum_{j=1}^{3} a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \\ (i = 1, 2, 3) \,. \end{gathered} \tag{69}$$

Теперь уравнения для элементов промежуточной орбиты запишем в виде

$$\begin{gathered} \frac{d\alpha_i}{dt} = A_i^{(1)} + A_i^{(2)} \quad + \dots \,, \\ \frac{d\beta_i}{dt} = n_i^{(0)} + n_i^{(1)} + \dots + B_i^{(1)} + B_i^{(2)} \quad + \dots \,, \end{gathered} \tag{70}$$

$$(i = 1, 2, 3)\ .$$

Заметим, что в частном случае кеплеровской промежуточной орбиты $n_2 = n_3 = 0$ и $n_1^{(s)} = 0$ при $s > 1$. В последних уравнениях правые части зависят от искомых функций $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и явно от времени.

Каждое из слагаемых $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, 3, j = 1, 2, ...)$ зависит от всех шести элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Слагаемые $n_i^{(0)} + n_i^{(1)} + ...$ зависят только от $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Будем искать решение уравнений (70) в виде рядов по степеням малых параметров, т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i^{(0)} + \alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} + ...\ , \\ \beta_i &= \beta_i^{(0)} + \beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)} + ...\ , \\ &\qquad (i = 1, 2, 3)\ . \end{aligned} \tag{71}$$

Здесь мы рассматриваем построение формального решения. Доказательства существования такого решения и сходимости построенных радов можно найти в учебниках (Субботин, 1968; Дубошин, 1975).

Итак, подставим ряды (71) в уравнения (70). Затем приравняем в левой и правой частях уравнений члены одинакового порядка малости. Каждое из слагаемых в правых частях этих уравнений придется разложить в ряды Тейлора по степеням малого параметра. Разложение делается по схеме

$$f(a + \varepsilon) = f(x)|_{x=a} + \frac{1}{1!}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a} \varepsilon + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x=a} \varepsilon^2 + ...,$$

где a - значение аргумента функции $f(x)$, относительно которого отсчитывается малое приращение ε. Таким образом, в аргументах функций $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, n_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, 3, j = 1, 2, ...)$ приращениями будут бесконечные суммы $\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} + ...$, $\beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)} + ...$

Для членов нулевого порядка малости получим

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i^{(0)}}{dt} &= 0\ , \\ \frac{d\beta_i^{(0)}}{dt} &= (n_i^{(0)})_0\ . \end{aligned} \tag{72}$$

Здесь и далее символы $(...)_0$ обозначают значения функций при $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$.

Решение уравнений (72) тривиально:

$$\alpha_i^{(0)} = \alpha_{i0}^{(0)}, \quad \beta_i^{(0)} = (n_i^{(0)})_0(t - t_0) + \beta_{i0}^{(0)} \ , \tag{73}$$

Здесь $\alpha_{i0}^{(0)}$, $\beta_{i0}^{(0)}$ $(i = 1, 2, 3)$ - произвольные постоянные. При этом постоянные $(n_i^{(0)})_0$ зависят от $\alpha_{i0}^{(0)}$. Решение (73) описывает промежуточное невозмущенное движение.

Теперь выделим и приравняем в правых и левых частях уравнений (70) члены первого порядка малости с учетом (71). Получим

$$\begin{gathered} \frac{d\alpha_i^{(1)}}{dt} = (A_i^{(1)})_0 \ , \\ \frac{d\beta_i^{(1)}}{dt} = (B_i^{(1)})_0 + (n_i^{(1)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \\ (i = 1, 2, 3) \ . . \end{gathered} \tag{74}$$

Здесь $(A_i^{(1)})_0$, $(B_i^{(1)})_0$ являются известными функциями времени в силу подстановок $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$ и равенств (73). Заметим, что произвольные постоянные $\alpha_i^{(0)}, \beta_{i0}^{(0)}$ входят сюда буквенно, их значения пока неопределены.

Решение первых трех из шести уравнений (74) имеет вид

$$\begin{gathered} \alpha_i^{(1)} = \int (A_i^{(1)})_0 dt + \alpha_{i0}^{(1)} \\ (i = 1, 2, 3) \ , \end{gathered} \tag{75}$$

где $\alpha_{i0}^{(1)}$ - новые произвольные постоянные. Можно оставить эти постоянные в решении присутствовать буквенно и распорядиться их значениями позже. Однако их можно сразу положить равными нулю. Именно так мы и поступим для дальнейших построений решения.

Чтобы построить решение, нужно взять неопределенный интеграл в правой части соотношения (75). Для этого в конкретных случаях разрабатываются специальные методы разложения возмущающей функции. Допустим, что это удалось. Тогда $\alpha_i^{(1)}$ и правые части остальных трех уравнений (74) становятся известными функциями времени. Теперь решение для $\beta_i^{(1)}$ выражается через неопределенный

интеграл

$$\beta_i^{(1)} = \int \left[(B_i^{(1)})_0 + (n_i^{(1)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \right] dt + \beta_{i0}^{(1)} \qquad (76)$$
$$(i = 1, 2, 3)\ .$$

Здесь произвольные постоянные $\beta_{i0}^{(1)}$ можно положить равными нулю.

Аналогично строится решение для членов второго порядка малости. Сначала находим

$$\alpha_i^{(2)} = \int \left[(A_i^{(2)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} \right] dt +$$
$$+\alpha_{i0}^{(2)} \quad (77)$$
$$(i = 1, 2, 3)\ .$$

Произвольные постоянные $\alpha_{i0}^{(2)}$ полагаем равными нулю. Подынтегральное выражение в (77) оказывается известной функцией времени. Допустим, что эту функцию удалось проинтегрировать. Тогда решение для $\beta_i^{(2)}$ выражается в виде

$$\beta_i^{(2)} = \int \left[(B_i^{(2)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \alpha_k^{(1)} \right] dt + \beta_{i0}^{(2)} \quad (78)$$
$$(i = 1, 2, 3)\ .$$

Произвольные постоянные $\beta_{i0}^{(2)}$ также полагаем равными нулю.

Таким образом последовательно находится решение для членов следующих порядков малости. Всякий раз нужно интегрировать новую известную функцию времени, а новые произвольные постоянные полагать равными нулю. Так как при получении подынтегральных выражений в правых частях уравнений делались подстановки $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$, то с учетом (73) все слагаемые рядов (71) оказываются зависимыми от произвольных постоянных $\alpha_{i0}^{(0)},\ \beta_{i0}^{(0)}$ $(i = 1, 2, 3)$.

В результате мы получаем решение уравнений возмущенного движения как функции времени и шести независимых произвольных постоянных

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i(\alpha_{10}^{(0)}, \alpha_{20}^{(0)}, \alpha_{30}^{(0)}, \beta_{10}^{(0)}, \beta_{20}^{(0)}, \beta_{30}^{(0)}) \ , \\ \beta_i &= \beta_i(\alpha_{10}^{(0)}, \alpha_{20}^{(0)}, \alpha_{30}^{(0)}, \beta_{10}^{(0)}, \beta_{20}^{(0)}, \beta_{30}^{(0)}) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, 3) \ . \end{aligned} \tag{79}$$

3.2.5. Решение уравнений для элементов промежуточной орбиты. Способ Пуассона

Применение метода малого параметра в том порядке, как описано выше, приводит к некоторым принципиальным усложнениям, которые следуют из свойств разложения возмущающей функции. Этих усложнений можно избежать, если применить прием, предложенный еще французским математиком Пуассоном. Проблема возникает на этапе получения возмущений второго порядка методом малого параметра Пуанкаре.

Уравнения для элементов промежуточной орбиты мы рассматриваем в виде (70). Решение этих уравнений ищем в виде рядов по степеням малых параметров (71).

Возмущения второго порядка в элементах α_i находятся по формулам (77). Произвольные постоянные $\alpha_{i0}^{(2)}$ можно положить равными нулю, так как они входят в решение уравнений (70) аддитивно вместе с произвольными постоянными, появляющимися в членах других порядков малости. Подынтегральная функция в (77) оказывается известной функцией времени. Если эту функцию удалось проинтегрировать, то возмущения второго порядка в элементах β_i найдутся по формуле (78).

Рассмотрим в подынтегральных выражениях последних двух формул слагаемые

$$\left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j}\right)_0 \beta_j^{(1)}, \quad \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j}\right)_0 \beta_j^{(1)} \quad (i, j = 1, 2, 3) \ . \tag{80}$$

После подстановки в уравнения для элементов промежуточной орбиты возмущающей функции в форме (83) (см. ниже) становится ясно, что левые сомножители в выражениях (80) могут содержать только

периодические члены. С другой стороны, мы получили ранее, что в возмущениях первого порядка $\beta_j^{(1)}$ могут содержаться как периодические, так и вековые, т. е. линейные по времени члены. Произведение периодических членов на вековые даст в подынтегральном выражении смешанные члены, что после интегрирования приведет к появлению в решении смешанных членов в возмущениях второго порядка. Смешанными членами мы называем произведения вида $t \sin at$, где t - время, а a - постоянная. Появление таких выражений в возмущениях второго порядка является следствием применяемого метода. Это не означает неизбежного неограниченного возрастания возмущений во времени, так как мы получаем таким образом только начальные члены разложения возмущений по степеням малых параметров. Полный ряд, представляющий возмущения, может оказаться разложением ограниченной функции на бесконечном интервале времени.

Оказывается, существует способ, основная идея которого была предложена еще французским математиком Пуассоном, позволяющий исключить в решении смешанные члены по крайней мере второго, а возможно и более высоких порядков малости. Рассмотрим этот способ в приложении к уравнениям возмущенного движения (70).

Предположим, что все возмущения элементов α_i не содержат вековых и смешанных членов и все возмущения элементов β_i не содержат смешанных членов по крайней мере до некоторого порядка малости. Однако возмущения элементов α_i могут содержать периодические, а элементов β_i – периодические и вековые члены любых порядков. Обозначим суммы вековых членов данного порядка малости k через $\overline{\alpha}_i^{(k)}$, $\overline{\beta}_i^{(k)}$ а суммы периодических членов порядка k через $\tilde{\alpha}_i^{(k)}$, $\tilde{\beta}_i^{(k)}$. Теперь представим разложение искомого решения уравнений возмущенного движения в виде

$$\begin{gathered} \alpha_i = \overline{\alpha}_i^{(0)} + \tilde{\alpha}_i^{(1)} + \tilde{\alpha}_i^{(2)} + ..., \\ \beta_i = \overline{\beta}_i^{(0)} + \overline{\beta}_i^{(1)} + \overline{\beta}_i^{(2)} + ... + \tilde{\beta}_i^{(1)} + \tilde{\beta}_i^{(2)} + ..., \\ (i = 1, 2, 3) \ . \end{gathered} \tag{81}$$

Как было показано выше, по крайней мере $\overline{\alpha}_i^{(1)} = 0$ для $i = 1, 2, 3$ и возмущения первого порядка всех элементов не содержат смешанных членов.

По методу малого параметра нужно делать разложение правых

частей уравнений по степеням малого параметра по схеме

$$f(a+\varepsilon) = f(x)|_{x=a} + \frac{1}{1!}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}\varepsilon + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=a}\varepsilon^2 + ...,$$

где a - значение аргумента функции $f(x)$, относительно которого отсчитывается малое приращение ε. Согласно способу Пуассона центрами разложения (a) считаются $\overline{\alpha}_i^{(0)}$ и бесконечные суммы $\overline{\beta}_i^{(0)} + \overline{\beta}_i^{(1)} + \overline{\beta}_i^{(2)} + ...$ вековых членов, а приращениями (ε) – бесконечные суммы $\tilde{\alpha}_i^{(1)} + \tilde{\alpha}_i^{(2)} + ...$, $\tilde{\beta}_i^{(1)} + \tilde{\beta}_i^{(2)} + ...$ периодических слагаемых.

При этих предположениях вместо выражений (80), входящих в формулы для возмущений второго порядка, мы будем иметь

$$\left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j}\right)_0 \tilde{\beta}_j^{(1)}, \quad \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j}\right)_0 \tilde{\beta}_j^{(1)} \quad (i,j=1,2,3)\ . \tag{82}$$

Эти выражения представляют собой произведения сумм периодических членов. Таким образом, в возмущениях второго порядка исключены смешанные члены.

Легко показать, что если все возмущения элементов α_i не содержат вековых и смешанных членов и все возмущения элементов β_i не содержат смешанных членов по крайней мере до порядка малости $(k-1)$ включительно, то все возмущения порядка k не будут содержать смешанных членов.

3.3. Разложение возмущающей функции относительно элементов промежуточной орбиты спутника планеты

3.3.1. Общие свойства разложений возмущающей функции относительно элементов промежуточной орбиты

Во всех предыдущих разделах возмущающая функция рассматривалась как функция от координат небесного тела. Теперь для применения теории возмущений и метода малого параметра необходимо выразить ее через элементы промежуточной орбиты. При этом выражение должно иметь такой вид, чтобы интегралы по времени, получающиеся в теории возмущений, можно было взять в аналитическом виде. Общий подход в этом деле заключается в том, чтобы привести

интегралы к виду

$$\int \cos(\alpha\, t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha\, t + \beta),$$

где α, β – постоянные.

Для каждого типа возмущающих факторов разложение имеет специальный вид. Рассмотрим здесь разложения возмущающей функции в теории движения спутника планеты для основных факторов – притяжение других тел и несферичность планеты. Выводы таких разложений чрезвычайно сложны и объемны. Мы воздержимся от того, чтобы рассматривать эти выводы здесь. Ниже даны ссылки на работы, где можно найти соответствующие выкладки и результаты. Приведем здесь самый общий вид разложения возмущающей функции

$$R = \overline{R} + \sum \left(R^{(s)}_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \ldots j_n} \sin D_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \ldots j_n} + \right.$$
$$\left. + R^{(c)}_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \ldots j_n} \cos D_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \ldots j_n} \right), \qquad (83)$$

где

$$D_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \ldots j_n} = k_1 M + k_2 \omega + k_3 \Omega + j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + \ldots j_n \lambda_n.$$

Суммирование ведется по индексам k_1, k_2, k_3, j_1, j_2, ... j_n. Здесь коэффициенты $\overline{R}$, $R^{(s)}_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \ldots j_n}$, $R^{(c)}_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \ldots j_n}$ зависят от элементов a, e, i и не зависят от M, ω, Ω и времени t. Величины λ_1, λ_2, ... λ_n суть известные линейные функции времени. Слагаемое $\overline{R}$ называется вековым членом разложения возмущающей функции. Все эти коэффициенты и величины содержат параметры, характеризующие возмущающие факторы. В частности, λ_1, λ_2, ... λ_n описывают орбитальные движения или вращения других тел.

Легко показать, что подставляя возмущающую функцию в таком виде в уравнения теории возмущений, которые расмотрены выше, получающиеся интегралы по времени будут берущимися. В возмущениях первого порядка малости будут получаться только вековые и периодические члены, но в возмущениях более высоких порядков могут появляться также смешанные члены вида

$$t\ \cos(\alpha\, t + \beta).$$

В теории движения спутника планеты учитывается притяжение других спутников этой же планеты, а также притяжение Солнца. Си-

стема дифференциальных уравнений относительного движения имеет тот же вид, берется ли в качестве главного тела Солнце или планета. Поэтому в теории движения спутника принимается, что Солнце движется вокруг планеты, так же как и другие спутники. Притяжение других планет учесть в аналитической теории гораздо сложнее. Мы этот весьма слабый эффект здесь не рассматриваем.

3.3.2. Разложение возмущающей функции, обусловленной несферичностью планеты

Одной из основных механических моделей небесной механики является спутниковая задача. Она формулируется как частный случай задачи о движении трех и более материальных точек. Однако в практических задачах о движении существующих естественных и искусственных спутников планет центральное тело, т. е. планета, не может рассматриваться как материальная точка, поскольку влияние ее несферичности оказывается существенным.

Та часть силовой функции спутниковой задачи, которая обусловлена притяжением планеты, рассматривается как силовая функция притяжения несферичного тела конечных размеров.

Движение спутника планеты рассматривают в системе прямоугольных координат O, x, y, z с началом в центре масс планеты. Оси направляют параллельно осям некоторой абсолютной (невращающейся) системы координат. Обычно ось z направляют по направлению оси вращения планеты. Направление оси x выбирают специально в разных практических задачах. Чаще всего выбирают линию пересечения плоскости экватора и плоскости орбиты планеты. Поскольку в реальных условиях обе плоскости медленно поворачиваются, то оси системы координат связывают с положениями плоскостей экватора и орбиты в некоторый фиксированный момент времени. При более точном рассмотрении орбитальное движение планеты не является плоским. Тогда в качестве плоскости орбиты берут некоторую условную плоскость, вблизи которой движется планета. Более подробно о выборе системы координат написано в параграфе 2.52.

Для приближенной теории движения спутника и в качестве основы точной теории рассматривают следующую модель системы координат. Ось равномерного вращения планеты считается неподвижной, и ось z направляют по этой оси.

Гравитационное поле притяжения планеты создается каждой ее

частицей. Распределение плотности вещества планеты чаще всего неизвестно. Поэтому силовую функцию притяжения несферичной планеты разлагают в ряд по линейному множеству ортогональных функций, а коэффициенты разложения находят из наблюдений движения спутников, гравитационных измерений на поверхности планеты и данных о форме планеты.

Воспользуемся разложением силовой функции притяжения несферичной планеты, приведенным в Главе 2 (раздел 2.4). Это разложение описывается формулой

$$U = \frac{fm}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\varphi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)(C_{nk}\cos k\overline{\lambda} + S_{nk}\sin k\overline{\lambda})\right],$$

где $P_n(\sin\varphi)$ – полиномы Лежандра, $P_n^{(k)}(\sin\varphi)$ – присоединенные функции Лежандра, аргументами которых является $\sin\varphi$. Постоянные коэффициенты J_n, C_{nk}, S_{nk} как раз и задают гравитационное поле планеты. Здесь используются сферические координаты – центральное расстояние r, широта φ, долгота λ, соответствующие выбранной невращающейся системе координат O, x, y, z. Величина $\overline{\lambda}$ определяется соотношением

$$\overline{\lambda} = \lambda - S, \tag{84}$$

где S – угол поворота начального меридиана планеты относительно оси x. В случае Земли S является звездным временем. Приближенно можно считать

$$S = \dot{S}(t - t_0) + S_0 \ ,$$

где $\dot{S}$, t_0, S_0 – известные постоянные, а t – время.

Для решения задачи согласно теории возмущений нужно разложить силовую функцию на два слагаемых

$$U = V + R,$$

где V – основная часть, а R – возмущающая функция. При этом должно быть известно общее аналитическое решение уравнений движения, в которых оставлена только основная часть V. В простейшем случае принимают

$$V = \frac{fm}{r},$$

Тогда общее решение уравнений невозмущенного движения описывается формулами кеплеровского движения, а возмущающая функция R, обусловленная нецентральностью гравитационного поля планеты, имеет вид

$$R = \frac{fm}{r}\left[-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\varphi)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)(C_{nk}\cos k\overline{\lambda}+S_{nk}\sin k\overline{\lambda})\right].$$

Согласно методам теории возмущений, точные уравнения движения в координатах заменяются на уравнения возмущенного движения относительно новых переменных – элементов промежуточной орбиты. Связь новых переменных и координат описывается формулами общего решения уравнений невозмущенного движения (с силовой функцией V), в которых новые переменные играют роль произвольных постоянных – элементов промежуточной орбиты. Для решения уравнений относительно элементов промежуточной орбиты возмущающая функция должна быть выражена через эти элементы. Такой процесс называется разложением возмущающей функции, поскольку фактически производятся новые разложения по степеням новых малых параметров.

Рассмотрим здесь, как это делается в случае кеплеровской промежуточной орбиты спутника. Будем предполагать, что элементами промежуточной орбиты являются:
a - большая полуось орбиты,
e - эксцентриситет,
i - наклон,
M - средняя аномалия,
ω - угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты,
Ω - длогота узла,
причем элементы i, ω, Ω отсчитываются в системе координат O, x, y, z.

Начнем с того, что объединим обозначения коэффициентов разложения J_n и C_{nk}, S_{nk} путем доопределения C_{nk}, S_{nk} и функций $P_n^{(k)}$ для $k = 0$ следующим образом:

$$C_{n0} = -J_n, \quad S_{n0} = 0 \quad P_n^{(0)} = P_n.$$

Тогда, учитывая еще соотношение (84), возмущающую функцию вы-

разим в виде

$$R = \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi) \left[C_{nk} \cos k(\lambda - S) + S_{nk} \sin k(\lambda - S)\right].$$

Теперь введем в рассмотрение величины J_{nk}, λ_{nk}, связанные с коэффициентами C_{nk}, S_{nk} соотношениями

$$C_{nk} = J_{nk} \cos k\lambda_{nk}, \quad S_{nk} = J_{nk} \sin k\lambda_{nk}.$$

В этом случае для возмущающей функции имеем

$$R = \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} J_{nk} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi) \cos k(\lambda - S - \lambda_{nk}).$$

Далее удобно воспользоваться комплексным представлением функции

$$R = fm \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} J_{nk} Re\{R_{nk}\},$$

где

$$R_{nk} = \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n^{(k)}(\sin\varphi) \exp\sqrt{-1}k(\lambda - S - \lambda_{nk}).$$

Запишем очевидное соотношение

$$\lambda - S - \lambda_{nk} = (\lambda - \Omega) + \Omega - S - \lambda_{nk}.$$

Тогда

$$R_{nk} = \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Q_{nk} \exp\sqrt{-1}k\Omega \exp\sqrt{-1}k(-S - \lambda_{nk}),$$

где

$$Q_{nk} = P_n^{(k)}(\sin\varphi) \exp\sqrt{-1}k(\lambda - \Omega).$$

Теперь отметим, что направление радиуса-вектора спутника однозначно определяется его широтой φ и долготой, отсчитываемой от восходящего узла орбиты, т. е. $\lambda - \Omega$. Направление радиуса-вектора спутника также однозначно определяется наклоном орбиты i и аргументом широты u (угол между радиусом-вектором и направлением на восходящий узел). Между этими парами углов справедливы соотношения

$$\sin\varphi = \sin i \sin u,$$

$$\cos\varphi\cos(\lambda-\Omega)=\cos u,$$

$$\cos\varphi\sin(\lambda-\Omega)=\cos i\sin u.$$

Используя эти соотношения, можно выразить Q_{nk} через i и u. В работах по решению этой задачи чаще всего приводится следующий результат:

$$Q_{nk}=\left(\sqrt{-1}\right)^{k-n+2E(\frac{n-k}{2})}\sum_{p=0}^{n}F_{nkp}(i)\exp\sqrt{-1}(n-2p)u, \qquad (85)$$

где $F_{nkp}(i)$ – специальные функции небесной механики, называемые функциями наклона.

Вывод последнего соотношения и формулы, определяющие функции наклона, можно найти в работах (Брумберг, 1967; Каула, 1970; Аксенов, 1986). Методы вычисления функций наклона кратко изложены в Приложении П 1.1. Там же даны некоторые примеры функций.

В дальнейших выкладках учтем, что

$$u=v+\omega,$$

где v – истинная аномалия. Теперь формула (85) позволяет записать выражение для R_{nk} в следующем виде:

$$R_{nk}=\frac{r_0^n}{r^{n+1}}\left(\sqrt{-1}\right)^{k-n+2E(\frac{n-k}{2})}\sum_{p=0}^{n}F_{nkp}(i)\exp\sqrt{-1}(n-2p)v\times$$

$$\times\ \exp\sqrt{-1}(n-2p)\omega\exp\sqrt{-1}k\Omega\exp\sqrt{-1}k(-S-\lambda_{nk}).$$

Перепишем последнее соотношение в форме

$$R_{nk}=\frac{r_0^n}{a^{n+1}}\left(\sqrt{-1}\right)^{k-n+2E(\frac{n-k}{2})}\sum_{p=0}^{n}F_{nkp}(i)X_{-n-1,n-2p}\times$$

$$\times\ \exp\sqrt{-1}(n-2p)\omega\exp\sqrt{-1}k(\Omega-S)\exp\sqrt{-1}k(-\lambda_{nk}),$$

где

$$X_{l,j}=\left(\frac{r}{a}\right)^l\exp\sqrt{-1}jv.$$

Функции $X_{l,j}$ в кеплеровском движении зависят от времени посредством r и v, которые в свою очередь связаны с эксцентриситетом e и средней аномалией M цепочкой соотношений

$$\frac{r}{a} = \frac{1-e^2}{1+e\cos v},$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

$$E - e\sin E = M.$$

Выразить $X_{l,j}$ через e и M в конечном виде не представляется возможным, однако при достаточно малых значениях эксцентриситета e можно воспользоваться разложением в ряд

$$X_{l,j} = \left(\frac{r}{a}\right)^l \exp\sqrt{-1}jv = \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_q^{l,j}(e)\exp\sqrt{-1}qM, \qquad (86)$$

где $X_q^{l,j}(e)$ – специальные функции небесной механики, называемые коэффициентами Ганзена. Вывод такого разложения и формулы, определяющие коэффициенты Ганзена, можно найти в работах (Брумберг, 1967; Каула, 1970; Аксенов, 1986).

Заметим, что записанный выше ряд по кратным средней аномалии сходится при всех значениях эксцентриситета, меньших единицы.

Методы вычисления этих функций кратко описаны в Приложении П 1.2. Здесь только отметим некоторые их свойства. При значении индекса $q = 0$ коэффициенты Ганзена выражаются в конечном виде, как функции от эксцентриситета. Кроме того, для всех допустимых значений индексов можно записать разложение

$$X_q^{l,j}(e) = e^{|q-j|}\sum_{s=0}^{\infty} X_{q,s}^{l,j} e^{2s},$$

где $X_{q,s}^{l,j}$ – некоторые числа, а ряд сходится при всех $e < 1$. При вычислении некоторых возмущений оказывается важным следующее свойство:

$$X_0^{-3,2}(e) = X_0^{-3,-2}(e) = 0$$

при всех $e < 1$.

Итак, воспользовавшись соотношением (202), для R_{nk} запишем

$$R_{nk} = \frac{r_0^n}{a^{n+1}} \left(\sqrt{-1}\right)^{k-n+2E(\frac{n-k}{2})} \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{nkp}(i)\ X_q^{-n-1,n-2p}(e) \times$$

$$\times\ \exp\sqrt{-1}[qM + (n-2p)\omega + k(\Omega - S) - k\lambda_{nk}].$$

Чтобы определить действительную часть от R_{nk} , заметим, что

$$Re\{\left(\sqrt{-1}\right)^{k-n+2E(\frac{n-k}{2})} \exp\sqrt{-1}\alpha\} = \begin{cases} \cos\alpha & \text{при } n-k \text{ – чет} \\ \sin\alpha & \text{при } n-k \text{ – нечет} \end{cases}.$$

Учитывая это, выражение для R запишем сначала так:

$$R = fm \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{r_0^n}{a^{n+1}} F_{nkp}(i)\ X_q^{-n-1,n-2p}(e)\ J_{nk} \times$$

$$\times \begin{cases} \cos(D_{nkpq} - k\lambda_{nk}) & \text{при } n-k \text{ – чет} \\ \sin(D_{nkpq} - k\lambda_{nk}) & \text{при } n-k \text{ – нечет} \end{cases},$$

где

$$D_{nkpq} = qM + (n-2p)\omega + k(\Omega - S).$$

Возвращаясь к коэффициентам C_{nk}, S_{nk} , окончательно получим

$$R = fm \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{r_0^n}{a^{n+1}} F_{nkp}(i)\ X_q^{-n-1,n-2p}(e) \times$$

$$\times \left(\left\{ \begin{array}{ll} C_{nk} & \text{при } n-k \text{ – чет} \\ -S_{nk} & \text{при } n-k \text{ – нечет} \end{array} \right\} \cos D_{nkpq} + \right. \tag{87}$$

$$\left. + \left\{ \begin{array}{ll} S_{nk} & \text{при } n-k \text{ – чет} \\ C_{nk} & \text{при } n-k \text{ – нечет} \end{array} \right\} \sin D_{nkpq} \right),$$

Поставленная задача решена, и объявленное в названии параграфа разложение возмущающей функции, обусловленной нецентральностью гравитационного поля планеты, дается последней формулой. В таком виде возмущающая функция может использоваться при решении дифференциальных уравнений движения спутника относительно кеплеровских элементов промежуточной орбиты, перечисленных в начале этого параграфа. Дифференциальные уравнения и порядок их решения описаны в предыдущих разделах.

Относительно рассматриваемого разложения сделаем несколько замечаний.

1. На практике бесконечную сумму вычислить нельзя, поэтому ограничиваются отрезком ряда. Малость отбрасываемых членов обусловлена убыванием значений коэффициентов C_{nk}, S_{nk} с ростом индекса n и убыванием значений коэффициентов Ганзена с ростом $|q - n + 2p|$.

2. Значения коэффициентов C_{nk}, S_{nk} резко убывают, а значения функций наклона возрастают с ростом индексов. Поэтому обычно оперируют с нормированными значениями. Нормировочный коэффициент, зависящий от индексов, подбирают так, чтобы функции наклона принимали значения, по модулю не превышающие единицу. Выражения для подходящего нормировочного коэффициента можно найти в публикациях (Брумберг, 1967; Аксенов, 1986).

3. При построении аналитической теории движения спутника планеты необходимо определять частные производные от возмущающей функции по ее аргументам – элементам кеплеровской промежуточной орбиты. Производные по элементам a, M, ω, Ω определяются элементарно, при этом не изменяется вид фнкции. Для определения частных производных по элементам e, i нужно заменять коэффициенты Ганзена и функции наклона на их производные по своим аргументам. На практике вычисляют одновременно значения этих специальных функций и их производных.

4. В ряде задач удобно или даже необходимо использовать иные элементы кеплеровской промежуточной орбиты спутника, нежели указанные выше. Чтобы получить выражение возмущающей функции в новых элементах, можно сделать замену переменных в уже полученном разложении. Однако иногда приходится выполнять разложение заново, проходя по аналогичному пути, как описано выше.

5. Время входит явно в возмущающую функцию только посредством величины S – угла поворота планеты в невращающейся системе координат (звездное время в случае спутника Земли). Однако если планета осесимметричная, то все коэффициенты C_{nk}, S_{nk} при $k \neq 0$ равны нулю, и возмущающая функция не зависит явно от времени.

Далее рассмотрим одну модификацию разложения возмущающей функции, обусловленной нецентральностью гравитационного поля планеты, имеющую преимущества на практике и при анализе возмущений в движении спутника.

Учитывая замечание 1, заменим бесконечные суммы на отрезки

рядов. Для этого зададим некоторые числа N и K , и в сумме учтем только члены при $n \leq N$ и $-K \leq q - n + 2p \leq K$. Это означает, что мы пренебрегаем членами с коэффициентами C_{nk}, S_{nk}, у которых $n > N$, и членами, пропорциональными e^q при $q > K$. Изменим порядок суммирования в формуле (87) так, чтобы выделить члены с одинаковыми коэффициентами при $M, \omega, (\Omega - S)$. Получим

$$R = \sum_{q=q'}^{q''} \sum_{j=j'}^{j''} \sum_{k=0}^{N} (A_{qjk} \cos D_{qjk} + B_{qjk} \sin D_{qjk}), \tag{88}$$

где

$$D_{qjk} = qM + j\omega + k(\Omega - S),$$

$$A_{qjk} = \sum_{p=p'}^{p''} fm \frac{r_0^n}{a^{n+1}} F_{nkp}(i)\ X_q^{-n-1,j}(e) C'_{nk}, \tag{89}$$

$$B_{qjk} = \sum_{p=p'}^{p''} fm \frac{r_0^n}{a^{n+1}} F_{nkp}(i)\ X_q^{-n-1,j}(e) S'_{nk}, \tag{90}$$

$$C'_{nk} = \begin{cases} C_{nk} \text{ при } n-k \text{ – чет} \\ -S_{nk} \text{ при } n-k \text{ – нечет} \end{cases},$$

$$S'_{nk} = \begin{cases} S_{nk} \text{ при } n-k \text{ – чет} \\ C_{nk} \text{ при } n-k \text{ – нечет} \end{cases},$$

$$n = j + 2p.$$

Пределы суммирования $q', q'', j', j'', p', p''$ определяются из соотношений

$$q' = -K - N, \quad q'' = K + N,$$

$$j' = \max\{q - K, -N\}, \quad j'' = \min\{q + K, N\},$$

$$p' = -E\left(-\frac{1}{2}\max\{0, -2j, 2 - j, k - j\}\right), \quad p'' = E\left(\frac{N - j}{2}\right).$$

Здесь функция $E(...)$ означает целую часть числа, то есть ближайшее целое, не превышающее заданное.

3.3.3. Разложение возмущающей функции, обусловленной притяжением внешнего тела в спутниковой задаче

Рассмотрим возмущающую функцию, обусловленную притяжением внешнего тела, в спутниковой задаче. Для искусственных спутников Земли возмущающими телами являются Луна и Солнце. Для естественных спутников больших планет возмущающими телами будут Солнце и другие спутники.

Выберем систему прямоугольных координат с началом в центре планеты. Основную плоскость свяжем с плоскостью ее экватора. Обозначим через x, y, z координаты спутника, а через x', y', z' - координаты внешнего возмущающего тела. Возмущающая функция будет выражаться формулой

$$R = Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right),$$

где m' - масса возмущающего тела,

$$\Delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Обозначим через H угол между радиусами-векторами спутника и возмущающего тела. Тогда

$$\cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'},$$

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Разлагая функцию R в ряд по степеням отношения r/r' и отбрасывая при этом член, не зависящий от координат спутника, мы получим

$$R = \frac{Gm'}{r'} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r'} \right)^k P_k(\cos H)$$

где $P_k(\cos H)$ - полиномы Лежандра. Разложение сходится для всех $r < r'$. Здесь координаты возмущающего тела x', y', z' считаются заданными функциями времени.

Движение внешнего возмущающего тела должно быть задано какой-нибудь моделью. В аналитической теории движения спутника модель движения возмущающего тела должна описываться формулами, задающими координаты тела, как функции времени t. Эти формулы следуют из какой-либо теории движения внешнего тела и могут содержать, конечно, множество параметров с известными значениями. Выбор модели движения внешнего тела определяется компромиссом между наиболее точным ее вариантом и возможностью проинтегрировать в итоге уравнения движения спутника. В общем случае будем предполагать, что движение внешнего тела определяется его прямоугольными или сферическими координатами, как функциями времени, в выбранной системе координат.

Обозначим сферические координаты возмущающего тела через r' – расстояние, φ' – широту, λ' – долготу.

Методами теории возмущений уравнения движения спутника преобразуются к дифференциальным уравнениям относительно элементов промежуточной орбиты. Простейший вариант промежуточной орбиты – кеплеровское движение спутника. Для применения методов теории возмущений небходимо возмущающую функцию также выразить через элементы промежуточной орбиты. При таком выражении неизбежно приходится применять разложения по некоторым малым параметрам. Разложение возмущающей функции в рассматриваемой задаче сделано в работах (Брумберг, 1967; Емельянов, 1980, 1985) и некоторых других работах. Рассмотрим здесь вариант разложения, полученный в работах (Емельянов, 1980, 1985).

В принятых обозначениях разложение возмущающей функции, обусловленной притяжением внешнего тела, будет иметь вид

$$R = \frac{fm'}{a} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{k} \sum_{q=-\infty}^{\infty} (2 - \delta_{j.0}) \frac{(k-j)!}{(k+j)!} \left(\frac{a}{a'}\right)^{k+1} \times$$

$$\times F_{kjl}(i) X_{k-2l+q}^{k,k-2l}(e) (S_{kj} \sin D_{kjlq} + C_{kj} \cos D_{kjlq}), \qquad (91)$$

где

$$D_{kjlq} = (k-2l)\omega + (k-2l+q)M + j\Omega,$$

$$\delta_{j,0} = \begin{array}{l} 1, \text{если} j = 0 \\ 0, \text{если} j \neq 0 \end{array},$$

$$S_{kj} = T_{kj} \sin j\alpha', \;\; C_{kj} = T_{kj} \cos j\alpha', \;\; \text{если} \;\; k - j \;\; - \text{четное},$$

$$S_{kj} = T_{kj} \cos j\alpha', \quad C_{kj} = -T_{kj} \sin j\alpha', \quad \text{если} \quad k - j \quad \text{– нечетное},$$

$$T_{kj} = \left(\frac{a'}{r'}\right)^{k+1} P_{kj}(\sin \delta'),$$

$P_{kj}(x)$ – присоединенные функции Лежандра

$$P_{kj}(x) = (1 - x^2)^{j/2} \frac{d^j P_k(x)}{dx^j},$$

$F_{kjl}(i)$ – функции наклона,
$X^{k,k-2l}_{k-2l+q}(e)$ – функции эксцентриситета,
a' – среднее расстояние или большая полуось орбиты внешнего тела.

Рассмотренное здесь разложение может применяться для спутников планет. В работе (Емельянов, 1980) оно предназначалось для построения аналитической теории движения ИСЗ. Возмущающими телами в этом случае оказываются Луна и Солнце.

Не вдаваясь в подробности, укажем на дальнейший путь по выражению входящих сюда координат Луны и Солнца, как функций времени. Для Луны использовались ряды Хилла-Брауна, представляющие эклиптические координаты. Их можно найти в Справочном руководстве (Дубошин, 1976). Эти ряды дают выражения для эклиптических координат (расстояние, широта, долгота) Луны в виде тригонометрических рядов с постоянными коэффициентами и аргументами, линейными по времени. В работах (Емельянов, 1980, 1985) эти ряды подставлялись в формулы, связывающие эклиптические и экваториальные координаты Луны. Выполнялись громоздкие аналитические преобразования с использованием буквенной алгебры на компьютере. В результате коэффициенты C_{kj}, S_{kj}, входящие в разложение (91), выражались в виде тригонометрических рядов с постоянными коэффициентами и аргументами, линейными по времени. Это позволило выполнить аналитическое интегрирование уравнений Лгранжа относительно элементов промежуточной орбиты спутника. Построенная в работах (Емельянов, 1980, 1985) теория практически применялась для ряда реальных ИСЗ.

3.4. Определение возмущений элементов промежуточной орбиты спутника планеты

3.4.1. Общие аспекты определения возмущений элементов

Рассмотрим некоторые аспекты построения аналитической теории движения спутников методами теории возмущений.

Естественно, наибольший интерес представляют вековые возмущения элементов промежуточной орбиты спутника. По крайней мере именно с них начинают вывод всех возмущений в теории. Из вышеприведенных формул видно, что вековые возмущения, обусловленные несферичностью планеты, создаются только четными зональными гармониками разложения силовой функции, т. е. при $k = 0$ и n - четном.

Периодические возмущения элементов могут иметь периоды, равные

$$\frac{2\pi}{q\dot{M} + j\dot{\omega} + k(\dot{\Omega} - \dot{S})}. \tag{92}$$

Здесь среди аргументов в знаменателе максимальную скорость изменения имеет M. Поэтому при $q \neq 0$ возмущения имеют минимальный период и называются короткопериодическими.

3.4.2. Вековые возмущения

Возвращаясь к вековым возмущениям, их можно получить, подстановкой вековых членов в уравнения Лагранжа относительно элементов и интегрированием их сначала для возмущений первого порядка. В некоторых задачах могут оказаться существенными также вековые возмущения второго порядка.

Для спутников больших планет Солнечной системы в разложении силовой функции притяжения среди зональных гармоник максимальную величину имеет вторая гармоника ($n = 2$). Следующая по значимости оказывается четвертая зональная гармоника ($n = 4$). Вековые возмущения создаются также притяжением внешних тел – Солнца и других спутников.

При определении вековых возмущений полагаем

$$M = M_0 + n_1(t - t_0), \quad \omega = \omega_0 + n_2(t - t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + n_3(t - t_0) \ .$$

Величины a, e, i, M_0, ω_0, Ω_0 считаются произвольными постоянными интегрирования.

Если определяются только возмущения первого порядка, то коэффициенты n_1, n_2, n_3 найдутся как значения правых частей уравнений Лагранжа относительно элементов M, ω, Ω, соответственно, после подстановки в них значений постоянных a, e, i.

Чтобы показать, как получаются вековые возмущения, рассмотрим в качестве примера вывод выражения для векового возмущения первого порядка в элементе ω (угловое расстояние перицентра от восходящего узла), обусловленного второй зональной гармоникой разложения силовой функции притяжения планеты. Для этого выпишем здесь снова уравнение Лагранжа для этого элемента

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\,\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial i}\ .$$

Далее возьмем от возмущающей функции (87) только вековой член $\bar{R}_2$, обусловленный второй зональной гармоникой. Для этого члена имеем $n = 2$, $k = 0$, $n - 2p = 0$, $p = 1$ и, следовательно,

$$\bar{R}_2 = -GmJ_2\frac{r_0^2}{a^3}F_{201}X_0^{-3,0}.$$

Из Приложений П 1.1 и П 1.2 возьмем необходимые функцию наклона и функцию эксцентриситета

$$F_{201} = \frac{3}{4}\sin^2 i - \frac{1}{2}, \quad X_0^{-3,0} = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}.$$

При выводе учтем соотношение $Gm = n^2a^3$. Подставляя теперь выписанные здесь выражения в уравнение, получим

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4}J_2\frac{r_0^2}{a^2}n\frac{4-5\sin^2 i}{(1-e^2)^2}$$

Аналогично можно вывести вековые возмущения первого порядка и для остальных двух элементов M, Ω.

Чтобы различить между собой вековые члены разных порядков, обусловленные различными возмущающими факторами, представим n_1, n_2, n_3 в следующем виде:

$$n_1 = n[1 + \nu_1(J_2) + \nu_1(J_2^2) + \nu_1(J_4) + \nu_1(m')],$$

$$n_2 = n[\nu_2(J_2) + \nu_2(J_2^2) + \nu_2(J_4) + \nu_2(m')],$$
$$n_3 = n[\nu_3(J_2) + \nu_3(J_2^2) + \nu_3(J_4) + \nu_3(m')],$$

где $\nu_j(J_2)$ и $\nu_j(J_2^2)$ $(j = 1, 2, 3)$ – члены первого и второго порядков, обусловленные второй зональной гармоникой в разложении силовой функции притяжения планеты, $\nu_j(J_4)$ $(j = 1, 2, 3)$ – члены первого порядка, обусловленные четвертой зональной гармоникой, $\nu_j(m')$ $(j = 1, 2, 3)$ – члены, обусловленные притяжением внешнего тела (Солнце, другой спутник).

При таком представлении вековых возмущений будем иметь

$$\nu_1(J_2) = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \frac{2 - 3s^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad , \tag{93}$$

$$\nu_2(J_2) = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \frac{4 - 5s^2}{(1 - e^2)^2} \quad , \tag{94}$$

$$\nu_3(J_2) = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2} \quad . \tag{95}$$

Если необходимо определять вековое возмущение в средней долготе $\bar{\lambda} = M + \omega + \Omega$, нужно воспользоваться выражением для суммы

$$\nu_1(J_2) + \nu_2(J_2) + \nu_3(J_2) =$$
$$= \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \frac{4 - 5s^2 + \sqrt{1 - e^2}(2 - 3s^2) - 2\cos i}{(1 - e^2)^2} \quad . \tag{96}$$

В некоторых задачах рассматриваются вековые возмущения при нулевом эксцентриситете e и нулевом наклоне i. В этих случаях иногда просто полагают $\omega = 0$, $\Omega = 0$ и берут возмущенное значение средней аномалии M с использованием выражений для $\nu_1(...)$. Так приходят к ошибочному выводу. Правильная последовательность действий в этом случае состоит в определении векового возмущения в средней долготе с использованием выражения (96), в котором и нужно положить $e = 0$, $i = 0$.

В практических задачах небесной механики возникает необходимость определять и другие рассмотренные выше вековые возмущения. Для этого приведем здесь без вывода формулы для этих возмущений. Аналогично описанному выше порядку действий получаются выражения для $\nu_1(J_4)$, $\nu_2(J_4)$, $\nu_2(J_4)$:

$$\nu_1(J_4) = -\frac{45}{128} J_4 \left(\frac{r_0}{a}\right)^4 e^2 \frac{8 - 40s^2 + 35s^4}{(1 - e^2)^{7/2}} \quad ,$$

$$\nu_2(J_4) = -\frac{15}{128} J_4 \left(\frac{r_0}{a}\right)^4 \frac{4(16 - 62s^2 + 49s^4) + 9e^2(8 - 28s^2 + 21s^4)}{(1-e^2)^4} \quad ,$$

$$\nu_3(J_4) = \frac{15}{32} J_4 \left(\frac{r_0}{a}\right)^4 \frac{\cos i(4 - 7s^2)(2 + 3e^2)}{(1-e^2)^4} \quad .$$

Вековые возмущения второго порядка находятся более сложными действиями. Воспользуемся результатами, полученными в работе (Brouwer, Woerkom, 1950). В наших обозначениях имеем

$$\nu_1(J_2^2) = \frac{3}{128} J_2^2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^4 \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \{-15 + 16\sqrt{1-e^2} + 25(1-e^2) +$$

$$+[30 - 96\sqrt{1-e^2} - 90(1-e^2)]\cos^2 i + [105 + 144\sqrt{1-e^2} + 25(1-e^2)]\cos^4 i\} \quad ,$$

$$\nu_2(J_2^2) = \frac{3}{128} J_2^2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^4 \frac{1}{(1-e^2)^4} \{-35 + 24\sqrt{1-e^2} + 25(1-e^2) +$$

$$+[90 - 192\sqrt{1-e^2} - 126(1-e^2)]\cos^2 i +$$

$$+[385 + 360\sqrt{1-e^2} + 45(1-e^2)]\cos^4 i\} \quad ,$$

$$\nu_3(J_2^2) = \frac{3}{32} J_2^2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^4 \frac{\cos i}{(1-e^2)^4} \{-5 + 12\sqrt{1-e^2} + 9(1-e^2) -$$

$$-[35 + 36\sqrt{1-e^2} + 5(1-e^2)]\cos^2 i\} \quad ,$$

Для орбит с малыми наклонами и эксцентриситетами удобнее пользоваться другим видом этих формул

$$\nu_1(J_2^2) = \frac{3}{128} J_2^2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^4 \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} [3(40 - 80s^2 + 35s^4) +$$

$$+16(4 - 12s^2 + 9s^4)\sqrt{1-e^2} + 5(-8 + 8s^2 + 5s^4)(1-e^2)] \quad ,$$

$$\nu_2(J_2^2) = \frac{3}{128} J_2^2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^4 \frac{1}{(1-e^2)^4} [5(88 - 172s^2 + 77s^4) +$$

$$+24(8-22s^2+15s^4)\sqrt{1-e^2}+(-56+36s^2+45s^4)(1-e^2)] \ ,$$

$$\nu_3(J_2^2)=\frac{3}{32}J_2^2\left(\frac{r_0}{a}\right)^4\frac{\cos i}{(1-e^2)^4}[5(-8+7s^2)+$$

$$+12(-2+3s^2)\sqrt{1-e^2}+(4+5s^2)(1-e^2)] \ ,$$

3.4.3. Периодические возмущения

Периодические возмущения элементов промежуточной орбиты спутника, обусловленные несферичностью планеты, имеют небольшие амплитуды. Поэтому возмущенное движение спутника сжатой осесимметричной планеты можно представить, как движение вблизи некоторого эллипса, плоскость которого прецессирует при постоянном наклоне вокруг оси симметрии планеты с угловой скоростью $\dot{\Omega}$ в направлении, обратном орбитальному движению. При этом линия апсид прецессирует в плоскости орбиты с угловой скоростью $\dot{\omega}$. Направление линии апсид определяется знаком выражения $4-5\sin^2 i$. Добавок $\Delta\dot{M}$ к угловой скорости орбитального движения не изменяет характер движения.

Отметим любопытный факт в теории возмущенного движения спутника сжатой планеты. Попытаемся определить периодические возмущения элементов, порождаемые членами разложения возмущающей функции при $q=0$, $k=0$. Очевидно, что скорость прецессии линии апсид $\dot{\omega}$ имеет малую величину первого порядка малости. Соответствующий этим возмущениям период по формуле (92) получается максимальным среди периодических возмущений. Поэтому эти возмущения называются долгопериодическими. Ясно, что вторая зональная гармоника при $n=2$ с коэффициентом J_2 будет также порождать долгопериодические возмущения в элементах промежуточной орбиты спутника. Поскольку J_2 имеет первый порядок малости, следует ожидать получения долгопериодического возмущения первого порядка. При интегрировании уравнений Лагранжа для рассматриваемых членов разложения возмущающей функции в знаменатель выражения поступает величина $\dot{\omega}$, имеющая первый порядок малости. В итоге получаем возмущение нулевого порядка малости. На первый взгляд получается, что метод малого параметра дает отказ в попытках описать возмущенное движение спутника сжатой планеты. Ситуацию спасает "подарок природы". Искомое долгопериодическое

возмущение при $n = 2$, $q = 0$, $k = 0$ содержит функции эксцентриситета, равные нулю, т. е.

$$X_0^{-3,2}(e) = X_0^{-3,-2}(e) = 0$$

при всех $e < 1$. По этой причине долгопериодические возмущения, обусловленные второй зональной гармоникой разложения силовой функции притяжения планеты, просто отсутствуют. Долгопериодические возмущения, обусловленные другими гармониками разложения, будут малыми, поскольку соответствующие коэффициенты имеют второй порядок малости.

Отметим важное свойство возмущений элементов промежуточной орбиты спутника несферичной планеты. Применяя метод малого параметра, как описано выше, мы будем получать вековые, периодические, а также, возможно, смешанные возмущения. Присутствие вековых возмущений в элементах a, e, i могло бы приводить к катастрофическим последствиям – потерей планетой своих спутников. Смешанные возмущения привели бы к выводу о несостоятельности теории. Однако, как доказано в работе (Аксенов, 1966), в возмущениях элементов промежуточной орбиты спутника, обусловленных несферичностью планеты, в элементах a, e, i отсутствуют вековые, а во всех шести элементах a, e, i, M, ω, Ω отсутствуют смешанные возмущения всех порядков малости. Это можно доказать методом математической индукции, применяя его к последовательности возмущений каждого следующего порядка малости.

Определение возмущений, обусловленных притяжением других тел, а именно других спутников и Солнца, вызывает особые проблемы.

Обратимся к общему виду разложения возмущающей функции (83). Как предписано методами теории возмущения, сначала определяются вековые возмущения элементов промежуточной орбиты. Элементы ω, Ω, постоянные в кеплеровсколм движении, теперь станут линейными функциями времени с коэффициентом при времени, пропорциональным малому параметру возмущающей функции. Затем находятся периодические члены. При этом встретятся слагаемые, содержащие только ω, Ω под знаком тригонометрических функций. При интегрировании уравнений Лагранжа по времени, малый параметр окажется в знаменателе и сократится с малым параметром в возмущающей функции. Здесь при построении теории методом малого параметра возникает противоречие: малые возмущения фактически оказываются не малыми. Такие возмущения оказываются весьма долгопериодическими. Если такая теория применяется на

коротком интервале времени, то такие возмущения можно считать постоянными. Они фактически будут учтены при определении параметров движения из наблюдений. Однако на больших интервалах времени так теорию построить нельзя. Поэтому для далеких спутников больших планет приемлемх аналитических теорий движения так и не было до сих пор построено. В некоторых случаях, когда вековые возмущения от сжатия планеты превалируют, то при указанном выше интегрировании уравнений Лагранжа для периодических членов разложения возмущающей функции в знаменатель поступает не столь малая величина, как малый параметр, обусловленный притяжением другого тела. Именно при такой благоприятной ситуации в работе (Emelyanov, Samorodov, 2015) была успешно построена аналитическая теория движения главного спутника Нептуна Тритон.

Еще одна проблема учета притяжения других спутников связана с необходимостью разлагать возмущающую функцию по степеням отношения больших полуосей орбит возмущаемого и возмущающего тел. Это разложение представлено в книге (Мюррей, Дермотт, 2010). При определении возмущений, обусловленных взаимным притяжением главных спутников Юпитера, Сатурна и Урана, обычным методом теории возмущения построить аналитическую теорию не удается.

3.4.4. Постоянное возмущение большой полуоси орбиты спутника

Вековые возмущения элементов промежуточной орбиты спутника являются основными возмущениями при рассмотрении движения на интервалах времени, значительно превышающих период обращения спутника. По определению вековые возмущения получаются от вековой части разложения возмущающей функции. Легко видеть в уравнениях Лагранжа, что вековые возмущения первого порядка в элементах a – большая полуось, e – эксцентриситет, i – наклон отсутствуют.

Как было положено выше, большая полуось орбиты a связана с невозмущенным значением среднего движения n соотношением

$$n = \sqrt{\frac{Gm}{a^3}} \ . \tag{97}$$

Можно предположить, что учет вековых возмущений в элементах M, ω, Ω может дать приемлемую модель движения спутника, посколь-

ку периодические возмущения, пропорциональные малому параметру возмущающей функции, малы.

На самом деле такая модель вековых возмущений не будет наилучшей при согласовании с наблюдениями. Оказывается, что при заданном значении n с наблюдениями лучше согласуется другое значение большой полуоси. Дело в том, что комбинация короткопериодических возмущений в эксцентриситете e и средней аномалии M дает постоянный член в возмущениях центрального расстояния спутника r. Однако в теории вековых возмущений короткопериодические возмущения отброшены.

Лучшая модель вековых возмущений получится, если в качестве большой полуоси вместо a взять значение $\overline{a}$, вычисляемое по формуле

$$\overline{a} = a + \delta r \ , \tag{98}$$

где δr – постоянная часть возмущений центрального расстояния.

Определение δr произведем здесь для случая возмущений, обусловленных второй зональной гармоники разложения силовой функции притяжения планеты. Кроме того, будем предполагать, что эксцентриситет орбиты спутника e настолько мал, что в разложениях по степеням эксцентриситета можно ограничиться членом наинизшего порядка. То есть мы пренебрегаем величиной эксцентриситета по сравнению с единицей.

С принятой точностью можно записать

$$\delta r = (1 - e\cos M)\delta a - a\cos M\delta e + ea\sin M\delta M. \tag{99}$$

Возьмем разложение возмущающей функции согласно приведенным выше формулам (88), (89), (90). Оставим в разложении только члены, соответствующие второй зональной гармонике разложения силовой функции притяжения планеты. Получим

$$R = Gm\frac{r_0^2}{a^3}C_{20}\sum_{p=0}^{2}F_{2,0,p}(i)\sum_{q=-\infty}^{\infty}X_q^{-3,2-2p}(e)\cos[qM + (2-2p)\omega] \ ,$$

где C_{20} – коэффициент при второй зональной гармонике, а r_0 – средний экваториальный радиус планеты, принятый при определении C_{20}. При этом $C_{20} = -J_2$. В последней сумме окажутся только четыре короткопериодических слагаемых наинизшего порядка относительно малого эксцентриситета, которые соответствуют следующим комбинациям значений индексов суммирования

$p = 0, \quad q = \ \ 1,$
$p = 1, \quad q = \ \ 1,$
$p = 1, \quad q = -1,$
$p = 2, \quad q = -1.$
Оставляя в сумме только эти слагаемые, найдем

$$R = Gm\frac{r_0^2}{a^3}C_{20}\times$$

$$\Big[F_{200}(i)X_1^{-3,2}(e)\cos(M+2\omega) + F_{201}(i)X_1^{-3,0}(e)\cos M +$$

$$F_{201}(i)X_{-1}^{-3,0}(e)\cos(-M) + F_{202}(i)X_{-1}^{-3,-2}(e)\cos(-M-2\omega)\Big] \quad .$$

Входящие сюда функции наклона и коэффициенты Ганзена с принятой точностью имеют вид

$$F_{200}(i) = F_{202}(i) = -\frac{3}{8}\sin^2 i, \quad F_{201}(i) = \frac{3}{4}(i)\sin^2 i - \frac{1}{2} \quad ,$$

$$X_1^{-3,2}(e) = X_{-1}^{-3,-2}(e) = -\frac{1}{2}e, \quad X_1^{-3,0}(e) = X_{-1}^{-3,0}(e) = \frac{3}{2}e \ .$$

Подставляя их в предыдущее выражение для возмущающей функции, будем иметь

$$R = Gm\frac{r_0^2}{a^3}C_{20}3e\left[\left(\frac{3}{4}\sin^2 i - \frac{1}{2}\right)\cos M + \frac{1}{8}\sin^2 i \ \cos(M+2\omega)\right] \quad .$$

Теперь выпишем необходимые здесь уравнения возмущенного движения относительно кеплеровских элементов a, e и функции M:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\ \frac{\partial R}{\partial M},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{ena^2}\ \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\ \frac{\partial R}{\partial \omega},$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na}\ \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2}\ \frac{\partial R}{\partial e} \ .$$

После подстановки выведенного выше упрощенного выражения для возмущающей функции уравнения примут вид

$$\frac{da}{dt} = -Gm\frac{r_0^2}{a^3}C_{20}\frac{6e}{na}\left[\left(\frac{3}{4}\sin^2 i - \frac{1}{2}\right)\sin M + \frac{1}{8}\sin^2 i \ \sin(M+2\omega)\right],$$

$$\frac{de}{dt} = -Gm\frac{r_0^2}{a^3}C_{20}\frac{3}{na^2}\left[\left(\frac{3}{4}\sin^2 i - \frac{1}{2}\right)\sin M - \frac{1}{8}\sin^2 i\ \sin(M+2\omega)\right],$$

$$\frac{dM}{dt} = -Gm\frac{r_0^2}{a^3}C_{20}\frac{3}{ena^2}\left[\left(\frac{3}{4}\sin^2 i - \frac{1}{2}\right)\cos M + \frac{1}{8}\sin^2 i\ \cos(M+2\omega)\right].$$

Интегрирование уравнений методом малого параметра дает следующие возмущения первого порядка относительно коэффициента C_{20}:

$$\delta a = r_0^2 C_{20}\frac{6e}{a}\left[\left(\frac{3}{4}\sin^2 i - \frac{1}{2}\right)\cos M + \frac{1}{8}\sin^2 i\ \cos(M+2\omega)\right],$$

$$\delta e = r_0^2 C_{20}\frac{3}{a^2}\left[\left(\frac{3}{4}\sin^2 i - \frac{1}{2}\right)\cos M - \frac{1}{8}\sin^2 i\ \cos(M+2\omega)\right],$$

$$\delta M = -r_0^2 C_{20}\frac{3}{ea^2}\left[\left(\frac{3}{4}\sin^2 i - \frac{1}{2}\right)\sin M + \frac{1}{8}\sin^2 i\ \sin(M+2\omega)\right].$$

Подставляя эти выражения в формулу (99), найдем основные короткопериодические возмущения центрального расстояния

$$\delta r = r_0^2 C_{20}\frac{1}{a^2}6ea\left[\left(\frac{3}{4}\sin^2 i - \frac{1}{2}\right)(1 - e\cos M)\cos M + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\sin^2 i\ (1 - e\cos M)\cos(M+2\omega)\right] -$$

$$-r_0^2 C_{20}\frac{1}{a^2}3a\left[\left(\frac{3}{4}\sin^2 i - \frac{1}{2}\right)\cos^2 M - \frac{1}{8}\sin^2 i\ \cos(M+2\omega)\cos M\right] -$$

$$-r_0^2 C_{20}\frac{1}{a^2}3a\left[\left(\frac{3}{4}\sin^2 i - \frac{1}{2}\right)\sin^2 M + \frac{1}{8}\sin^2 i\ \sin(M+2\omega)\sin M\right].$$

Выделим образующуюся здесь постоянную часть возмущения наинизшего порядка относительно эксцентриситета

$$\delta r = \frac{3}{4}\frac{r_0^2}{a^2}C_{20}a(2 - 3\sin^2 i).$$

В итоге оказывается, что при заданном среднем движении спутника n возмущенное постоянное значение большой полуоси (98) следует определять по формуле

$$\overline{a} = a\left[1 + \frac{3}{4}\frac{r_0^2}{a^2}C_{20}(2 - 3\sin^2 i)\right], \tag{100}$$

где a находится из соотношения (97).

Заметим, что из наблюдений обычно определяется возмущенное значение среднего движения n_1. Тогда невозмущенное значение n находят итерациями из соотношения

$$n_1 = n[1 + \nu_1(J_2)],$$

где для $\nu_1(J_2)$ определяется по формуле (93), а невозмущенное значение большой полуоси a находится из соотношения

$$n^2 a^3 = Gm.$$

При малых наклонах и эксцентриситетах лучше всего из наблюдений определяется возмущенное среднее движение в долготе $\overline{n}$. В этом случае n находится итерациями из из соотношения

$$\overline{n} = n[1 + \nu_1(J_2) + \nu_2(J_2) + \nu_3(J_2)], \tag{101}$$

где $\nu_2(J_2)$ и $\nu_3(J_2)$ определяются по форулам (94), (95).

Рассмотрим специально случай малых эксцентриситетов и наклонов орбиты спутника сжатой планеты. Пренебрегая эксцентриситетом и наклоном в соотношениях (100) и (101), получим

$$\overline{n} = n\left(1 + 3J_2\frac{r_0^2}{a^2}\right), \tag{102}$$

$$\overline{a} = a\left(1 - \frac{3}{2}J_2\frac{r_0^2}{a^2}\right) . \tag{103}$$

В итоге учет основных возмущений, обусловленных сжатием планеты, позволяет представить спутник, обращающийся с частотой $\overline{n}$ по орбите радиуса $\overline{a}$. Такая модель наилучшим образом будет соответствовать наблюдениям. Третий закон Кеплера, модифицированный в силу возмущений, примет вид

$$\overline{a}^3\overline{n}^2 = fm\left(1 + \frac{3}{2}J_2\frac{r_0^2}{a^2}\right). \tag{104}$$

Соотношение

$$Gm = n^2 a^3$$

используется лля определения массы планеты по наблюдениям спутников. Как следует из формулы (104) в случае сжатой планеты из наблюдений фактически получается значение правой части этой формулы. Для учета сжатия планеты в этом случае приходится либо

принимать какие-нибудь гипотезы относительно величины динамического сжатия, либо пытаться определить коэффициент J_2 из наблюдений.

3.4.5. Модель прецессирующего эллипса

Для изучения динамики спутника планеты строится та или иная модель движения на основе наблюдений. Во многих случаях важно увидеть основные свойства движения, пренебрегая малыми возмущениями. Иногда требуется приближенная эфемерида. Для некоторых спутников точность наблюдений оказывается невысокой, и простейшая модель движения может дать хорошее согласование с результатами наблюдений. Во всех этих случаях пригодна некоторая приближенная модель движения, называемая прецессирующим эллипсом. В этой модели спутник движется по некоторому эллипсу, плоскость которого прецессирует с постоянной угловой скоростью при постоянном наклоне к некоторой основной неподвижной плоскости. Линия апсид эллипса вращается в плоскости орбиты с постоянной угловой скоростью. Движение спутника по прецессирующему эллипсу происходит по законам задачи Кеплера, однако постоянное среднее движение отличается от того, которое получается из большой полуоси орбиты согласно известному соотношению.

Из предыдущих разделов ясно, что такая модель может быть создана в процессе построения аналитической теории движения путем учета вековых возмущений, обусловленных основными возмущающими факторами. Получается приближенное решение точных дифференциальных уравнений движения шестого порядка. Поэтому решение содержит шесть произвольных постоянных интегрирования.

На практике определение вековых возмущений бывает затруднительным, неточным или вообще невозможным из-за того, что параметры, характеризующих возмущающие факторы, неточны или неизвестны. В таких случаях поступают следующим образом. Изменения функции M и элементов ω и Ω задают линейными функциями времени

$$M = M_0 + \bar{n}(t - t_0), \omega = \omega_0 + \dot{\omega}(t - t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0), \quad (105)$$

где M_0, $\bar{n}$, ω_0, $\dot{\omega}$, Ω_0, $\dot{\Omega}$ – постоянные. Элементы кеплеровой орбиты спутника e, i тоже считаются постоянными. Большая полуось, непосредственно входящая в формулы кеплерова движения, задается

независимо от параметра $\bar{n}$. Поскольку эти параметры уже не будут связаны законами кеплерова движения, обозначим большую полуось через $\bar{a}$.

Для определения координат используются формулы кеплерова движения. Средняя аномалия M и элементы ω, Ω вычисляются по формулам (105), параметры $\bar{a}$, e, i независимо подставляются в формулы кеплерова движения.

В итоге девять постоянных параметров $\bar{a}$, $\bar{n}$, e, i, M_0, ω_0, $\dot{\omega}$, Ω_0, $\dot{\Omega}$, формулы (105) и формулы кеплерова движения полностью описывают модель движения. Основная плоскость, относительно которой отсчитываются наклон i, долгота восходящего узла Ω и угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, задается так, чтобы в этой системе координат изменения наклона, получаемые из наблюдений, были минимальны.

Все девять параметров уточняются из наблюдений так, чтобы согласование модели с наблюдениями было наилучшим. В такой модели учитываются все вековые возмущения, вызванные любыми возможными причинами.

Модель прецессирующего эллипса используется также для приближенной аппроксимации более точной модели движения спутника, основанной на аналитической теории, или построенной методом численного интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Пример использования модели прецессирующего эллипса для четырех близких спутников Юпитера описан в работе (Емельянов, 2015). Параметры модели были определены по эфемеридам спутников, вычисленным на основе двух различных моделей, каждая из которых в свою очередь была построена на основе наблюдений путем численного интегрирования уравнений движения.

3.4.6. Особые свойства возмущенного движения спутника при малых эксцентриситетах орбиты

Невозмущенная кеплерова орбита может быть вырождена в круговую орбиту, а наклон в невозмущенном движении определен только выбором системы прямоугольных координат. Естественным параметром, описывающим вырождение орбиты в круговую, является эксцентриситет. Для круговой орбиты он просто равен нулю. Можно было бы ожидать, что и для возмущенного движения, когда эксцентриситет изменяется во времени, его близость или равенство нулю должны

приводить к вырождению орбиты в круговую. На самом деле это совсем не так.

Первое упоминание о существовании кругового возмущенного движения с ненулевым эксцентриситетом мы обнаружили в работе Белецкого (1962). В этой работе указано частное решение уравнений относительно элементов кеплерова движения, при котором круговая орбита в оскулирующих элементах описывается эллипсом, вращающимся с угловой скоростью обращения спутника вокруг центрального тела, причем спутник всегда находится в перицентре этого эллипса. Впрочем, в работе В.В. Белецкого замечено, что данный пример принадлежит Т.М. Энееву.

Широко применяемая на практике модель прецессирующего эллипса с произвольным постоянным и сколь угодно малым эксцентриситетом находится в противоречии с примером, приведенным в работе В.В. Белецкого (1962). Интересно выяснить, как соотносятся между собой эти две модели. Важно иметь строгое доказательство существования решения для возмущенного движения с ненулевым эксцентриситетом. Было бы полезно найти достаточно простое решение, адекватно описывающее возмущенное движение при малых эксцентриситетах.

Такое исследование было выполнено в работе (Емельянов, 2015). Здесь приведем некоторые выкладки и выводы из этой работы.

Построение модели кругового возмущенного движения.

Рассмотрим движение материальной точки в центральном поле притяжения с силовой функцией вида

$$U = \frac{\mu}{r}[1 + f(r)],$$

где r – центральное расстояние, μ – гравитационный параметр, а $f(r)$ – некоторая достаточно произвольная безразмерная функция.

Разложим силовую функцию на два слагаемых следующим образом:

$$U = V + R, \quad V = \frac{\mu}{r}, \quad R = \frac{\mu}{r} f(r),$$

где V – силовая функция задачи Кеплера, а R – возмущающая функция. Движение при $R = 0$ называют невозмущенным.

Покажем, что при некотором ограничении на функцию $f(r)$ уравнения с силовой функцией U будут иметь частное решение, соответствующее круговому движению. Рассмотрим подробнее возмущенные движения материальной точки, близкие к круговому.

Попытаемся построить приближенные аналитические модели движения реальных спутников планет при малых эксцентриситетах орбит. Для примера возьмем четыре близких спутника Юпитера.

Поскольку силовая функция зависит только от расстояния, траектория движения лежит в некоторой неизменной плоскости, в которой зададим невращающуюся систему координат Oxy с началом O в притягивающем центре. Тогда дифференциальные уравнения движения можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}[1 + F(r)], \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}[1 + F(r)], \tag{106}$$

где безразмерная функция $F(r)$ задается соотношением

$$F(r) = f(r) - rf'(r),$$

а штрих здесь означает первую производную.

Центростремительное ускорение, которое испытывает материальная точка, определяется выражением

$$\frac{\mu x}{r^2}[1 + F(r)].$$

В области, в которой выполняется условие $F(r) < -1$, существуют решения дифференциальных уравнений движения, соответствующие круговым движениям точки вокруг притягивающего центра на любом расстоянии r с линейной скоростью Vc, зависящей от r. Приравнивая центростремительное ускорение центробежному, получим

$$V_c^2 = \frac{\mu}{r}[1 + F(r)]. \tag{107}$$

Не нарушая общности задачи, будем предполагать, что в начальный момент времени t_0 точка находится на оси x. Тогда частное решение дифференциальных уравнений для кругового движения в координатах будет иметь вид

$$x = r\cos n_c(t - t_0), \quad y = r\sin n_c(t - t_0) \tag{108}$$

где частота обращения точки n_c определится формулой

$$n_c = \frac{V_c}{r}.$$

Это будет однопараметрическое частное решение. В качестве параметра решения можно взять r или n_c.

Поставим задачу найти элементы кеплеровой оскулирующей орбиты, как функции времени, для кругового движения, рассматривая уравнения (106), как уравнения возмущенного кеплерового движения. Для этого нужно сделать замену переменных искомых функций x, y на элементы кеплеровой оскулирующей орбиты, как функции времени, и подставить в формулы замены переменных вместо x, y частное решение (108). Кроме того, желательно рассмотреть уравнения движения, выраженные в кеплеровых элементах, то есть уравнения Лагранжа, и проверить, удовлетворяют ли полученные выражения для кеплеровых элементов этим уравнениям. Эта проверка сделана в работе (Емельянов, 2015).

Переход к элементам кеплеровой орбиты.

Поскольку мы рассматриваем здесь плоское движение, нам достаточно использовать для описания движения четыре кеплеровых элемента: a – большая полуось, размерность единица длины; e – эксцентриситет, безразмерный; M – средняя аномалия, рад; ω – угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.

Наряду с большой полуосью a в качестве параметра орбиты будем рассматривать также параметр n, называемый средним движением и связанный с a законом

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

Размерность среднего движения n – радианы в единицу времени.

Связь прямоугольных координат и компонент скорости с элементами кеплеровой орбиты можно найти в книгах (Субботин, 1968; Дубошин, 1975).

В кеплеровом движении скорость V и расстояние r связаны соотношением

$$V^2 = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right], \tag{109}$$

где a – постоянная.

В случае кругового кеплерова движения при $e = 0$ имеем соотношение

$$V_c^2 = \frac{\mu}{r},$$

которое отличается от (107). Поэтому оказывается, что частное решение уравнений возмущенного движения не может быть представлено

элементами кеплеровой оскулирующей орбиты с постоянным нулевым эксцентриситетом. В зависимости от знака $F(r)$ имеется возможность представить возмущенное круговое движение одним из двух способов. Если $F(r) > 0$, то, положим

$$M = 0, \quad r = a(1-e), \quad \omega = n_c(t - t_0),$$

а элементы a и e будем считать постоянными. Сравнивая (107) и (109), найдем

$$e = F(r).$$

Тогда оказывается, что точка всегда находится в перицентре орбиты, а линия апсид вращается с угловой скоростью n_c. Истинная v и эксцентрическая E аномалии постоянны и равны нулю. Элемент a найдется по формуле

$$a = \frac{r}{1-e}.$$

Частота обращения точки вокруг притягивающего центра n_c выразится через элементы кеплеровой оскулирующей орбиты формулой

$$n_c = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{\sqrt{1-e}}{(1-e)^{3/2}}. \tag{110}$$

В случае $F(r) < 0$ следует положить

$$M = \pi, \quad r = a(1+e),$$

где

$$e = -F(r).$$

В этом случае оказывается, что точка всегда находится в апоцентре орбиты, а линия апсид вращается с угловой скоростью n_c. Истинная и эксцентрическая аномалии v и E постоянны и равны π. Большая полуось орбиты a и скорость вращения линии апсид найдутся по формулам

$$a = \frac{r}{1+e}, \quad n_c = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{\sqrt{1-e}}{(1+e)^{3/2}}.$$

Здесь мы нашли выражения для элементов оскулирующей кеплеровой орбиты, как функций времени, для частных решений уравнений движения, соответствующих круговым орбитам точки вокруг притягивающего центра. Формулы получены при произвольной функции $f(r)$ при условии $F(r) > -1$. Рассмотрим частный случай возмущенного движения.

Пусть движение точки происходит в плоскости экватора осесимметричной планеты под действием ее притяжения. В разложении силовой функции притяжения планеты в ряд по сферическим функциям возьмем только главный член и вторую зональную гармонику. Для больших планет таким образом учитывается сжатие планеты в движении ее спутника. Тогда имеем

$$R = \frac{1}{2}\mu J_2 r_0^2 \frac{1}{r^2}, \quad f(r) = \frac{1}{2} J_2 r_0^2 \frac{1}{r^2}, \quad F(r) = \frac{3}{2} J_2 r_0^2 \frac{1}{r^2}.$$

Здесь всегда $F(r) > 0$, и круговое движение на любом заданном расстоянии r представлено кеплеровой оскулирующей орбитой с вращающейся линией апсид, а точка находится постоянно в перицентре орбиты. Эксцентриситет и большая полуось такой орбиты определяются по формулам

$$e = \frac{3}{2} J_2 r_0^2 \frac{1}{r^2}, \quad a = \frac{r}{1-e}, \tag{111}$$

а скорость вращения линии апсид находится по формуле (110).

Оскулирующие кеплеровы элементы орбиты спутника в возмущенном движении при малых эксцентриситетах.

В часто используемой модели прецессирующего эллипса при любых значениях эксцентриситета орбиты, включая равное нулю, средняя аномалия изменяется линейно по времени. Это находится в противоречии с выводом о том, что возмущенное движение по круговой орбите возможно только при некотором ненулевом значении эксцентриситета и средней аномалии постоянной и равной нулю. Интересно было бы выяснить, как изменяются элементы кеплеровой оскулирующей орбиты при движении спутника под действием притяжения сжатой планеты. Поскольку точного аналитического решения этой задачи не найдено, анализ можно выполнить только по результатам численного интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Рассмотрим снова движение спутника осесимметричной планеты в плоскости экватора. Возьмем уравнения движения (106) с силовой функцией

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\mu J_2 \frac{r_0^2}{r^3}.$$

Здесь из разложения силовой функции притяжения планеты взяты основной член и вторая зональная гармоника.

Автором было выполнено численное интегрирование этих уравнений и найдены значения координат x, y и компоненты скорости спутника $\dot{x}$, $\dot{y}$ для ряда моментов времени с постоянным шагом. Затем,

независимо от возможных приближенных аналитических решений в полученном точном решении сделаем замену переменных x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$ на переменные $a(t)$, $e(t)$, $M(t)$, $\omega(t)$ по формулам кеплерова движения. Посмотрим, как изменяются эти переменные во времени при различных начальных условиях.

Такие вычисления были сделаны, приводим здесь полученные результаты. Для нашего примера гравитационный параметр μ и начальные условия были взяты приблизительно соответствующие близкому спутнику Юпитера Адрастея. Для Юпитера $\mu = 126712763.92$ км^{3}с$^{-2}$, $J_2 = 0.014736$, $r_0 = 71398.0$ км. Начальные условия мы взяли так, что в начальный момент времени координата y равна нулю, а вектор начальной скорости перпендикулярен оси x. Значение начального расстояния x_0, примерно соответствующее спутнику Юпитера Адрастея, было взято равным 127748.2879217545 км. Вычисления сделаны для ряда значений начальной скорости V. В первом варианте значение скорости было взято соответствующим круговому движению, $V = V_c$ (107). В следующих вариантах вычисления были сделаны для $V > V_c$. Интервал времени интегрирования соответствовал двум оборотам спутника вокруг планеты.

Результаты изменения во времени оскулирующих элементов M, ω представлены на рис. 7-10. Сплошной тонкой линией показаны значения средней аномалии M, штриховой линией – значения ω, а жирной линией – значения суммы $M + \omega$, то есть долготы в орбите. На рис. 7 видно, что при $V = V_c$ (круговое движение) средняя аномалия M остается равной нулю, а график ω сливается с графиком долготы $M+\omega$ и показывает линейное вращение линии апсид с угловой скоростью обращения спутника вокруг планеты. При следующем большем значении начальной скорости на рис. 8 видно, что на изменения M и ω накладываются сильные колебания в противофазе друг другу, а долгота по-прежнему линейно возрастает во времени. Для следующего значения начальной скорости на рис. 9 наступает критический характер изменения элементов. Колебания элементов M и ω имеют амплитуду до половины оборота. При этом долгота по-прежнему линейно возрастает во времени. Для следующего значения начальной скорости графики на рис. 10 показывают, что M и ω обменялись характерами изменения. Теперь в средней аномалии M на линейное возрастание во времени накладываются колебания, а ω имеет периодическое изменение с небольшим линейным ходом.

Чтобы различать два качественных характера изменения сред-

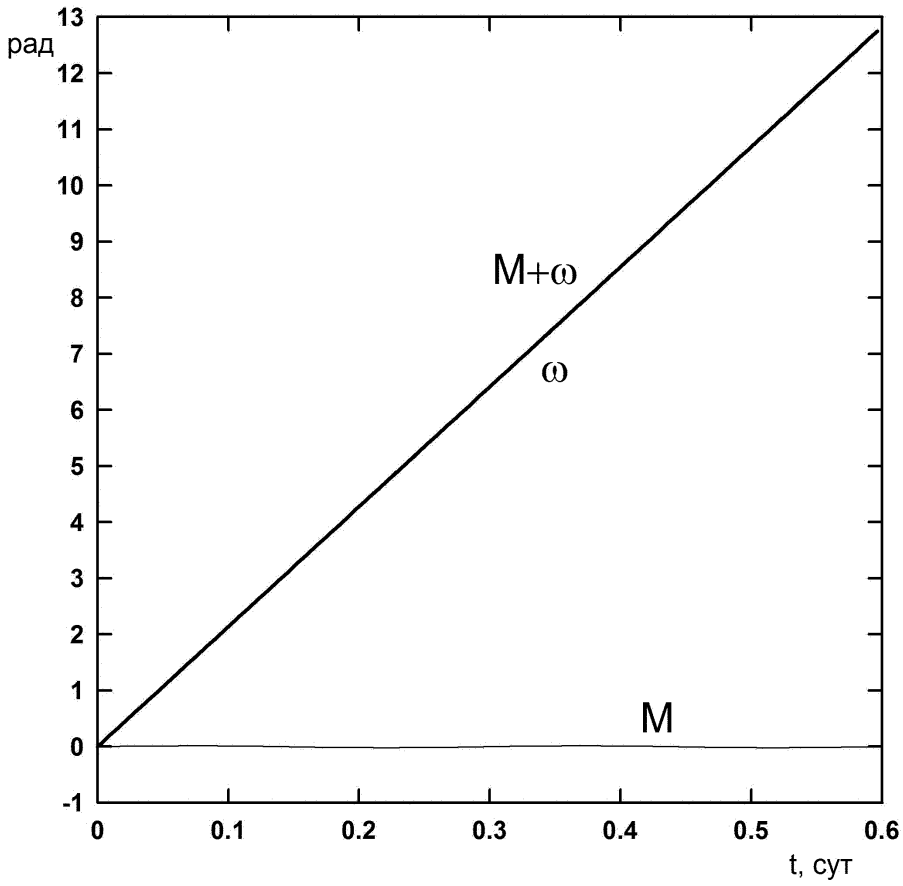

Рис. 7: Изменение средней аномалии M, углового расстояния перицентра от узла орбиты ω и $M+\omega$ для начальной скорости кругового движения. Средняя аномалия равна нулю. Линия апсид вращается с угловой скоростью обращения точки вокруг центрального тела.

ней аномалии, мы будем называть монотонное возрастание средней аномалии *циркуляционным изменением.* Случаи, когда средняя аномалия испытывает колебания относительно нулевого значения, будем называть *либрационным изменением.*

Из рассмотренных примеров видно, что существует некоторое *сепаратрисное значение* начальной скорости $V = V_s$, разделяющее два различных по характеру семейства решений.

Более детально случай возмущенного движения спутника при малых эксцентриситетах рассмотрен в работе (Емельянов, 2015).

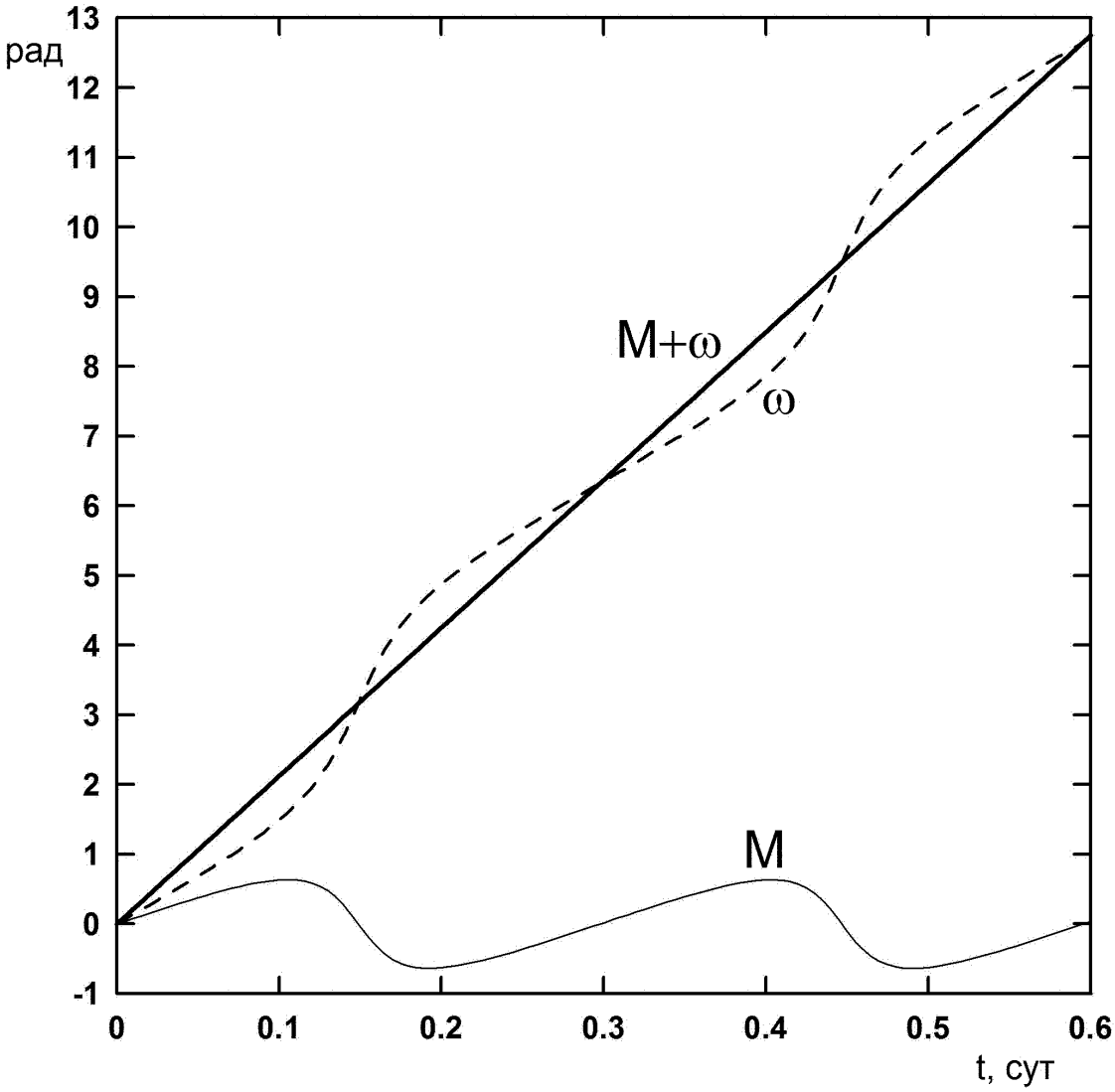

Рис. 8: Изменение средней аномалии M, углового расстояния перицентра от узла орбиты ω и $M + \omega$ для начальной скорости, незначительно превышающей скорость кругового движения. Средняя аномалия колеблется относительно нулевого значения с периодом, равным периоду обращения.

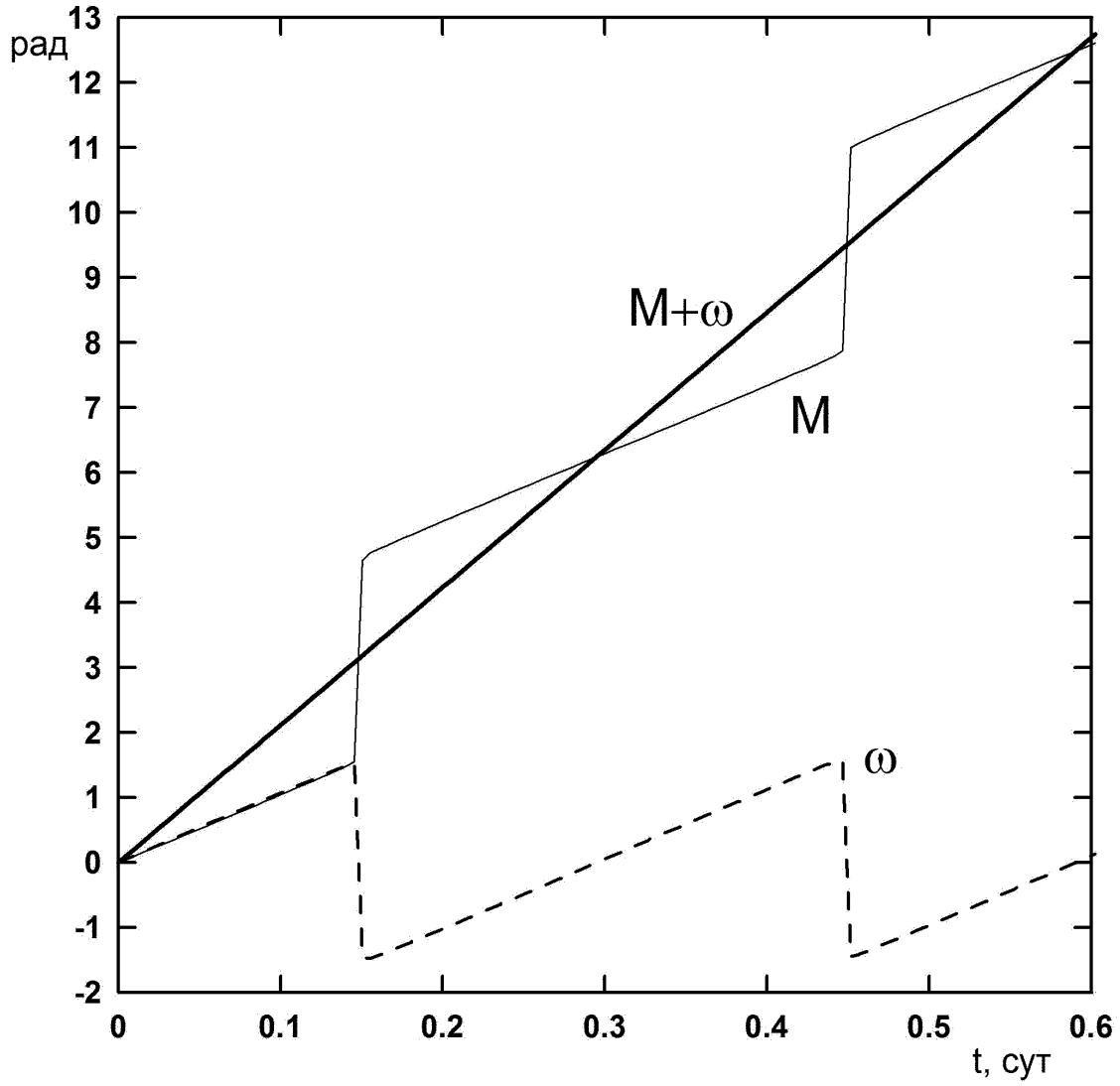

Рис. 9: Критический характер изменения средней аномалии M, углового расстояния перицентра от узла орбиты ω и $M+\omega$ при некотором частном значении начальной скорости движения. Средняя аномалия и угловое расстояние перицентра от узла испытывают колебания в противофазе с большой амплитудой.

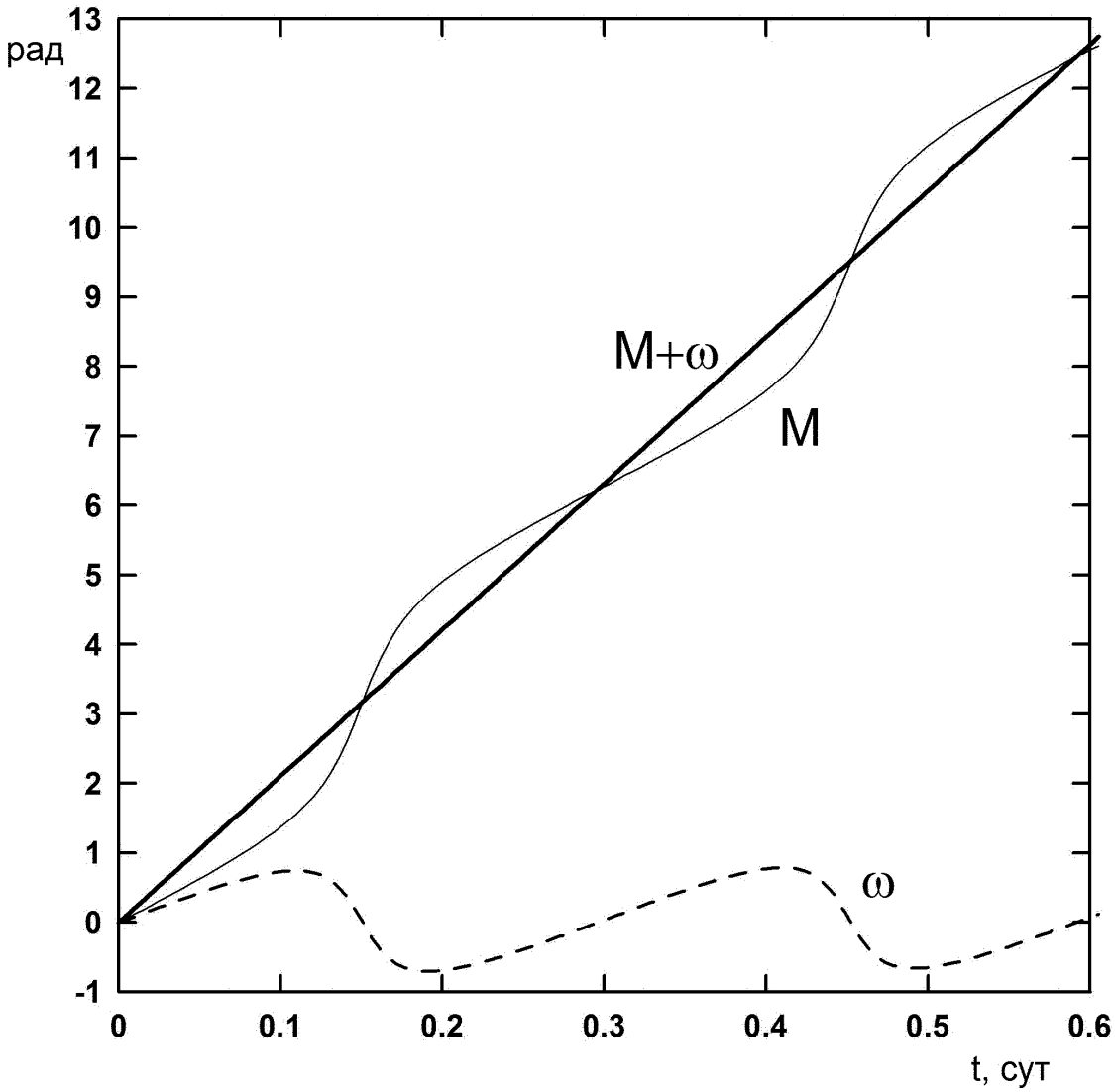

Рис. 10: Изменения средней аномалии M, углового расстояния перицентра от узла орбиты ω и $M+\omega$ при начальной скорости, превышающей критическое значение. Средняя аномалия монотонно возрастает со временем.

Глава 4. Решение дифференциальных уравнений движения небесных тел. Методы численного интегрирования

4.1. Общий подход к решению дифференциальных уравнений движения небесных тел методами численного интегрирования

Процесс изучения небесных тел состоит в построении модели их движения. Модель является ядром всех научных изысканий. Она постоянно уточняется на основе все новых наблюдений. Открыты законы, согласно которым взаимодействуют планеты и спутники. Эти законы выражаются в форме дифференциальных уравнений относительно координат центров масс тел и относительно углов их вращения.

Использование модели заключается в предвычислении координат и угловых положений тел на любой заданный момент времени. Таким моментом может быть либо момент очередного наблюдения небесного тела, либо момент встречи космического аппарата с небесным телом, либо момент проведения наблюдений с искусственного космического объекта.

Предвычисление координат и углов вращения тела на заданный момент времени может выполняться методами численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Преимущества численных методов по сравнению с аналитическими заключаются в относительной простоте их реализации в виде алгоритмов и вычислительных программ для компьютеров. Во многих случаях численные методы обладают большей точностью предвычисления координат небесных тел. Указанные преимущества обычно достигаются при высокой требуемой точности вычислений. Недостатками методов численного решения уравнений движения являются большие затраты времени вычислений, быстрый рост погрешности решения с ростом интервала предвычисления движения и невозможность достоверной оценки точности решения. При заданных уравнениях движения, начальных значениях координат тел и заданном моменте предвычисления точность решения оказывается ограниченной, сколь совершенным бы ни был применяемый численный метод решения.

Численные методы незаменимы в задачах, для которых невозможно получить аналитическое решение. Методы численного интегрирования служат также для проверки правильности и оценки точности найденного аналитического решения.

Основной подход в методах численного интегрирования заключается в следующем. Задаем на некоторый начальный момент времени координаты и компоненты скорости небесного тела. Выбираем некоторый момент времени, очень близкий к начальному, и приближенным методом вычисляем координаты и скорость на этот новый момент времени. Способов, как это сделать существует много. Главное их свойство – все они приближенные, но чем ближе заданный момент к начальному, тем точнее получается результат. После того, как координаты и скорость найдены на новый момент времени, близкий к начальному, этот момент принимается за начальный и процесс повторяется. Так шаг за шагом по времени добираемся до того момента времени, на который нам и нужно было знать положение и скорость небесного тела. Получили искомый результат, однако для этого пришлось вычислить координаты и скорость на множество промежуточных моментов.

Чем точнее нужен результат, тем меньший шаг по времени приходится брать, но тем больше нужно сделать шагов вычислений, чтобы добраться до нужного момента времени. Так что время вычислений при численном интегрировании дифференциальных уравнений движения пропорционально числу шагов, а число шагов тем больше, чем лучшая нам нужна точность. Уменьшая величину шага до некоторой степени можно улучшить точность. Однако наступает такая ситуация, когда число шагов столь велико, что накопление ошибок при вычислениях из-за округления чисел при арифметических операциях начинает превалировать над влиянием ошибок получения решения на каждом одном шаге. В итоге мы имеем предельную точность, которая получается при некотором оптимальном шаге. Улучшить эту предельную точность можно только увеличивая точность представления чисел в компьютере, уменьшая тем самым ошибки округления. Некоторого непринципиального улучшения точности можно добиться усовершенствованием методов вычислений на одном шаге.

Принципиальным преимуществом методов численного интегрирования уравнений движения является то, что для их реализации нужно знать только выражения правых частей уравнений. Принципиальный недостаток этих методов заключается в весьма больших затратах времени вычислений. Всякий раз, когда нужно получать новое решение, нужно запускать процесс численного интегрирования.

Одним из недостатков методов численного интегрирования является то, что нужно как-то хранить все значения координат на про-

межуточные моменты времени. Эти моменты фиксируются при численном интегрировании. Их обычно чрезвычайно много. Если потом нужно найти координаты на какой-то момент, который не совпадает ни с одним из тех, что был в процессе численного интегрирования, придется что-то придумывать. Как обычно хранятся результаты численного интегрирования и как они используются рассмотрено ниже в специальном разделе.

4.2. Общие свойства методов численного интегрирования уравнений движения

Постановка задачи о решении уравнений движения методами численного интегрирования распадается на два независимых этапа. Во-первых, составляются уравнения движения. Во-вторых, разрабатывается новый или выбирается один из известных методов численного интегрирования. Чтобы связать эти два этапа, необходимо принять некоторый стандартный вид уравнений движения.

Рассматривается одно небесное тело или система тел при взаимном гравитационном взаимодействии. В уравнениях движения может учитываться влияние многих других факторов. В частности, в рассмотрение может включаться притяжение других тел с известными законами движения, протяженность гравитирующих тел, сопротивление среды.

Уравнения движения представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого или второго порядка относительно координат небесного тела. Обычно рассматриваются прямоугольная система координат. Если составляется система уравнений второго порядка, ее всегда можно свести к системе уравнений первого порядка. Это приходится делать, в частности, если действующие силы зависят от скорости движения небесного тела.

Итак, в задачах численного интегрирования уравнений движения небесных тел примем следующую наиболее общую форму дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t) \quad (i = 1, 2, 3, ..., n), \tag{112}$$

где $x_i(t)$ являются искомыми функциями. Обязательным условием является задание функций $f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ таким образом, чтобы их можно было вычислять при любых заданных значениях аргумен-

тов. Эти функции могут содержать также постоянные параметры, значения которых заданы.

К настоящему времени разработано огромное множество методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Они различны по своей эффективности и области приложений. Хороший обзор методов численного интегрирования уравнений движения, применяемых в небесной механике, дан в работе (Бодовицына 1984). Существует даже теория методов численного решения уравнений, обобщающая множество таких методов и дающая путь разработки наиболее оптимальных схем интегрирования (Butcher, 1963, 1964а, 1964б; Холл, Уатт, 1979).

Разнообразные методы численного интегрирования при их применении обладают некоторыми общими свойствами. Эти свойства необходимо знать при решении конкретных задач для достижения наилучшего результата и эффективности исследований.

Основную идею методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений легко объяснить на простейшем из них – методе ломаных линий. При этом можно ограничиться рассмотрением одного дифференциального уравнения общего вида.

Допустим, что мы имеет одно дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t),$$

в котором t есть независимая переменная – время. Требуется найти функцию $x(t)$, удовлетворяющую этому дифференциальному уравнению и начальному условию:

$$x(t_0) = x_0,$$

где t_0 – начальный момент времени, а x_0 – заданна константа.

Для начала важно понять то, что никакой метод численного интегрирования не позволит найти саму функцию $x(t)$, а только ряд ее значений на конечное число моментов времени. Рассмотрим некоторый момент времени t_1, недалеко отстоящий от момента t_0. Разность $t_1 - t_0$ обозначим через h, то есть

$$h = t_1 - t_0.$$

Точное значение $x(t_1)$ нам неизвестно, но если величина h достаточно мала, а функция $f(x,t)$ - непрерывна, то приближенное значение x в

момент времени t_1 можно определить по формуле

$$x_1 = x_0 + f(x_0, t_0)\ h.$$

Очевидно, что отличие x_1 от точного значения $x(t_1)$ будет тем меньше, чем меньше h . Погрешность обусловлена возможной нелинейностью функции $x(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$.

Далее мы можем определить приближенное значение функции $x(t)$ на момент времени $t_2 = t_1 + h$ по формуле

$$x_2 = x_1 + f(x_1, t_1)\ h.$$

Погрешность найденного значения искомой функции в момент t_2 будет складываться из погрешности x_1 и погрешности, вызванной нелинейностью функции $x(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$.

Теперь алгоритм определения значений искомой функции на последовательные моменты $t_i = t_{i-1}$ $(i = 1, 2, ...)$ можно записать так:

$$x_i = x_{i-1} + f(x_{i-1}, t_{i-1})\ h. \tag{113}$$

В этом алгоритме величину h называют постоянным шагом численного интегрирования. Ошибка значения x_i будет содержать сумму ошибок, совершенных на всех предыдущих шагах интегрирования. Эти ошибки могут иметь различные величины и знаки, но при достаточно произвольной функции $f(x, t)$ суммарная ошибка, как правило, возрастает. Очевидно, что возрастание суммарной ошибки происходит с нарастанием числа выполненных шагов интегрирования. Чем больше шагов при постоянной величине шага, тем больше ошибка такого решения.

Любая задача численного интегрирования уравнений движения небесного тела обычно ставится так, что в конечном итоге требуется найти координаты тела на заданный конечный момент времени t_k. Если шаг интегрирования уже выбран, то можно подсчитать количество шагов k, необходимое для решения задачи. Очевидно, что

$$k = E\left(\frac{t_k - t_0}{h}\right) + 1.$$

Метод ломаных относится к группе так называемых одношаговых методов численного интегрирования. Кроме них существуют еще экстраполяционные и многошаговые методы (Бодовицына, 1984). Все эти методы имеют некоторые общие свойства. При их применении

возникают общие проблемы. Одна из проблем – это выбор шага интегрирования. На первый взгляд ясно, что если шаг интегрирования уменьшить, то ошибка, допускаемая на каждом шаге, уменьшится, а следовательно повысится точность решения уравнений движения небесного тела. При заданном интервале времени предвычисления движения, то есть интервала интегрирования $t_k - t_0$, количество выполняемых шагов возрастет, что вызовет увеличение затрат вычислительного времени, то есть времени работы компьютера. В некоторых случаях максимальная точность решения определяется только допустимыми затратами времени вычислений.

На первый взгляд кажется, что если увеличение вычислительных затрат еще допустимо, то улучшения точности всегда можно достигнуть уменьшением шага интегрирования. Можно провести такой эксперимент. Задать конкретные уравнения движения, численное решение которых можно проверить. Это могут быть уравнения, имеющие точное аналитическое решение, или уравнения, допускающие известное частное решение. Далее можно задать интервал интегрирования $[t_0, t_k]$, взять какой-нибудь метод численного интегрирования и решать задачу многократно, уменьшая каждый раз шаг интегрирования. Изучая зависимость точности решения от шага интегрирования мы увидим, что сначала при уменьшении шага погрешность численного решения уменьшается. Но при некоторых весьма малых значениях шага интегрирования точность начнет ухудшаться, сколь бы мы ни уменьшали шаг. Что же происходит ?

Дело в том, что все вычисления делаются всегда с фиксированной точностью выполнения простых арифметических операций. Ее можно улучшить с помощью специальных способов отображения чисел в памяти компьютера и применением соответствующих алгоритмов арифметических действий. Это приведет к еще большим вычислительным затратам. Важно то, что в любом компьютере максимальная точность представления чисел и точность выполнения арифметических операций фиксирована. При каждой операции совершается некоторая ошибка. Ее называют ошибкой округления чисел. При последовательном выполнении арифметических действий ошибки округления накапливаются.

Чем меньше шаг интегрирования, тем меньше погрешность формулы (113), меньше ошибка, совершаемая на каждом шаге, и меньше ее накопление на конечный момент времени. С другой стороны, число шагов растет, и ошибки округления накапливаются. Таким об-

разом существует некоторый оптимальный шаг интегрирования, при котором погрешность вычисления значения искомой функции на конечный момент времени минимальна. Для выбранного метода интегрирования и заданной конкретной задачи точность, лучшая, чем при оптимальном шаге, недостижима. Путем совершенствования методов численного интегрирования можно добиться некоторого улучшения точности. Однако современные методы уже столь совершенны, что дальнейшее повышение точности почти не происходит. На практике вычисления с оптимальным шагом, как правило, не производят – слишком велики при этом вычислительные затраты.

Следующую проблему вызывает тот факт, что степень нелинейности искомой функции может быть различна на разных участках интервала $[t_0, t_k]$. При заданном постоянном шаге интегрирования суммарная ошибка порождается, в основном, на тех участках, где нелинейность максимальна. Нет смысла выбирать такой же малый шаг на других участках и тратить напрасно время на вычисления с излишней точностью. Оптимально было бы выбирать на каждом участке свой шаг интегрирования в зависимости от степени нелинейности искомой функции. В совершенных методах численного интегрирования поведение решения анализируется на предыдущем шаге, чтобы экономно выбрать следующий шаг. Для этого, конечно, перед началом интегрирования задают некоторый параметр, контролирующий точность вычислений на каждом шаге. Этот параметр называют заданной точностью интегрирования, однако эта точность далеко не совпадает с точностью получения решения на конечный момент времени t_k. Эти две точности обычно пропорциональны при одной и той же формулировке задачи, то есть при заданных уравнениях движения, начальных условиях и конечном моменте времени. Для анализа поведения решения используют различные приемы и формулы. Один из них состоит в том, что каждый шаг делают дважды: сначала один шаг величиной h, затем два шага, величиной $h/2$. Разницу двух результатов сравнивают с заданной константой – точностью вычислений. Если разность оказывается больше, то шаг уменьшают вдвое. Если же эта разность в десять или более раз меньше, чем заданная точность, то шаг увеличивают. В наиболее совершенных алгоритмах численного интегрирования используют более сложные приемы. К сожалению, на практике не всегда автоматический выбор шага может быть эффективен. В некоторых случаях все же используют постоянный шаг интегрирования.

Наибольшую проблему в практике численного интегрирования уравнений движения небесных тел представляет оценка точности получаемого решения. Оказывается, не существует строгих формул или условий, позволяющих выполнить такие оценки. На деле используют некоторые приемы, которые все же нельзя считать вполне надежными. Один из них – это интегрирование "вперед-назад". То есть после получения значения искомой функции на конечный момент времени это значение принимают за исходное и выполняют интегрирование с отрицательным шагом до начального момента. В конце сравнивают полученный результат с начальным условием. Полученную разность значений и считают точностью выполненного интегрирования. Иногда такие оценки получаются удовлетворительными, но чаще всего реальная точность оказывается хуже. Существуют и другие методы оценки точности численного интегрирования, но все они на самом деле ненадежны.

4.3. Метод Рунге-Кутта интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод ломаных, изложенный в предыдущем параграфе, почти не применяется на практике. Существуют более точные методы. Одним из них является метод Рунге-Кутта (Бодовицына, 1984; Дубошин, 1976). Этот метод далеко не самый совершенный, однако в свое время он широко применялся в астрономических задачах. Формулы метода Рунге-Кутта достаточно просты (Дубошин, 1976). Их можно легко запрограммировать на любом подходящем языке программирования. В задачах, где не требуется получать предельно высокую точность численного решения уравнений движения, метод Рунге-Кутта может быть эффективно применен.

Опишем этот метод и формулы, по которым выполняются вычисления. Рассмотрим задачу численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (112). с начальными условиями $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}, ..., x_n = x_n^{(0)}$ при $t = t_0$. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ дл удобства будем называть координатами, а независимую переменную t – временем.

Формулы Рунге-Кутта, приводимые ниже, позволяют определить координаты на момент времени $t_{k+1} = t_k + h$, если они известны на момент времени t_k. Формулы составлены на основе метода интерполяции полиномами относительно шага интегрирования h, в которых

пренебрегают членами некоторого порядка малости относительно величины шага. В данном случае сохраняются все члены до 4-го порядка включительно относительно шага. Формулы Рунге-Кутта имеют вид

$$x_i^{(k)} = x_i(t_k),$$

$$p_i^{(k)} = f_i\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}, t_k\right),$$

$$q_i^{(k)} = f_i\left(x_1^{(k)} + \frac{1}{2}hp_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \frac{1}{2}hp_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)} + \frac{1}{2}hp_n^{(k)}, t_k + \frac{1}{2}h\right),$$

$$r_i^{(k)} = f_i\left(x_1^{(k)} + \frac{1}{2}hq_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \frac{1}{2}hq_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)} + \frac{1}{2}hq_n^{(k)}, t_k + \frac{1}{2}h\right),$$

$$s_i^{(k)} = f_i\left(x_1^{(k)} + hr_1^{(k)}, x_2^{(k)} + hr_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)} + hr_n^{(k)}, t_k + h\right),$$

$$x_i^{k+1} = x_i^{(k)} + \frac{1}{6}h\left(p_i^{(k)} + 2q_i^{(k)} + 2r_i^{(k)} + s_i^{(k)}\right)$$

$$(i = 1, 2, 3, ..., n).$$

Из приведенных формул легко видеть схему алгоритма одношаговых методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений вида (112). Алгоритм состоит из двух относительно независимых блоков. В первом блоке производятся вычисления по формулам Рунге-Кутта. Входными данными для этого блока являются значения искомых функций на момент времени t_k. Результат работы блока – значения искомых функций на момент времени t_{k+1}. Разумеется, исходными параметрами являются также сами моменты t_k и t_{k+1}, а также шаг интегрирования h. Реализация этого блока не зависит от конкретной задачи небесной механики. Второй блок – вычисления правых частей уравнений (112) при любых заданных аргументах $x_1, x_2, ..., x_n, t$. Этот блок полностью определяется постановкой задачи о движении или вращении небесных тел и не зависит от метода интегрирования.

4.4. Алгоритм решения задач о движении небесного тела методами численного интегрирования

Рассмотрим следующий класс задач о движении системы небесных тел. Пусть даны дифференциальные уравнения относительно координат тел. Координатами могут быть как прямоугольные координаты центров масс каждого тела, так и углы поворота каждого тела

в некоторой заданной системе координат. Уравнения должны быть выражены в форме (112), а их правые части заданы так, что известны правила, по которым их можно вычислять для любых заданных значений искомых координат и, возможно, времени. Кроме того, должны быть заданы значения координат на некоторый начальный момент времени t_0. Обозначим эти значения через $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$. Требуется определить значения координат на некоторый другой также заданный момент времени t_1. Практические цели решения задачи о движении системы тел диктуют небходимость последовательного вычисления координат также и на другие заданные моменты t_2, t_3, ... , t_k. Чаще всего моменты выбираются равноотстоящими так, что

$$t_i = t_{i-1} + H \quad (i = 1, 2, ..., k), \tag{114}$$

где H – заданный шаг по времени (но не шаг интегрирования). Таким образом, результатом решения задачи будут значения искомых функций на моменты t_1, t_2, ... , t_n, то есть $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, ..., x_n^{(i)} \quad (i = 1, 2, ..., k)$. Поставленная задача является типичной не только в практической небесной механике, но также при различных исследованиях теоретического характера.

Соответственно сформулированной постановке задачи можно составить алгоритм ее решения. Он будет состоять из следующих блоков:

- (1) задание начального момента времени, начальных значений координат и шага следования моментов H;
- (2) задание следующего момента времени;
- (3) выполнение численного интегрирования уравнений и получение значений искомых функций на следующий момент времени;
- (4) запоминание полученных значений в файле для последующего использования;
- (5) проверка достижения последнего заданного момента времени и переход к пункту (2), если последний момент еще не достигнут;
- (6) прекращение работы алгоритма.

Пункт (1.) выполняется путем ввода чисел из файла исходных данных или заданием значений прямо в тексте вычислительной программы.

Пункт (2.) выполняется по формуле (114).

Реализация пункта (3.) в вычислительной программе должна быть независима от поставленной задачи, чтобы любую конкретную задачу можно было решать любым методом численного интегрирования. Поэтому сам метод интегрирования оформляют в виде отдельной процедуры на выбранном языке программирования. Эту процедуру обычно составляют специалисты по методам численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Для использования процедуры в конкретной задаче нужно знать только форму обращения к этой процедуре и способы обмена данными с ней. Необходимая информация обычно содержится в инструкции, которой снабжается процедура при ее передаче или публикации. Пункт (3.) алгоритма реализуется согласно инструкции к процедуре. Пример такой инструкции приводится в следующем параграфе.

На первый взгляд в описанном выше алгоритме совершенно отсутствует блок вычисления правых частей решаемых уравнений. На самом деле этот блок включен в пункт (3.), но реализуется он в виде независимой процедуры, которую составляет специалист, поставивший и решающий задачу. Эта процедура используется в процессе численного интегрирования, который не зависит от вида правых частей уравнений. Чтобы организовать составление алгоритма и программы, устанавливаются некоторые правила, по которым происходит обращение к процедуре вычисления правых частей уравнений движения. Эти правила также являются частью инструкции к процедуре интегрирования. Алгоритм вычисления правых частей уравнений не зависит от метода интегрирования, однако заголовок этой процедуры должен быть согласован с инструкцией к программе численного интегрирования.

Пункты (4.), (5.) и (6.) алгоритма достаточно просты для программирования. Заметим только, что пункт (4.) может быть реализован более замысловатым способом. Например, можно запрограммировать построение графических изображений на экране компьютера в зависимости от полученных значений искомых функций. В итоге последовательная смена картинок в процессе решения задачи даст наглядное представление о движении системы тел.

Заметим также, что при использовании некоторых программ чис-

ленного интегрирования необходимо задать определенные параметры работы. Это могут быть, например, параметры, задающие точность интегрирования. В то же время результатом выполнения процедуры могут быть некоторые вспомогательные данные, которые также можно использовать в программе решения задачи.

4.5. Инструкция к вычислительной программе численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений методом Э. Эверхарта

В практической небесной механике применяются много различных методов численного интегрирования уравнений движения. Эта наука дает стимул для развития и совершенствования таких методов. В то же время задачи небесной механики являются своеобразным полигоном для испытания новых разработок в этой области. Одним из наиболее применяемых в последнее время в небесной механике методов численного интегрирования является метод Э. Эверхарта (Everhart, 1974). Показательно, что его автором является специалист в области небесной механики. Метод еще подробно описан в книге (Бодовицына, 1984).

Первоначально процедура интегрирования была составлена на языке программирования Фортран самим Эверхартом, поэтому ее так и называют процедурой Эверхарта. Эта версия программы была затем адаптирована для компьютеров, в памяти которых числа с плавающей точкой занимают 8 байт памяти. Программа свободно передается между исследователями разных научных институтов. Они имеется также и в ГАИШ МГУ, где программа была переписана на язык программирования Си. При этом в форме обращения к ней сохранились свойства параметров, характерные для языка Фортран.

Основным достоинством метода Эверхарта является высокая достижимая точность интегрирования. Платой за точность оказываются большие затраты времени вычислений. Процедура интегрирования по методу Эверхарта составлена так, что с помощью двух параметров может быть задана необходимая точность вычислений. В зависимости от заданной точности изменяются необходимые затраты времени вычислений. При низкой требуемой точности вычислительные затраты будут небольшими, однако наилучшее соотношение точности вычислений и затрат времени достигается именно при высокой заданной точности. Основной параметр ε , определяющий точность вычисле-

ний на каждом шаге, выражают в виде

$$\varepsilon = 10^{-l}, \tag{115}$$

где l – некоторое заданное целое число.

В методе Эверхарта используются специальные аппроксимирующие полиномы по степеням шага интегрирования. Степень этих полиномов N_{order} может быть выбрана из следующего списка: 7, 11, 15, 19, 23, 27. В процедуре можно взять любое из этих значений. Однако при невысокой заданной точности интегрирования бесполезно задавать высокую степень полиномов. Это может привести лишь к неоправданным затратам времени вычислений. Поэтому N_{order} выбирают в зависимости от заданной точности вычислений в пределах

$$\frac{3}{4}l \leq N_{order} \leq 2l, \tag{116}$$

где l – целое число, фигурирующее в формуле (115).

Процедура Эверхарта позволяет решать уравнения движения как в режиме автоматического выбора шага интегрирования, так и при постоянном заданном шаге. Поскольку в небесной механике большинство задач описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, то для удобства программирования задачи процедура Эверхарта позволяет решать сразу уравнения второго порядка, не разлагая их на удвоенное число уравнений первого порядка вида (112).

Наибольшую часть времени интегрирования занимают вычисления правых частей уравнений. Поэтому эффективность процедуры характеризуется количеством обращений к вычислению правых частей уравнений в конкретной задаче. Для оценки эффективности процедуры оказывается интересным также количество выполненных шагов интегрирования при автоматическом выборе шага. Обе количественные характеристики выдаются процедурой через ее выходные параметры.

Метод Эверхарта содержит процесс итераций при построении полиномов по степеням шага интегрирования на первом шаге. Обычно оказывается достаточным выполнить две итерации, но в некоторых задачах увеличение числа итераций на этом этапе алгоритма может привести к небольшому повышению эффективности процедуры без существенного увеличения затрат времени вычислений. Поэтому входным параметром процедуры является указанное число итераций,

с помощью которого можно управлять эффективностью в некоторых небольших пределах. На начальной стадии решения конкретной задачи мало что известно о свойствах уравнений с точки зрения применения процедуры Эверхарта. Поэтому без сомнений можно задать число итераций равным 2.

В зависимости от того, уравнения какого вида нужно решать методом Эверхарта, задают класс уравнений. Уравнения разделяются на три класса.

Уравнения первого класса имеют вид (1). Ко второму классу относятся уравнения второго порядка вида

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, ..., \frac{dx_n}{dt}, t) \quad (i = 1, 2, 3, ..., n). \quad (117)$$

Уравнения третьего класса отличаются от уравнений (117) только тем, что правые части не зависят от компонент скорости, то есть от первых производных по времени от искомых функций. Это наиболее встречаемые в небесной механике уравнения. Класс таких уравнений по странной традиции обозначается как -2. Уравнения класса -2 имеют вид

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t) \quad (i = 1, 2, 3, ..., n). \quad (118)$$

После описания всех особенностей процедуры Эверхарта приведем здесь инструкцию для ее использования. Инструкция, конечно, зависит от используемого языка программирования. Обычно это один из языков процедурного типа, например, Фортран, Паскаль или Си. Формы вызова процедуры на разных языках весьма похожи. Предположим, что программа вычислений составляется на языке программирования Си. Описание некоторых параметров сохраняет свойства, характерные для старых версий языка Фортран. В частности, индексирование переменных в массивах начинается с единицы.

Приведем здесь сначала описание параметров процедуры, а затем сам вызов процедуры. Эти фрагменты программы пользователя имеют вид

```
...
#define NV 3
...
double X[NV+1],V[NV+1];
double TI,TF,XL;
```

```
int LL, NI, NF,NS, NCLASS, NOR;
...
Rada27(X, V, TI, TF, XL, LL, NV,
                                NI, &NF, &NS, NCLASS, NOR);
```

Опишем тип и смысл каждого параметра. Удобно начать с входного параметра NV. Это параметр типа **int**. Он вызывается процедурой по значению, то есть при обращении к процедуре на месте этого параметра может стоять любое выражение типа **int**. Параметр NV задает число искомых функций n. В приведенном выше фрагменте программы пользователя этот параметр задан символьной константой.

Следует учитывать тот важный факт, что внутри текста процедуры Rada27 имеются описания внутренних массивов (индексированных переменных заданной длины. Эта длина зависит от числа переменных NV. Следует проверять, достаточно ли зарезервировано места для этих внутренних массивов при заданном NV.

Параметр NCLASS задает класс решаемых уравнений. Он может иметь значения 1, 2 или -2 соответственно описанной выше классификации уравнений. Параметр NCLASS типа **int**. Он вызывается процедурой по значению.

Параметры X, V - одномерные массивы (индексированные переменные), в которых индексы используются, начиная с единицы. Эти массивы используются для хранения и передачи значений искомых функций. В массиве X задаются координаты, а в массиве V – компоненты скорости. Перед обращением к процедуре в этих массивах должны содержаться начальные значения на момент t_0. После обращения элементы массивы X, V будут содержать значения искомых функций на конечный момент t_k.

Массив V используется только для уравнений классов 1 и -2 для хранения и передачи значений первых производных от искомых функций по времени.

Параметры TI и TF – простые переменные типа **double** задают начальный и конечный моменты времени t_0 и t_k, соответственно. Эти параметры передаются по значению.

Параметр LL типа **int** задает точность вычислений. Он соответствует величине l в формуле (115). Этот параметр передается по значению. Автоматический выбор шага интегрирования делается в том случае, если значение параметра LL задано положительным. Для включения режима постоянного шага интегрирования следует задать значение LL равным любому отрицательному числу. В этом режиме

для задания величины постоянного шага интегрирования используется параметр XL типа **double**. Этот входной параметр передается по значению. При автоматическом выборе шага интегрирования параметр XL не используется.

Для задания степени аппроксимирующих полиномов N_{order} служит входной параметр NOR типа **int**. Он передается в процедуру по значению. Для выбора значения этого параметра следует использовать неравенства (116).

Параметр NI типа **int** задает число итераций при определении аппроксимирующего полинома. Это входной параметр, он передается в процедуру по значению. Как уже указано выше, значение этого параметра может быть выбрано равным 2, если наиболее оптимальное значение этого параметра неизвестно.

Выходные параметры NF и NS типа **int** передают в программу пользователя после вычислений количество сделанных обращений к вычислению правых частей уравнений и количество выполненных шагов интегрирования, соответственно. Эти параметры передаются в процедуру по наименованию (адресу).

Теперь рассмотрим то, как процедура численного интегрирования Эверхарта взаимодействует с процедурой вычисления правых частей уравнений, которую должен составлять пользователь. В соответствии с формой обращения к этой процедуре внутри процедуры Эверхарта ее описание (прототип) в программе пользователя должен иметь вид

void FORCE(**double** *Xc, *Vc, **double** TM, **double** *Fc);

Массивы Xc и Vc при входе в процедуру содержат значения аргументов функций, определяющих правые части решаемых уравнений. В массиве Xc хранятся значения координат, а в массиве Vc – значения производных от координат по времени. Аргументы располагаются в массивах согласно их номерам, при этом элементы массивов Xc[0] и Vc[0] никогда не используются. Кроме того, параметр Vc используется только тогда, когда решаются уравнения класса 2.

Входной параметр TM типа **double** задает текущий момент времени – аргумент правых частей уравнений. Он передается в процедуру по значению. Если правые части не зависят от времени, то параметр TM не используется.

Результат вычислений правых частей уравнений пользователь должен поместить в элементах выходного массива Fc. Для этого последовательно используются элементы этого массива, начиная с первого.

Нулевой элемент массива Fc не используется.

При составлении вычислительной программы численного решения дифференциальных уравнений движения небесных тел могут проявляться некоторые особенности, связанные с применяемым языком программирования и другими средствами программирования, например, компилятором. В частности, необходимо знать, что процедура Эверхарта, записанная на языке Паскаль, использует для своей работы несколько рабочих массивов, которые должны быть описаны вне тела процедуры как глобальные переменные с фиксированными именами. Длина этих рабочих массивов зависит от количества искомых функций, то есть от значения n в формулах (112), (117) и (118). Проще всего зарезервировать некоторую длину этих массивов и помнить максимальное допустимое число искомых функций, которое нельзя превышать.

При программировании процедуры FORCE вычисления правых частей уравнений могут потребоваться параметры, которые вводятся или задаются в основной программе. Передачу значений этих параметров можно сделать только через глобальные переменные, объявленные в одном из модулей программы и связанные через интерфейсы модулей.

4.6. Программа М.В. Беликова численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

Другая весьма эффективная вычислительная программа численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений была разработана М.В. Беликовым (Belikov, 1993). Метод интегрирования основан на аппроксимации решения на каждом шаге интегрирования отрезками рядов по полиномам Чебышева, близкими к наилучшей равномерной полиномиальной аппроксимации. Используется квадратурная формула Радо-Эрмита наивысшего класса точности при вычислении коэффициентов рядов по смещенным полиномам Чебышева.

Реализация примененного метода в виде вычислительной программы была передана в 90-е годы Институтом теоретической астрономии (С.-Петербург) в ГАИШ МГУ. Процедура, составленная первоначально М.В. Беликовым на языке программирования Фортран, была впоследствии адаптирована Н.В. Емельяновым (ГАИШ МГУ) для языка программирования Си. На языках программирования проце-

дура имеет имя DINCH.

Значительным достоинством программы М.В. Беликова является то, что она включает в себя процедуру аппроксимация результатов численного интегрирования отрезками рядов по полиномам Чебышева. После однократного интегрирования уравнений движения в специальном файле накапливаются коэффициенты разложения по полиномам Чебышева. С использованием этого файла с помощью простой программы можно получать координаты и скорость небесного тела на любые заданные моменты времени. Подробнее этот прием описан ниже в специальном разделе.

Не вдаваясь в подробности метода, рассмотрим некоторые аспекты использования этой вычислительной программы. Идентификаторы параметров здесь те, которые используются в тексте передаваемой процедуры.

Форма вызова процедуры численного интегрирования DINCH схожа с вызовом процедуры Эверхарта (см. выше). Используется такая же терминология класса уравнений. Начальные значения координат и компонент скорости, а также результирующие значения, размещаются в индексированных переменных также, как и в процедуре Эверхарта. Задается параметр (NORD), определяющий степень полиномов аппроксимации на шаге интегрирования. Управление точностью интегрирования производится специальным параметром, аналогично процедуре Эверхарта. Имеется возможность интегрирования с постоянным заданным шагом (XL).

Дополнительно задаются некоторые параметры, управляющие процессом интегрирования. Смысл этих параметров можно выяснить в описании метода (Belikov, 1993). В частности, задается некоторый параметр NNN, управляющий выбором величины шага интегрирования. При NNN=0 осуществляется выбор переменного шага по абсолютной велицине последнего коэффициента в разложении правых частей уравнений. При NNN=1 используется относительный критерий – последний к нулевому и первому. В общем случае, когда нет информмации, как выбрать этот параметр, можно положить NNN=1. Задаются параметры выбора числа итераций для определения коэффициентов ряда по смещенным полиномам Чебышева: ITS – на стартовом шаге, ITC – на последующих. При отсутствии дополнительной информации рекомендуется выбрать ITS = 6, ITC = 2.

Форма обращения к процедуре вычисления правых частей уравнений FORCE точно такая же, как и для процедуры Эверхарта.

Важно учесть, что в тексте программы имеются описания массивов (индексированных переменных), длина которых зависит от числа искомых функций. Следует согласовать эти описания с программой пользователя.

Некоторые необходимые детали использования процедуры М.В. Беликова можно выяснить при передаче программы пользователю.

4.7. Проверка и сравнение некоторых процедур численного интегрирования

При моделировании движения небесных тел методами численного интегрирования дифференциальных уравнений движения возникает актуальный вопрос о выборе той или иной процедуры интегрирования. Обычно делается поиск наиболее эффективного метода. Понятие эффективности должно быть сформулировано строго и однозначно. Эффективность характеризуют два фактора: точность решения и вычислительные затраты (время вычислений). Правильное сравнение двух методов и выяснение эффективности делается так: определяются вычислительные затраты при равной точности, либо оценивается достигнутая точность при равных вычислительных затратах. В некоторых случаях трудно подобрать параметры интегрирования так, чтобы приравнять один из показателей в двух методах. Это можно сделать лишь приближенно.

Как уже было отмечено выше в специальном разделе, точность решения дифференциальных уравнений движения небесного тела принципиально зависит от следующих обстоятельств:
– число искомых переменных, – вид правых частей уравнений, – начальные условия решения, – интервал времени между начальным и конечным моментами. Разумеется, сравнение методов следует делать при равных условиях. При этом нужно задавать такие управляющие параметры процедур, которые обеспечивают максимальную точность. Однако в некоторых случаях невозможно реализовать максимальную достижимую точность решения из-за недопустимо большого времени вычислений.

4.8. Аппроксимация прямоугольных координат планет и спутников отрезками рядов по полиномам Чебышева

В процессе численного интегрирования дифференциальных уравнений движения небесного тела вычисляются прямоугольные координаты на ряд моментов времени, разделенных шагом численного интегрирования. Возникает проблема хранения и последующего использования результатов численного интегрирования. Поскольку шаг численного интегрирования бывает весьма малым, то запоминать получаемые координаты на каждом шаге оказывается сложным и нецелесообразным делом. В практических задачах применяют приближенное представление результатов численного интегрирования с помощью отрезков рядов по полиномам Чебышева $T_j(\tau)$. В принципе, для этого подошли бы любые ортогональные функции, например, степенные функции. Однако, преимущество разложения функции по полиномам Чебышева состоит в том, что при таком разложении абсолютная ошибка вычислений знакопеременна и распределена более или менее равномерно по всему интервалу [-1,1] аргумента полиномов Чебышева.

Любую функцию времени на конечном интервале можно представить отрезком ряда по полиномам Чебышева длиной в N слагаемых так, что в N моментов времени на этом интервале такое приближенное представление будет точно совпадать со значением функции. При этом в промежуточные моменты времени значение отрезка ряда будет отличаться от самой функции. Отличия зависят от свойств функции и от максимальной степени полиномов $N-1$.

Весь интервал времени, для которого выполняется численное интегрирование уравнений движения, делится на равные подынтервалы некоторой длины $\Delta t = t_2 - t_1$, где t_1 и t_2 – моменты начала и конца одного такого подынтервала. На каждом таком подынтевале отдельно строится представление для каждой из координат, например, для координаты x. Задается новая переменная τ по формуле

$$\tau = \frac{2t - t_2 - t_1}{t_2 - t_1}, \tag{119}$$

которая будет аргументом полиномов Чебышева. Ясно, что при $t = t_1$ имеем $\tau = -1$, а при $t = t_2$ будет $\tau = 1$. Таким образом, на подынтервале времени (t_1, t_2) аргумент τ изменяется в пределах $[-1, 1]$.

Функцию $x(t)$ можно приблизить формулой

$$x(t) \approx \sum_{j=0}^{N-1} C_j T_j(\tau) - \frac{1}{2} C_0,$$

в которой зависимость τ от времени задана функцией (119), а коэффициенты C_j вычисляются из соотношения

$$C_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(\tau_k) T_j(\tau_k) \quad (j = 0, 1, 2, N-1),$$

в котором значения аргумента τ_k определяются по формуле

$$\tau_k = \cos\left(\frac{\pi(k + \frac{1}{2})}{N}\right) \quad (k = 0, 1, 2, N-1).$$

Такое представление будет точно совпадать с самой функцией для значений аргумента τ, равных корням полинома $T_N(\tau)$, которыми и являются числа τ_k.

Из приведенных выше соотношений видно, что нам нужно знать значения координат на ряд определенных моментов времени

$$t_k = \frac{t_2 + t_1 + \tau_k(t_2 - t_1)}{2}$$

внутри интервала (t_1, t_2).

На практике процесс вычислений программируется следующим образом. В памяти заводится массив коэффициентов C_j $(j = 0, 1, 2, N-1)$. Перед входом численного интегрирования в интервал (t_1, t_2) всем элементам этого массива присваиваются нули. Производится численное интегрирование последовательно до каждого момента t_k. При достижении момента t_k мы имеем значения τ_k и $x(\tau_k)$. Здесь осуществляется проход цикла по номеру коэффициента C_j. Каждому коэффициенту C_j дается приращение $x(\tau_k)T_j(\tau_k)$. В этом цикле значения $T_j(\tau_k)$ вычисляются с помощью рекуррентного соотношения для полиномов Чебышева

$$T_{j+1}(\tau_k) = 2\tau_k T_j(\tau_k) - T_{j-1}(\tau_k). \tag{120}$$

Для начальных значений индекса имеем

$$T_0(\tau) = 1, \quad T_1(\tau) = \tau.$$

Одновременно вычисления выполняются для трех координат x, y, z. При этом для каждой координаты вычисляется свой массив коэффициентов C_j. После выхода численного интегрирования из интервала (t_1, t_2) полученные для каждой координаты коэффициенты запоминаются в файле. На каждом следующем подынтервале для коэффициентов C_j используется один и тот же массив памяти. В итоге, если весь интервал интегрирования был разделен на K равных подынтервалов, то результирующий файл будет содержать $3KN$ чисел.

Если результирующий файл имеется в распоряжении пользователя, то вычисление прямоугольных координат планеты или спутника на заданный момент времени t можно сделать по следующей процедуре. Находим тот подынтевал времени, которому принадлежит заданный момент t. Считываем из файла для каждой координаты массив значений коэффициентов C_j $(j = 0, 1, 2,\ N - 1)$. Вычисляем координаты по формуле

$$x = \sum_{j=0}^{N-1} C_j T_j(\tau).$$

Здесь аргумент τ находится из соотношения (119), а полиномы Чебышева вычисляются с помощью рекуррентных соотношений (120).

Глава 5. Наблюдения небесных тел

5.1. Общие принципы наблюдений

На небесные тела мы смотрим "глазами" приборов, с помощью которых наблюдаем. Естественно, что когда мы говорим "наблюдения", подразумеваем "измерения".

Как наблюдали и куда смотрели астрономы разных веков? Что мы измеряли раньше и что мы измеряем теперь?

В 19-веке наблюдатели смотрели в окуляры телескопов, направляя их иа небесные тела. Совмещая изображения светил с паутинными нитями в поле зрения, астрономы измеряли их взаимные расположения с помощью микрометрических винтов.

В 20-м веке астрономы уже только слегка подсматривали в окуляры, чтобы фотокамеры правильно запечатлели на фотопластинках изображения светил. После обработки пластинок в фотолабораториях астрономы помещали их под микороскопы, смотрели на полученные изображения и измеряли, измеряли взаимное расположение светил ... в миллиметрах.

В 21-м веке астрономы уже совсем не смотрят в телескопы. Изображения небесных светил передаются из камер телескопов прямо в память компьютеров, где заранее составленные программы измеряют, измеряют координаты небесных тел сначала в пикселах, затем автоматически переводят их в секунды дуги. Иногда даже нет необходимости смотреть на эти координаты – они сразу же поступают в другие программы в компьютерах, где собраны все наши знания о предмете изучения, где сконцентрированы новейшие, самые совершенные методы исследований, и где автоматически рождаются новые достижения и научные открытия. Научное творчество ученого-астронома направлено теперь на создание наиболее совершенных алгоритмов и программ, воплощая в них новые подходы и искусство научного исследования.

Наши приборы могут измерять направления на небесные тела, расстояния до них, а также скорости изменения направления и расстояния. В любом случае мы имеем дело с вектором, начало которого расположено в точке наблюдения, а конец – на небесном теле, которое наблюдаем. Будем называть этот вектор *вектором наблюдения.*

Известно, что распространение света, в том числе и в пределах Солнечной системы, описывается общей теорией относительности. Согласно этой теории, в частности, происходит искривление лучей

света из-за массы Солнца. В нашем рассмотрении процессов наблюдений мы будем пренебрегать эффектами общей теории относительности.

Каждому наблюдению приписывают момент наблюдения. Это момент регистрации в фотоприемнике тех фотонов, которые были излучены или отражены наблюдаемым спутником или планетой. Следует учитывать тот факт, что из-за конечности скорости света момент старта фотонов с наблюдаемого небесного тела предшествует моменту наблюдения.

Для практических действий необходимо связать вектор наблюдения с одной стороны с прямоугольными координатами небесных тел, с другой стороны – с теми величинами, которые мы измеряем с помощью приборов и которые мы будем называть *измеряемыми величинами.*

Параметры движения спутников определяются на основе наблюдений с использованием измеряемых величин. Однако оказывается, что вывести прямую зависимость этих параметров от измеряемых величин невозможно. Для их определения применяется специальный метод дифференциального уточнения, который рассмотрен ниже. Согласно этому методу, необходимо наоборот вычислять измеряемые величины по заданным параметрам движения.

Прямоугольные координаты могут вычисляться в помощью процедур, разработанных при построении теорий движения. При заданных параметрах движения процедура дает координаты на любой заданный момент времени, который называют входным моментом теории. Под временем здесь имеется в виду аргумент времени, фигурирующий в дифференциальных уравнениях движения небесного тела.

В следующих разделах мы сначала выведем соотношения между векторами наблюдений и прямоугольными координатами небесных тел. Затем получим связь векторов наблюдений с измеряемыми величинами.

В конце настоящей главы мы рассмотрим некоторые детали техники наблюдений спутников планет.

Полезную информацию по рассматриваемым здесь вопросам можно найти в работе (Емельянов, 2017).

5.2. Определение топоцентрических положений планет и спутников

Наблюдения небесных тел проводятся с поверхности Земли или с орбиты искусственного спутника Земли. Особый случай наблюдений с борта межпланетного космического аппарата мы здесь не рассматриваем.

Точку земной поверхности, в которой проводятся наблюдения, обычно называют топоцентром. Положение топоцентра относительно геоцентра определяется его положением в земной системе координат. Как это делается, будет рассмотрено в специальном разделе. Здесь же мы будем полагать, что топоцентр совпадает с геоцентром.

Модели движения тел в их орбитальном движении вокруг Солнца обычно рассматривают в гелиоцентрической системе координат или в барицентрической системе координат с началом, расположенном в барицентре Солнечной системы.

Теории и модели движения спутников планет строятся в системе координат с началом, расположенном либо в центре планеты, либо в барицентре системы планета-спутники. Будем здесь условно называть эту точку просто планетой.

Таким образом, в настоящем разделе будут фигурировать следующие точки: центр Солнца, барицентр Солнечной системы, топоцентр, планета, спутник.

Барицентрические векторы Солнца, топоцентра и планеты будем обозначать через $\mathbf{H}(t)$, $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{P}(t)$, соответственно. Гелиоцентрические координаты топоцентра и планеты будут обозначены через $\mathbf{T_h}(t)$, $\mathbf{P_h}(t)$. Введенные здесь векторы рассматриваются как функции времени. Для их вычисления служат специально разрабатываемые модели движения. Заданной входной величиной таких вычислительных процедур является величина t, называемая условно аргументом времени. Аргументом времени в разных теориях может быть время, отсчитываемое в разных шкалах, например, TT, TDB. Мы будем предполагать, то перед подстановкой в процедуру вычисления вектора положения небесного тела, время выражено в необходимой шкале.

5.3. Наблюдения планеты

Предположим для начала, что мы наблюдаем планету. Рассмотрим, как определяется в этом случае вектор наблюдения. Допустим,

что наблюдение выполняется в момент времени t_0. Вектор наблюдения имеет начало в топоцентре, а конец – в наблюдаемом небесном теле при том его положении, которое оно имело в момент, когда с него стартовали те фотоны, которые попали в фотоприемник наблюдателя в момент t_0. Обозначим вектор наблюдения планеты через $\mathbf{P_T}$.

Моменту старта фотонов будем приписывать разные индексы в зависимости от объекта наблюдения. Если мы наблюдаем планету, то момент старта фотонов можно обозначить через t_1.

На Рис. 11 показана схема расположения планеты и топоцентра в соответствующие моменты времени. Буквой B помечен барицентр, буквой T – топоцентр, а буквой P – планета. Из рисунка видно, что вектор наблюдения определяется из равенства

$$\mathbf{P_T} = \mathbf{P}(t_1) - \mathbf{T}(t_0). \tag{121}$$

Моменты времени t_0 и t_1 не совпадают. Их разность, называемая световым временем, задается соотношением

$$t_0 - t_1 = \frac{|\mathbf{P_T}|}{c}, \tag{122}$$

где c – скорость света. Поскольку момент наблюдения t_0 задан, то уравнения (121) и (122) можно решить итерациями, полагая для начала $t_1 = t_0$.

Наиболее точные из существующих в настоящее время теорий движения планет позволяют определять их прямоугольные координаты в системе координат с началом в барицентре Солнечной системы. Обычно теория дает также координаты Солнца в этой системе. Всегда можно сделать преобразование и определять гелиоцентрические координаты планет.

Замечание.

Здесь сделаем оно важное замечание. В некоторых работах можно встретить утверждение о том, что система координат берется гелиоцентрической, то есть начало системы координат помещено в центр Солнца. Положение топоцентра и положение планеты при этом задается гелиоцентрическими координатами. Требуется определить вектор наблюдения $\mathbf{P_T}$. Обозначим через $\mathbf{P_h}(t_1)$, $\mathbf{T_h}(t_0)$ гелиоцентрические векторы планеты и топоцентра в соответствующие моменты времени. По аналогии с предыдущими рассуждениями вектор наблюдения может быть построен как разность

$$\mathbf{P'_T} = \mathbf{P_h}(t_1) - \mathbf{T_h}(t_0),$$

где для вектора наблюдения здесь использовано другое обозначение. На самом деле такое построение оказывается неправильным. Для объяснения введем в рассмотрение барицентрические векторы Солнца в соответствующие моменты времени $\mathbf{H}(t_0)$, $\mathbf{H}(t_1)$. При этом очевидны равенства

$$\mathbf{P_h}(t_1) = \mathbf{P}(t_1) - \mathbf{H}(t_1), \quad \mathbf{T_h}(t_0) = \mathbf{T}(t_0) - \mathbf{H}(t_0).$$

Подстановка этих равенств в предыдущую формулу дает

$$\mathbf{P'_T} = [\mathbf{P}(t_1) - \mathbf{H}(t_1)] - [\mathbf{T}(t_0) - \mathbf{H}(t_0)] =$$
$$= \mathbf{P}(t_1) - \mathbf{T}(t_0) - [\mathbf{H}(t_1) - \mathbf{H}(t_0)] =$$
$$= \mathbf{P_T} - [\mathbf{H}(t_1) - \mathbf{H}(t_0)].$$

Расположение рассматриваемых здесь векторов иллюстрирует Рис. 12. Для построения вектора $\mathbf{P'_T}$ мы должны совместить начало вектора $\mathbf{T_h}(t_0)$ с началом вектора $\mathbf{P_h}(t_1)$. Теперь видно, что $\mathbf{P'_T}$ отличается от $\mathbf{P_T}$ на разность $\mathbf{H}(t_1) - \mathbf{H}(t_0)$. Это можно интерпретировать так, что за время $t_1 - t_0$ Солнце успевает сместиться на величину $\mathbf{H}(t_1) - \mathbf{H}(t_0)$, что и приводит к разности рассматриваемых векторов. Если бы скорость света была бы бесконечной, то оказалось бы согласно соотношению (122), что $t_1 - t_0 = 0$, следовательно $\mathbf{H}(t_1) - \mathbf{H}(t_0) = 0$ и $\mathbf{P'_T} = \mathbf{P_T}$.

5.4. Наблюдения спутника планеты

Теперь рассмотрим ситуацию, когда мы наблюдаем одновременно планету и спутник планеты. Необходимо определить векторы наблюдений этих тел.

Аналитическая теория или численная модель движения спутника планеты позволяет определять его прямоугольные планетоцентрические координаты на любой заданный момент времени t. Вектор наблюдения спутника в этом случае имеет начало в топоцентре, а конец – в центре масс спутника на тот момент t_1, когда с него стартовали фотоны, попавшие затем в фотоприемник в момент времени t_0. Обозначим вектор наблюдения спутника через $\mathbf{S_T^{(1)}}$, а через $\mathbf{S_P^{(1)}}(t_1)$ — планетоцентрический вектор спутника в момент t_1. Теперь для определения $\mathbf{S_T^{(1)}}$ можно записать соотношение

$$\mathbf{S_T^{(1)}} = \mathbf{S_P^{(1)}}(t_1) + \mathbf{P}(t_1) - \mathbf{T}(t_0).$$

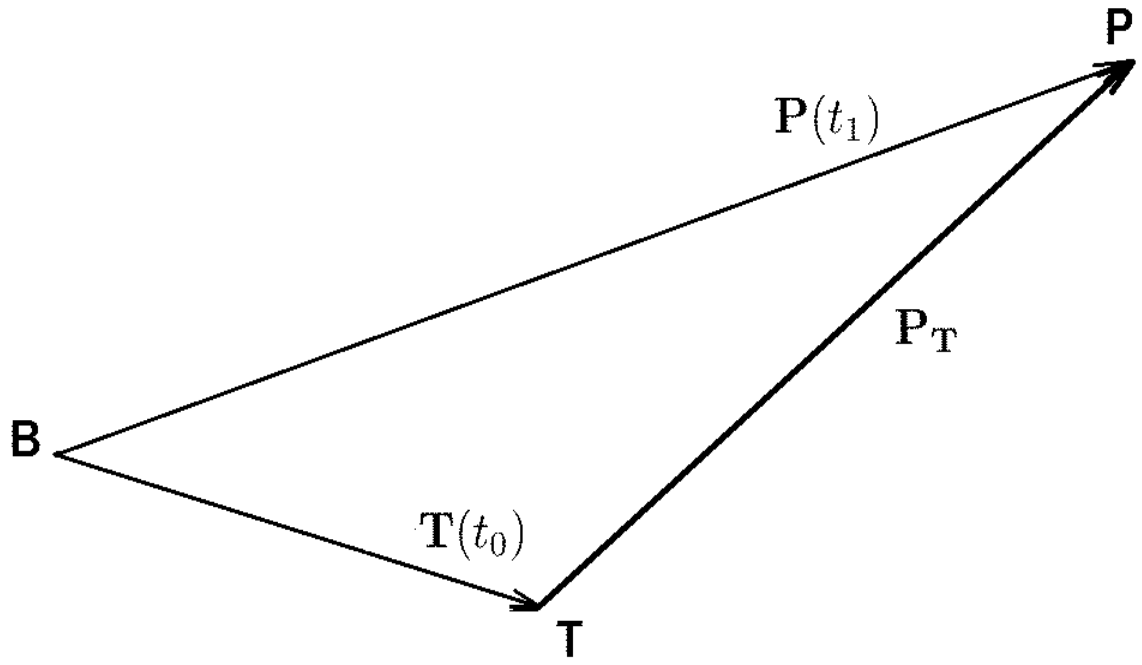

Рис. 11: Расположение Земли и планеты при наблюдениях.

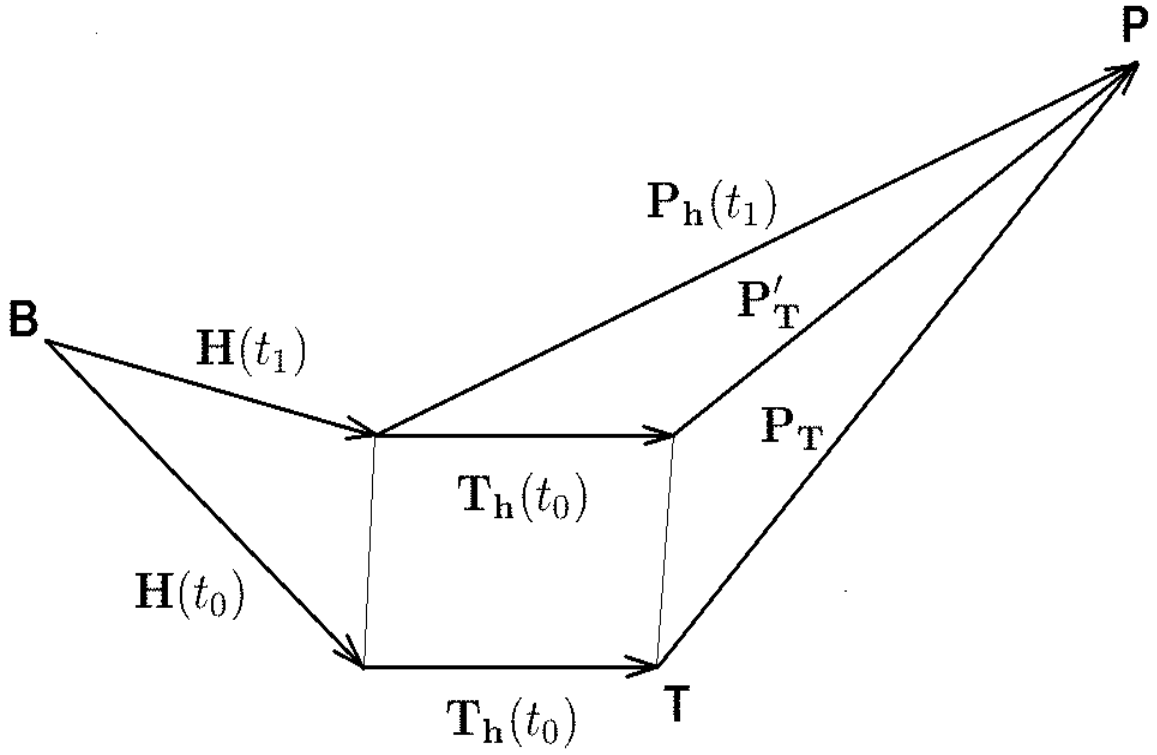

Рис. 12: Ошибочное построение вектора наблюдения на основе гелиоцентрических векторов планеты и Земли.

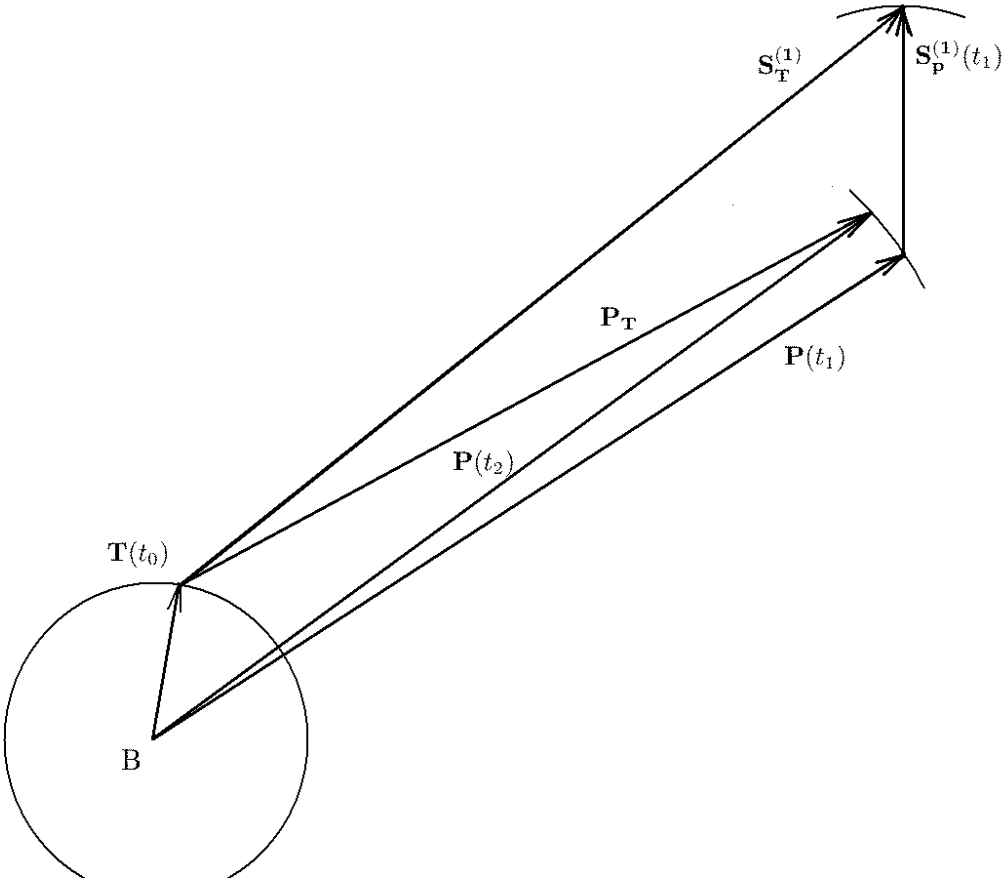

Рис. 13: Расположение Земли и планеты при наблюдениях.

Для определения момента t_1 теперь следует использовать уравнение

$$t_0 - t_1 = \frac{|\mathbf{S}_{\mathbf{T}}^{(1)}|}{c}, \tag{123}$$

Поскольку расстояние от топоцентра до планеты другое, чем расстояние от топоцентра до спутника, то момент старта фотонов от планеты, который мы обозначим здесь через t_2, отличается от t_1. Вектор наблюдения планеты в этом случае определится из соотношений

$$\mathbf{P_T} = \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{T}(t_0). \tag{124}$$

$$t_0 - t_2 = \frac{|\mathbf{P_T}|}{c}, \tag{125}$$

5.5. Наблюдения двух спутников планеты

Рассмотрим случай, когда мы наблюдаем одновременно планету и два ее спутника. Аналитическая теория или численная модель движения спутников позволяет определять их прямоугольные планетоцентрические координаты на любой заданный момент времени t. Вектор наблюдения каждого спутника имеет начало в топоцентре, а конец – в центре масс спутника на тот момент, когда с него стартовали фотоны, попавшие затем в фотоприемник в момент времени t_0. Обозначим этот вектор первого спутника через $\mathbf{S}_{\mathbf{T}}^{(\mathbf{1})}$, а вектор наблюдения второго – через $\mathbf{S}_{\mathbf{T}}^{(\mathbf{2})}$.

Фотоны, попавшие в фотоприемник в момент наблюдения t_0, стартовали с первого спутника в некоторый момент времени t_1, а со второго – в момент времени t_2.

Обозначим через $\mathbf{S}_{\mathbf{P}}^{(\mathbf{1})}(t_1)$ планетоцентрический вектор первого спутника в момент t_1. Барицентрический вектор планеты в этот момент был $\mathbf{P}(t_1)$. Соответствующие векторы для второго спутника будут $\mathbf{S}_{\mathbf{P}}^{(\mathbf{2})}(t_2)$ и $\mathbf{P}(t_2)$.

Все рассматриваемые здесь векторы показаны на Рис. 14.

Теперь для определения векторов наблюдения $\mathbf{S}_{\mathbf{T}}^{(\mathbf{1})}$ и $\mathbf{S}_{\mathbf{T}}^{(\mathbf{1})}$ можно использовать следующие уравнения:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{T}}^{(\mathbf{1})} = \mathbf{S}_{\mathbf{P}}^{(\mathbf{1})}(t_1) + \mathbf{P}(t_1) - \mathbf{T}(t_0).$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{T}}^{(\mathbf{2})} = \mathbf{S}_{\mathbf{P}}^{(\mathbf{2})}(t_2) + \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{T}(t_0).$$

$$t_0 - t_1 = \frac{|\mathbf{S}_{\mathbf{T}}^{(\mathbf{1})}|}{c},$$

$$t_0 - t_2 = \frac{|\mathbf{S}_{\mathbf{T}}^{(\mathbf{2})}|}{c},$$

Решать эти уравнения можно последовательными приближениями, полагая сначала $t_1 = t_0$, $t_2 = t_0$.

5.6. Определение угловых измеряемых величин при наблюдениях спутников планет

Аналитическая теория или численная модель движения спутни-

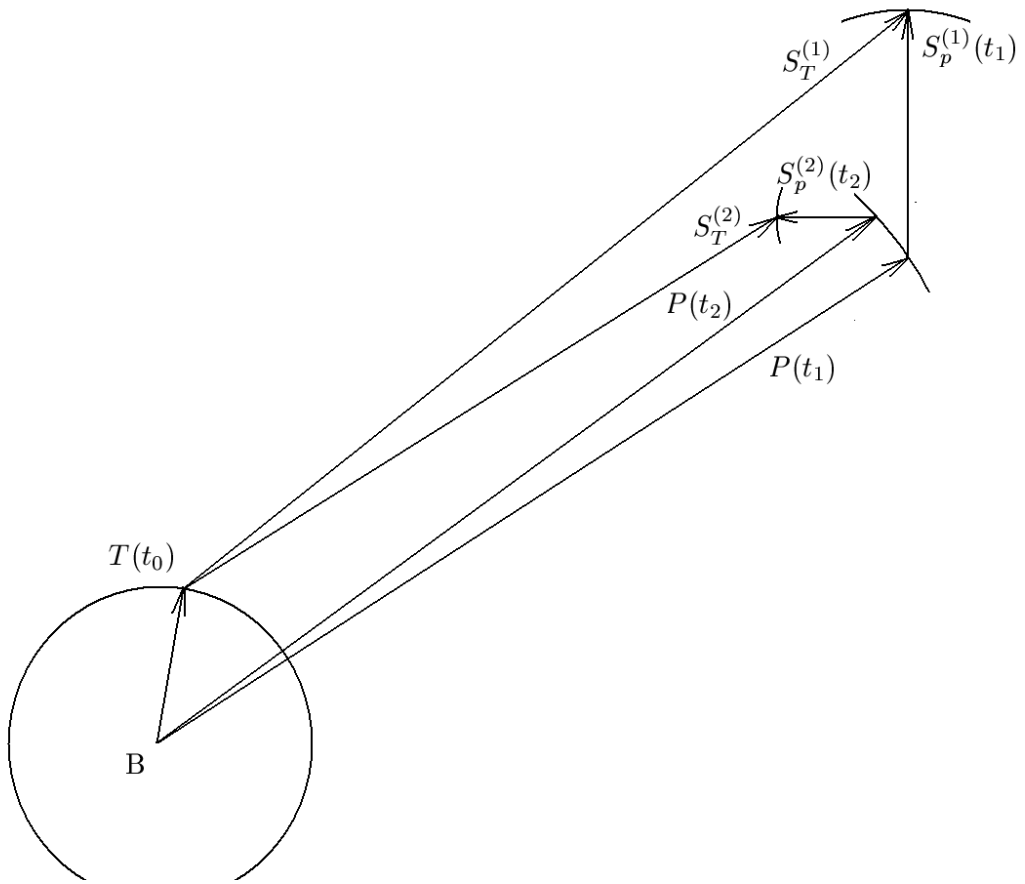

Рис. 14: Расположение Земли, планеты и спутников в моменты времени, соответствующие моменту наблюдения. Индекс 1 относится к спутнику номер 1, индекс 2 – к спутнику номер 2.

ка планеты позволяет определять его прямоугольные планетоцентрические координаты на любой заданный момент времени. При уточнении орбитальных параметров на основе наблюдений необходимо вычислять угловые измеряемые величины на моменты наблюдений. В предыдущих разделах рассмотрены методы определения векторов наблюдений по прямоугольным планетоцентрическим координатам спутников и барицентрическим координатам планет. Теперь необходимо связать измеряемые величины с векторами наблюдений планеты и спутников.

При уточнении параметров движения спутников в качестве измеряемых величин используются угловые топоцентрические координаты. Угловые координаты отсчитываются в геоэкваториальной системе координат, связанной с экватором и эклиптикой некоторой эпохи. В публикациях прошлых десятилетий встречаются координаты в системе среднего экватора и точки весны различных эпох. Использовались и системы истинного экватора и равноденствия. При этом моделировались прецессия и нутация земной оси. Более подробно системы геоэкваториальных координат рассмотрены в специальных разделах. В современных работах экваториальная система координат относится к экватору и эклиптике эпохи J2000. Однако фиксация осей координат уже не связана с вращением Земли. Система опирается на положения внегалактических источников радиоизлучения и называется международной небесной системой координат (ICRF).

В настоящем разделе мы будем предполагать, что оси всех рассматриваемых систем прямоугольных координат соответственно параллельны осям некоторой невращающейся геоэкваториальной системы, например, ICRF. Угловые координаты планеты и спутников, определенные по векторам наблюдений, рассмотренным в предыдущих разделах, называют *астрометрическими* . В отличие от астрометрических, использовались также так называемые видимые координаты. Для видимых координат векторы наблюдений определяются иначе, чем рассмотрено выше. Это объяснено в специальном разделе. Здесь же мы рассматриваем только астрометрические координаты.

В геоэкваториальной системе, наряду с прямоугольными, используют сферические координаты. Широта в геоэкваториальной системе называется склонением, а долгота – прямым восхождением. Для любого вектора наблюдения с компонентами x, y, z прямое восхождение

α и склонение δ определяются из соотношений

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Прямое восхождение и склонение небесного тела, которые называют еще *абсолютными* координатами, могут быть измеряемыми величинами.

Наряду с абсолютными используются также относительные координаты. Это разности небесных координат каких-либо двух тел: спутника и планеты, двух спутников. Если прямые восхождения первого и второго тел обозначить соответственно через α_1, α_2, а склонения через δ_1, δ_2, то разности

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \Delta\delta = \delta_2 - \delta_1,$$

называют дифференциальными координатами и используют в качестве измеряемых величин. Чаще применяются измеряемые величины

$$X_d = (\alpha_2 - \alpha_1)\cos\delta_1, \quad Y_d = \delta_2 - \delta_1.$$

Наряду с дифференциальными угловыми координатами X_d, Y_d рассматривают также так называемые тангенциальные координаты X_t, Y_t, определяемые следующим образом. Если небесное тело номер 1 отображается в фокальной плоскости телескопа на оптической оси, то X_t и Y_t есть линейные координаты тела номер 2 на фокальной плоскости, выраженными в долях фокусного расстояния. При этом считается, что ось Y_t направлена в северный полюс мира. Как вычислять тангенциальные координаты, рассмотрено ниже.

Для запуска процесса уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений необходимо выразить измеряемые угловые координаты через компоненты векторов наблюдений. Выражение абсолютных координат через компоненты вектора наблюдения дано выше.

Дифференциальные координаты можно было бы найти как разности абсолютных координат двух тел. Однако такой способ не является оптимальным. Дело в том, что наблюдаемые парные тела чаще всего располагаются на небе очень близко одно к другому. Тогда вычитание компонент векторов положения состоит в вычитании двух близких чисел, что приводит к некоторой потере точности. Разности планетоцентрических координат двух спутников не связаны с вычитанием

двух близких чисел. Именно эти разности следовало бы использовать для вычислений.

По этим причинам поступим следующим образом. Обозначим через X, Y, Z компоненты вектора наблюдения первого спутника, т. е.

$$\{X, Y, Z\} = \mathbf{S}_{\mathbf{T}}^{(\mathbf{1})}.$$

Компоненты разности векторов наблюдения второго и первого спутника обозначим через Δ_x, Δ_y, Δ_z. Тогда имеем

$$\{\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z\} = \mathbf{S}_{\mathbf{T}}^{(\mathbf{2})} - \mathbf{S}_{\mathbf{T}}^{(\mathbf{1})} = \mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{2})}(t_2) - \mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{1})}(t_1) + \mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1).$$

Здесь разность $\mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{2})}(t_2) - \mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{1})}(t_1)$ сама по себе мала, поэтому вычитание двух близких чисел не приводит к потере точности при вычислении Δ_x, Δ_y, Δ_z.

Заметим, что если первым телом является не спутник, а сама планета, то в последнем соотношении нужно просто положить $\mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{1})}(t_1) = 0$.

Для вычисления дифференциальных координат $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha$ в разных источниуах предлагаются простые приближенные формулы. Однако для вычислений легко запрограммировать точные формулы, выведенные в работе (Емельянов, 1999). Вычисления выполняются по следующей цепочке формул:

$$\begin{gathered}
R^2 = X^2 + Y^2, \\
tg\ \Delta\alpha = \tfrac{-Y\Delta_x + X\Delta_y}{R^2 + X\Delta_x + Y\Delta_y}, \\
A = 2R^2 Z\Delta_z - 2Z^2(X\Delta_x + Y\Delta_y) + R^2\Delta_z^2 - Z^2(\Delta_x^2 + \Delta_y^2), \\
B = R\sqrt{(X+\Delta_x)^2 + (Y+\Delta_y)^2} + Z(Z+\Delta_z), \\
C = R(Z+\Delta_z) + Z\sqrt{(X+\Delta_x)^2 + (Y+\Delta_y)^2}, \\
tg\ \Delta\delta = \tfrac{A}{BC}.
\end{gathered} \tag{126}$$

5.7. Вычисление углового расстояния между спутниками и позиционного угла

При уточнении орбит естественных спутников планет помимо разностей угловых координат в качестве измеряемой величины используется также угловое расстояние s между спутниками. Преимущества

использования такой измеряемой величины заключается в том, что она не зависит от ошибки определения ориентации изображения по отношению к направлению на северный полюс мира.

Мы предлагаем для вычисления углового расстояния между спутниками s следующую формулу:

$$tg\ s = \frac{\sqrt{(Y\Delta_z - Z\Delta_y)^2 + (Z\Delta_x - X\Delta_z)^2 + (X\Delta_y - Y\Delta_x)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2 + X\Delta_x + Y\Delta_y + Z\Delta_z}.$$

Здесь вычисление разностей не приводит в увеличению ошибки при вычитании двух близких чисел.

В качестве измеряемой величины может использоваться также позиционный угол P. Это угол на небесной сфере с вершиной в направлении на первый спутник между большим кругом, соединяющим направления на спутники, и линией склонений (большой круг на небесной сфере, соединяющий первый спутник и полюса мира). Для вычисления позиционного угла нужно сначала вычислить абсолютные координаты первого спутника, которые мы здесь для краткости запишем без индексов как α, δ, затем вычислить дифференциальные координаты $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha$ по формулам, которые приведены выше. Тогда позиционный угол P найдется из точного соотношения

$$\operatorname{tg} P = \frac{\cos(\delta + \Delta\delta)\sin\Delta\alpha}{\sin\Delta\delta + 2\cos(\delta + \Delta\delta)\sin\delta\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2}}. \tag{127}$$

Приближенно позиционный угол можно определить, пользуясь формулой

$$\operatorname{tg} P = \frac{Y_d}{X_d}.$$

5.8. Определение тангенциальных координат спутников

Заметим, что в практике обработки астрометрических наблюдений естественных спутников планет кроме дифференциальных угловых координат используют также так называемые тангенциальные координаты небесных тел. Как было указано выше, это линейные координаты в плоскости изображения. Начало координат совпадает с оптическим центром поля зрения, одна из осей, X_t , направлена по изображению небесной параллели в сторону востока, а другая, Y_t ,

– перпендикулярно первой оси к северу. Линейной единицей измерений является фокусное расстояние телескопа. Приближенно разности тангенциальных координат двух спутников совпадают с их дифференциальными угловыми координатами, однако точные формулы для вычисления разностей тангенциальных координат отличаются от формул для дифференциальных угловых координат.

Обычно задаются тангенциальные координаты одного небесного тела относительно другого. Тогда считают, что изображение этого другого тела находится точно на оптической оси, а плоскость изображения перпендикулярна этой оси. Допустим, что нужно вычислить тангенциальные координаты спутника 1 относительно спутника 2. Пусть, как и выше, топоцентрический радиус вектор второго спутника есть

$$S_T^{(2)} = \{X, Y, Z\},$$

а разность векторов положения спутников обозначена через Δ_x, Δ_y, Δ_z. Тогда тангециальные координаты можно определить по следующим формулам:

$$X_t = \frac{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}(-\Delta_x Y + \Delta_y X)}{\sqrt{X^2+Y^2}(X^2+Y^2+Z^2+\Delta_x X+\Delta_y Y+\Delta_z Z)},$$

$$Y_t = \frac{-\Delta_x XZ - \Delta_y YZ + \Delta_z(X^2+Y^2)}{\sqrt{X^2+Y^2}(X^2+Y^2+Z^2+\Delta_x X+\Delta_y Y+\Delta_z Z)}.$$

Тангенциальный позиционный угол P_t находится из соотношения

$$\operatorname{tg} P_t = \frac{Y_t}{X_t}, \tag{128}$$

а тангенциальное расстояние s_t по формуле

$$s_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}.$$

5.9. Определение разности координат двух спутников планеты в случае фотометрических наблюдений взаимных затмений спутников

Рассмотрим здесь специальный случай определения векторов наблюдений спутников при определении астрометрических координат

спутников планеты на основе фотометрии спутников во время из взаимных затмений. Фотометрические наблюдения взаимных затмений двух спутников планеты позволяют с высокой точностью определять взаимные расположения спутников. Рассматриваемое явление состоит в том, что один из спутников частично или полностью попадает в тень, отбрасываемую другим спутником. При этом его яркость во время наблюдений с Земли уменьшается. Уменьшение яркости затмеваемого спутника можно измерить с помощью фотометра или ПЗС-матрицы. Яркость затмеваемого спутника в первую очередь зависит от гелиоцентрического углового расстояния двух спутников. Она зависит также от угла между направлениями с затмеваемого спутника на Солнце и на Землю, т. е. от угла солнечной фазы спутника. Что касается гелиоцентрического углового расстояния двух спутников, то именно эта величина определяет изменения яркости затмеваемого спутника во времени, т. е. кривую яркости спутника. При обработке рассматриваемых фотометрических наблюдений необходимо точно моделировать процесс распространения света, учитывая конечность скорости его распространения.

Модель рассматриваемого явления поясняет рис. 15. Фотоны, излученные Солнцем в момент t_3, двигаясь прямолинейно, в момент t_2 достигли спутника 2. Барицентрический вектор Солнца в момент t_3 обозначим через $\mathbf{H}(t_3)$. Часть излученных фотонов попала на поверхность спутника 2. Другие проследовали далее. Барицентрический радиус-вектор спутника 2 в момент времени t_2 обозначим через $\mathbf{S}^{(\mathbf{2})}(t_2)$. Используя планетную и спутниковую теории, его можно вычислить по формуле

$$\mathbf{S}^{(\mathbf{2})}(t_2) = \mathbf{P}(t_2) + \mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{2})}(t_2). \tag{129}$$

Рассматриваемая группа фотонов достигла спутника 1 в некоторый момент t_1, была рассеяна его поверхностью и проследовала далее в сторону наземного наблюдателя. В момент времени t_0 они достигли Земли и сформировали изображение затмеваемого спутника в фотоприемнике телескопа.

Барицентрический радиус-вектор спутника 1 в момент времени t_1 мы обозначим через $\mathbf{S}^{(\mathbf{1})}(t_1)$. Его можно вычислить по формуле

$$\mathbf{S}^{(\mathbf{1})}(t_1) = \mathbf{P}(t_1) + \mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{1})}(t_1). \tag{130}$$

Разности моментов t_0, t_1, t_2 и t_3 задаются соотношениями

$$t_2 - t_3 = \frac{|\mathbf{S}^{(\mathbf{2})}(t_2) - \mathbf{H}(t_3)|}{c},$$

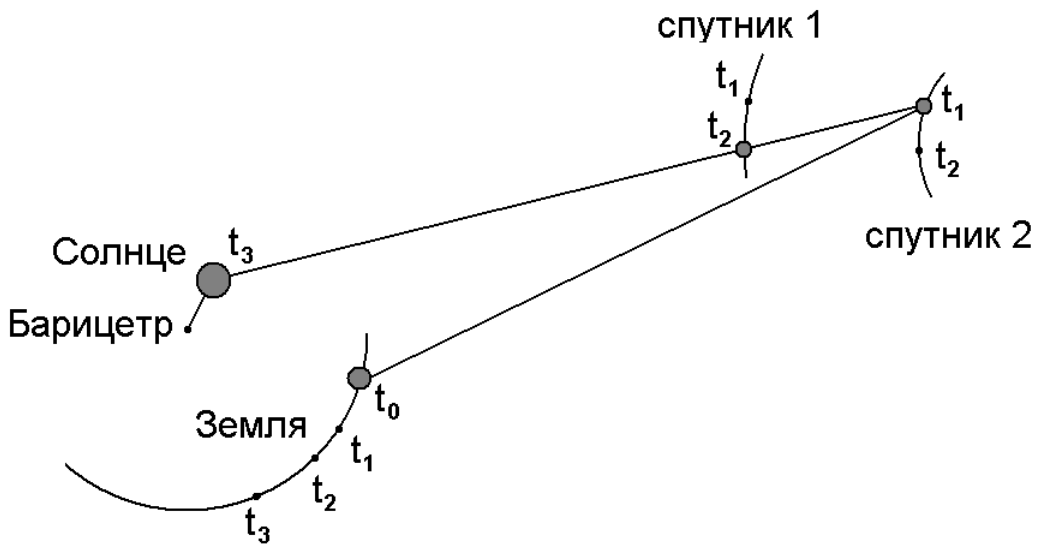

Рис. 15: Распространение света при наблюдениях взаимных затмений спутников планет. Последовательность моментов: $t_3 < t_2 < t_1 < t_0$.

$$t_1 - t_2 = \frac{|\mathbf{S^{(1)}}(t_1) - \mathbf{S^{(2)}}(t_2)|}{c}, \tag{131}$$

$$t_0 - t_1 = \frac{|\mathbf{T}(t_0) - \mathbf{S^{(1)}}(t_1)|}{c}.$$

Для определения векторов $\mathbf{H}(t_3)$, $\mathbf{S^{(2)}}(t_2)$ и $\mathbf{S^{(1)}}(t_1)$ необходимо знать моменты времени t_3 t_2 и t_1. Искомые векторы и соответствующие моменты времени можно найти решая итерациями систему уравнений (129), (130) и (131). В нулевом приближении полагаем $t_3 = t_2 = t_1 = t_0$.

Очевидно, что степень затененности спутника 1 зависит от угла между векторами $\mathbf{S^{(2)}_H}(t_2)$ и $\mathbf{S^{(1)}_H}(t_1)$, определяемыми соотношениями

$$\mathbf{S^{(2)}_H}(t_2) = \mathbf{S^{(2)}}(t_2) - \mathbf{H}(t_3)\ , \quad \mathbf{S^{(1)}_H}(t_1) = \mathbf{S^{(1)}}(t_1) - \mathbf{H}(t_3)\ .$$

Этот угол мы назовем эффективным гелиоцентрическим угловым расстоянием двух спутников и обозначим его через s^*.

Компоненты векторов $S^{(2)}_H(t_2)$ и $S^{(1)_H}(t_1)$ обозначим следующим образом:

$$S^{(1)}_H(t_1) = \{\xi, \eta, \zeta\}, \quad S^{(2)}_H(t_2) = \{\xi + \Delta_\xi, \eta + \Delta_\eta, \zeta + \Delta_\zeta\}.$$

Тогда s^* определится формулой

$$tg\ s^* = \frac{\sqrt{(\eta\Delta_\zeta - \zeta\Delta_\eta)^2 + (\zeta\Delta_\xi - \xi\Delta_\zeta)^2 + (\xi\Delta_\eta - \eta\Delta_\xi)^2}}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \xi\Delta_\xi + \eta\Delta_\eta + \zeta\Delta_\zeta},$$

где малые приращения $\Delta_\xi, \Delta_\eta, \Delta_\zeta$ следует определять по формуле

$$\{\Delta_\xi, \Delta_\eta, \Delta_\zeta\} = S_H^{(2)}(t_2) - S_H^{(1)}(t_1) = P(t_2) - P(t_1) + S_p^{(2)}(t_2) - S_p^{(1)}(t_1).$$

Заметим, что при вычислениях s^* по приведенным выше формулам не происходит потери точности из-за вычитания двух близких чисел.

Если, кроме углового гелиоцентрического расстояния, необходимо вычислять разности угловых гелиоцентрических координат двух спутников, можно воспользоваться формулами, аналогичными формулам (126).

5.10. Заключение относительно измеряемых величин при наблюдениях спутников планет

Для определения параметров движения спутников из наблюдений необходимо применять метод дифференциального уточнения, который описан в следующих разделах. Для применения метода требуется вычислять измеряемые при наблюдениях величины по известным параметрам движения. Вычисления проводятся по следующей цепочке операций: параметры $\Rightarrow$ планетоцентрические прямоугольные координаты $\Rightarrow$ векторы наблюдений $\Rightarrow$ измеряемые величины. Первый этап выполняется на основе моделей движения спутников. Этому посвящен вышеизложенный материал. Второй и третий этапы операций описаны выше в настоящей главе. Теперь мы имеем все необходимое для применения метода определения параметров движения спутников из наблюдений.

Полезную информацию по рассматриваемым здесь вопросам можно найти в работе (Емельянов, 2017).

5.11. Средства и техника наземных наблюдений спутников планет

Техника астрометрических наблюдений спутников планет совершенствовалась в течение веков. До 20 века наблюдатели смотрели

в окуляр телескопа и видели там кроме изображений звезд крест паутинных нитей и еще одну нить, положение которой можно было изменять, вращая микрометрический винт. Крест в окуляре поворачивался наблюдателем так, чтобы одно небесное тело попадало на центральное перекрестие нитей, а другое – на перекрестие с дополнительной нитью. При таких наблюдениях измерялось угловое расстояние между двумя небесными телами s и позиционный угол P с вершиной в одном светиле и лучами, направленными на другое светило и на северный полюс мира. При этом чаще всего эти две величины измерялись в разные моменты времени. Такие наблюдения называются в литературе *микрометрическими.*

В 20-м веке наблюдатели больше смотрели в микроскоп, рассматривая изображения небесных тел, запечатленных на фотопластинках. Такие наблюдения называются фотографическими. Относительные координаты измерялись под микроскопом сначала в миллиметрах, затем их значения переводились в угловые величины. Координаты планет и спутников под микроскопом отсчитываются относительно звезд. Из звездных каталогов брались необходимые экваториальные координаты звезд. По этим данным выводились экваториальные координаты планет и спутников, называемые в этом случае абсолютными. Ошибки координат звезд из звездных каталогов напрямую попадали в абсолютные координаты наблюдаемых небесных тел. Для уточнения моделей движения спутников могут использоваться относительные угловые координаты, то есть разности координат двух спутников. По таким данным одновременно в одной системе уравнений уточняются параметры орбит обоих тел. Относительные измерения избавлены от ошибок звездных каталогов, однако проблема точности этих данных связана с неопределенностью на практике в знании масштаба и ориентации изображения.

В конце 20-го века вместо фотопластинок стали применяться светочувствительные матрицы приборов с зарядовой связью (ПЗС). В англоязычном написании это Charged Coupled Device (CCD). Эти фотоприемники оказались намного более чувствительными и дающими лучшее разрешение изображения. Проблемы ограничения точности наблюдений остались те же, что и для фотопластинок. Однако обработка результатов упростилась с применением мощных компьютеров. Такие наблюдения называются просто ПЗС-наблюдениями.

Проблема внесения ошибок звездных каталогов в измеренные координаты планет и спутников решается путем создания новых более

точных звездных каталогов. В последнее время значительный прогресс в этом деле быд достигнут созданием мощного астрометрического инструмента, запущенного на орбиту вокруг Земли. Это проект GAIA.

Прогресс в точности звездных каталогов привел к новой необычной задаче. Дело в том, что фотографические астрометрические наблюдения планет и спутников призводились с начала 20-го века. На основе имевшихся тогда в распоряжении звездных каталогов были определены и опубликованы координаты наблюдавшихся небесных тел. Фотопластинки этих эпох до сих пор хранятся в так называемых "стеклянных библиотеках". Теперь появилась возможность произвести заново измерения координат планет и спутников на сохранившихся фотопластинках и получить новые астрометрические координаты этих же небесных тел с помощью современных звездных каталогов. Такая деятельность развивается в последнее время в разных институтах мира. Руководят работами сотрудники Института небесной механики и вычисления эфемерид (IMCCE), Франция (Robert, Pascu, Lainey, Arlot et al. 2016).

Спекл–интерферометрические наблюдения.

Следует особо рассмотреть один особый метод астрометрических наблюдений. Прогресс в астрономической технике привел к появлению спекл-интерферометрических наблюдений. Методика таких измерений состоит в следующем. Дифракционная картина, создаваемая в фокусе телескопа светом от планеты и спутника, регистрируется приемником света (ПЗС-матрица) с очень короткой экспозицией порядка 10 мс (время "замороженности"турбуленции атмосферы). При таком способе регистрации изображение планеты получается в фокальной поверхности телескопа в виде группы пятнышек-спекул, случайно разбросанных внутри небольшой области, определяемой атмосферным кружком размытости изображения. Каждая спекула соответствует некоторой флуктуации света в турбулентной атмосфере Земли. Свет от спутника, попадающий в телескоп под небольшим углом к направлению на планету, при условии, что он проходит через те же флуктуации атмосферы (изопланатизм), создает в фокальной поверхности группу спекул, подобную группе спекул от планеты, но смещенную в соответствии с угловым расстоянием между планетой и спутником и их позиционным углом. Точность регистрации расположения спекул определяется размером диффракционного пятна для данного телескопа. Обычно регистрируют длинный

ряд последовательных по времени кадров. Измеренные линейные координаты спекул со всех кадров вводятся в компьютер и подвергаются корреляционному анализу. Каждой спекуле, соответствующей планете, находится спекула, соответствующая спутнику. Статистическая обработка результатов таких измерений дает средние значения углового расстояния и их позиционного угла. В итоге точность спекл-интерферометрических наблюдений в сотни раз превосходит точность, которую дают обычные фотографические наблюдения.

Глава 6. Построение моделей движения небесных тел на основе наблюдений

6.1. Метод дифференциального уточнения параметров движения небесных тел на основе наблюдений. Применение метода наименьших квадратов

В небесной механике существует ряд задач, различных по изучаемым объектам, но сходных по способу их решения. Эти задачи можно сформулировать как "Уточнение параметров движения небесных тел из наблюдений". Детальное объяснение того, что мы понимаем под параметрами и наблюдениями дано в предыдущих разделах. Здесь опишем эти понятия кратко.

Параметрами движения небесных тел называются величины, от которых зависит движение тел и которые по крайней мере на некотором этапе изучения и на некотором интервале времени считаются постоянными. Мы рассматриваем три типа параметров. Первый тип – параметры, которые входят в уравнения движения. Они существуют еще до решения уравнений. Второй тип параметров появляется в процессе решения дифференциальных уравнений движения. Это либо произвольные постоянные в общем аналитическом решении уравнений, либо начальные условия численного интегрирования, то есть координаты и компоненты скорости тел в начальный момент времени. Параметры третьего типа входят в соотношения, связывающие результаты наблюдений и координаты небесного тела. Они не связаны с движением изучаемого объекта, но зависят от того, как мы наблюдаем, и называются параметрами условий наблюдений.

Примерами параметров первого, второго и третьего типов могут служить гравитационный параметр небесного тела, элементы его орбиты и геоцентрические координаты обсерватории, соответственно.

В процессе наблюдений измеряются какие-либо величины, зависящие от положения или скорости небесного тела. Они так и называются – **измеряемые величины**. Наблюдения дают нам значения измеряемых величин на моменты измерений. Одновременно могут измеряться несколько величин. Для простоты изложения без нарушения общности задачи будем полагать, что все величины измеряются независимо, каждая в один момент времени. Моменты измерений разных величин могут совпадать. Примерами измеряемых величин являются угловые топоцентрические экваториальные координаты небесного тела, топоцентрическая дальность небесного тела, разность угловых

координат двух тел. Измеряемая величина всегда является реальной физической величиной, получаемой с помощью измерительных приборов в определенный момент времени в определенном месте. Моменты измерений отсчитываются по часам, расположенным в пункте наблюдений. При этом должна быть известна связь шкалы времени наблюдений со шкалой времени, которое фигурирует в модели движения, то есть в уравнениях движения.

Задачу уточнения модели движения небесного тела сформулируем следующим образом: даны результаты наблюдений, требуется найти параметры движения.

Пусть ξ – одна из измеряемых величин, а $p_1, p_2, ..., p_n$ – истинные, но неизвестные значения параметров движения небесного тела. Измерение делается в некоторый момент времени t. Измерений обычно делается много, каждому приписывается номер i. В итоге мы имеем ряд значений измеряемых величин ξ_i на ряд моментов времени t_i, $i = 1, 2, ...m$, где m - число измерений.

При построении модели или теории движения небесного тела неизбежно используются те или иные системы координат. Обычно это координаты, которые фигурируют в дифференциальных уравнениях движения. В отличие от измеряемых величин, которые всегда реальны, ибо они получаются из реальных измерительных приборов, координаты – это некоторые абстрактные понятия. В большинстве случаев их ничем невозможно измерить. Например, мы не можем непосредственно измерить прямоугольные геоцентрические координаты спутника Земли. Оси любой системы координат связывают с каким-либо реальным объектом. Например, оси земной системы координат связывают с положениями ряда опорных обсерваторий на поверхности Земли. Оси небесной системы координат связывают с положениями звезд или внегалактических радиоисточников. В любом случае строится некоторая модель системы координат. Эта модель может со временем измениться, усовершенствоваться.

Теория и модель движения небесного дают нам модельные значения некоторых координат на заданный момент времени. Чаще всего предполагается, что оси системы координат невращающиеся, то есть всегда взаимно параллельны осям некоторой неинерциальной системы координат. Относительно времени предполагается, что оно равномерное. Однако эти свойства координат и времени обеспечиваются только моделью связи с некоторыми реальными небесными телами или реальными процессами.

Теория и модель движения дают нам на любой заданный момент времени t значения кординат, которые здесь для определенности будем считать прямоугольными и обозначим их через x, y, z. Координаты зависят еще от параметров движения, которые обозначим здесь через $p_1, p_2, ..., p_j$. Здесь число параметров j для одного небесного тела может быть равно 6 или больше в зависимости от теории. Таким образом из теории мы имеем функции

$$x = x(t, p_1, p_2, ..., p_j), \quad y = y(t, p_1, p_2, ..., p_j), \quad y = y(t, p_1, p_2, ..., p_j). \tag{132}$$

Эти функции называют законом движения.

При проведении наблюдений мы обязательно должны знать, как связана измеряемая величина ξ_i с координатами небесного тела. Эта связь задается некоторой моделью измерений. Модель может включать в себя некоторые параметры. Обозначим такие параметры через $p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n$. Модель наблюдений дает нам функцию

$$\xi = \xi(t, x, y, z, p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n). \tag{133}$$

Подставляя теперь функции (132) для координат в правую часть соотношения (133), получим модельное значение измеряемой величины ξ^c, как известную функцию времени t и параметров движения:

$$\xi^c = \xi(t, p_1, p_2, ..., p_n). \tag{134}$$

Любая модель содержит ошибки. Обозначим ошибку модели через δ_{th}. Тогда истинное значение измеряемой величины ξ определится путем исключения ошибки δ_{th} :

$$\xi = \xi(t, p_1, p_2, ..., p_n) - \delta_{th}.$$

В действительности измеряемые величины получаются из наблюдений и поэтому содержат ошибки наблюдений. Пусть ξ^o – наблюденное значение измеряемой величины, а δ_{obs} – ее ошибка. Вычитая ошибку наблюдения, снова получим истинное значение измеряемой величины

$$\xi = \xi^o - \delta_{obs}.$$

Приравнивая правые части последних равенств, получим

$$\xi^o = \xi(t, p_1, p_2, ..., p_n) + \delta_{obs} - \delta_{th}.$$

После выполнения измерений в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_m$, получим систему уравнений

$$\xi_i^o = \xi(t_i, p_1, p_2, ..., p_n) + \delta_{obs}^{(i)} - \delta_{th}^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3, ..., m) \tag{135}$$

относительно истинных значений искомых параметров. Величины

$$\delta_{sum}^{(i)} = \delta_{obs}^{(i)} - \delta_{th}^{(i)}$$

называют суммарными ошибками теории и наблюдений.

При решении такой задачи точные значения ошибок $\delta_{obs}^{(i)}$ и $\delta_{th}^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, ..., m)$ остаются неизвестными. Их обычно рассматривают как случайные величины с заданными вероятностными характеристиками (законами распределения, моментами и т. п.).

Таким образом мы имеем систему m уравнений относительно $m+n$ неизвестных

$$\delta_{sum}^{(i)} \quad (i = 1, 2, ..., m), \quad p_1, p_2, ..., p_n,$$

в которой число неизвестных больше числа уравнений.

В такой ситуации уравнения (135) заменяют так называемой системой *условных уравнений*

$$\xi_i^o = \xi(t_i, p_1, p_2, ..., p_n) \quad (i = 1, 2, 3, ..., m), \tag{136}$$

представляющей собой систему из m уравнений с n неизвестными $p_1, p_2, ..., p_n$. Система условных уравнений (136) несовместна, она не имеет решения, поскольку получена путем вычитания из правых частей точных уравнений (135) случайных независимых суммарных ошибок $\delta_{sum}^{(i)}$.

Можно пытаться найти некоторую приближенную оценку искомых параметров. При этом получаемые значения должны по возможности мало отличаться от истинных. Алгоритм нахождения приближенной оценки называют *алгоритмом фильтрации.* Основной задачей этого алгоритма является возможное уменьшение (фильтрация) влияния ошибок теории и ошибок наблюдений. Выбор алгоритма фильтрации неоднозначен, его структура зависит от имеющихся сведений о суммарной ошибке $\delta_{sum}^{(i)}$. На практике таких сведений очень мало или они вообще отсутствуют. Поэтому приходится довольствоваться теми или иными предположениями о свойствах суммарной ошибки и алгоритмом фильтрации, основанном на этих предположениях.

Соотношения (136) можно рассматривать как уравнения относительно искомых параметров $p_1, p_2, ..., p_n$. Решить эти уравнения непосредственно на практике не представляется возможным еще и по другой причине. Дело в том, что $\xi(t_i, p_1, p_2, ..., p_n)$ – сугубо нелинейная функция своих аргументов. Чаще всего ее бывает невозможно даже записать в явном виде. Тем более нельзя получить в явном виде решение уравнений (136).

Решение задачи будем выполнять по схеме, которая уже представлена в Главе 1. Обоснование излагаемых здесь методов можно найти в книге (Эльясберг, 1976).

Практически на любом этапе исследований бывают известны некоторые приближенные значения искомых параметров. Назовем эти значения предварительными и обозначим их через $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, ..., p_n^{(0)}$.

Пусть точные значения параметров $p_1, p_2, ..., p_n$ отличаются от предварительных приближенных на величины поправок

$$\Delta p_1 = p_1 - p_1^{(0)}, \quad \Delta p_2 = p_2 - p_2^{(0)}, \ ... \ , \quad \Delta p_n = p_n - p_n^{(0)}.$$

Тогда (136) можно записать в виде

$$\xi_i^o = \xi(t_i, p_1^{(0)} + \Delta p_1, p_2^{(0)} + \Delta p_2, ... \ , p_n^{(0)} + \Delta p_n). \tag{137}$$

Для большинства небесных тел модели движения развиваются уже давно. Поэтому на очередном этапе уточнения предварительные значения параметров уже близки к истинным. Это позволяет считать поправки $\Delta p_1, \Delta p_2, \ ... \ , \ \Delta p_n$ малыми и разложить правую часть соотношения (137) в ряд Тейлора по степеням поправок:

$$\xi_i^o = \xi(t_i, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, ... \ , p_n^{(0)}) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \xi}{\partial p_k} \right)_i \Delta p_k + \ ... \ . \tag{138}$$

Производные в правых частях вычисляются при

$$t = t_i, \ \ p_1 = p_1^{(0)}, \ ... \ , \ p_n = p_n^{(0)}.$$

Ограничимся величинами первого порядка малости относительно поправок и введем обозначения

$$\xi_i^{c(0)} = \xi(t_i, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, ... \ , p_n^{(0)}) \ \ , \tag{139}$$

$$a_k^{(i)} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial p_k} \right)_i , \tag{140}$$

$$\Delta\xi_i = \xi_i^o - \xi_i^{c(0)}. \tag{141}$$

В результате получим

$$\Delta\xi_i = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots \ , \ m). \tag{142}$$

Приближенные соотношения (142) называются *условными уравнениями* для определения поправок к параметрам. Они являются линейными неоднородными алгебраическими уравнениями относительно искомых поправок $\Delta p_k, \quad (k = 1, 2, \ \dots \ , \ n)$.

Условные уравнения являются приближенными по двум причинам. Во-первых, в левых частях отброшены ошибки наблюдений и ошибки теории. Во-вторых, в правых частях отброшены все члены порядка квадратов поправок и выше. Уравнения (142) иногда называют линеаризованными по отношению к условным уравнениям (136).

Делая те или иные допущения относительно ошибок теории и ошибок наблюдений, можно выбрать один из разработанных алгоритмов фильтрации и найти приближенное решение условных уравнений (142). Существующие методы позволяют также оценить погрешность решения.

После того, как поправки найдены, прибавляем их к предварительным значениям параметров и получаем новые и, как мы надеемся, более точные их значения. Такой метод определения параметров движения небесных тел называется **дифференциальным уточнением**.

В силу приближенности условных уравнений и приближенности их решения новые значения параметров будут недостаточно точными. Однако уточнение можно провести повторно несколько раз. Если процесс уточнения сходится, то есть поправки от шага к шагу убывают по модулю, то вычисления можно прекратить, когда поправки станут существенно меньше их погрешностей. В этом случае мы получим значения параметров движения небесного тела $\overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_n$, соответствующие всем используемым при этом наблюдениям. Это соответствие однозначно определяется заданной моделью движения (134) и выбранным алгоритмом фильтрации.

Теоретически сходимость дифференциального уточнения почти не исследована. Можно привести примеры, в которых процесс не сходится или сходится к ложным значениям искомых параметров. При

использовании метода дифференциального уточнения следует учитывать, что с некоторого шага уточнения поправки начинают колебаться из-за неизбежных ошибок вычислений. После появления таких колебаний дальнейшие попытки уточнения параметров становятся бесполезными.

С другой стороны, когда описанный процесс хорошо сходится, не возникает необходимости в точном вычислении производных $\left(\frac{\partial \xi}{\partial p_k}\right)_i$, так как в процессе уточнения они используются для определения все уменьшающихся поправок $\Delta p_1, \Delta p_2, \ \dots \ , \ \Delta p_n$. В этих условиях лежащие в разумных пределах погрешности вычисления указанных производных могут лишь несколько увеличить число шагов уточнения, практически не отражаясь на точности окончательного результата.

На первом и последующих шагах уточнения после вычисления поправок $\Delta p_1, \Delta p_2, \ \dots \ , \ \Delta p_n$ можно найти так называемые невязки условных уравнений

$$\delta_i = \Delta \xi_i - \sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots \ , \ m). \tag{143}$$

После того, как процесс уточнения завершен, и поправки к параметрам стали пренебрежимо малыми, невязки условных уравнений станут окончательными рассогласованиями или невязками уточненной теории с наблюдениями

$$\delta_i = \xi_i^o - \xi(t_i, \overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_n) \quad (i = 1, 2, \ \dots \ , \ m). \tag{144}$$

В литературе и на практике эти рассогласования символически обозначают как О-С.

Совокупность невязок часто используют для оценки качества полученного решения. Однако для установления близости решения к истинному этого оказывается недостаточно.

Из всех имеющихся алгоритмов фильтрации в практической небесной механике чаще всего применяется *метод наименьших квадратов* (МНК). Этот метод обладает рядом преимуществ по сравнению с другими алгоритмами фильтрации. Основное преимущество заключается в его простоте. Подробное изложение МНК содержится в книге (Эльясберг, 1976).

Для краткости описания метода наименьших квадратов введем

матричные обозначения

$$\mathbf{\Delta p} = \begin{pmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ . \\ . \\ . \\ \Delta p_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Delta}\xi = \begin{pmatrix} \Delta\xi_1 \\ \Delta\xi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \Delta\xi_m \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \delta_m \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & ... & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & ... & a_n^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^{(m)} & a_2^{(m)} & ... & a_n^{(m)} \end{pmatrix}, \quad \delta_{\mathbf{sum}} = \begin{pmatrix} \delta_{sum}^{(1)} \\ \delta_{sum}^{(2)} \\ . \\ . \\ . \\ \delta_{sum}^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Тогда систему условных уравнений (142) и их невязки (143) можно записать в виде

$$\mathbf{\Delta}\xi = \mathbf{A}\ \mathbf{\Delta p}\ , \tag{145}$$

$$\delta = \mathbf{\Delta}\xi - \mathbf{A}\ \mathbf{\Delta p}\ . \tag{146}$$

Метод наименьших квадратов основан на выводах теории вероятностей. Он справедлив при соблюдении следующих условий (Эльясберг, 1976).

1. Задана модель движения (134).
2. Вектор ошибок $\delta_{\mathbf{sum}}$ является случайным.
3. Ковариационная матрица ошибок является невырожденной, т. е. определитель матрицы не равен нулю.
4. Математическое ожидание $\mathbf{E}(\delta_{\mathbf{sum}})$ равно нулю, т. е.

$$\mathbf{E}(\delta_{\mathbf{sum}}) = 0\ .$$

5. Ковариационная матрица $\mathbf{D}(\delta_{\mathbf{sum}})$ задана с точностью до некоторого произвольного множителя, т. е.

$$\mathbf{D}(\delta_{\mathbf{sum}}) = \sigma^2\ \mathbf{K}\ .$$

Произвольный множитель σ^2 уточняется в процессе применения метода.

При сделанных допущениях алгоритм фильтрации по методу наименьших квадратов сводится к отысканию вектора $\mathbf{\Delta p}$ из условия абсолютного минимума квадратичной формы

$$S(\mathbf{\Delta p}) = \delta^T \mathbf{K}^{-1}\delta = [\mathbf{\Delta}\xi - \mathbf{A}\ \mathbf{\Delta p}]^T\mathbf{K}^{-1}[\mathbf{\Delta}\xi - \mathbf{A}\ \mathbf{\Delta p}]. \qquad (147)$$

Заметим, что на практике проверка соблюдения данных условий оказывается невозможной. В частности, матрица $\mathbf{K}$ чаще всего неизвестна.

Свойство случайности вектора ошибок и понятие его ковариационной матрицы следует пояснить для лучшего понимания последующего изложения. В теории вероятности рассматривается понятие "испытания". Это одна из реализаций случайной величины. Если, например, под случайной величиной рассматривать результат бросания монетки, то каждое такое бросание является испытанием, а результат – "орел" или "решка" – реализацией случайной величины. В методе наименьших квадратов набор произведенных наблюдений является одним единственным "испытанием" случайных ошибок наблюдений. И других испытаний этой случайной величины у нас нет и быть не может. Поэтому ковариационная матрица ошибок $\mathbf{D}(\delta_{\mathbf{sum}})$ нам недоступна. Однако, рассматривая набор ошибок, как случайную величину, мы подразумеваем существование ковариационной матрицы и принимаем по отношения к ней ту или иную гипотезу. Чаще всего принимается, что ковариационная матрица ошибок диагональна, т. е. ошибки между собой не коррелированы.

Широкое распространение и привычность метода наименьших квадратов часто приводят к некритическому отношению к получаемым по этому методу результатам. Во многих случаях из результатов делаются неверные выводы. Причиной этого является обычно несоответствие реальных условий, в которых решается данная практическая задача, с условиями, принятыми при обосновании метода. Однако нередко МНК приводит к удовлетворительным результатам даже при невыполнении условий.

На практике ковариационная матрица ошибок неизвестна. В большинстве задач и механических моделей можно принять, что ошибки наблюдений некоррелированы. Тогда матрица $\mathbf{K}$ оказывается диагональной. Если имеется какая-то информация о точности одних наблюдений по отношению к точности других, то матрицу $\mathbf{K}$ можно сделать единичной. Для этого каждому наблюдению присваивается некоторый вес $w_i \quad (i = 1, 2, ..., m)$. Каждое условное уравнение

умножают почленно на установленный вес. При этом ошибки также оказываются умноженными на этот вес. Подбирая соответствующим образом веса наблюдений, можно привести наблюдения к равноточным. Тогда а матрица $\mathbf{K}$ становится единичной. Как на практике подбирать веса наблюдений, рассмотрено ниже. В случае единичной матрицы $\mathbf{K}$ соотношение (147) принимает вид

$$S(\mathbf{\Delta p}) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\Delta\xi_i - a_k^{(i)} \Delta p_k \right)^2 \ . \tag{148}$$

Отыскание минимума функции $S(\mathbf{\Delta p})$ сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial S(\mathbf{\Delta p})}{\partial \Delta p_k} = 0 \quad (k = 1, 2, ..., n). \tag{149}$$

Как видно из (148), уравнения (149) содержат только нулевые и первые степени искомых поправок $\Delta p_k \quad (k = 1, 2, ..., n)$. Поэтому система (149) оказывается системой линейных неоднородных уравнений. Эту систему принято называть *системой нормальных уравнений.*

После выполнения дифференцирования в (149) систему нормальных уравнений можно записать в виде

$$\mathbf{L}\ \mathbf{\Delta p} = \mathbf{d}\ ,$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{d}$ суть матрица и вектор

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & ... & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & ... & l_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & l_{nn} \end{pmatrix} \ , \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{pmatrix}, \tag{150}$$

элементы которых вычисляются по формулам

$$l_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)} a_j^{(i)} \quad (k, j = 1, 2, \ ... \ , \ n), \tag{151}$$

$$d_k = \sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)} \Delta\xi_i \quad (k = 1, 2, \ ... \ , \ n). \tag{152}$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится еще величина:

$$d_0 = \sum_{i=1}^{m} (\Delta\xi_i)^2. \tag{153}$$

Рассмотрим матрицу коэффициентов нормальных уравнений $\mathbf{L}$. Как видно из (151), матрица $\mathbf{L}$ – симметричная, с положительными диагональными элементами. Найдем одним из известных способов матрицу $\mathbf{L}^{-1}$, обратную матрице $\mathbf{L}$. Тогда решение системы нормальных уравнений получим из матричного соотношения

$$\mathbf{\Delta p} = \mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{d}\,. \tag{154}$$

Для того, чтобы существовало решение системы нормальных уравнений и его можно было найти, матрица $\mathbf{L}$ должна удовлетворять определенным условиям. В частности, ее ранг должен быть равен n . На практике часто оказывается, что определитель матрицы нормальных уравнений близок нулю, и вычислить обратную матрицу $\mathbf{L}^{-1}$ можно с весьма ограниченной точностью.

Если поправки все же найдены, можно определить среднеквадратические ошибки поправок следующим образом. Сначала вычислим так называемую среднеквадратическую ошибку на единицу веса σ_0 по формуле

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{m-n}\left[d_0 - (\mathbf{d}\mathbf{\Delta p})\right], \tag{155}$$

где $\mathbf{\Delta p}$ найденный вектор поправок. Умножим теперь все элементы матрицы $\mathbf{L}^{-1}$ на σ_0^2. Полученная таким образом матрица

$$\mathbf{D} = \sigma_0^2 \mathbf{L}^{-1} \tag{156}$$

называется ковариационной матрицей ошибок поправок, которую часто называют просто ковариационной матрицей параметров. Запишем ее в виде

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}.$$

Согласно методу наименьших квадратов любой диагональный элемент матрицы $\mathbf{D}$ с номером k равен квадрату среднеквадратической ошибки σ_k поправки Δp_k, то есть

$$\sigma_k = \sqrt{D_{kk}}. \tag{157}$$

Из (155), (156), (157) видно, что ошибки поправок уточняемых параметров убывают с ростом числа наблюдений m. Приближенно они пропорциональны $\frac{1}{\sqrt{m}}$, так как на практике число наблюдений намного больше числа уточняемых параметров.

Следствием метода наименьших квадратов является стремление к нулю среднеквадратической ошибки решения с увеличением числа наблюдений.

Сделанные здесь выводы справедливы при определенных условиях, налагаемых не только на ошибки теории и наблюдений, но также на принятую модель движения небесного тела. Подробнее эти условия рассмотрены в книге (Эльясберг, 1976).

Величины r_{kj}, определенные соотношением

$$r_{kj} = \frac{D_{kj}}{\sigma_k \sigma_j},$$

называются коэффициентами корреляции между ошибками поправок, а матрица

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется корреляционной матрицей.

После нескольких шагов уточнения, когда поправки становятся достаточно малыми, ошибки поправок характеризуют ошибки улучшенных значений параметров, обусловленные как ошибками теории, так и ошибками наблюдений.

Качество согласования теории с наблюдениями после уточнения параметров движения небесного тела будет характеризоваться величиной

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{d_0}{m}} \ , \tag{158}$$

которая после успешного уточнения параметров является среднеквадратической величиной невязок δ_i (144).

Применение МНК на практике часто приводит к неожиданным проблемам. Дело в том, в условиях исследований на основе реальных наблюдений небесных тел с использованием ограниченных по точности теорий не всегда строго выполняются те допущения, при которых правомерно применение МНК. Если ошибки теории превалируют над

ошибками наблюдений, то суммарная ошибка не будет случайной величиной. Это приведет к тому, что с увеличением числа наблюдений точность результата не будет улучшаться, а решение в свою очередь приобретет зависимость от состава измерений, то есть оттого, в какие моменты делались измерения. Наличие такой зависимости делает результат не вполне достоверным.

В конкретных задачах по уточнению параметров движения небесных тел часто оказывается, что определитель матрицы $\mathbf{L}$ близок к нулю. В этих случаях мы имеем дело с так называемыми плохо обусловленными системами нормальных уравнений. При решении таких систем поправки к параметрам могут получаться столь грубыми, что процесс уточнения не будет сходиться. Причина плохой обусловленности заключается не в самом методе наименьших квадратов, а свойствах применяемой механической модели.

Примером случая с плохой обусловленностью является процесс уточнения долготы узла кеплеровской орбиты небесного тела при очень малом ее наклоне. Другой пример – совместное уточнение долготы перицентра орбиты и средней аномалии в эпоху при малых эксцентриситетах орбиты. Показателем плохой обусловленности может служить близость к единице одного или нескольких коэффициентов корреляции. Чтобы уменьшить плохую обусловленность, можно исключить из списка уточняемых параметров тот из них, который дает сильную корреляцию, фиксируя его предварительное значение.

Успех уточнения параметров движения из наблюдений существенно зависит от состава наблюдений. В частности, если наблюдения покрывают лишь незначительную часть орбиты небесного тела, то определение параметров может стать невозможным. Подробнее зависимость состоятельности МНК от состава наблюдений проанализирована в книге (Эльясберг, 1976).

Более подробно и вместе с обоснованием МНК изложен в книге (Эльясберг, 1976). В этой книге также подробно исследована зависимость обусловленности в МНК от состава наблюдений.

Существенной частью алгоритма уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений является вычисление значений измеряемой величины на заданные моменты времени, а также ее производных по улучшаемым параметрам. Для этой цели можно применять как формулы аналитической теории движения небесного тела, так и методы численного интегрирования уравнений их движения. При этом количество вычислительных операций может сильно разли-

чаться. При использовании аналитической теории время вычислений будет пропорционально количеству используемых наблюдений. Оно в этом случае не зависит от интервала времени, на котором велись наблюдения. При численном интегрировании наоборот: затраты времени на вычисления пропорциональны интервалу времени наблюдений и не зависят от числа наблюдений. Порядок всех таких вычислений объяснен в следующих параграфах.

6.2. Вычисление измеряемых величин и частных производных от измеряемых величин по уточняемым параметрам

6.2.1. Общий порядок вычислений

В процессе дифференциального уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений требуется вычислять значения измеряемых величин и частных производных от измеряемых величин по уточняемым параметрам на моменты наблюдений. Эти вычисления делаются на основе принятого закона движения небесных тел. Закон движения описывается в какой-либо системе координат. Чаще всего это прямоугольные координаты x, y, z. Закон движения задается функциями

$$x = x(t, p_1, p_2, ..., p_j), \quad y = y(t, p_1, p_2, ..., p_j), \quad y = y(t, p_1, p_2, ..., p_j). \tag{159}$$

В предыдущем разделе введено понятие измеряемой величины. Наблюдения дают нам значения измеряемых величин на моменты измерений. Пусть ξ – одна из измеряемых величин.

Измеряемая величина связана с координатами небесного тела. Эта связь задается некоторой моделью измерений. Модель может включать в себя некоторые параметры, обозначаемые через $p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n$. Модель наблюдений дает нам функцию

$$\xi = \xi(t, x, y, z, p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n). \tag{160}$$

Таким образом, в методе дифференциального уточнения параметров движения измеряемая величина ξ, как функция уточняемых параметров $p_1, p_2, ..., p_n$, является сложной функцией. Первоначально она задается как функция от прямоугольных координат небесного тела, которые в свою очередь в силу закона движения являются функциями времени t и параметров движения. Зависимость $\xi(t, x, y, z, ...)$ не

связана с законом движения небесного тела, однако она включает в себя время t и параметры, которые также могут рассматриваться как уточняемые. В отличие от параметров движения небесного их называют параметрами условий наблюдений. Функция $\xi(t, x, y, z, ...)$ определяется только выбором измеряемой величины. В астрономической практике используется большое множество величин, измеряемых в процессе наблюдений. В настоящем разделе рассматриваются некоторые из них, и даются явные выражения для функции
$\xi(t, x, y, z, p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n)$.

Далее рассматриваются зависимости измеряемых величин как от параметров условий наблюдений, так и от параметров движения. В итоге эти зависимости отображаются функцией времени t и всех уточняемых параметров

$$\xi = \xi(t, p_1, p_2, ..., p_n). \tag{161}$$

Именно эта функция используется для составления условных уравнений при уточнении параметров методом наименьших квадратов.

Для применения метода дифференциального уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений необходимо, кроме самих измеряемых величин, вычислять также частные производные от измеряемых величин по уточняемым параметрам. Порядок этих вычислений существенно зависит оттого, как получается закон движения.

Вычисление координат небесного тела x, y, z делается либо по формулам построенной заранее аналитической теории движения, либо на основе численного интегрирования уравнений движения.

Частные производные от измеряемых величин по уточняемым параметрам на моменты наблюдений вычисляются на основе рассмотренных выше зависимостей. Так как промежуточными величинами являются координаты небесного тела x, y, z, то для искомых производных можно записать следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial p_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial p_2} \\ ... \\ \frac{\partial \xi}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p_1} & \frac{\partial y}{\partial p_1} & \frac{\partial z}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x}{\partial p_2} & \frac{\partial y}{\partial p_2} & \frac{\partial z}{\partial p_2} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial x}{\partial p_n} & \frac{\partial y}{\partial p_n} & \frac{\partial z}{\partial p_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{162}$$

Как видно из этих соотношений, вычислительная задача разделяется на две независимые части. В первой из них находятся значения

частных производных от прямоугольных координат по параметрам движения небесного тела, т. е. матрица **A**. Во второй – производные от измеряемой величины по прямоугольным координатам небесного тела, вектор-столбец **B**.

Вектор **B** вычисляется по формулам, получаемым дифференцированием явного выражения для $\xi(x, y, z)$. Вычисление матрицы параметров **A** может выполняться для каждого момента наблюдений как по формулам, следующим из аналитической теории движения, так и в процессе численного интегрирования дифференциальных уравнений, специально построенных для частных производных от координат по параметрам движения. В последнем случае элементы матрицы **A** называют изохронными производными, поскольку их значения нам нужны на те же моменты времени, что и сами координаты. Дифференциальные уравнения для изохронных производных интегрируют совместно с уравнениями движения.

Заметим, что в вышеизложенных выкладках молчаливо предполагается, что измеряемая величина зависит только от координат небесного тела. Однако в практике уточнения параметров из наблюдений используются также измеряемые величины, зависящие о компонент скорости. Примером может служить уточнение параметров движения искусственного спутника спутника Земли на основе наземных радиотехнических допплеровских измерений. В этом случае измеряется лучевая скорость, т. е. скорость изменения топоцентрического расстояния спутника. В этом случае вектор-столбец **B** приобретет еще три элемента $\frac{\partial \xi}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial \xi}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial \xi}{\partial \dot{z}}$, а матрица **A** еще три дополнительных соответствующих столбца. Все дальнейшие рассуждения и выкладки будут аналогичны тому, что получается в случае зависимости измеряемой величины только от координат. Поскольку в практике наземных наблюдений спутников планет допплеровские наблюдения проводится только в исключительных случаях, мы ограничимся далее рассмотрением зависимости измеряемой величины ξ лишь от прямоугольных координат спутника.

При изучении динамики естественных спутников планет в некоторых работах строятся и применяются аналитические теории движения. Закон движения находится как общее решение дифференциальных уравнений движения. Тогда координаты небесного тела представлены аналитическими функциями от времени и параметров движения. В аналитических теориях параметры движения часто называют элементами орбиты, поскольку они связаны с моделью кепле-

ровского движения и кеплеровыми элементами. Элементы матрицы **A** в таких задачах получаются аналитическим дифференцированием прямоугольных координат по элементам орбиты. Формулы для этих производных обычно приводятся вместе с формулами для координат и компонент скорости. Именно так сделано в настоящей книге. Выражения для производных можно найти там же, где описываются соответствующие аналитические модели движения.

В следующих разделах сначала рассматриваются формулы для вычисления элементов матрицы **A** в различных конкретных задачах. Затем даются формулы для вычисления измеряемых величин ξ и частных производных от них по прямоугольным координатам и параметрам условий наблюдений для различных типов наблюдений. В заключение данной главы даются некоторые замечания относительно составления условных уравнений.

6.2.2. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче трех тел. Уточнение начальных условий уравнений движения

Рассмотрим процедуру дифференциального уточнения параметров движения в случае задачи трех тел. Поскольку точного аналитического решения задачи трех тел до сих пор не найдено, уравнения движения в этой задаче решаются методами численного интегрирования. В качестве параметров движения в этом случае чаще всего рассматривают начальные условия, то есть значения координат на некоторый начальный момент времени t_0. Уточняемыми параметрами могут быть также постоянные, которые входят в дифференциальные уравнения движения.

В рассматриваемой задаче определяются параметры движения второго тела относительно первого, которое считается главным, как наиболее массивное. Движение происходит под возмущающим действием третьего тела, движение которого задано координатами, как известными функциями времени.

В общем случае могут определяться из наблюдений параметры движения второго и третьего тела в едином процессе дифференциального уточнения. Тогда уравнения движения, а также уравнения для изменения изохронных производных второго и третьего тел интегрируются совместно.

Тела будем считать материальными точками. Начало системы не-

вращающихся прямоугольных координат поместим в первое из тел. Координаты второго тела, движение которого изучается, в отличие от обычных обозначений, обозначим теперь через x_1, x_2, x_3. Координаты третьего, возмущающего тела обозначим через x'_1, x'_2, x'_3 .

Уравнения движения второго тела в принятых обозначениях запишутся в виде

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = -Gm\frac{x_i}{r^3} - Gm'\left(\frac{x_i - x'_i}{\Delta^3} + \frac{x'_i}{r'^3}\right) = F_i \quad (i = 1, 2, 3)\ , \qquad (163)$$

где G – универсальная гравитационная постоянная, m – масса первого тела, m' – масса возмущающего тела. Кроме того, мы используем следующие обозначения:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad r' = \sqrt{{x'_1}^2 + {x'_2}^2 + {x'_3}^2},$$

$$\Delta = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)}.$$

Уравнения движения третьего тела могут быть записаны аналогично.

На практике вместо масс тел рассматривают их гравитационные параметры $\mu = Gm$, $\mu' = Gm'$.

Заметим, что приводимые ниже формулы будут пригодны и для более общего случая, когда координаты возмущающего тела вычисляются на основе более сложной модели, учитывающей влияние других тел.

Параметрами изучаемого движения второго тела будут начальные условия, то есть координаты и компоненты скорости

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ \dot{x}_1^{(0)},\ \dot{x}_2^{(0)},\ \dot{x}_3^{(0)},$$

заданные на момент времени t_0.

Искомые частные производные, необходимые для дифференци-

ального уточнения параметров, образуют матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_1^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_1^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_3^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \dot{x}_1^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial \dot{x}_1^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial \dot{x}_1^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \dot{x}_2^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial \dot{x}_2^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial \dot{x}_2^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \dot{x}_3^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial \dot{x}_3^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial \dot{x}_3^{(0)}} \end{pmatrix}. \tag{164}$$

Для элементов этой матрицы можно составить дифференциальные уравнения путем дифференцирования левых и правых частей уравнений (163) по параметру. Выполняя последовательно эту операцию для каждого из параметров, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^{(0)}}\right) = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_j^{(0)}}\ , \tag{165}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_j^{(0)}}\right) = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \dot{x}_j^{(0)}}\ , \tag{166}$$

$$(i, j = 1, 2, 3),$$

где

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_n} = fm\frac{1}{r^3}\left(\frac{3}{r^2}x_i x_n - \delta_{in}\right) + fm'\frac{1}{\Delta^3}\left[\frac{3}{\Delta^2}(x_i - x_i')(x_n - x_n') - \delta_{in}\right]\ ,$$

$$\delta_{in} = \begin{cases} 1 \ \text{при} \ \ i = n \\ 0 \ \text{при} \ \ i \neq n \end{cases}$$

Уравнения (165) и (166) можно записать в матричной форме. Для этого введем в рассмотрение матрицу

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \tag{167}$$

Тогда уравнения запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A} = \mathbf{AF}. \tag{168}$$

Численное интегрирование уравнений (165) и (166) следует выполнять совместно с уравнениями (163). Начальные условия для уравнений (165) и (166) определяются матрицами

$$\mathbf{A_0} = \mathbf{A}|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{169}$$

$$\dot{\mathbf{A}}_\mathbf{0} = \dot{\mathbf{A}}|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{170}$$

Здесь точка над буквами означает дифференцирование по времени.

6.2.3. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче трех тел. Уточнение массы возмущающего тела

Рассмотрим движение второго из трех тел под действием притяжения первого тела и возмущающего влияния третьего тела. Из наблюдений движения второго тела можно определять параметры его движения. Кроме того, совместно с начальными условиями второго тела можно определять массу возмущающего тела. Такое определение следует делать обязательно совместно, поскольку при коррекции

массы возмущающего тела параметры движения второго тела будут уже другими.

В такой задаче уточняемыми параметрами будут начальные условия, то есть координаты и компоненты скорости

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ \dot{x}_1^{(0)},\ \dot{x}_2^{(0)},\ \dot{x}_3^{(0)},$$

заданные на момент времени t_0 для второго тела и масса m' возмущающего тела. В этом случае к матрице (164) нужно добавить еще одну строку

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \mu'} & \frac{\partial x_2}{\partial \mu'} & \frac{\partial x_3}{\partial \mu'} \end{pmatrix}. \tag{171}$$

Для элементов этой строки можно составить следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial / mu'}\right) = -\left(\frac{x_i - x_i'}{\Delta^3} + \frac{x_i'}{r'^3}\right) + \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \mu'}\ , \tag{172}$$

Тогда нужно интегрировать совместно уравнения движения (163), уравнения (165), (166) и (172). Начальными условиями для переменных (171) будут

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial x_1}{\partial \mu'}|_{t=t_0} = 0,\ \tfrac{\partial x_2}{\partial \mu'}|_{t=t_0} = 0,\ \tfrac{\partial x_3}{\partial \mu'}|_{t=t_0} = 0, \\ \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial x_1}{\partial \mu'}\right)|_{t=t_0} = 0,\ \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial x_2}{\partial \mu'}\right)|_{t=t_0} = 0,\ \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial x_3}{\partial \mu'}\right)|_{t=t_0} = 0. \end{gathered} \tag{173}$$

6.2.4. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче о движении спутника сжатой планеты

Рассмотрим процедуру дифференциального уточнения параметров движения спутника в случае учета возмущений от несферичности планеты. В этой задаче возмущения элементов промежуточной орбиты спутника могут определяться методами теории возмущений в аналитическом виде. Однако уравнения движения спутника могут также решаться численным интегрированием. В таком случае в качестве параметров движения рассматривают начальные условия, то есть значения координат на некоторый начальный момент времени t_0.

Силовую функцию притяжения несферичной планеты используют в форме разложения в ряд по шаровым функциям. Это разложение подробно рассмотрено в разделе 3.4 настоящей книги. Поскольку разложение силовой функции в этом случае записывается в системе координат, связанной с осью симметрии сжатого тела, то в разложении фигурируют прямоугольные координаты в системе с основной плоскостью, совпадающей с плоскостью экватора планеты. Обозначим эти координаты через $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$. Однако в ряде задач оказывается, что необходимо решать уравнения движения относительно координат x_1, x_2, x_3, не связанных с экватором планеты.

Связь координат в двух системах задается соотношением

$$\{x_1, x_2, x_3\}^T = \mathbf{R_0}\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3\}^T,$$

где матрица $\mathbf{R_0}$ описана в разделе 3.1.

Возьмем сначала для простоты рассмотрения в разложении только главный член, описывающий динамическое сжатие планеты, а именно вторую зональную гармонику. Для других членов разложения уравнения для изохронных производных могут быть выведены аналогично.

Уравнения движения с учетом второй зональной гармоники разложения силовой функции притяжения планеты запишем в следующей форме:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i \quad (i = 1, 2, 3)\ , \tag{174}$$

где

$$\{F_1, F_2, F_3\}^T = \mathbf{R_0}\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\}^T,$$

а компоненты ускорения в экваториальной системе координат $\{\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ согласно формулам в разделе 3.4 настоящей книги имеют вид

$$\overline{F}_i = -\mu\frac{\overline{x}_i}{r^3} + \frac{3}{2}\mu J_2 \frac{r_0^2}{r^5}\overline{x}_i\left(5\frac{\overline{x}_3^2}{r^2} - e_i\right) \quad (i = 1, 2, 3)\ , \tag{175}$$

где μ – гравитационный параметр планеты, J_2 – коэффициент при второй зональной гармонике разложения силовой функции притяжения планеты, r_0 – средний экваториальный радиус планеты. Кроме того, мы используем следующие обозначения:

$$r = \sqrt{\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + \overline{x}_3^2},$$

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = 3.$$

Параметрами изучаемого движения спутника будут начальные условия, то есть координаты и компоненты скорости

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ \dot{x}_1^{(0)},\ \dot{x}_2^{(0)},\ \dot{x}_3^{(0)},$$

заданные на момент времени t_0.

Искомые частные производные, необходимые для дифференциального уточнения параметров, образуют матрицу вида (164). Для элементов этой матрицы можно составить дифференциальные уравнения путем дифференцирования левых и правых частей уравнений (175) по параметру. Выполняя последовательно эту операцию для каждого из параметров, получим систему уравнений, которую запишем здесь в матричной форме:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{R_0}\overline{\mathbf{F}}\mathbf{R_0}^T, \tag{176}$$

где матрица $\overline{\mathbf{F}}$ аналогична матрице (167), имеет общий вид

$$\overline{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial \overline{x}_1} & \frac{\partial \overline{F}_2}{\partial \overline{x}_1} & \frac{\partial \overline{F}_3}{\partial \overline{x}_1} \\ \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial \overline{x}_2} & \frac{\partial \overline{F}_2}{\partial \overline{x}_2} & \frac{\partial \overline{F}_3}{\partial \overline{x}_2} \\ \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial \overline{x}_3} & \frac{\partial \overline{F}_2}{\partial \overline{x}_3} & \frac{\partial \overline{F}_3}{\partial \overline{x}_3} \end{pmatrix} \tag{177}$$

с элементами, определяемыми по формулам

$$\frac{\partial \overline{F}_i}{\partial \overline{x}_n} = \mu\frac{1}{r^3}\left(\frac{3}{r^2}\overline{x}_i\overline{x}_n - \delta_{in}\right) +$$

$$+\frac{3}{2}\mu J_2\frac{r_0^2}{r^5}\left[\left(5\frac{\overline{x}_3^2}{r^2} - e_i\right)\delta_{in} - 35\frac{x_3^2}{r^4}\overline{x}_i\overline{x}_n + 10\frac{\overline{x}_3\overline{x}_i}{r^2}f_n + 5\frac{\overline{x}_i\overline{x}_n}{r^2}e_i\right], \tag{178}$$

где введено обозначение

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 1\ .$$

Начальными условиями при интегрировании уравнений (176) следует взять (169), (170).

Заметим, что в случаях, когда основным фактором, влияющим на движение спутника, является сжатие планеты, основную систему координат x, y, z можно связать с экватором планеты. Тогда координаты $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ совпадают с координатами x, y, z, компоненты ускорения

$\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ совпадают с компонентами F_1, F_2, F_3, матрица $\mathbf{R_0}$ оказывается единичной матрицей и матрица (177) совпадает с матрицей (167).

Если при решении окажется, что необходимо учитывать также четвертую зональнцю гармонику разложения силовой функции притяжения планеты, то в правые части уравнений (175) и (178) нужно добавить соответствующие члены. В обозначениях, принятых выше, эти добавочные члены имеют вид

$$\overline{F}_i = ... \ + A\left(a_i\frac{\overline{x}_i}{r^7} + b_i\frac{\overline{x}_3^2\overline{x}_i}{r^9} + c\frac{\overline{x}_3^4\overline{x}_i}{r^{11}}\right) \ ,$$

где

$$A = \frac{5}{8}\mu r_0^4 J_4 \ ,$$

$$a_1 = 3, \ \ , a_2 = 3, \ \ , a_3 = 15, \ \ ,$$

$$b_1 = -42, \ \ , b_2 = -42, \ \ , b_3 = -70, \ \ ,$$

$$c = 63$$

и для уравнений (178)

$$\frac{\partial\overline{F}_i}{\partial\overline{x}_n} = ... \ + A\left(a_i F_{in}^{(1)} + b_i F_{in}^{(2)} + c F_{in}^{(3)}\right) \ ,$$

где

$$F_{in}^{(1)} = \frac{\delta_{in}}{r^7} - \frac{7\overline{x}_i\overline{x}_n}{r^9}$$

$$F_{in}^{(2)} = \frac{\overline{x}_3^2\delta_{in}}{r^9} - \frac{9\overline{x}_3^2\overline{x}_i\overline{x}_n}{r^{11}} + f_n\frac{2\overline{x}_3\overline{x}_i}{r^9}$$

$$F_{in}^{(3)} = \frac{\overline{x}_3^4\delta_{in}}{r^{11}} - \frac{11\overline{x}_3^4\overline{x}_i\overline{x}_n}{r^{13}} + f_n\frac{4\overline{x}_3^3\overline{x}_i}{r^{11}} \ .$$

6.2.5. Построение условных уравнений при угловых измерениях топоцентрических координат

Построение условных уравнений для дифференциального уточнения параметров орбит небесных тел из наблюдений связано с вычислением частных производных от измеряемой величины по координатам небесного тела. В разделе 6.2.1 эти производные составляют

компоненты вектора-столбца $\mathbf{B}$. Разумеется, эти производные зависят от типа наблюдений и типа измеряемой величины. В данном разделе рассмотрим вычисления для случаев угловых топоцентрических измерений.

Мы используем понятие вектора наблюдения. Начало вектора расположено в точке наблюдения, топоцентре, а конец – в центре наблюдаемого тела. Обозначим компоненты вектора наблюдения через X, Y, Z. В соответствие вектору наблюдения ставят геоэкваториальные угловые координаты: прямое восхождение α и склонение δ. Связь угловых и прямоугольных координат описывается формулами

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{X}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Если измеряемыми величинами являются прямое восхождение и склонение, то формулы для частных производных от измеряемых величин по прямоугольным топоцентрическим координатам имеют вид

$$\frac{\partial\alpha}{\partial X} = \frac{-\sin\alpha}{R\cos\delta}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial Y} = \frac{\cos\alpha}{R\cos\delta}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial Z} = 0,$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial X} = \frac{-\cos\alpha\sin\delta}{R}, \quad \frac{\partial\delta}{\partial Y} = \frac{-\sin\alpha\sin\delta}{R}, \quad \frac{\partial\delta}{\partial Z} = \frac{\cos\delta}{R},$$

где $R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$.

Модель движения планеты дает нам прямоугольные барицентрические координаты планеты на заданные моменты времени. Модель движения спутника планеты представляет планетоцентрические прямоугольные координаты. Если оси всех рассматриваемых систем взаимно параллельны, то давая им общее обозначение x, y, z, можно представить выражения для частных производных от измеряемых прямого восхождения и склонения по координатам планеты или спутника в следующем виде:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{-\sin\alpha}{R\cos\delta}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\cos\alpha}{R\cos\delta}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial x} = \frac{-\cos\alpha\sin\delta}{R}, \quad \frac{\partial\delta}{\partial y} = \frac{-\sin\alpha\sin\delta}{R}, \quad \frac{\partial\delta}{\partial z} = \frac{\cos\delta}{R},$$

где $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Если измеряются разности прямых восхождений и склонений спутника и планеты, или двух спутников $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2$, то

частные производные от измеряемых величин по координатам тел выражаются формулами

$$\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial x_1} = \frac{-\sin\alpha_2}{R\cos\delta_2}, \quad \frac{\partial\Delta\alpha}{\partial y_1} = \frac{\cos\alpha_2}{R\cos\delta_2}, \quad \frac{\partial\Delta\alpha}{\partial z_1} = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta\delta}{\partial x_1} = \frac{-\cos\alpha_2\sin\delta_2}{R}, \quad \frac{\partial\Delta\delta}{\partial y_1} = \frac{-\sin\alpha_2\sin\delta_2}{R}, \quad \frac{\partial\Delta\delta}{\partial z_1} = \frac{\cos\delta_2}{R},$$

$$\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial x_2} = \frac{\sin\alpha_2}{R\cos\delta_2}, \quad \frac{\partial\Delta\alpha}{\partial y_2} = \frac{-\cos\alpha_2}{R\cos\delta_2}, \quad \frac{\partial\Delta\alpha}{\partial z_2} = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta\delta}{\partial x_2} = \frac{\cos\alpha_2\sin\delta_2}{R}, \quad \frac{\partial\Delta\delta}{\partial y_2} = \frac{\sin\alpha_2\sin\delta_2}{R}, \quad \frac{\partial\Delta\delta}{\partial z_2} = -\frac{\cos\delta_2}{R},$$

где $R = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

Рассмотрим здесь одну модификацию формул для частных производных от измеряемых величин, которая часто применяется на практике. Запишем здесь снова условные уравнения в том виде, как они выведены в разделе 6.1.

$$\Delta\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial\xi}{\partial p_k}\right)_i \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots\ , \ m). \tag{179}$$

Здесь ξ – общее обозначение для измеряемой величины, $p_1, p_2, ...p_n$ – для уточняемых параметров, а m - число наблюдений.

Примем во внимание тот факт, что погрешность моделирования движения планет и спутников в прямоугольных координатах не зависит от того, как мы их наблюдаем. Однако на различных топоцентрических расстояниях эта погрешность будет по-разному проявляться в измеряемых угловых координатах: прямом восхождении и склонении. Чтобы вклад погрешности в левые части условных уравнений стал независимым от топоцентрического расстояния R, нужно умножить каждое условное уравнение на R. Аналогичные рассуждения относительно наблюдений на различных склонениях небесного тела приводят к выводу, что условные уравнения при измерениях прямого восхождения нужно умножать на $\cos\delta$. Теперь, учитывая вышеуказанные обстоятельства и придавая измеряемой величине ξ поочередно конкретный смысл $\xi = \alpha$, $\xi = \delta$, запишем условные уравнения в виде

$$R\cos\delta\Delta\alpha_i' = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_k}\right)_i' \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots\ , \ m), \tag{180}$$

$$R\Delta\delta'_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial\delta}{\partial p_k}\right)'_i \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots\ , \ m), \tag{181}$$

где

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\right)' \\ \left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\right)' \\ \dots \\ \left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_n}\right)' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}'_\alpha, \quad \mathbf{B}'_\alpha = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{182}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\delta}{\partial p_1}\right)' \\ \left(\frac{\partial\delta}{\partial p_2}\right)' \\ \dots \\ \left(\frac{\partial\delta}{\partial p_n}\right)' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}'_\delta, \quad \mathbf{B}'_\delta = \begin{pmatrix} -\cos\alpha\sin\delta \\ -\sin\alpha\sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix}. \tag{183}$$

Здесь матрица $\mathbf{A}$ остается неизменной. Она описана выше. В левых частях равенств (180) и (181) $\Delta\alpha'_i$ и $\Delta\delta'_i$ суть разности измеренных и вычисленных значений измеряемых величин, которыми могут быть как сами прямые восхождения и склонения одного небесного тела α, δ, так и их разности для двух тел, например спутника и планеты или двух спутников $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2$. В последнем случае, если условное уравнение строится относительно параметров второго тела, то элементы векторов-столбцов $\mathbf{B}'_\alpha$, $\mathbf{B}'_\delta$, нужно взять с обратным знаком.

В практике уточнения параметров движения из наблюдений вместо измеряемой величины $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ часто используется величина $X_d = \Delta\alpha\cos\delta_2$. Для единообразного обозначения к ней добавляется $Y_d = \Delta\delta$. В этом случае условные уравнения (180) и (181) записываются в следующем виде:

$$R\ \Delta X_{di} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_k}\right)'_i \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots\ , \ m), \tag{184}$$

$$R\ \Delta Y_{di} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial\delta}{\partial p_k}\right)'_i \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots\ , \ m), \tag{185}$$

где ΔX_{di} и ΔY_{di} суть разности измеренных и вычисленных значений X_d и Y_d, соответственно, на момент наблюдения t_i.

Рассмотрим теперь, как построить условные уравнения, если измеряются взаимное угловое расстояние между двумя телами s и соответствующий позиционный угол P. В этом случае условные уравнения имеют вид

$$R\,\Delta s_i = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{X_{di}}{s_i} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_k} \right)'_i + \frac{Y_{di}}{s_i} \left(\frac{\partial \delta}{\partial p_k} \right)'_i \right] \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots \ , \ m), \tag{186}$$

$$R\,s_i \Delta P_i = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{Y_{di}}{s_i} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_k} \right)'_i - \frac{X_{di}}{s_i} \left(\frac{\partial \delta}{\partial p_k} \right)'_i \right] \Delta p_k, \ (i = 1, 2, \ \dots \ , \ m), \tag{187}$$

где Δs_i и ΔP_i суть разности измеренных и вычисленных значений s и P, соответственно, а индекс i означает, что величины берутся на момент наблюдения t_i.

В формулах (184), (185), (186), (187) частные производные вычисляются с помощью соотношнений (182), (183).

Для тангенциальных координат X_t, Y_t, s_t, P_t условные уравнения строятся аналогично.

При построении условных уравнений в рассматриваемых задачах следует учитывать, что коэффициенты при поправках Δp_k, $(i = 1, 2, \ \dots, \ m)$ могут вычисляться в некоторой степени приближенно, поскольку уточнение может выполняться последовательными приближениями несколько раз. Однако значения измеряемых величин должны вычисляться с максимально возможной точностью, т. к. в последовательных приближениях разности измеренных и вычисленных значений измеряемой величины должны стремиться к нулю.

6.3. Назначение весов наблюдениям и условным уравнениям

Для обоснованного применения метода наименьших квадратов необходимо, чтобы гипотеза, принимаемая по отношению к ковариационной матрице ошибок наблюдений, была максимально близкой к действительности. Недиагональные элементы ковариационной матрицы на практике чаще всего бывают неизвестными. Поэтому их просто приравнивают нулю. Что касается диагональных элементов, то

они характеризуют точность наблюдений, которая может различаться для разных наблюдений. Однако диагональные элементы можно сделать равными, если подходящим образом назначить веса наблюдениям.

Возьмем условные уравнения метода наименьших квадратов (МНК), которые были рассмотрены в разделе 6.1 для случая равноточных наблюдений

$$\Delta\xi_i = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots \ , \ m). \tag{188}$$

Здесь $\Delta\xi_i$ – разность измеренного и вычисленного значений измеряемой величины при наблюдении номер i, Δp_1, Δp_2, ..., Δp_n суть уточняемые параметры, а $a_k^{(i)}$ – численные коэффициенты условных уравнений. Набор уточняемых параметров можно представить вектором $\mathbf{\Delta p} = \{\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n\}^T$

Для решения задачи согласно МНК нужно составить систему нормальных уравнений, которую запишем в виде

$$\mathbf{L}\ \mathbf{\Delta p} = \mathbf{d}\ ,$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{d}$ суть матрица и вектор

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{pmatrix}, \tag{189}$$

элементы которых вычисляются по формулам

$$l_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)} a_j^{(i)} \quad (k, j = 1, 2, \ \dots \ , \ n), \tag{190}$$

$$d_k = \sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)} \Delta\xi_i \quad (k = 1, 2, \ \dots \ , \ n). \tag{191}$$

Веса наблюдений w_i, $(i = 1, 2, \dots, m)$ вводятся следующим образом. Условные уравнения (188) умножаем почленно на $\sqrt{w_i}$, получим

$$\Delta\xi_i \ \sqrt{w_i} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{w_i}\ a_k^{(i)} \Delta p_k, \quad (i = 1, 2, \ \dots \ , \ m). \tag{192}$$

Вместо (190), (191) берем формулы

$$l_{kj} = \sum_{i=1}^{m} w_i \, a_k^{(i)} a_j^{(i)} \quad (k, j = 1, 2, \ \dots \ , \ n), \tag{193}$$

$$d_k = \sum_{i=1}^{m} w_i \, a_k^{(i)} \Delta\xi_i \quad (k = 1, 2, \ \dots \ , \ n). \tag{194}$$

Далее решение получается так же, как и для равноточных наблюдений.

Ковариационная матрица ошибок наблюдений будет иметь равные диагональные элементы, если ошибки левых частей условных уравнений (192) будут примерно одинаковыми для всех i. Сделать так можно было бы, если бы погрешности величин $\Delta\xi_i$ были бы известными. Достичь указанного свойства ковариационной матрицы можно, если положить

$$\sqrt{w_i} = \frac{1}{\sigma_i},$$

где σ_i есть ошибка измерения номер i.

Проблема в том, что обычно мы не знаем ошибок σ_i. Придется принимать какую-нибудь подходящую гипотезу относительно ошибок измерений. Предположим, что все наблюдения можно распределить на группы так, чтобы внутри каждой группы наблюдения можно было бы считать равноточными. Можно предположить, что группа наблюдений на одной обсерватории выполняются одним наблюдателем с помощью одного и того же инструмента в течение некоторого времени, когда условия наблюдений не изменяются.

Сначала выполняем уточнение параметров, полагая все $w_i = 1$. После уточнения для каждого наблюдения величина $\Delta\xi_i$ будет характеризовать согласование теории с наблюдениями. Предполагая, что ошибки наблюдений доминируют над ошибками теории, будем считать $\Delta\xi_i$ ошибками наблюдений.

Теперь для каждой группы равноточных по предположению наблюдений вычислим среднеквадратичную величину от всех $\Delta\xi_i$, принадлежащих группе. Обозначим ее через σ_k, где k - номер группы. Теперь для каждого наблюдения можно задать вес следующим образом:

$$\sqrt{w_i} = \frac{1}{\sigma_k},$$

где k – номер группы, к которой принадлежит наблюдение номер i.

Выполнив уточнение параметров с назначенными весами, можно заново вычислить все ошибки наблюдений и заново назначить веса. Такую итерацию можно сделать 2-3 раза. В итоге получим назначение весов в согласии с точностью наблюдений, а ковариационная матрица ошибок наблюдений будет близка к действительной.

Метод наименьших квадратов дает возможность оценить точность получаемых значений уточняемых параметров. В разделе 6.1 объяснено, как это сделать. В случае взвешенных условных уравнений последовательность действий такая же, как и без назначения весов. Матрица нормальных уравнений и вектор правых частей находятся по формулам (193), (194). Дополнительно вычисляется величина

$$d_0 = \sum_{i=1}^{m} w_i \Delta\xi_i^2. \tag{195}$$

Вычисляем

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{m-n}\left[d_0 - (\mathbf{d}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p})\right], \tag{196}$$

где $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}$ найденный вектор поправок, а компоненты вектора $\mathbf{d}$ определяются по формуле (194). Умножим теперь все элементы матрицы $\mathbf{L}^{-1}$ на σ_0^2. Полученная таким образом матрица

$$\mathbf{D} = \sigma_0^2 \mathbf{L}^{-1} \tag{197}$$

своими диагональными элементами будет иметь квадраты ошибок σ_k поправок Δp_k $(k = 1, 2, ..., n)$ соответственно.

6.4. Вычисление статистических характеристик невязок

В описании метода дифференциального уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений фигурируют величины δ_i $(i = 1, 2, ...m)$, называемые невязками. Они определены соотношениями (143). Здесь m число измерений. После успешного уточнения параметров, когда поправки к ним становятся пренебрежимыми, невязки становятся равными отклонениям $\Delta\xi_i$, характеризующим согласование теории с наблюдениями. Фактически эти величины содержат ошибки наблюдений и ошибки модели движения небесного тела.

На практике всегда интересуются статистическими характеристиками невязок $\Delta\xi_i$. Они несут полезную информацию для дальнейшего

совершенствования как модели движения, так и методов наблюдений. Сначала анализируется средняя величина невязок

$$\overline{\Delta\xi} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Delta\xi_i.$$

Существенное отличие этой величины от нуля показывает наличие в результатах наблюдений систематической ошибки, которая может быть вызвана несовершенством наблюдательных приборов или не правильной процедурой предварительной обработки наблюдений. Близость величины $\overline{\Delta\xi}$ к нулю еще не говорит об общем качестве наблюдений.

Далее анализу подвергается среднеквадратическая величина отлонений $\Delta\xi_i$. Она определяется по уже приведенной выше формуле (158)

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{d_0}{m}}\ , \tag{198}$$

в которой величина d_0 должна вычисляться согласно ее выражению (153). Эта характеристика включает в себя как системиатические, так и случайные ошибки наблюдений.

В наборе используемых наблюдений могут быть как точные, так и грубые наблюдения. В этом случае в величину суммы (153) основной вклад внесут грубые наблюдения с большими невязками. Если же мы применяем веса наблюдений, то характеристика $\overline{\sigma}$ не будет соответствовать способу использования данных. Тогда можно анализировать так называемую средневзвешенную величину невязок $\overline{\sigma}_w$, которая вычисляется по той же формуле (198), но в которую подставлена величина d_0, определяемая соотношением (195).

Чтобы отделить систематическую составляющую невязок от случайной, вычисляют так называемую несмещенную дисперсию случайных невязок $D(\Delta\xi)$, которая определяется по формуле

$$D(\Delta\xi) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\Delta\xi_i - \overline{\Delta\xi})^2.$$

Квадратный корень из дисперсии

$$\sigma = \sqrt{D(\Delta\xi)} \tag{199}$$

называется стандартным отклонением. Эта величина характеризует случайную составляющую ошибок наблюдений.

В алгоритмах, реализуемых на практике, оказывается не рационально запасать в памяти все невязки $\Delta\xi_i \quad (i = 1, 2, ...m)$, чтобы затем вычислить статистические характеристики $\overline{\Delta\xi}$, $\overline{\sigma}$, σ. Особенно затруднительно это делать при очень большом числе наблюдений. В процессе вычислений наблюдения просматриваются последовательно одно за другим. Память, отводимая для обработки одного наблюдения, затем используется для обработки следующего. В этом процессе можно использовать рекуррентные соотношения для искомых характеристик. Допустим, что мы вычислили $\overline{\Delta\xi}$, $\overline{\sigma}$, σ для k наблюдений. Обозначим полученные значения через $\overline{\Delta\xi}^{(k)}$, $\overline{\sigma}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, соответственно. При добавлении еще одного наблюдения с номером $k+1$, то есть невязки $\Delta\xi_{k+1}$, новые, следующие значения характетистик $\overline{\Delta\xi}^{(k+1)}$, $\overline{\sigma}^{(k+1)}$, $\sigma^{(k+1)}$ можно найти из рекуррентных соотношений

$$\overline{\Delta\xi}^{(k+1)} = \frac{1}{k+1}(k\,\overline{\Delta\xi}^{(k)} + \Delta\xi_{k+1}),$$

$$\overline{\sigma}^{(k+1)} = \sqrt{\frac{1}{k+1}(k\,\overline{\sigma}^{(k)^2} + \Delta\xi_{k+1}{}^2)},$$

$$\sigma^{(k+1)} = \sqrt{\frac{1}{k}\left[k\,\overline{\sigma}^{(k)^2} - \frac{1}{k+1}\left(k\,\overline{\Delta\xi}^{(k)} + \Delta\xi_{k+1}\right)^2 + \Delta\xi_{k+1}{}^2\right]}.$$

6.5. Методы оценки точности эфемерид, основанных на наблюдениях

Построение модели движения небесного тела на основе наблюдений сопровождается рядом принятых допущений и предположений. Применяемые методы вычислений имеют неизбежные погрешности. Результаты наблюдений содержат ошибки. В этих условиях следует поставить вопрос о достоверности и точности эфемерид, вычисленных на основе построенной модели. Этот непростой вопрос нередко умалчивается при выдаче эфемерид. В публикуемых астрономических ежегодниках в таблицах эфемерид нет той последней колонки, которая содержала бы погрешность данных, которые даются в предыдущих. Поставленный вопрос поясняет Рис. 16.

Орбитальное движение небесных тел имеет одну особенность. Движение происходит вблизи некоторой плоскости. В проекции траектории на эту плоскость радиус-вектор вращается с почти постоянной угловой скоростью. Угол между радиусом-вектором и некоторым

фиксированным направлением, λ называется орбитальной долготой. Этот угол монотонно и почти равномерно увеличивается со временем, постоянно "накручивая"обороты. Допустим, что на некотором интервале времени (t_1, t_2) выполняются наблюдения, из которых можно определить значения λ на эти крайние моменты времени с некоторой погрешностью σ_λ. По этим значениям можно определить эфемеридное значение орбитальной долготы на некоторый момент t_f с какой-то погрешностью Δ_λ. Свойства орбитального движения позволяют вывести приближенную формулу зависимости точности эфемериды Δ_λ от интервалов времени между начальным t_1 и конечным t_2 моментами наблюдений и моментом t_f, для которого вычисляется эфемерида. Эта формула имеет вид

$$\Delta_\lambda = \sigma_\lambda \frac{t_f - \frac{t_1+t_2}{2}}{t_2 - t_1}. \tag{200}$$

Очевидно, что мы не можем измерять орбитальную долготу непосредственно при наблюдениях. Мы наблюдаем лишь проекцию орбитального движения на картинную плоскость. Однако приведенная здесь приближенная формула относительно долготы позволяет сделать некоторые выводы. Точность эфемерид пропорциональна точности наблюдений, но также обратно пропорциональна интервалу времени наблюдений.

Из приведенного анализа ясно, что именно нужно делать для улучшения точности эфемерид. Необходимо повышать точность наблюдений. Необходимо продолжать регулярные наблюдения, пусть даже с прежней точностью.

Формула (200) дает лишь общее приближенное представление о главных факторах, от которых зависит точность эфемерид. На практике нас интересует более детальное описание точности эфемерид именно для тех величин, которые мы измеряем или тех координат спутников, которые мы используем. При этом необходимы статистически обоснованные оценки.

Оценка точности эфемерид представляет собой процесс, основанный на выводах теории вероятности. Для оценки необходимы знания статистических свойств тех ошибок, которые содержатся в теории и в наблюдениях. В реальных исследованиях такая информация очень скудная или ее нет совсем. Поэтому достоверность оценок точности эфемерид на практике не бывает высокой. Все же приходится делать такие оценки, исходя из имеющихся данных.

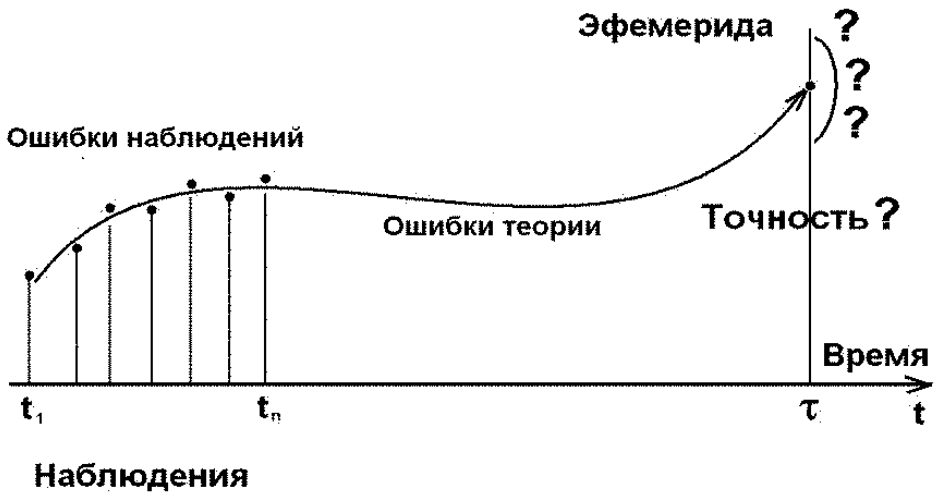

Рис. 16: Задача оценки точности эфемерид небесного тела.

Поставленная задача рассматривалась в огромном множестве работ. Отметим здесь только две (Emelyanov, 2010; Авдюшев, 2015), в которых можно найти библиографию по рассматриваемому вопросу. В работе (Авдюшев, 2015) рассмотрены теоретические аспекты этой задачи и установлены возможные границы ее решения.

Основную идею, заложенную в методах работы (Emelyanov, 2010), поясняет Рис. 17. Предлагаются три метода оценки точности эфемерид небесных тел. Все они основаны на искусственных вариациях данных наблюдений.

Первый метод: оценка точности эфемерид вариацией ошибок наблюдений по способу Монте-Карло. Прием достаточно прост. Общая схема такова. Формируем большое число вариантов одних и тех же наблюдений, отличающихся от реально выполненных набором погрешностей, которые генерируются методом Монте-Карло. Для каждого варианта заново определяем орбиту, по которой вычисляем эфемериду на заданный момент времени. Статистические оценки вариаций эфемерид среди этих вариантов дают оценку точности.

В этом методе сначала по реальным наблюдениям определяется орбита. Затем по найденным параметрам вычисляются значения измеряемых величин на моменты наблюдений. Этот набор опорных наблюдений рассматривается как вариант точных наблюдений. К точ-

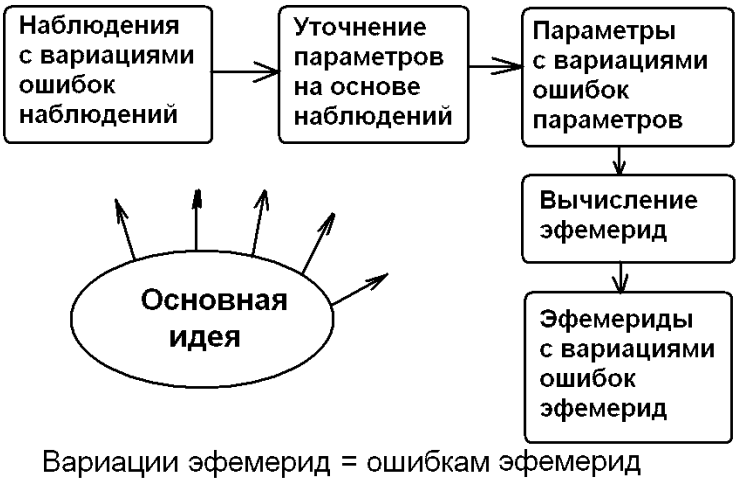

Рис. 17: Основная идея методов оценки точности эфемерид небесных тел.

ным значениям измеряемых величин прибавляются искусственно созданные случайные ошибки. Одновременно с с вычислением опорных наблюдений выполняется вычисление опорной эфемериды на те заданные моменты, на которые нас интересует точность эфемериды. Каждый набор прибавленных случайных ошибок наблюдений и полученная после этого эфемерида рассматриваются как одно испытание в смысле теории вероятностей. Производится по возможности много таких испытаний. Вычисляется среднеквадратическая величина отклонений эфемерид от опорной по всем испытаниям. Именно эта величина принимается за оценку точности эфемерид.

Рассмотренный алгоритм имеет две существенные особенности. Необходимо выполнить оценки точности наблюдений, чтобы задать вариации ошибок. Эти оценки могут оказаться не совсем достоверными, особенно если наблюдения неравноточные. Вторая особенность состоит в значительных затратах времени вычислений, поскольку для хорошей статистической оценки точности эфемериды следует вычислить отклонение эфемериды от опорной достаточно много раз.

Второй метод – это оценка точности эфемерид методом вариации состава наблюдений с помощью "бутстреп"-выборок. Общая схема метода похожа на схему вариации ошибок наблюдений методом Монте-Карло. Формируем большое число вариантов случайных быборок из набора реальных наблюдений. Выборки делаются "бутстреп"-методом с помощью датчика случайных чисел. Для каждого варианта заново

определяем орбиту, по которой вычисляем эфемериду на заданный момент времени. Статистические оценки вариаций эфемерид среди этих вариантов дают оценку точности.

В этом методе набор опорных наблюдений рассматривается как вариант выборки. При статистическом анализе отклонений эфемериды сначала вычисляют среднее значение и среднеквадратическую величину отклонения от среднего.

Рассмотренный алгоритм имеет одно преимущество по сравнению с вариации ошибок наблюдений. Для реализации метода не нужны никакие данные о точности наблюдений.

Поясним здесь, что такое "бутстреп" выборка. Пусть имеется набор каких-либо пронумерованных элементов в количестве N-штук. Представим себе случайную величину, которая может принимать значения от 1 до N с постоянной плотностью вероятности. Будем задавать эту случайную величину N-раз. В каждом случае получаем некоторое значение n случайной величины в диапазоне от 1 до N, затем выбираем из исходного набора элемент номер n. Помещаем этот элемент в результирующий набор. В итоге получим снова N элементов. Однако в результирующем наборе некоторые элементы из исходного набора могут оказаться выбранными несколько раз, а некоторые – ни разу. Такой способ еще называют выборкой с возвращением. В нашем случае каждая "бутстреп" выборка из N исходных наблюдений спутника дает нам снова набор из N наблюдений, который и участвует в алгоритме оценки точности эфемериды.

При применении описанного здесь метода "бутстреп" выборок наблюдений следует учитывать его специфическое свойство – варьируются не ошибки наблюдений, а полностью их состав. Поскольку в некоторых выборках могут отсутствовать наблюдения на краях интервала времени наблюдений, сокращенный интервал может приводить к ухудшению точности параметров и точности эфемерид. Исправление этого недостатка метода можно сделать следующим путем. Нужно вычислить сначала все ошибки наблюдений, то есть отклонения реальных наблюдений от опорных, полученных путем вычисления эфемерид на моменты наблюдений по уточненным параметрам. Затем в процессе вычислений делать "бутстреп" выборки не самих наблюдений, а только их ошибок. Таким образом, все моменты наблюдений будут сохранены. Однако ошибки одних наблюдений могут быть присвоены другим. При этом некоторые ошибки наблюдений могут быть увеличены в несколько раз, а некоторые будут положе-

ны равными нулю. Такой прием был испытан автором и привел к положительным результатам.

Третий метод – это оценка точности эфемерид методом вариации параметров движения. Основная идея метода заключается в следующем. На основе исходного набора наблюдений выполняем определение параметров движения небесного тела методом дифференциального уточнения. При этом получаются вектор-столбец найденных параметров $\mathbf{P_0}$ и соответствующая ковариационная матрица ошибок параметров $\mathbf{D}$, как описано выше. Вектор определяемых параметров содержит n элементов. Матрица $\mathbf{D}$ имеет размерность $(n \times n)$. По значениям параметров $\mathbf{P_0}$ вычисляем опорную эфемериду. С помощью датчика случайных чисел создаем вариант значений параметров $\mathbf{P}$, отличающийся от $\mathbf{P_0}$ на некоторый вектор случайных величин. Формируем таким образом большое число вариантов случайных значений параметров движения. Для каждого варианта вычисляем эфемериду на заданный момент времени. Статистические оценки вариаций эфемерид среди этих вариантов дают оценку точности.

Здесь возникает важный вопрос о том, как сформировать случайную вариацию параметров. Метод, обоснованный теорией вероятности, состоит в следующем. Для известной ковариационной матрицы ошибок параметров $\mathbf{D}$ определяем матрицу декомпозиции Холецкого $\mathbf{L}$ на основе соотношения

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathbf{T}} = \mathbf{D}.$$

С помощью датчика случайных чисел формируем случайный вектор η, стоящий из n компонент. Набор случайный значений параметров вычисляем затем по формуле

$$\mathbf{P} = \mathbf{P_0} + \mathbf{L}\eta.$$

Заметим, что матрица $\mathbf{L}$ оказывается нижней треугольной матрицей. Для ее вычисления можно использовать программу, составленную на языке программирования Си и имеющуюся в Отделе небесной механики ГАИШ МГУ.

Рассмотренный алгоритм имеет преимущество по сравнению с другими рассмотренными выше методами. Значительно сокращается время вычислений, поскольку уточнение параметров из наблюдений нужно сделать только один раз. Другое преимущество заключается в том, что статистические характеристики ошибок наблюдений автоматически принимаются во внимание, благодаря использованию ковариационной матрицы ошибок параметров.

В работе (Emelyanov, 2010) рассмотренные три метода применялись для оценки точности эфемерид далеких спутников планет на основе наблюдений. Результаты по трем методам оказались почти совпадающими, за исключением метода "бутстреп" выборок, который давал недостоверные оценки в случаях очень коротких интервалов времени наблюдений.

Точность эфемерид всех далеких спутников больших планет впервые была определена на основе наблюдений в работе (Emelyanov. 2010). Оказалось, что для далеких спутников, открытых в начале и середине 20-го века, точность эфемерид сохраняется на уровне 0.06 секунд дуги до 2020 года. Для других спутников точность эфемерид значительно хуже и резко падает с уменьшением интервала времени наблюдений. Есть спутники, для которых интервал времени наблюдений равен 30 суток, что составляет 0.04-0.07 периода их орбитального обращения. Для некоторых из таких спутников точность эфемерид сравнима с видимыми размерами орбиты. Это означает, что эти спутники можно считать потерянными. Их нужно искать и открывать заново. Согласно результатам работы (Emelyanov. 2010) таких спутников оказалось 21.

В работе (Jacobson et al., 2012) на основе всех имеющихся к этому времени наблюдений были уточнены орбиты и эфемериды всех далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Выполнены оценки точности эфемерид спутников. Получены результаты, аналогичные результатам работы (Emelyanov. 2010). Для ряда спутников эфемериды получились более точными, поскольку использовались более длинные ряды наблюдений. Важно то, что авторы работы (Jacobson et al., 2012) выполнили новые наблюдения и поиск спутников, ранее потерянных из-за неточности эфемерид. Несколько спутников было найдено. Однако они констатировали, что 16 ранее открытых далеких спутников Юпитера и Сатурна остаются потерянными. Новые работы по уточнению орбит далеких спутников планет продолжались. Авторы статьи (Brozović, Jacobson, 2017) произвели новое определение орбит далеких спутников Юпитера с использованием новых наблюдений. Но и после этой работы 11 из 59 далеких спутников Юпитера остаются потерянными.

Глава 7. Получение астрометрических данных из наблюдений взаимных покрытий и затмений спутников планет

7.1. Описание явлений

Техника наблюдений небесных тел постоянно совершенствуется. Совершенство средств зависит от развития технологии в мире. В то же время астрономы, применяя специальные знания, ищут со своей стороны новые, более совершенные методы наблюдений. На каком-то этапе открытий и изучения естественных спутников планет было обнаружено, что главные спутники Юпитера, Сатурна и Урана движутся по орбитам, расположенным почти в одной плоскости, совпадающей с плоскостью экватора планеты, но наклоненной к плоскости ее орбиты. При этом два раза за период обращения планеты вокруг Солнца в эту плоскость попадает линия, соединяющая планету с Землей. Примерно в эти же эпохи через плоскость орбит проходит линия планета-Солнце. В некоторые моменты времени изображения дисков каких-то пар спутников, видимых с Земли, пересекаются. В эти же эпохи тень от одного спутника иногда попадает на другой, и эта тень видна с Земли. В обоих случаях суммарный блеск спутников временно уменьшается. Этот спад светового потока может измеряться, даже если мы не различаем изображения дисков спутников. Происходят так называемые взаимные покрытия и затмения спутников планеты. Конфигурация Солнце-планета-спутники в случаях таких взаимных явлений показана на рис. 18. Длительность спада яркости спутников в большинстве случаев составляет от 4 до 15 минут. Периоды явлений длительностью в 6 – 9 месяцев повторяются через пол-оборота планеты вокруг Солнца. Годы, в которые происходят взаимные покрытия и затмения главных спутников, следующие. Спутники Юпитера: ..., 1997, 2003, 2009, 2015, 2021. ... . Спутники Сатурна: ..., 1995, 2009, 2023, ... Спутники Урана: ..., 1965, 2007, 2049, ... Происходят от 1 до 10 явлений в неделю. Каждое явление можно наблюдать одновременно только на 30% обсерваторий на Земле.

Для описания явлений вводят понятие плоскости явления. Это плоскость, проходящая через покрываемый или затмеваемый спутник перпендикулярно к лучу, направленному к этому спутнику от наблюдателя в случае взаимного покрытия, или от центра Солнца в случае взаимного затмения. На эту плоскость проектируют положение покрывающего или затмевающего спутника. Определяют координа-

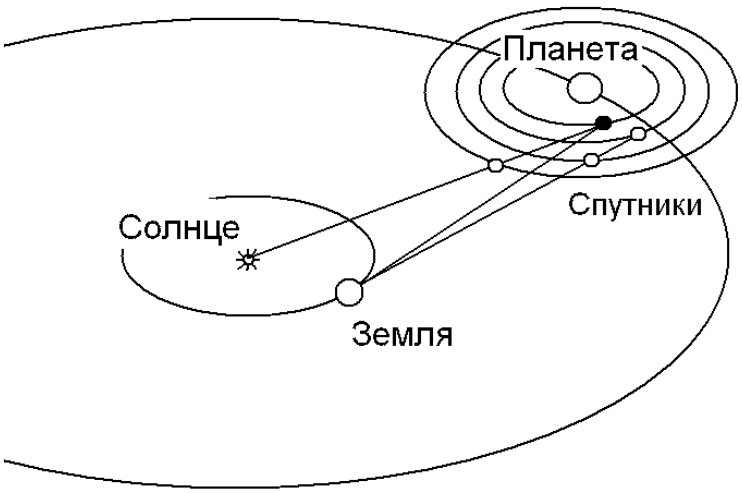

Рис. 18: Схема конфигурации гелиоцентрических орбит Земли, планеты и орбит ее спутников, при которой возникают взаимные покрытия и затмения спутников.

ты этой проекции в некоторой системе координат X, Y на плоскости явления. Начало координат помещают в покрываемый или затмеваемый спутник. Направление оси Y выбирают на северный полюс мира, а ось X – к востоку.

Очевидно, что световой поток, приходящий от спутников во время явления, зависит от их видимого относительного положения, измеряемого относительными координатами X, Y в плоскости явления. На рис. 20 показан спад нормализованной величины светового потока от спутников при изменении координат в плоскости явления во время взаимного покрытия или затмения.

В процессе фотометрического наблюдения спутников в ряд моментов времени измеряется световой поток от спутников. Получается кривая измеренного блеска. Пример результата такого наблюдения показан на рис. 21.

Поскольку спад светового потока во время явления зависит от координат спутников, можно решать обратную задачу – получать астрометрические данные по измеренным кривым блеска спутников во время их взаимных покрытий и затмений. Такой метод наблюдений имеет несколько существенных преимуществ. Во-первых, соотноше-

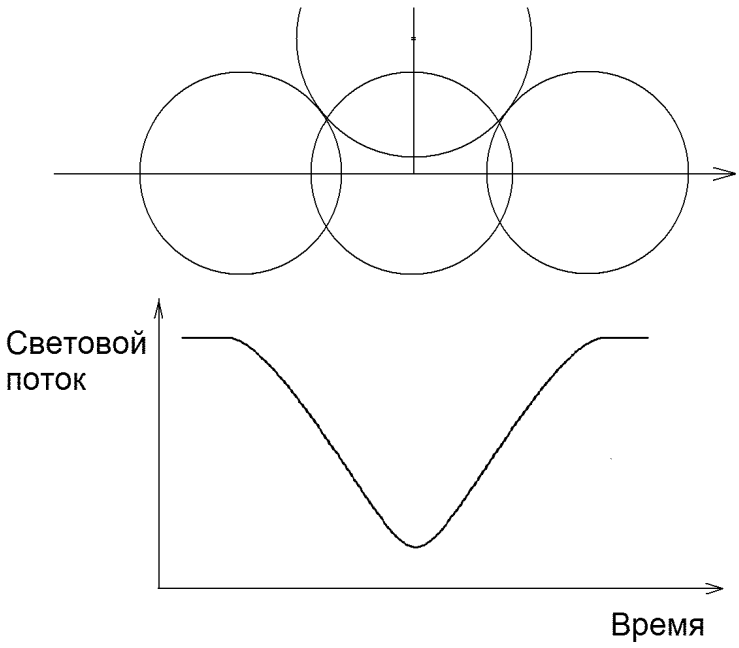

Рис. 19: Три конфигурации взаимного видимого расположения дисков спутников во время взаимного покрытия и соответствующая кривая суммарного блеска.

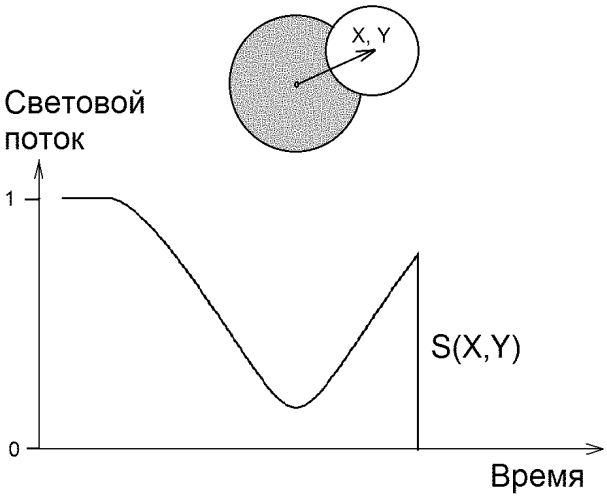

Рис. 20: Зависимость нормированного светового потока, приходящего от пары спутников во время взаимного покрытия, от времени.

ние скорости видимого движения и точности фотометрии таково, что точность получаемых астрометрических результатов оказывается в несколько раз лучше точности обычных астрометрических наблюдений. Во-вторых, необходимые фотометрические наблюдения могут выполняться скромными средствами наблюдений. Главные спутники планет достаточно яркие, очень светосильные телескопы не нужны. Не нужны никакие звездные каталоги. Обработка изображений с целью получения фотометрических данных выполняется известными несложными процедурами. По этим причинам фотометрические наблюдения взаимных покрытий и затмений главных спутников планет могут выполняться как профессиональными наблюдателями, так и любителями.

Каждое явление происходит короткое время и наблюдаемо одновременно только из части наземных пунктов. Участие наблюдателей-любителей в кампаниях наблюдений оказывается весьма полезным делом. Третье преимущество заключается в том, что регулярные наблюдения спутников расширяют интервал времени наблюдений и улучшают тем самым их эфемериды на будущее.

7.2. Метод получения астрометрических данных

Метод вывода астрометрических данных из фотометрии взаимных покрытий и затмений спутников планет был предложен еще в 70-е годы 20-го века в работах (Aksnes, Franklin, 1976; Aksnes и др., 1984) и впоследствии был развит в работах (Vasundhara, 1994; Noyelles и др., 2003). В этом методе были приняты некоторые упрощения в модели явлений. Другой, оригинальный метод обработки фотометрических наблюдений и получения астрометрических результатов развит в работах (Емельянов, 2003; Emelyanov, Gilbert, 2006).

Рассмотрим основные принципы методов получения астрометрических данных из результатов фотометрии спутников во время их взаимных покрытий и затмений. Опираться будем на подход, принятый в работе (Емельянов, 2003).

Задача формулируется следующим образом. Во время рассматриваемого явления в ряд моментов времени измеряется световой поток от спутников. Требуется определить, используя эти данные, разности координат двух спутников на какой-нибудь один момент времени на интервале времени явления.

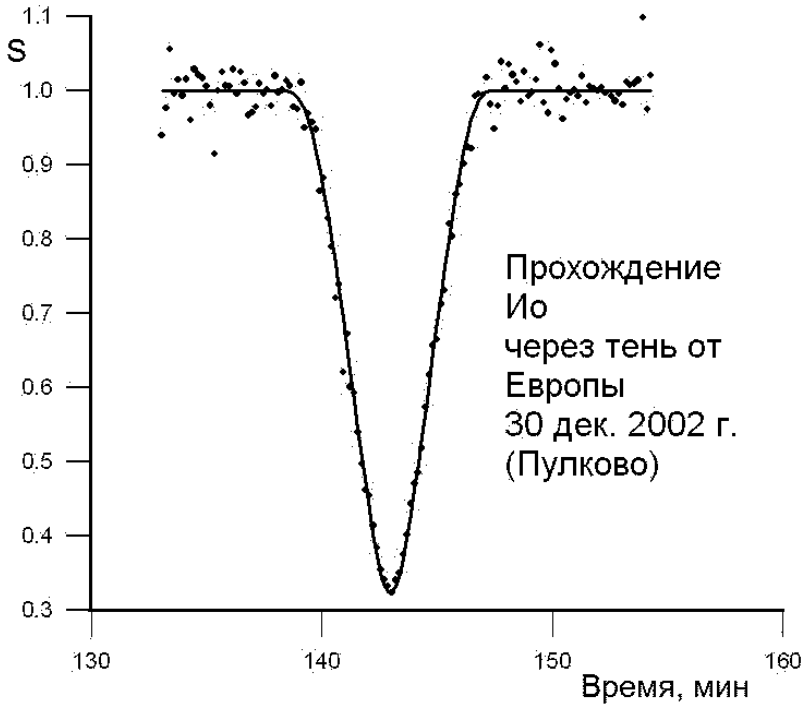

Рис. 21: Пример результатов измерений нормированного светового потока от спутника Ио во время его затмения другим спутником и соответствующей модельной кривой после уточнения параметров модели.

В процессе фотометрии спутников получается измеренное значение светового потока E в некоторой шкале значений, фиксированной для каждого данного явления. Мы не знаем заранее эту шкалу, но нам и не нужно знать абсолютную величину потока. Он может быть измерен с точностью до любого неопределенного множителя. Обозначим через S нормированную величину светового потока от спутников такую, что перед его началом и сразу после окончания, эта величина равна единице. Мы предполагаем, что эти два значения совпадают. В процессе взаимного покрытия или затмения световой поток уменьшается и становится $S < 1$. Тогда можно установить соотношение

$$E = K\ S, \tag{201}$$

где K - некоторый неопределенный коэффициент, по предположению постоянный во время явления. Очевидно, что S зависит от относительных координат X, Y в системе, описанной выше, и мы определяем функцию $S(X, Y)$. Координаты X, Y могут быть вычислены на любой момент времени t с помощью эфемерид планеты и спутников. Обозначим эти эфемеридные значения через $X_{th}(t)$, $Y_{th}(t)$. Если мы подставим их в функцию $S(X, Y)$, а затем подставим функцию в соотношение (201), то мы не получим реальное значение светового потока E из-за того, что эфемериды имеют погрешность. Предположим, что в течение явления истинные значения координат отличаются от эфемеридных на некоторые постоянные D_x, D_y так, что реальный световой поток определится из соотношения

$$E = K\ S(X_{th}(t) + D_x, Y_{th}(t) + D_y).$$

Допустим, что проведены фотометрические наблюдения, т. е. в моменты t_i $(i = 1, 2, ..., m)$ получены измеренные значения E_i. Тогда можно записать систему условных уравнений

$$E_i = K\ S(X_{th}(t_i) + D_x, Y_{th}(t_i) + D_x), \quad i = 1, 2, ..., m$$

относительно неизвестных параметров K, D_x, D_y. Мы линеаризируем функцию S относительно своих аргументов и решаем систему линейных условных уравнения по методу наименьших квадратов. После того, как решение найдено, астрометрический результат выражается значениями координат $X(t^*) = X_{th}(t^*) + D_x$, $Y(t^*) = Y_{th}(t^*) + D_y$, где t^* - любой момент внутри интервала времени явления. Для определенности мы выбираем в качестве t^* момент, когда величина $X^2 + Y^2$

достигает минимума, т. е. видимое расстояние между спутниками минимально. Координаты $X(t^*)$, $Y(t^*)$ на момент времени t^* уже не зависят от используемых эфемерид и наилучшим образом соответствуют результатам всех фотометрических измерений, выполненных во время явления.

Естественно предположить, что когда свет от спутников отсутствует, измеренное значение E должно быть равно нулю. Для этого при фотометрической обработке наблюдений стараются по возможности исключить уровень фона неба или какие-либо инструментальные потоки света. Однако на практике это удается не совсем чисто, и некоторый уровень фона P в измерениях остается. Тогда мы должны решать условные уравнения, составленные в виде

$$E_i = K\ S(X_{th}(t_i) + D_x, Y_{th}(t_i) + D_x) + P, \quad i = 1, 2, ..., m$$

и включать P в число определяемых параметров. Однако решение таких расширенных уравнений удается только в редких специальных случаях взаимных видимых движений спутников, поскольку обычно между ошибками параметров проявляется корреляция.

Для реализации метода нужно уметь вычислять $S(X, Y)$ как функцию от своих аргументов. Световой поток приходит от каждой точки спутника и суммируется в фотоприемнике. Каждая точка поверхности спутника отличается своими свойствами рассеивать свет. Во всех точках направление падения света от Солнца и направление отраженного света к наблюдателю разные по отношению к поверхности. Разумеется, от точки, заслоненной покрываемым спутником, свет не приходит. Покрыта точка или нет – это зависит от взаимного расположения спутников и наблюдателя. При взаимном затмении спутников свет, попадающий в каждую точку затмеваемого спутника, образуется суммой потоков от всех точек той части диска Солнца, которая не заслонена затмевающим спутником. При этом нужно учитывать, что имеется потемнение диска Солнца к краю. Если бы телескоп позволил различать диски спутников, то мы увидели бы частично покрытый или затемненный диск спутника с неравномерной яркостью еще и с темным краем из-за того, что Солнце освещает спутник немного сбоку.

Схема потоков света при взаимном покрытии спутников показана на Рис. 22. Аналогичная схема при взаимном затмении дана на Рис. 23. На рисунках написаны функции от различных величин и параметров, которые определяют фотометрическую модель. На рисунках используются следующие обозначения:

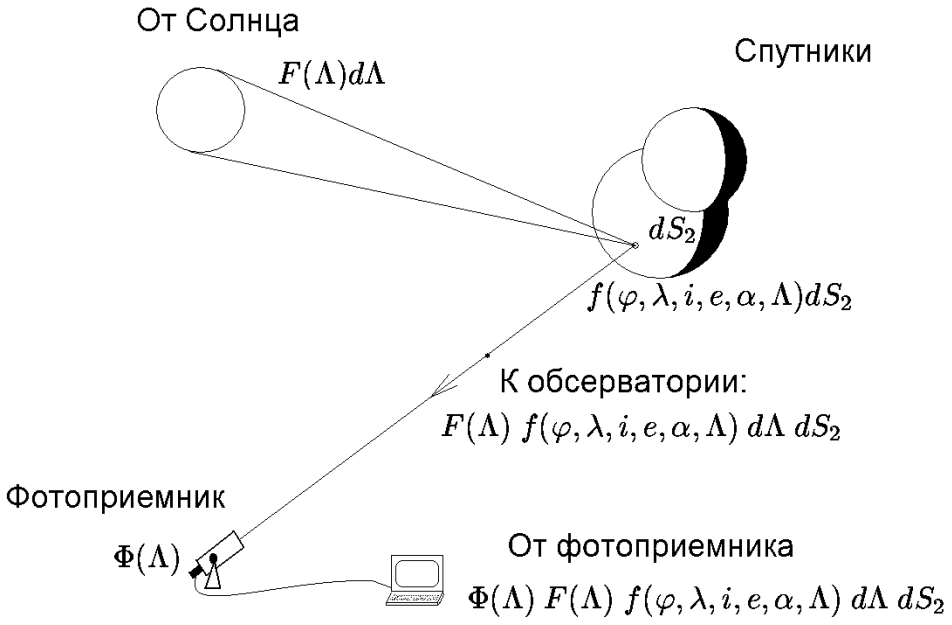

Рис. 22: Фотометрия взаимного покрытия спутников.

φ, λ – картографические координаты на спутнике,
Λ - длина волны света,
r – угловое расстояние точки диска Солнца от его центра,
i, e – углы падения и отражения луча света,
α – угол солнечной фазы,
dS_0 – элемент диска Солнца,
dS_2 – элемент диска спутника.

Во время реальных наблюдений покрываемый и покрывающий спутники дают в фотоприемнике одно общее пятно. Именно их общий световой поток и измеряется. Любой применяемый фотоприемник имеет разную чувствительность к свету разных длин волн. Поэтому нужно учитывать зависимость рассеяния света от длины волны и характеристики применяемого светофильтра.

При практических вычислениях мы разбиваем полусферу спутника, обращенную к Земле, на конечные элементы, вычисляем приходящий поток от каждого элемента отдельно и суммируем все эти потоки. На этом этапе может использоваться тот или иной закон рассеяния света точкой поверхности спутника. Необходимо знать ряд па-

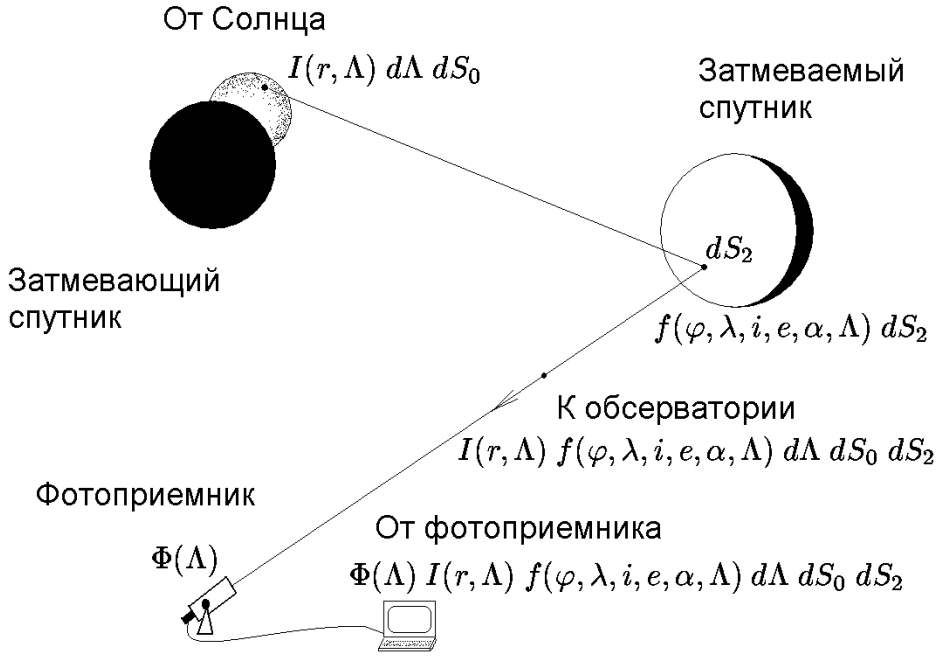

Рис. 23: Фотометрия взаимного затмения спутников.

раметров, задающих светотражательные свойства поверхности конкретного спутника. Один из них – это распределенное альбедо по поверхности спутника с учетом деталей поверхности.

В сумме все эти обстоятельства составляют фотометрическую модель явления. Одна из наиболее точных фотометрических моделей взаимных покрытий и затмений Галилеевых спутников Юпитера описана в работах (Емельянов, 2003; Emelyanov, Gilbert, 2006). Аналогичные модели для главных спутников Сатурн и Урана даются в работах (Arlot и др., 2012) и (Arlot и др., 2013), соответственно. Применявшиеся законы рассеяния света при обработке фотометрических наблюдений взаимных покрытий и затмений спутников Юпитера, Сатурна и Урана и соответствующие фотометрические модели явлений описаны в этих работах.

Некоторый упрощенный вариант модели взаимных покрытий и затмений спутников рассматривается ниже.

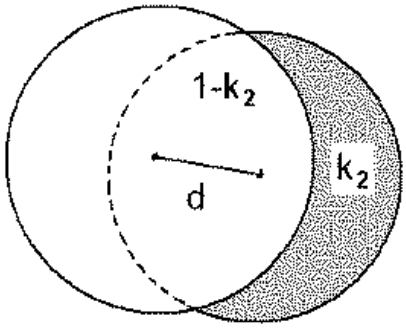

Рис. 24: Взаимное покрытие спутников. Непокрытая часть покрываемого спутника показана серым заполнением. Доля этой части от всего диска характеризуется величиной k_2.

7.3. Упрощенный вариант модели взаимных покрытий и затмений спутников планет

Рассмотрим модель взаимного покрытия двух спутников. В упрощенном варианте будем полагать, что наблюдаются однородные диски двух спутников. При этом интегральные альбедо по дискам разные. Обозначим их через p_1 для покрывающего спутника и p_2 – для покрываемого. Видимые радиусы спутников обозначим соответственно через r_1 и r_2. Радиусы могут измеряться в секундах дуги так, как диски видны на небе, или в километрах в плоскости явления. Обозначим через d расстояние между центрами дисков, измеряемое в тех же единицах, что и радиусы спутников.

Если $d \geq r_1 + r_2$, то никакого явления не наблюдается и мы получаем свет от полных дисков обоих спутников. Если просходит покрытие дисков, то мы видим только часть диска покрываемого спутника. Обозначим через k_2 долю видимого диска покрываемого спутника. Естественно, что k_2 зависит от расстояния между центрами дисков d. Это видно на рис. 24.

Таким образом, вне явления $k_2 = 1$. Если расстояние между центрами дисков $d \leq |r_1 - r_2|$, то происходит полное перекрытие дисков. При этом, если $r_1 \geq r_2$, то покрываемый спутник не виден совсем, и мы имеем $k_2 = 0$. В случае $r_1 < r_2$ видимая доля диска покрываемого спутника равна $k_2 = (r_2^2 - r_1^2)/r_2^2$.

В случае частичного взаимного покрытия, когда $r_1 + r_2 > d > |r_1 -$

$r_2|$, величину k_2 можно вычислить с помощью последовательности формул

$$h = \sqrt{2d^2(r_1^2 + r_2^2) - d^4 - (r_1^2 - r_2^2)^2},$$

$$a_1 = d^2 - r_2^2 + r_1^2, \quad a_2 = d^2 - r_1^2 + r_2^2,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{h}{a_1}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{h}{a_2},$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{\pi}\left[\frac{r_1^2}{r_2^2}\varphi_1 + \varphi_2 - \frac{h}{2r_2^2}\right].$$

Здесь при вычислении углов φ_1, φ_2 по значениям их тангенсов следует учитывать, что знак $\cos\varphi_1$ совпадает со знаком a_1, а знак $\cos\varphi_2$ совпадает со знаком a_2. Эти формулы получены в работе (Емельянов, 1995).

В задачах обработки фотометрических наблюдений взаимных покрытий и затмений спутников с целью получения астрометрических данных приходится вычислять производную от k_2 по d, т. е. $\frac{dk_2}{d(d)}$.

Теперь рассмотрим, как вычислять нормированный световой поток. Функция S при такой упрощенной модели явлений зависит от k_2, которая в свою очередь зависит от d.

От покрывающего спутника приходит световой поток величиной $Rr_1^2p_1$, а от покрываемого $Rr_2^2p_2k_2$, где r_1, r_2 – радиусы дисков, p_1 и p_2 – альбедо спутников, R – неопределенный коэффициент. При взаимном покрытии всегда измеряется световой поток от обоих спутников вместе. При этих условиях нормированный поток S можно выразить формулой

$$S(d) = \frac{p_1r_1^2 + p_2r_2^2k_2(d)}{p_1r_1^2 + p_2r_2^2} = \frac{1 + \frac{p_2r_2^2k_2(d)}{p_1r_1^2}}{1 + \frac{p_2r_2^2}{p_1r_1^2}}.$$

Вне явления, когда нет покрытия, виден весь покрываемый спутник, и мы имеем $k_2 = 1$, $S = 1$, $E = K$. Случаются полные покрытия. На рис. 25 изображена конфигурация спутников в этом случае. Ясно, что в интервале времени (t_1, t_2) покрываемого спутника совсем не видно, и $k_2 = 0$. В этот период мы имеем

$$S(d) = \frac{1}{1 + \frac{p_2r_2^2}{p_1r_1^2}},$$

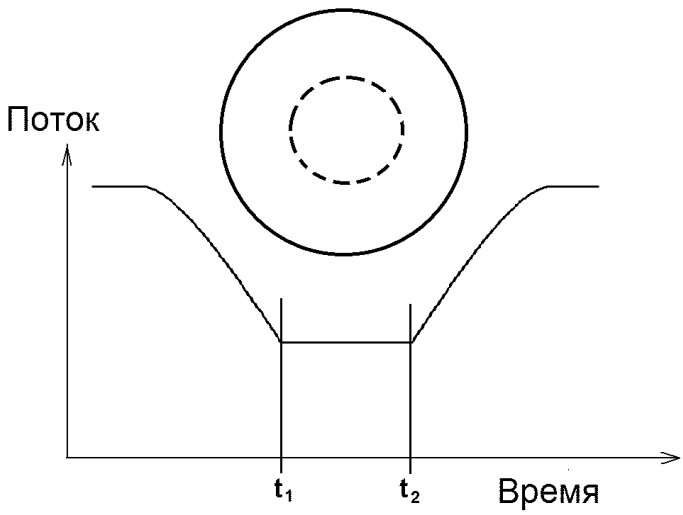

Рис. 25: Полное покрытие одного спутника другим в течение промежутка времени $(t_1, t2)$ и соответствующий участок на кривой суммарного нормированного потока от пары спутников.

т. е. световой поток не зависит от взаимного расстояния спутников d.

Как видно из упрощенного рассмотрения фотометрической модели, нормированный световой поток от спутников зависит от отношения интегральных по поверхности альбедо. Эта зависимость остается и в более точных фотометрических моделях. При обработке наблюдений Галилеевых спутников Юпитера (Emelyanov, 2009; Arlot и др.. 2012) мы усредняем по видимому диску фотометрические свойства спутника. На этом этапе можно учесть вариации интегрального значения альбедо, зависящие от угла вращения спутника. Проще говоря, поток света от спутника зависит от того, каким боком он к нам обращен.

7.4. Соотношение точности астрометрических результатов различных типов

Различные способы позиционных наблюдений спутников планет дают разную точность астрометрических данных. В Табл. 2 приводятся приближенные оценки точности астрометрических данных, получаемых из наблюдений различных типов.

Таблица 2: Точность астрометрических данных, получаемых из наблюдений различных типов. Точность в секундах дуги относится к наземным наблюдениям. С учетом топоцентрического расстояния планеты даны оценки точности положения спутников в километрах.

Тип наблюдений	Точность в сек. дуги	Точность в км
Галилеевы спутники Юпитера		
Затмения спутников Юпитером	0.150	450
Фотопластинки	0.100	300
Меридианный круг	0.060	180
ПЗС камеры	0.040	120
Взаимные явления	0.015	45
Главные спутники Сатурна		
Фотопластинки	0.100	600
Меридианный круг	0.030	200
ПЗС камеры	0.030	200
Взаимные явления	0.005	30
Главные спутники Урана		
ПЗС камеры	0.040	400
Взаимные явления	0.006	60

7.5. Всемирные кампании наблюдений спутников планет во время их взаимных покрытий и затмений

Во время каждой эпохи взаимных покрытий и затмений спутников Юпитера, Сатурна и Урана в течение 9-14 месяцев происходят около 400 явлений. Каждое явление длится 5-15 минут и наблюдается только на небольшой части Земли, обращенной к планете. Чтобы пронаблюдать возможно больше явлений, приходится организовывать всемирные кампании фотометрических наблюдений спутников. Координатором кампаний с 1985 года является институт *Institut de Mécanique céleste et de calcul des éphémérides* (IMCCE), Франция. Все фотометрические результаты после очередной кампании собираются в единую базу данных. Через некоторое время после проведенных наблюдений производится астрометрическая обработка всех данных. Полученные относительные координаты спутников представляют собой базу данных астрометрических результатов кампании наблюдений. Через 2-3 года после проведения наблюдений публикуются статьи, содержащие описание полученных кривых блеска спутников и окончательные астрометрические результаты. Все наблюдатели, участвовавшие в наблюдениях, становятся соавторами этих публикаций. В некоторых случаях астрометрические результаты публиковались отдельно. Астрометрическая обработка результатов кампании наблюдений выполнялась, как правило, каким-то одним исследователем своим методом. В табл. 3 даны характеристики проведенных всемирных кампаний наблюдений спутников Юпитера, Сатурна и Урана во время их взаимных покрытий и затмений.

Таблица 3: Характеристики всемирных кампаний наблюдений спутников Юпитера, Сатурна и Урана во время их взаимных покрытий и затмений. Обозначения: N_c - число полученных кривых блеска спутников, N_o - число обсерваторий-участников.

Планета с системой спутников и годы наблюдений	N_c	N_o	Автор метода и ссылка на публикацию
Юпитер, 1973	46	18	Aksnes K. (Aksnes и др., 1984)
Юпитер, 1979	19	11	Aksnes K. (Aksnes и др., 1984)
Сатурн, 1979-1980	14	6	Aksnes K. (Aksnes и др., 1984)
Юпитер, 1985	166	28	Arlot J.-E. (Arlot и др.. 1992)
Юпитер, 1991	374	56	Arlot J.-E. (Arlot et al. 1997)
Сатурн, 1995	66	16	Noyelles B. (Noyelles и др.. 2003)
Юпитер, 1997	292	42	Vasundhara R. (Vasundhara и др. 3003, Arlot и др.. 2006) Емельянов Н.В., Вашковьяк С.Н. (Емельянов, Вашковьяк, 2009)
Юпитер, 2002-2003	377	42	Емельянов Н.В. (Emelyanov, 2009; Arlot и др., 2009)
Уран, 2007	41	19	Емельянов Н.В. (Arlot и др., 2013)
Юпитер, 2009	457	74	Емельянов Н.В., Варфоломеев М.И. (Arlot и др., 2014)
Юпитер, 2015	609	75	Емельянов Н.В. (Saquet et al., 2017)

Глава 8. Современные модели движения тел Солнечной системы. Информационные ресурсы и эфемериды в интернете

8.1. Смена версий и вариантов теорий движения и эфемерид спутников планет

История разработки теорий движения спутников планет весьма обширна. Попытки моделировать движение спутников всегда начинались с моментов их открытия. В прошлые века теории опирались на модели кеплеровского движения. В дальнейшем к модели кеплеровского движения добавлялись возмущения от различных факторов. Весьма широко применялась, и до сих пор применяется модель прецессирующего эллипса. В попытках построить наиболее точную аналитическую теорию движения спутника планеты исследователи выводили чрезвычайно объемные формулы. Такие аналитические модели одновременно служили как для вычисления эфемерид, так и для описания эволюции орбит.

С появлением возможностей быстродействующих вычислительных машин общая задача моделирования движения спутников планет разделилась на две методически различные проблемы в соответствии с поставленными целями.

Первая и ближайшая цель – это получение эфемерид на ближайшее время для проведения новых наблюдений и для осуществления космических миссий. Поскольку интервал времени, на котором моделировалось движение спутника, в этом случае относительно невелик, то весьма эффективным оказалось выполнение численного интегрирования дифференциальных уравнений движения на быстродействующих компьютерах. Простота реализации методов, когда нужно запрограммировать лишь вычисление правых частей уравнений движения, повела по этому пути многих исследователей.

Несколько более сложная проблема появляется при попытках уточнять параметры движения из наблюдений, когда нужно вычислять еще и частные производные от измеряемых величин по уточняемым параметрам. Здесь прибавляется трудность, связанная с тем, что в этой задаче моделировать движение спутника нужно на всем интервале времени наблюдений. Для некоторых спутников этот интервал уже достигает 300 лет. Но и эти проблемы в основном решаются методами численного интегрирования.

Другая цель моделирования движения спутников планет – это

описать эволюцию орбит на максимально возможном интервале времени. Это необходимо для выяснения истории образования планет и спутников, а также для выяснения их судьбы в будущем. В такой постановке решение задачи методами численного интегрирования весьма затруднено, а при некоторых постановках задачи просто невозможно. Здесь помехами становятся непомерно большие затраты времени вычислений, невозможность достоверной оценки точности решения, и, вообще, ограниченность точности. При этих обстоятельствах мы вынуждены прибегать к попыткам построения аналитического решения дифференциальных уравнений движения. За исключением нескольких простейших механических моделей точного аналитического решения общей задачи получить невозможно. К тому же, никакое аналитическое решение не будет справедливо на бесконечном интервале времени. Все же аналитические методы дают возможность строить модели эволюции орбит на весьма больших интервалах времени.

Проблемы изучения эволюции Солнечной системы рассматривались многими авторами. Здесь же рассказ будет посвящен теориям и моделям движения спутников, которые строились с целью вычисления наболее точных эфемерид спутников планет. Путь, по которому здесь происходит развитие, состоит в следующем. В какой-то текущий момент уже существует модель движения, основанная на всех имеющихся на этот момент наблюдениях. Наблюдатели продолжают наблюдать, получают новые астрометрические данные и публикуют их в доступных журналах. Наступает время, когда появляется возможность построить новую версию модели движения и эфемерид конкретной группы спутников. Исследователи, которые занимаются этим систематически, пользуясь ситуацией, создают новую модель. Обычно она реализуется в виде доступных средств вычислений эфемерид и оказывается в распоряжении всех желающих этим воспользоваться. Иногда наблюдатели в своей работе кооперируются с коллегами, умеющими строить теории движения, и совместно публикуют новую модель движения. В этих случаях "владельцы" наблюдений обладают преимуществом по сравнению со своими не менее способными коллегами. При смене версий то время, пока модель движения остается самой точной и лучшей в мире, бывает весьма различным. Некоторые теории сменяются новыми через год-два, а некоторые "живут" по 20 лет.

В этой смене версий моделей движения спутников весьма важны

два обстоятельства. Во-первых, правильным положением дел является одновременное наличие двух-трех независимо построенных моделей. Это позволяет проверить и оценить точность средств вычисления эфемерид. Если существую три модели, две из которых дают близкие между собой результаты, а результаты третьей модели существенно отличаются от результатов первых двух, становится сомнительной достоинство этой третьей модели. Во-вторых, необходимо оставлять в доступе предшествующие модели движения спутников. Многие новые научные результаты, полученные на основе какой-то теории движения спутника, иногда нуждаются в воспроизведении и проверке. Чтобы вычисления получились согласованными, нужно применять те средства, которые использовались ранее.

Некоторые конструкторы моделей движения время от времени усовершенствуют свои произведения чаще всего за счет расширения наблюдательной базы. Тогда появляются новые версии той же самой модели. В некоторые периоды времени могут существовать две или более совершенных моделей движения спутников, построенных разными авторами. Тогда мы говорим не о версиях, а о различных вариантах моделей.

Что касается набора учитываемых возмущающих факторов и точности применяемых методов, то обычно авторы моделей, построенных на основе наблюдений спутников, заботятся о том, чтобы применяемые допущения и условия не ухудшали модель более, чем ошибки наблюдений. Однако при практическом использовании модели это нужно отслеживать.

Теперь ясно, что как только возникает необходимость воспользоваться и применить для исследований или для практических нужд теорию движения, модель или средства вычислений эфемерид конкретного спутника, нужно выяснять, какая версия в настоящее время наиболее точная, достоверная и, вообще, самая подходящая. Критериев выбора здесь несколько. Достоверность определяется набором использованных наблюдений и интервалом времени наблюдений. Нужно выяснить, насколько удобна реализация модели для применения, какая модель лучше всего подходит для решения поставленной задачи. Нужно знать, как организован доступ к той или иной модели движения спутника. Этой последней проблеме посвящен следующий раздел книги.

8.2. Средства обеспечения доступа к базам данных, моделям движения и эфемеридам спутников планет

В современную эпоху информационных технологий возможности использования плодов труда конструкторов моделей движения спутников планет весьма разнообразны и велики. Естественным образом происходит техническое слияние баз данных, средств решения задач и представление получаемых результатов. Рассмотрим, как это реализуется на деле.

Сначала укажем на три основных приема решения задач, связанных с базами данных и средствами вычисления эфемерид. В исходном состоянии эти средства состоят из двух элементов: непосредственно файлы данных и компьютерные программы, обеспечивающие использование этих данных. Приемы работы пользователя иллюстрируются на Рис. 26.

Первый прием заключается в том, что пользователь копирует в свой компьютер все необходимые файлы и вставляет в свою программу решения задачи те подпрограммы, которые обеспечивают доступ к данным. Программа пользователя решает задачу и по мере надобности сама обращается к подпрограммам за данными. Все происходит внутри одной программы решения задачи. Хорошим примером таких средств является система программ и данных SPICE развитой в американском институте Jet Propulsion Laboratory (JPL; Acton и др., 2015). Несколько подробнее эта система описана ниже.

Второй прием состоит в том, что база данных размещена на одном компьютере в мире. Там же находится вычислительная программа обеспечивающая доступ к данным через интернет. Обычно это так называемый Web-сервер. Пользователь, сидя за своим компьютером, запускает в работу один из Web-браузеров (не нахожу подходящего русскоязычного термина) и общается с соответствующим Web-сервером через страницы интернета. Программа Web-браузера (Internet Explorer, Micrisoft Edge, ...) позволяет пользователю сформировать запрос и получить в свой компьютер интересующие его данные в виде файлов. Затем пользователь может запустить программу решения своей задачи, которая будет использовать полученные таким образом файлы. В мире существует несколько таких средств, они описаны ниже.

Третий прием – сама вычислительная программа пользователя в процессе своей работы обращается через интернет к базе данных, расположенной в другом компьютере или даже в другой стране, сама

берет из удаленного компьютера необходимые данные и продолжает вычисления. Для этого на удаленном компьютере должна функционировать программа, которая называется Web-сервис. Этот прием используют, в основном, пользователи высокой компьютерной компетенции.

Отметим, что описанные три метода применяются как для выборки из баз данных, так и для вычисления эфемерид спутников планет.

Теперь охарактеризуем отдельно элементы информационных технологий научного процесса изучения динамики спутников планет на основе наблюдений.

Исходным элементом являются базы данных. В нашем случае это, в основном, базы данных наблюдений спутников. Здесь одновременно существуют два подхода. Первый из них – это стремление автоматизировать процесс использования результатов наблюдений. Это неизбежно приводит к необходимости унификации формы представления результатов. Унификация связана с некоторой предварительной обработкой данных на основе тех или иных методов и моделей систем координат и шкал времени. В результате данные оказываются зависимыми от этих моделей. При уточнении модели системы координат данные наблюдений будут уже другими. Это приводит к трудностям, а ингода и к недоразумениям. Например, при переводе исходных координат спутников, полученных с помощью старого звездного каталога в системе экваториальных координат эпохи B1950, в систему координат эпохи J2000 могут использоваться различные модели прецессии. Если координаты помещены в базу данных уже исправленными за прецессию, то не будет возможности переобработать их с дугой моделью прецессии. Еще хуже бывают ситуации, когда неизвестно, какие редукции были сделаны перед тем, как результаты были помещены в базу данных. По этим причинам применяется и другой подход – помещать в базу данных результаты наблюдений спутников планет в том составе и в той форме, как это было дано наблюдателями.

В настоящее время имеется не много баз данных наблюдений спутников планет, доступных через интернет. Не вдаваясь в подробности состава данных, перечислим общедоступные в интернете базы данных наблюдений.

Прежде всего это база данных, создаваемая при сотрудничестве Государственного астрономического института имени П.К. Штернберга Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова (ГАИШ МГУ) и Института небесной механики и вычисления

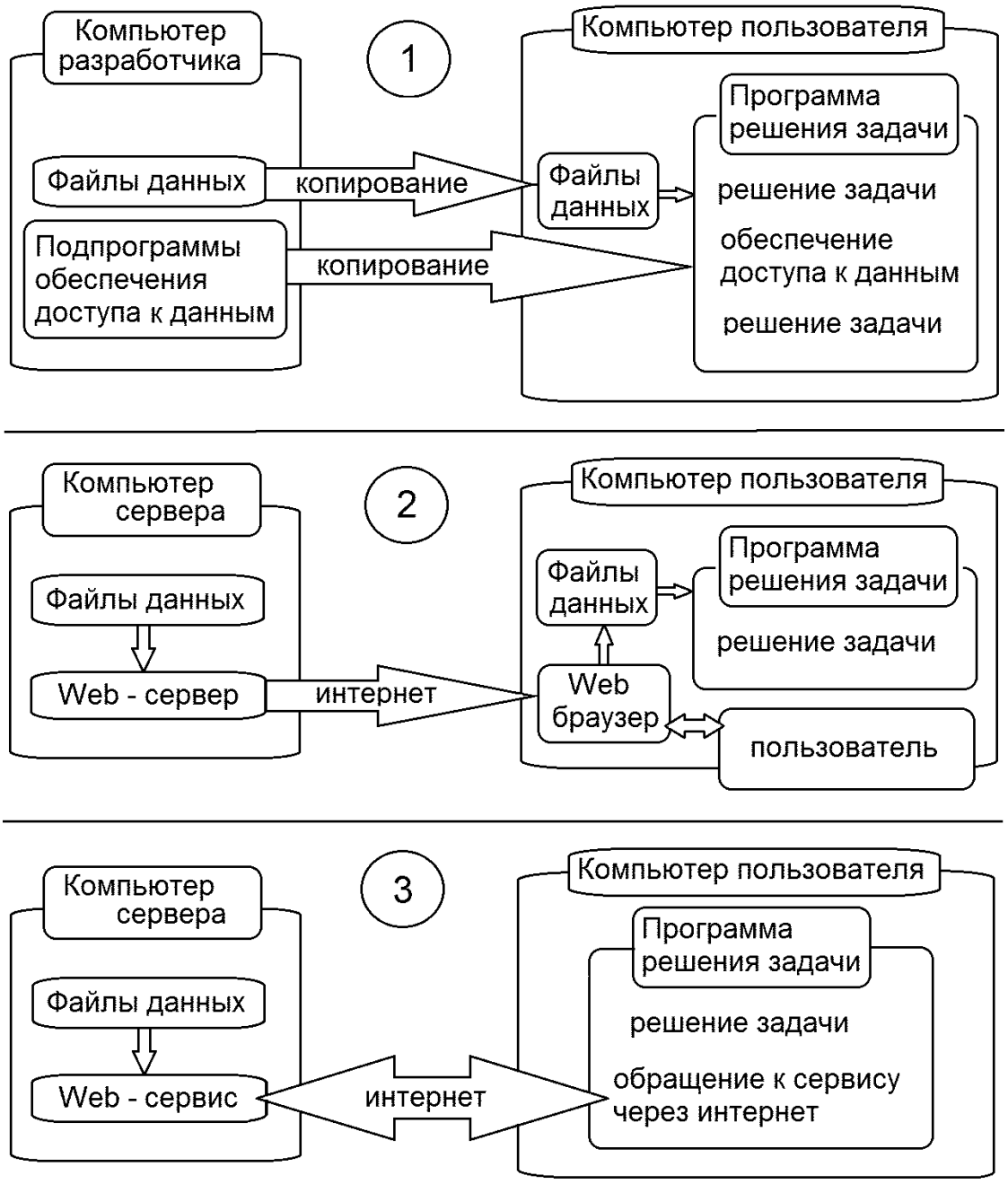

Рис. 26: Три приема работы пользователя с базами данных и службами эфемерид спутников планет. Смотрите объяснения в тексте.

эфемерид (Institut de Mécanique céleste et de calcul des éphémérides - IMCCE), Париж, Франция. Она имеет аббревиатуру NSDB - Natural satellites Database. Адрес доступа к этой базе данных такой:
http://www.sai.msu.ru/neb/nss/indexr.htm – на сайте ГАИШ МГУ
http://nsdb.imcce.fr/nsdb/home.html
– на сайте IMCCE. Заметим, что страницы этой базы данных в интернете составлены на трех языках: русском, английском и французском. Объявление о создании базы данных NSDB и краткое ее описание опубликовано в работе (Arlot, Emelyanov, 2009). База данных наблюдений состоит из двух частей. Первая, условно обозначаемая как NSDB1, составляется уже давно. Используется принцип размещения данных наблюдений точно в том составе и виде, как они были опубликованы. Фактически это цифровые копии таблиц данных, которые взяты из публикаций. Они сопровождаются необходимыми для использования описаниями, взятыми также из публикаций. Вторая часть – Standard astrometric data содержит те же данные, что и NSDB1, но данные имеют стандартизованную форму. В этой базе данных предлагаются средства для выборки данных из базы. В базе данных NSDB собраны все опубликованные наблюдения всех известных спутников планет. Подробнее NSDB еще описана ниже.

Другая база данных наблюдений содержится на сайте Центра малых планет (Minor planet center - MPC). Эта база данных ограничивается только наблюдениями далеких спутников планет. Туда помещаются результаты, публикуемые в циркулярах MPC. Формат данных наблюдений в этой базе стандартный. Он примерно такой же, как и для публикации наблюдений малых планет. Описание формата данных можно найти на сайте MPC. Адреса страниц на этом сайте иногда изменяются, поэтому приведем здесь сначала адрес общего доступа к сайту MPC:
http://minorplanetcenter.net/iau/mpc.html
Фаил с наблюдениями далеких спутников больших планет можно скопировать со страницы по адресу
http://www.minorplanetcenter.net/iau/ECS/
MPCAT-OBS/MPCAT-OBS.html
Для этого нужно пойти по ссылке
Natural outer irregular satellites of the giant planets.

Некоторые обсерватории имеют свои базы данных наблюдений спутников планет. Пример такой базы – это База данных наблюдений планет и их спутников Пулковской обсерватории (Pulkovo Database

of Observations of Planets and Their Satellites). Адрес в интернете
http://puldb.ru/db/sdb.php
Более общая база данных наблюдений тел Солнечной системы имеет адрес
http://puldb.ru/db/index.php
Страницы доступа к базе данных позволяют выбрать наблюдения конкретного спутника на заданные годы наблюдений или за все годы.

Морская обсерватория Соединенных штатов Америки (United States Naval Observatory - USNO) Flagstaff имеет свою базу данных наблюдений планет и спутников. На странице по адресу
http://www.usno.navy.mil/USNO/astrometry/
optical-IR-prod/solsys/fastt-plansat
можно получить доступ к наблюдениям, выполненных на телескопе, который называется Flagstaff Astrometric Scanning Transit Telescope. Доступ должен осуществляться по ссылкам, обозначающим годы. Однако доступ к страницам с наблюдениями открыт только с компьютеров, расположенных вне территории России.

Результаты астрометрических наблюдений планет и спутников, выполняемых на обсерватории Table Mountain, Калифорния, США доступны в интернете на странице
https://ssd.jpl.nasa.gov/dat/planets/ccd1.tmo.html

Кроме баз данных наблюдений спутников планет, могут быть полезными базы данных физических параметров спутников. Таких баз данных также немного в доступе через интернет. Укажем только следующие. В рамках базы данных NSDB (ГАИШ МГУ - IMCCE) имеются страницы Параметры и константы. Для доступа туда нужно сначала войти в NSDB по указанным выше адресам, а затем пройти по ссылкам: Базы данных – Параметры и константы. Далее можно попасть на страницы:
– Массы спутников,
– Размеры спутников,
– Фотометрические свойства спутников,
– Параметры вращения спутников.

Другой источник данных о физических свойствах спутников планет – это справочно-информационная система Динамика Солнечной системы лаборатории Jet Propulsion Laboratory Калифорнийского технологического института, США. Она доступна в интернете по адресу
https://ssd.jpl.nasa.gov/

Имеется единственная специализированная библиографическая база данных по естественным спутникам планет, созданная в рамках NSDB (ГАИШ МГУ - IMCCE). Чтобы попасть туда через интернет, нужно войти сначала в NSDB по одному из адресов, указанных выше, а затем пройти по ссылкам: Базы данных – Библиография.

Конечно, всю библиографию по исследованиям естественных спутников планет охватывает библиографическая база данных по астрономии The SAO/NASA Astrophysics Data System Abstract Service. Доступ для поиска библиографии осуществляется по адресу
http://adsabs.harvard.edu/abstract_service.html

Теперь рассмотрим имеющиеся средства вычисления эфемерид естественных спутников планет, доступные через интернет. Заметим, что такие средства называют еще службами эфемерид или просто эфемеридами.

Одним из наиболее развитых средств вычисления эфемерид спутников планет является сервер MULTI-SAT. Он создан, поддерживается и сопровождается совместно: Институтом небесной механики и вычисления эфемерид (IMCCE), Париж, Франция и Отделом небесной механики ГАИШ МГУ. Объявление о создании службы MULTI-SAT и краткое ее описание содержится в публикации (Emel'yanov, Arlot, 2008). Адреса доступа к службе MULTI-SAT следующие:
http://nsdb.imcce.fr/multisat/ – на сайте IMCCE
http://www.sai.msu.ru/neb/nss/indexr.htm – на сайте ГАИШ МГУ.
Более подробно это средство рассмотрено ниже.

Другим развитым средством вычисления эфемерид спутников планет является сервер эфемерид HORIZONS JPL NASA, США (Giorgini и др., 1996), предоставляющий доступ к эфемеридам через Web-страницы интернета. Адрес страницы запроса эфемерид:
http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi
Это средство вычисления эфемерид не только естественных спутников планет, но также почти всех тел Солнечной системы.

На страницах интернета Minor Plant Center (MPC) имеется служба вычисления эфемерид далеких спутников планет. Доступ туда осуществляется по адресу
http://www.minorplanetcenter.net/iau/NatSats/NaturalSatellites.html

В Институте прикладной астрономии (ИПА), Санкт-Петербург, Россия разработаны оригинальные модели движения главных спутников планет (Космодамианский, 2009; Порошина, 2013). Эфемериды, вычисляемые по этим моделям, предоставлены на сервере эфе-

мерид по адресу: http://ephemeris.ipa.nw.ru/

Отметим, что формы запроса эфемерид на страницах серверов эфемерид MULTI-SAT, HORIZONS, MPC и ИПА существенно различаются. Наиболее существнным различием является число значащих цифр, которые выдаются при вычислении эфемерид. Сервер MPC выдает топоцентрические координаты спутников с точностью до единиц секунд дуги, сервер HORIZONS – с точностью до 0.001 секунд дуги, а серверы MULTI-SAT и ИПА – 6 значащих цифр после запятой в секундах дуги. Эти свойства не отражают соотношение точностей эфемерид, выдаваемых разными службами. Это только их технические возможности и ограничения.

8.3. Возможности сервера эфемерид MULTI-SAT

Одно из наиболее развитых средств, предоставляющмх эфемериды спутников планет, является сервер эфемерид MULTI-SAT. Он создавался и развивался, начиная с 2002 года, на основе эфемеридных средств, которые разрабатывались в Государственном астрономическом институте имени П.К. Штернберга Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (ГАИШ МГУ). При сотрудничестве с Институтом небесной механики и вычисления эфемерид (Institut de Mécanique céleste et de calcul des éphémérides - IMCCE), Париж, Франция эта служба эфемерид спутников планет постоянно поддерживается и развивается. При открытии новых спутников, их эфемериды добавляются в серевер. При появлении новых, более совершенных моделей движения, они вносятся в инструментарий службы. Сообщение о создании сервера эфемерид MULTI-SAT опубликовано в работе (Emel'yanov, Arlot, 2008).

В мире существуют различные службы эфемерид спутников планет. Сервер эфемерид MULTI-SAT имеет особенности по сравнению с другими аналогами. Перечислим здесь главные из них.

1. Эфемериды вычисляются для всех естественных спутников Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона, для которых имеются кем-нибудь разработанные модели движения на основе наблюдений.

2. Запрос эфемерид осуществляется со страниц интернета в удобной форме с большим разнообразием систем координат, шкал времени, типов выдаваемых величин.

3. Имеется возможность вводить таблицу результатов наблюдений

спутников и мгновенно получать разности "O-C" – результат сравнения наблюдений с теорией. Число наблюдений не ограничено.

4. Имеется возможность графического показа видимого расположения спутников относительно планеты.

5. Можно получать прямоугольные планетоцентрические координаты спутников, элементы оскулирующих кеплеровских орбит и их средние значения.

6. Вычисляются не только координаты спутников, но также астрометрические координаты планет.

7. Можно выбрать одну из десяти современных планетных теорий, разработанных в IMCCE, JPL NASA, Институте прикладной астрономии РАН (Питьева, 2013).

8. Вычисляются эфемериды взаимных затмений спутников. При этом выдаются гелиоцентрические относительные координаты спутников при спецальном способе вычисления светового времени.

9. Можно получить эфемериды и обстоятельства всех взаимных покрытий и затмений спутников, а также затмений спутников планетой.

10. Выдаются различные величины, сопутствующие эфемеридам спутников: звездные величины спутников, планетоцентрические угловые координаты спутников, Земли и Солнца, солнечная фаза, видимые размеры планеты, горизонтальные координаты спутников в месте наблюдения.

8.4. Спутники планет в виртуальных обсерваториях

В мире разрабатываются так называемые Виртуальные обсерватории (ВО). Пока еще нет четко устоявшегося понимания этого термина. Чаще всего виртуальной обсерваторией называют набор инструментов для работы с ресурсами астрономических данных. Данные создают сами астрономы - эксперты в соответствующих областях. Виртуальная обсерватория аккумулирует сведения об этих ресурсах, описывает их, классифицирует и разрабатывает методы доступа к ним: форматы, стандарты и т.п.

Попытки найти виртуальную обсерваторию, содержащую спутники планет, дают единственный результат – это Виртуальная обсерватория Института небесной механики и вычисления эфемерид (Institut de Mécanique céleste et de calcul des éphémérides - IMCCE), Париж, Франция. Доступ в эту виртуальную обсерваторию осуществляется

по адресу http://vo.imcce.fr/ . Ее идентификация на сайте имеет вид: THE IMCCE VIRTUAL OBSERVATORY SOLAR SYSTEM PORTAL Observatoire de Paris / CNRS.

Большая часть компонент этой ВО находятся в стадии разработки. Попытки найти здесь средства, касающиеся спутников планет, приводят только к возможности вычисления эфемерид спутников планет в табличном виде. Адрес этого средства
http://vo.imcce.fr/webservices/skybot/?forms=resolver
Набор спутников в этой виртуальной олбсерватории весьма ограничен. Это спутники Марса (2), Галилеевы спутники Юпитера (4), главные спутники Сатурна (8), главные спутники Урана (5), спутники Нептуна Тритон и Нереида, некоторые близкие спутники Урана (3), близкие спутники Нептуна (6). Эти 30 объектов составляют небольшую часть от всех известных 176 спутников планет.

Глава 9. Состав и особенности динамики тел Солнечной системы

9.1. Состав и размеры Солнечной системы

Солнечной системой мы называем совокупность объектов, которые расположены в некоторой окрестности Солнца и достаточно долго не покидают эту окрестность. В зависимости от размеров и свойств движения эти небесные тела называются так: Солнце, планеты, спутники планет, кольца планет, малые планеты, карликовые планеты, кометы, метеорные тела. Малые планеты еще называют астероидами.

Не все тела Солнечной системы видны с Земли даже в самые мощные телескопы. Те, которые не видны, либо слишком малы, либо очень удалены от нас. О существовании некоторых объектов Солнечной системы мы узнали с помощью космических аппаратов, посланных к другим планетам.

Говоря далее о размерах орбит и самих небесных тел, для удобства запоминания мы будем приводить весьма округленные их значения. С большей точностью об этом можно узнать из литературы.

О литературе на данную тему следует сказать подробнее. Самым первоначальным источником всех данных о динамике Солнечной системы являются публикации научных центров, в которых непосредственно проводятся исследования. В настоящее время такими публикациями являются ”Inroduction aux éphémérides astronomiques” (1998) и ”Explanatory supplement to the astronomical almanac” (1992) Подробные ссылки даны в списке литературы. В качестве первоисточника данных следует указать "Доклад рабочей группы Международного астрономического союза по картографическим координатам и элементам вращения планет и спутников"(Archinal et al. 2011), который регулярно публикуется. Заметим, что эти публикации являются редкостью даже в научных библиотеках. Более доступным источником данных в настоящее время являются информационные страницы, выставляемые научными институтами в общий доступ через интернет. Адреса основных информационных хранилищ в интернете на рассматриваемую здесь тему даны в предыдущей Главе 8.

Приведем здесь адреса только тех первоисточников в интернете, где размещены сведения о размерах, массах и фотометрических свойствах естественных спутников планет (кроме Луны).

Сайты Базы данных естественных спутников планет:

Институт небесной механики и вычисления эфемерид Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides (IMCCE), Франция – http://nsdb.imcce.fr/obspos/
Государственный астрономический институт имени П.К. Штернберга http://www.sai.msu.ru/neb/nss/indexr.htm
Jet Propulsion Laboratory, Calofornia Institute of Technology. Solar System Dynamics. Planetary Satellite Physical Parameters –
https://ssd.jpl.nasa.gov/?sat_phys_par

Итак, радиус сферы, в которой находятся наблюдаемые тела Солнечной системы, составляет примерно 8 млрд км (8 000 000 000 км). Для измерения таких больших расстояний астрономы придумали более удобную единицу длины – астрономическую единицу, сокращенно – а.е. Она равна радиусу орбиты Земли. Приближенно 1 а.е. равна 150 000 000 км. Выраженный в астрономических единицах радиус видимой части Солнечной системы равен 53 а.е.

Снаружи такой сферы еще могут быть тела Солнечной системы, но мы их не видим из-за недостаточных размеров или яркости.

Заметим, что в Солнечной системе нет абсолютно шарообразных тел, нет и круговых орбит. Поэтому нельзя строго определить их радиусы. Мы говорим здесь о радиусах воображаемых окружностей и сфер, пролегающих вблизи соответствующих орбит и поверхностей небесных тел.

Что касается размеров самых главных тел Солнечной системы, то радиус Солнца равен 700 000 км, а радиус Земли – 6 400 км.

В Солнечной системе все тела движутся. Именно поэтому они не падают на Солнце или планету под действием сил гравитационного притяжения.

Структура Солнечной системы иерархическая – у каждого тела есть главное, вокруг которого оно движется. Следствием такого свойства является то, что траектории большинства тел почти плоские и почти эллиптические или даже почти круговые.

Планеты.

Самыми большими телами, после Солнца, являются восемь самых крупных планет: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун. Они движутся по почти круговым орбитам, и все примерно в одной плоскости. В Табл. 4 приводятся размеры восьми больших планет и их средние расстояния от Солнца. Взаимный наклон среди орбит этих планет не превышает 7 градусов, а максимальный эксцентриситет орбиты составляет 0.2 (орбита Меркурия). Эксцен-

Таблица 4: Размеры больших планет и их орбит.

Планета	Радиус планеты	Среднее расстояние от Солнца
Меркурий	2 400 км	0.4 а.е.
Венера	6 000 км	0.7 а.е.
Земля	6 400 км	1.0 а.е.
Марс	3 400 км	1.5 а.е.
Юпитер	70 000 км	5.2 а.е.
Сатурн	60 000 км	9.5 а.е.
Уран	25 000 км	20 а.е.
Нептун	25 000 км	30 а.е.

Таблица 5: Параметры групп астероидов.

Группа астероидов	Средний радиус	Среднее расст. от Солнца	Количество
Главный пояс	< 500 км	2 - 3.5 а.е.	200 000
Троянцы	< 300 км	5.2 а.е.	1 200
Пояс Койпера	100 - 1000 км	30 - 50 а.е.	500
Астероиды, сближающиеся с Землей	< 100 км	0.7 - 4.0 а.е.	300

триситетом e называют параметр орбиты, который характеризует ее эллиптичность.

Астероиды. Меньшими по размерам телами Солнечной системы после планет являются астероиды. Их так и называют – малые планеты. По размерам и области движения астероиды делят на группы. Общая особенность орбит астероидов – они могут иметь любые эксцентриситеты и наклоны к плоскости орбиты Земли. В Табл. 5 даются численные характеристики групп астероидов.

Отметим некоторые свойства групп астероидов.

Троянцы движутся на орбите Юпитера. Две группы таких астероидов вместе с Юпитером и Солнцем составляют примерно равносторонние треугольники.

Орбиты астероидов, сближающихся с Землей, могут иметь различные большие полуоси и эксцентриситеты, однако траектории пролегают вблизи орбиты Земли.

Первый астероид был открыт в 19-м веке, в настоящем их открывают более 10 тысяч ежегодно. Сначала астероидам присваивали имена богинь в греческой мифологии. Когда таких имен оказалось недостаточно, астероиды стали называть сначала просто женскими именами, затем именами и фамилиями знаменитых людей, в том числе и астрономов. Закончилась история тем, что имена астероидам присваивать совсем перестали, сохранилась лишь достаточно сложная их нумерация.

Среди астероидов обнаружены двойные, несколько тройных. К настоящему времени известны около 300 астероидов, имеющих спутники. Ряд астероидов сфотографированы с космических аппаратов. Теперь мы имеем представление об их формах и вращении.

26-ая Ассамблея Международного астрономического союза, которая состоялась в Праге в 2006 г., приняла решение о введении нового класса небесных тел, а именно, карликовых планет.
"Карликовая планета"— это небесное тело, которое:
(a) обращается вокруг Солнца,
(b) имеет достаточную массу, для того, чтобы самогравитация превосходила твердотельные силы и тело могло принять гидростатически равновесную (близкую к сферической) форму,
(c) не очищает окрестности своей орбиты и
(d) не является спутником (планеты).

К карликовым планетам отнесены Плутон и астероиды Церера, Хаумеа, Эрида, Макемаке. Есть предположение, что должны быть еще карликовые планеты в Солнечнной системе.

Среди астероидов Плутон имеет номер 134340. Его орбита находится в области пояса Койпера. До открытия этой группы астероидов Плутон считался девятой планетой Солнечной системы. Однако размеры астероидов пояса Койпера оказались сравнимыми с размером Плутона, орбита Плутона значительно вытянута и наклонена к плоскости орбиты Земли.

Кометы. Это весьма странные небесные тела. Траектории очень

вытянуты. Плоскости орбит весьма разнообразны. По физическому составу кометы сильно отличаются от других тел Солнечной системы. За время своего приближения к Солнцу тело кометы подвергается бурному испарению. Частицы кометы под действием силы светового давления отлетают от ядра кометы, образуя живописный "хвост". К настоящему времени известно более 1000 комет.

Спутники планет. Самым главным из всех спутников планет является Луна. Она движется вокруг Земли на среднем расстоянии 380 000 км. Радиус Луны равен 1700 км. Ее масса составляет 1/81 часть массы Земли.

В окрестности планет Меркурий и Венера спутников не обнаружено.

Вокруг Марса на почти круговых орбитах в плоскости экватора планеты обращаются два спутника – Фобос и Деймос. Фобос – весьма вытянутое тело, имеющее размеры $26 \times 22 \times 18$ км. Деймос тоже вытянут, его размеры $15 \times 12.4 \times 10.8$ км. Радиус орбиты Фобоса – 9400 км, Деймоса – 23500 км. Для сравнения напомним, что радиус Марса составляет 3400 км.

У больших планет Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун открыты множества спутников, которые можно условно разделить на три группы.

- **Близкие спутники** : круговые орбиты в плоскости экватора планеты на расстояниях 50 000 - 300 000 км от планеты, радиусы спутников 10 - 100 км.

- **Главные спутники** : почти круговые орбиты вблизи плоскости экватора планеты на расстояниях 100 000 - 5 000 000 км от планеты, радиусы спутников 200 - 2 500 км.

- **Далекие спутники** : эксцентриситеты орбит 0.1 - 0.7, наклоны к экватору планеты весьма разнообразные (от 0 до 180 градусов) на расстояниях 5 000 000 - 25 000 000 км от планеты, радиусы спутников 10 - 100 км.

Количество спутников каждой группы у больших планет, известных на 31 октября 2017 г, указано в Табл. 6.

Планета Плутон имеет уникальный спутник Харон. Его радиус всего в два раза меньше радиуса самой планеты. Радиус Плутона –

Таблица 6: Количество спутников у планет.

Планета	Близких спутников	Главных спутников	Далеких спутников
Земля	0	1	0
Марс	2	0	0
Юпитер	4	4	62
Сатурн	16	8	38
Уран	13	5	9
Нептун	7	1	6
Плутон	0	1	4

1200 км, Харона – 600 км. Радиус почти круговой орбиты Харона составляет 20 000 км. Размеры других четырех спутников Плутона (Никта, Гидра, Цербер и Стикс) установлены весьма приближенно, диаметры не превышают 100 км.

Русскоязычную номенклатуру естественных спутников планет можно найти на сайте
http://lnfm1.sai.msu.ru/neb/nss/index.htm
а также по адресу
http://lnfm1.sai.msu.ru/neb/rw/natsat/index.htm .

Кольца планет. Эти скопления мелких частиц всевозможных размеров формируют кольцевые структуры вращающиеся вокруг Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Плоскости колец всегда совпадают с экватором планеты. Радиусы колец указаны в Табл. 7.

Только основные кольца Сатурна D, C, B, A хорошо видны с Земли. Кольца вокруг других планет были обнаружены по фотографиям, сделанным с космических аппаратов.

Кроме рассмотренных выше небесных тел в Солнечной системе движется огромное множество мельчайших частиц – метеорное вещество. Эти частицы попадают в атмосферу Земли и сгорают, образуя ночью на небе эффекты "падающих звезд" и "звездных дождей".

Таблица 7: Радиусы колец больших планет.

Планета, кольцо, деление колец	Радиусы (внутренний - внешний) в долях радиуса планеты	Толщина, км
Кольца Юпитера:		
гало	1.3 - 1.71	20 000
главное кольцо	1.71 - 1.81	$<$ 30 км
внутренне паутинное кольцо	1.81 - 2.55	?
внешнее паутинное кольцо	2.55 - 3.15	?
Кольца Сатурна:		
D	1.11	$\approx$ 1 km
C	1.23 - 1.53	$\approx$ 1 km
деление Максвелла		
B	1.53 - 1.95	$\approx$ 1 km
щель Кассини		
A	2.02 - 2.27	$\approx$ 1 km
деление Энке		
F	2.33	$\approx$ 1 km
G	2.8	$\approx$ 1000 km
E	3 - 8	1000 km
Кольца Урана	1.64 - 2.0	?
Кольца Нептуна	2.22 - 2.54	?

9.2. Теории и модели орбитального движения тел Солнечной системы

Обычно обеспечивается некоторый запас точности теории и методов вычислений движения небесных тел по сравнению с точностью наблюдений. Поэтому совершенство модели движения небесного тела определяется точностью его наблюдений. Для разных тел эта точность весьма различна. Если она не слишком высока, то можно ограничиться применением законов ньютоновой механики. В отдельных случаях необходимо рассматривать движение тела в рамках релятивистской теории тяготения или общей теории относительности. В этих случаях даже точная запись уравнений движения оказывается чрезвычайно сложной. Поэтому на практике движение тел Солнечной системы изучают в рамках ньютоновой теории тяготения, а при необходимости эффекты общей теории относительности приближенно учитываются методами теории возмущений введением в рассмотрение небольших поправок в дифференциальные уравнения движения.

В теории тяготения Ньютона движение небесных тел подчиняется трем известным законам Ньютона и закону всемирного тяготения Ньютона. Однако даже эти законы приводят к необходимости решать такие дифференциальные уравнения, точное общее решение которых до сих пор не найдено. Поэтому построение теории движения небесных тел заключается в применении всевозможных методов приближенного решения дифференциальных уравнений движения.

Методы решения дифференциальных уравнений движения небесных тел рассмотрены в предыдущих Главах 3 и 4.

Рассмотрим здесь движение различных конфигураций тел Солнечной системы, рассматриваемых как материальные точки. Такие движения называются орбитальными или поступательными. В качестве упрощенной модели движения почти всегда рассматривается точное решение задачи двух тел – кеплеровское движение. Отличия действующих сил от упрощенной модели называют возмущающими силами, а отличия в самом движении – просто возмущениями.

Орбитальное движение планет.

Основные возмущения в движении планет обусловлены их взаимным притяжением. Малыми параметрами в теории движения являются отношения масс планет к массе Солнца. Точность наземных астрометрических наблюдений планет достаточно высокая. Для планет земной группы (Меркурий, Венера, Марс) позиционные измерения

с высокой точностью выполняются также с помощью радиолокации планет с Земли.

Современные аналитические теории движения планет весьма громоздки и сложны. Имеются также особые проблемы. Трудностью при построении аналитической теории движения Юпитера и Сатурна является приближенный резонанс между орбитальными обращениями этих планет. Особый случай представляет также движение Плутона. Его орбита имеет значительный эксцентриситет (0.25) и большой наклон (18 градусов) к орбите ближайшей и массивной планете Нептун. Это затрудняет построение точной аналитической теории движения.

В прошлом наиболее развитые теории движения планет были построены во Франции учеными Леверье (1855) и Гайо (1912), в Англии Ньюкомом (1898) и Хиллом (1898). В конце 20-го века аналитическая теория движения планет разрабатывалась в парижском институте небесной механики, который в то время назывался Бюро долгот (Bretagnon, 1982; Bretagnon, Francou, 1988).

В последнее время в продолжение работ Пьера Бретаньона разрабатывались два варианта аналитической теории движения планет (включая Плутон) VSOP2013 et TOP2013 (Simon, Francou G., 2016). Это единственные разработки аналитических теорий движения планет за последние 50 лет.

В последнее время широко применяется модель движения планет и Луны, созданная и развиваемая в США, в Лаборатории реактивного движения (Jet Propulsion Laboratory - JPL) с 1982 года (Standish, 1990). Эта модель строится методами численного интегрирования уравнений движения и основана на всех имеющихся в мире наблюдениях планет. Ее последовательные версии имеют обозначения: DE200/LE200, DE403/LE403, ... Последняя к настоящему времени версия DE431/LE431 описана в работе (Folkner et al., 2014).

Массы планет в теориях Леверье и Ньюкома определялись по взаимным возмущениям. Для планет, имеющих спутники, более точные определения масс делаются по наблюдениям движения спутников. Уточнение масс планет еще выполняется по траекторным измерениям космических аппаратов, проледающих вблизи планет и подверженных их притяжению.

Орбитальное движение астероидов.

Основные возмущения в движении астероидов обусловлены притяжением больших планет. Точность обычных астрометрических наблюдений этих небесных тел достаточно высока. В последние го-

ды сделаны несколько успешных попыток радиолокации астероидов. Для определения точных положений используются также редчайшие случаи видимых покрытий звезд астероидами.

Массы некоторых астероидов оценены по их взаимным возмущениям. Более точные оценки масс получаются для астероидов, имеющих спутники. Сейчас известны около 300 астероидов, имеющих спутники. В редких случаях изучения этих тел с помощью космических аппаратов удаются более точные определения их масс.

Что касается теорий движения астероидов, в настоящее время в основном применяются методы численного интегрирования дифференциальных уравнений движения.

К настоящему времени в Солнечной системе известны более 700 000 малых планет. Открытия, идентификация и моделирование орбит астероидов координируются в международном центре малых планет (Minor Planet Center – MPC). Общаться с этим центром можно через интернет. Адрес центра в интернете:
http://cfa-www.harvard.edu/cfa/ps/mpc.html

Динамика комет.

Основные возмущения в орбитальном движении комет обусловлены притяжением больших планет. Особенностью динамики комет является действие сил негравитационной природы. К таким силам относятся механическое давление солнечного света и реактивная сила испускания частиц кометы при нагревании ядра кометы Солнцем.

Наблюдения положений комет не могут быть сделаны с высокой точностью, так как ядро кометы тонет в свете ее хвоста. Глядя на фотографию кометы, трудно указать расположение массивного ядра, которое как раз и определяет ее орбитальное движение.

Движение комет сейчас моделируется в основном методами численного интегрирования уравнений движения. Для изучения эволюции орбит используются приближенные аналитические теории движения комет.

Теория движения Луны.

Две особенности определяют ситуацию с изучением орбитального движения Луны. Первая особенность заключается в сильных возмущениях со стороны Солнца. Это делает неэффективным применение кеплеровской промежуточной орбиты в качестве основы аналитической теории движения. Хилл в 1905 предложил другую приближенную механическую модель, так называемую задачу Хилла, частное периодическое решение которой точнее, чем кеплеровская

орбита, описывает движение Луны. Любопытно, что орбита Хилла очень близка по форме к эллипсу, причем центральное притягивающее тело, Земля, расположено не в фокусе, а в центре этого эллипса. Большая ось такой орбиты ориентирована вдоль орбиты Земли. На основе задачи Хилла методами теории возмущений строилась аналитическая теория движения Луны.

Вторая особенность заключается в близости Луны к Земле, следствием является возможность ее высокоточных наблюдений. Особую точность позиционных наблюдений обеспечивают уголковые световые отражатели (зеркала), доставленные на поверхность Луны космическими аппаратами. Начало лазерной светолокации Луны увеличило точность ее позиционных наблюдений в тысячу раз по сравнению с классическими наблюдениями. Это привело в некоторое замешательство теоретиков, которые использовали для моделирования движения Луны аналитические теории, созданные Хиллом, Брауном (1919) и Экертом (1966). В итоге М. Шапрон-Тузе и Ж. Шапрон (Chapront-Touzé, 1980; Chapront-Touzé, Chapront, 1983) построили новую высокоточную аналитическую теорию движения Луны. В США, в Лаборатории реактивного движения (Jet Propulsion Laboratory - JPL) одновременно с развитием моделей движения планет созданы модели движения Луны LE200 - LE431 (Folkner et al., 2014)..

Спутники других планет.

Теории движения естественных спутников планет весьма разнообразны. Разнообразны конфигурации спутниковых систем и возмущающих сил, действующих на их движение. По ситуациям с изучением движения спутников планет их можно разделить на несколько групп.

Близкие спутники.

Эти спутники движутся по почти круговым орбитам в плоскости экватора планеты. Поскольку большие планеты Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун представляют собой сжатые почти осесимметричные тела, то основные возмущения в движении близких спутников обусловлены динамическим сжатием планеты. Этот фактор характеризуется коэффициентами $J_2, J_4, ...$ при зональных гармониках разложения силовой функции притяжения. Движение близких спутников еще подвержено притяжению главных спутников. Это второстепенный фактор. Для близких спутников планет пока не нужны очень точные теории, так как точность их наблюдений относительно невысока. Это потому, что при наземных позиционных наблюдениях свет от самой планеты создает в фотокамерах сильный ореол, в котором

"тонет"изображение спутника. Что касается близких спутников Сатурна, то их дополнительно засвечивает еще и кольцо планеты. Для близких спутников планет построены и используются простые аналитические теории, основанные на кеплеровской промежуточной орбите и приближенно учитывающие перечисленные выше возмущающие факторы. На практике пока принимают во внимание только вековые возмущения, то есть моделью движения спутника является прецессирующий эллипс. Такой эллипс медленно поворачивается в своей плоскости, а плоскость эта медленно вращается вокруг оси симметрии планеты. Модель прецессирующего эллипса рассмотрена выше в Главе 3.

Главные спутники.

Эти спутники имеют орбиты с небольшими эксцентриситетами расположены вблизи плоскости экватора планеты. В силу того, что они несколько удалены от планеты и имеют наибольшие размеры среди спутников планет, их легче наблюдать, и наблюдения этих спутников более точные, чем других. Поэтому приходится строить довольно точные и сложные модели движения главных спутников. В таких моделях учитываются сжатие планеты, взаимные возмущения спутников, а также притяжение Солнца. Некоторую трудность создают приближенные резонансы между орбитальными обращениями некоторых главных спутников.

Особый случай представляют спутники Марса Фобос и Деймос. Для этих спутников главными возмущающими факторами является несферичность планеты и притяжение Солнца. Накоплено много наземных наблюдений этих спутников с момента их открытия в 1877 году. В последнее время позиционные наблюдения спутников Марса выполняются также с помощью космических аппаратов.

Далекие спутники.

Орбиты далеких спутников весьма разнообразны. Эксцентриситеты большинства орбит заключаются в пределах 0.15 - 0.6. Наклоны к плоскости орбиты планеты составляют 20 - 40 градусов, причем некоторые далекие спутники движутся по орбитам в том же направлении, что и обращение планеты вокруг Солнца. Другие спутники движутся в обратном направлении. Движение далеких спутников подвержено сильному влиянию притяжения Солнца. Поэтому построение аналитической теории движения далеких спутников планет весьма затруднительно. Удовлетворительных по точности аналитических теорий в настоящее время не существует. Наблюдений далеких спутников пла-

нет совсем немного, так как их трудно наблюдать из-за их малой яркости. Точность наблюдений в последнее время получается довольно высокой. С помощью новых мощных телескопов, недавно построенных на международных обсерваториях, за последние 20 лет открыто более 100 новых спутников. Для моделирования движения далеких спутников планет используются методы численного интегрирования уравнений движения.

9.3. Особые случаи орбитального движения спутников планет

Со-орбитальные спутники Сатурна.

Среди близких спутников Сатурна два из них, Янус и Эпиметей, движутся на одной и той же орбите синхронно, то есть с одной и той же угловой скоростью. Движение этой пары спутников происходит так, что если представить себе линию, проходящую через центр планеты и вращающуюся с угловой скоростью, равной средней угловой скорости обращения спутников, то спутники отклоняются от этой линии вдоль орбиты периодически с периодом несколько лет и амплитудой, составляющей около 100 градусов для одного спутника и 60 градусов – для другого. Это так называемые либрации спутников относительно движения, соответствующего известному прямолинейному частному решению задачи трех тел. Замечательность явления заключается в том, что по наблюдениях этих либраций можно оценить массы спутников. К сожалению, спутники эти движутся вблизи кольца Сатурна, свет от которого мешает наблюдениям. С Земли спутники видны только несколько дней в моменты видимого исчезновения кольца, когда оно поворачивается к Земле ребром. Это происходит раз в 14 лет.

Спутники – "Лагранжианы".

На орбитах двух главных спутников Сатурна движутся еще четыре со-орбитальных им спутника. Они движутся вблизи треугольных конфигураций, соответствующих известным частным решениям задачи трех тел. Главный спутник Тефия имеет два со-орбитальных – Телесто и Каллипсо, у главного спутника Диона два со-орбитальных – Елена и Полидевк.

Самый большой эксцентриситет орбиты (0.7512) среди спутников планет имеет далекий спутник Нептуна – Нереида. Это обстоятельство заставило теоретиков движения Нереиды прибегать к очень

хитроумным аналитическим методам.

Редкие явления в системах спутников планет.

Настоящим подарком природы для ученых являются особые явления в системах спутников планет. Дело в том, что орбиты большинства спутников планет лежат почти в плоскости экватора своей планеты. В некоторые довольно редкие моменты времени плоскости орбит спутников оказываются вблизи направлений от планеты на Солнце и на Землю. При наблюдениях с Земли в такие периоды изображение одного спутника иногда может налагаться на изображение другого спутника в процессе их движения вокруг планеты. Эти явления называют покрытиями. Спутники постоянно освещены Солнцем, но случается, что один из спутников попадает в тень другого. Наступает затмение спутника. В процессе взаимных покрытий и затмений изменяется суммарный блеск двух спутников, участвующих в явлении. Эту величину астрономы давно научились измерять с весьма высокой точностью, и эта точность постоянно возрастает. Обрабатывая кривые блеска спутников в нескольких явлениях на основе геометрической модели, получают сразу несколько параметров: момент максимального сближения спутников, угловое расстояние между видимыми с Земли центрами спутников и радиусы спутников.

Ценность и необычность наблюдений взаимных покрытий и затмений позволяют называть такие явления событиями. Необычность наблюдений состоит в том, что практически выполняются фотометрические измерения, а в результате получаются относительные координаты спутников. Ценность наблюдений событий заключается в их высокой точности и информативности.

Взаимные покрытия и затмения спутников планет рассмотрены в специальной Главе 7. Популярное описание явлений дано в статье (Емельянов, 1997).

Система Плутон-Харон.

Отношение массы спутника к массе планеты, равное 0.15, - максимальное в Солнечной системе. Отношение радиуса планеты к радиусу орбиты спутника также максимальное в Солнечной системе. Эти два небесные тела, как отдельные объекты, наблюдались только с помощью космического телескопа Хабла. Однако с Земли наблюдались чрезвычайно редкие (раз в 124 года) и интересные явления взаимных покрытий и затмений Плутона и Харона. Орбита Харона располагалось к Земле ребром и в период с 1987 по 1991 год происходили видимые взаимные покрытия и затмения планеты и ее спутника.

Суммарная яркость этих небесных объектов в моменты таких явлений уменьшается. Измерения этой яркости позволили определить радиусы этих небесных тел и параметры орбиты спутника. События в системе Плутон-Харон описаны автором настоящей статьи в журнале "Земля и Вселенная"(Емельянов, 1989).

9.4. Особенности формы и вращений тел Солнечной системы

Свойства вращения небесного тела зависят от гравитационного поля, которое оно само создает, а также от конфигурации и движения других тел.

Ось вращения имеет два конца. Для однозначного понимания концам оси дали названия: северный полюс, южный полюс. Рабочей группой Международного астрономического союза установлено соглашение, что северным полюсом оси вращения планеты или спутника считается тот из двух полюсов, который расположен в северной полусфере относительно неизменной плоскости вращения Солнечной системы. Однако оси вращения астероидов могут поворачиваться, и со временем северный полюс может переместиться в южную полусферу. Поэтому для астероидов северным полюсом вращения считается тот, вокруг которого тело совершает вращение против часовой стрелки, если смотреть на поверхность снаружи. В частности, таким полюсом является также северный полюс Земли.

Рассмотрим здесь некоторые специфические особенности формы и вращения разных небесных объектов.

Меркурий.

Несферичность тела Меркурия из наблюдений не обнаружена. Про его вращение известно, что ось почти перпендикулярна плоскости орбиты Меркурия. Направление вращения совпадает с направлением орбитального движения Меркурия. Период вращения составляет 54 дня.

Загадка Венеры.

Про несферичность тела Венеры ничего неизвестно – точности наблюдений для этого недостаточно. Вращается Венера необычно – в обратную сторону относительно орбитального движения. Существует теория (Correia, Laskar, 2001), согласно которой такое вращение Венеры является устойчивым и единственно возможным в настоящее время. Математически вопрос остается открытым: была ли Ве-

нера от рождения такой ? Период ее вращения составляет 243 дня. При построении теории вращения Венеры учитывались следующие факторы: приливные силы со стороны Земли; приливы атмосферы, нагреваемой Солнцем; турбулентное трение на границе ядро-мантия; резонанс между частотой прецессии оси и комбинацией вековых частот орбитального движения; неопределенности в диссипативных моделях.

Вращение Земли.

Модель вращения Земли построена с высокой точностью на основе наблюдений и с учетом всех известных деталей динамического строения Земли и ее деформаций, а также всех известных возмущающих факторов. В настоящее время ось вращения Земли немного не совпадает ни с главной осью инерции тела Земли, ни с осью эллипсоида, приближенно описывающего ее форму. Ось вращения перемещается в теле Земли – это так называемое движение полюса. Ось вращения медленно поворачивается в пространстве, прецессирует, описывая конус, ось которого перпендикулярна к плоскости орбиты Земли. Ось еще испытывает мелкие колебания, называемые нутацией, обусловленные притяжением Луны и имеющие период, равный периоду ее орбитального движения. Угол наклона оси вращения Земли относительно перпендикуляра к ее орбите составляет 23.5 градуса. Француз Жак Ласкар с коллегами в 1993 г. численно моделировал движение и вращение планет на интервале 20 млн лет. Он обнаружил постоянство наклона оси вращения Земли на таких интервалах времени и доказал, что стабильность наклона обусловлена присутствием Луны (Laskar, Joutel, Robutel, 1993).

Что касается тела Земли, то оно заметно отличается от шара. Основное отличие – сжатие с полюсов. Отношение разности полярного и экваториального размеров Земли к ее экваториальному размеру, то есть сжатие, составляет примерно 0.003 . Другие детали несферичности существенно меньше. Разложение силовой функции притяжения Земли в ряд по сферическим функциям рассмотрено в Главе 2.

Марс.

В настоящее время наклон оси вращения Марса к плоскости его орбиты составляет 25 градусов. Период вращения – 24.6 часа. Наиболее точная модель прецессии-нутации Марса построена в работе (Bouquillon, Souchay, 1999). Учитывались все известные возмущающие факторы: притяжение Солнца, притяжение Юпитера и Земли, несферичность Марса, деформации Марса, притяжение Фобоса и Дей-

Таблица 8: Параметры больших планет.

Планета	Период вращения, час	J_2	J_4
Юпитер	10	0.01475	-0.000587
Сатурн	10.6	0.01645	-0.000915
Уран	17.25	0.00334	-0.000032
Нептун	16.1	0.00341	-0.00003

моса.

На интервале времени (20 млн лет) Laskar, Robutel (1993) исследовали эволюцию наклона оси вращения Марса. Получилось, что на большом интервале времени наклон изменяется сильно и хаотически в пределах от 0 до 60 градусов.

Марс – сжатое тело. Величина сжатия составляет 0.002. Разложение силовой функции притяжения известно до 18 порядка (Christensen, Balmino, 1979). Известны различия оси симметрии тела, главной оси инерции и оси вращения.

Вращение больших планет.

Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун являются почти осесимметричными небесными телами. В Табл. 8 приводятся основные параметры гравитационных полей планет и периоды их вращения.

Оси вращения Юпитера, Сатурна и Нептуна почти перпендикулярны плоскостям орбит планет. Уран "лежит на боку то есть его ось вращения расположена вблизи плоскости орбиты Урана.

Вращение Плутона и Харона.

Эта планета и ее спутник – шары. Особенность системы Плутон-Харон заключается в том, что на их вращение не влияют никакие другие тела. Солнце очень далеко. В таких условиях в чистом виде работает так называемая приливная эволюция. Неоднородность гравитационных полей вызывает деформации тел – приливы. При наличии вязкости и вращения тел относительно линии, их соединяющей, приливы не успевают следовать за этой линией и вызывают таким образом торможение вращению. В настоящее время вращение обоих тел происходит синхронно с орбитальным движением Харона. То

есть Плутон и Харон все время обращены друг к другу всегда одними и теми же своими сторонами. Период общего вращения – 6.387 сут. Поэтому говорят, что система Плутон-Харон завершила свою приливную эволюцию.

Вращение двойных астероидов.

Среди астероидов обнаружены двойные. Эти небесные тела имеют самые разные и замысловатые формы. На их вращение влияют Солнце и другие планеты, но очень слабо. Двойные астероиды представляют самый общий случай поступательно-вращательного движения двух твердых тел. Теорию вращения построить очень трудно – чаще всего нет никаких малых параметров.

9.5. Формы спутников планет и их вращение

Физическая либрация Луны.

Из наблюдений довольно хорошо изучена форма Луны. По движению искусственных спутников Луны изучалось ее гравитационное поле. Разложение силовой функции известно с точностью до 4-го порядка (IERS, 1992). Наблюдаются небольшие повороты Луны относительно направления на Землю – так называемая физическая либрация Луны. С тех пор, как на ее поверхность были доставлены уголковые отражатели света (зеркала), точность измерений углов поворота Луны стала очень высокой. В мире несколькими авторами развивается точная теория физической либрации Луны. Это одна из самых громоздких и сложных теорий в небесной механике.

Другие спутники планет.

Все спутники планет, для которых имеются данные по вращению, вращаются синхронно с орбитальным движением. То есть спутник всегда обращен к своей планете одной и той же стороной. При этом ось вращения перпендикулярна плоскости орбиты, орбита лежит в плоскости экватора планеты, планета сжата с полюсов и осесимметрична. Есть только два исключения из последнего правила: у Марса и Земли имеются небольшие отличия от осесимметричности. Все спутники, кроме двух, вытянуты в направлении к планете. Для многих спутников известны периодические либрации относительно направления на планету.

Два спутника Сатурна Атлас и Телесто - сжатые тела. Оси сжатия перпендикулярны к плоскости орбиты. Спутники вращаются синхронно с орбитальным движением. Экваторы спутников немного вы-

тянуты в направлении к планете.

Среди спутников есть почти шарообразные (с точностью измерений). Это следующие спутники:
спутники Юпитера - Ганимед, Каллисто;
спутники Сатурна - Диона, Рея, Титан, Япет;
спутники Урана - Умбриель, Титания, Оберон;
спутник Нептуна - Тритон;
спутник Плутона - Харон.

Для ряда спутников форма неизвестна. Это 10 близких малых спутников Урана и 4 близких малых спутников Нептуна. Имеется также ряд спутников, про вращение которых тоже ничего неизвестно.

Размеры и параметры вращения спутников приводятся в публикации (Archinal et al., 2011).

9.6. Особые случаи вращения спутников планет

Гиперион (спутник Сатурна).

Этот спутник является сильно вытянутым небесным телом. Длины полуосей трехосного эллипсоида, приближенно представляющего форму Гипериона, имеют значения 180, 133, 102 км. Гиперион пытается ориентироваться своей наибольшей осью к Сатурну. Однако неподалеку от его траектории пролегает орбита очень массивного спутника Титан, который, пролетая мимо Гипериона, сильно возмущает его вращение. В итоге, колебания и вращения тела Гипериона носят хаотический характер (Klavetter, 1989).

Современные исследования хаотического вращения Гипериона и возможных хаотических вращений некоторых других естественных спутников планет опубликованы в работах (Мельников, Шевченко, 2007).

Фобос (спутник Марса).

Особое обстоятельство для этого спутника Марса – это хорошая изученность формы и вращения спутника, что предъявляет высокие требования к создаваемой теории его динамики. Тело Фобоса вытянуто, и своей вытянутостью направлено к Марсу. Известна форма спутника по фотографиям, сделанным с космических аппаратов, пролетавших в окрестности Марса. По форме спутника в предположении его внутренней однородности, разработана модель гравитационного поля Фобоса (Сагитов, Таджидинов, Михайлов, 1981). Эти данные позволили построить теорию либраций спутника. В теории орбиталь-

ного движения в свою очередь учитываются форма и вращение Фобоса.

Наиболее совершенная к насоящему времени теория вращения Фобоса построена в работах (Rambaux et al., 2012; LeMaistre et al., 2013)

Каллисто (спутник Юпитера).

Из наблюдений с борта космического аппарата следует, что форма спутника сферичная, а гравитационное поле нецентрально из-за неоднородностей внутреннего строения. Вот значения коэффициентов при основных членах разложения гравитационного поля Каллисто: $J2 = 0.0000327 \pm 0.0000008$, $C22 = 0.0000102 \pm 0.0000003$, $S22 = -0.0000011 \pm 0.0000003$. Эти данные взяты из работы (Anderson et al., 2001). Из-за такой нецентральности гравитационного поля спутника он всегда ориентирован к Юпитеру одной своей стороной.

Амальтея (близкий спутник Юпитера).

По фотографиям с космического аппарата определена форма спутника. Построена модель гравитационного поля Амальтеи по ее форме (Gozdziewski, Maciejewski, Stooke, 1994) Имеет место обычное вращение, синхронное орбитальному движению.

9.7. Динамические загадки Солнечной системы

Загадочные орбитальные ускорения некоторых спутников.

Из-за того, что тела планет и спутников являются вязко-упругими, в них возникают приливы, направленные вдоль линии, соединяющей тела. В процессе вращения и орбитального движения, из-за небольшой вязкости тел приливы слегка запаздывают от линии планета-спутник. Своим несимметричным гравитационным притяжением прилив либо тормозит, либо ускоряет движение. Если планета вращается быстрее, чем орбитальное обращение спутника, как в случае системы Земля-Луна, то вращение планеты замедляется, а в орбитальном движении спутника энергия прирастает, и он передвигается на более высокую орбиту. Если спутник обращается быстрее вращения планеты, как в случае Фобоса, то картина получается противоположной. То есть, вращение планеты ускоряется, а спутник теряет энергию и имеет шанс упасть когда-нибудь на свою планету. При потере энергии по законам небесной механики частота обращения спутника и его линейная скорость возрастают, так что говорят об орбитальном ускорении спутника.

По наблюдаемому орбитальному ускорению Фобоса рассчитано, что примерно через 65 миллионов лет он упадет на Марс. Однако сопоставление модели приливных сил Марса и наблюдаемого ускорения Фобоса приводит к противоречивому результату – приливных сил оказывается недостаточно для объяснения орбитального ускорения.

Аналогичное явление происходит со спутником Юпитера Ио. Она также, как и Фобос приближается к своей планете. Однако это еще более загадочно, поскольку согласно теории приливной эволюции Ио должна удаляться от планеты, а не приближаться, поскольку Юпитер вращается быстрее, чем спутник по своей орбите. Есть только одно предположение – Ио описывает спираль, приближаясь к Юпитеру, больше теряя энергии из-за внутренней диссипации, чем получая энергию от приливов Юпитера (Aksnes, Franklin, 2001). Впрочем, о вязко-упругих свойствах Юпитера абсолютно ничего неизвестно. Еще более загадочным является тело Ио.

Опоздание Прометея.

История трудного изучения динамики этого спутника такова. Прометей движется вокруг Сатурна совсем по краю его кольца, поэтому виден он с Земли только в короткие периоды (две-три недели), когда кольцо Сатурна ориентируется к нам ребром, оно становится невидимым и не засвечивает окрестности слабого спутника. Это бывает раз в 14 лет. Космические аппараты – редкие гости в окрестности Сатурна. Все же Прометей был открыт в 1980 г с помощью космического корабля Вояджер-1. В этом же году, когда кольцо в очередной раз "исчезло", его впервые пронаблюдали с Земли. Была определена орбита. Вычислены эфемериды на 1995 год. В течение 14 лет Прометей по объясненным выше причинам не наблюдался с Земли. Когда, спустя годы, во время видимого исчезновения кольца в 1995 году Прометей увидели с Земли, его планетоцентрическая долгота оказалась на 19 градусов меньше предвычисленной. Однако среднее движение (частота обращения) осталось прежним. Эта загадка вызвала много разных противоречивых предположений. Самое вероятное объяснение состоит в том, что на орбите Прометея имеется еще один невидимый спутник. Два спутника испытывают либрационные качания вдоль орбиты с очень большим периодом (French et al., 1998).

Заключительные замечания.
О задачах практической небесной механики, не рассмотренных в данной книге.

Практическая небесная механика – это огромная область современной науки. Достижения исследователей, работающих в этой области, весьма востребованы. Рассказать в специальном курсе для студентов о всех задачах современной практическрой небесной механики невозможно. Автору пришлось выбрать для рассмотрения только некоторую часть из них. Выбор был обусловлен предпочтениями и опытом автора. Однако необходимо по крайней мере перечислить некоторые основные актуальные задачи современной практической небесной механики, которые не вошли в данное учебное пособие. Ниже дается такой список.

Теория орбитального движения Луны.

Модели орбитального движения Луны в последнеее время создаются одновременно с моделями орбитального движения больших планет. Это делается так потому, что имеется значительное взаимное влияние этих динамических процессов, а еще потому, что построение моделей делается аналогичными методами. К таким моделям относятся рассмотренные выше планетные теории серии DEXXX/LEXXX, разрабатываемые в (JPL) США, планетные теории серии INPOPXX, создаваемые в IMCCE (Францмя) и теории серии ELP (ИПА РАН, С.-Петербург). Файлы моделей автоматически включают в себя данные для модели движения Луны. Однако следует упомянуть полностью аналитическую теории движения Луны Хилла-Брауна, котропя имеется в нашем распоряжении (См. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике под редакцией Г.Н. Дубошина, 1976). Эта теория имеет преимущества: работает на бесконечном интервале времени и позволяет выбирать требуемую ограниченную точность определения координат Луны при сокращенной таблице исходных данных, объем которой зависит от требуемой точности.

Теория вращения Луны.

Современные модели вращения Луны строятся методами численного интегрирования дифференциальных уравнений вращения. Это так называемые модели физической либрации Луны. Наиболее значительные результаты опубликованы в статьях (Rambaux, et al., 2010; Pavlov, et al., 2016). Исходными данными являются резульнаты измерений дальности с помощью лазерной локации уголковых отра-

жателей на Луне. Заслуживает внимания также некоторый вариант аналитической теории вращения Луны, развитый в работах Петровой Н.К. (Petrova et al., 2017).

Изучение космического мусора вокруг Земли.

Это весьма актуальная и специальная проблема. Частицы космического мусора подвержены сильному влиянию светового давления и сопротивления атмосферы. Результаты исследований космического мусора в основном публикуются в трудах научных конференций. Начать знакомство с этой тематикой исследований можно со статьи (Selim et al., 2016).

Открытия и моделирование движения внесолнечных планет.

Исследования внесолнечных планет мотивируются надеждой обнаружить признаки внеземных цивилизаций. К настоящему времени известны более 3700 внесолнечных планет вокруг 2700 звезд. Основной метод обнаружения состоит в измерении допплеровского смещения спектральных линий излучения звезды, возникающего из-за движения звезды вокруг центра масс системы звезда-планета. Популярное изложение проблемы можно найти в статье (Маров, Шевченко, 2014)

Открытия и изучение динамики астероидов, сближающихся с Землей.

Нет нужны доказывать актуальность проблемы. Имеется достаточно много свидетельств опасных падений астероидов на Землю. Исследования производятся при широком международном сотрудничестве. Все данные сосредоточены в международном Центре малых планет (Minor planet center - MPC).

Динамика выведения космических аппаратов на межпланетные орбиты.

Эта специальная проблема решается методами небесной механики с привлечением общих законов механики, учитывающих тягу двигателей. Предполагается, что переходы с одной траектории свободного полета на другую осуществляются отдельными импульсами.

Список литературы

Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит небесных тел. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета. 2015. 336 с.

Белецкий В. В. Орбита экваториального спутника Земли. Искусственные спутники Земли. 1962. Вып. 13. С. 53–60.

Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли. Астрономический журнал. 1963. Т. 40. № 2. С. 363-372.

Аксенов Е.П. Один вид дифференциальных уравнений движения спутника. Труды ГАИШ. 1966. Т. 35. С. 44-58.

Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. – М.: Наука. 1977. 360 с.

Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. – М.: Наука. 1986. 320 с.

Аксенов Е. П., Емельянов Н. В., Тамаров В .А. Практическое применение промежуточной орбиты спутника. Формулы, программы, тесты. Труды ГАИШ. 1988. Т. 59. С. 3-40.

Бодовицына Т. В. Современные численные методы в задачах небесной механики. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984. 136 с.

Брумберг В. А. Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. Бюллетень ИТА. 1967. Т. 11. № 2. С. 73-83.

Вашковьяк С. Н. Влияние светового давления на движение ИСЗ. Сб. "Наблюдения искусственных спутников Земли". 1974. № 13. С. 124-143.

Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – Учебник для студентов университетов, обучающихся по специальности "Астрономия". Издание 3-е, дополненное. М: Наука. 1975. 800 с.

Дубошин Г. Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А. Издание 2-е. Под редакцией Дубоши-

на Г.Н. М.: Наука. Главная редакция Физ-мат. литературы. 1976. 864 с.

Емельянов Н. В. Метод вычисления лунно-солнечных возмущений элементов орбит ИСЗ. Труды ГАИШ. 1980. Т. 49. С. 122-129.

Емельянов Н. В. Разложение возмущающей функции, обусловленной влиянием притяжения Луны и Солнца на движение ИСЗ. Астрономический журнал. 1985. Т. 62. № 6. С. 1168-1174.

Емельянов Н. В. Построение аналитической теории движения ИСЗ с точностью до третьего порядка относительно сжатия Земли. Астрономический журнал. 1986. Т. 63. № 4. С. 800-809.

Емельянов Н. В. Редкие явления в системе Плутона. Земля и Вселенная. 1989. № 4. С. 27-29.

Емельянов Н. В. Особенности взаимных покрытий и затмений в системе спутников Сатурна. Астрономический журнал. 1995. Т. 72. N 4. С. 604-608.

Емельянов Н. В. Необычные явления в системах спутников планет. Земля и Вселенная. 1997. № 3. С. 13-20.

Емельянов Н. В. Связь астрометрических и теоретических координат спутников планет. Астрономический вестник. 1999. Т. 33. № 2. С. 154-158.

Емельянов Н.В. Метод обработки фотометрических наблюдений взаимных покрытий и затмений спутников планет. Астрономический вестник. 2003. Т. 37. № 4. С. 344-355.

Емельянов Н.В., Кантер А.А. Орбиты новых внешних спутников планет на основе наблюдений. Астрономический вестник. 2005. Т. 39. № 2. С. 128-140.

Емельянов Н.В., Вашковьяк С.Н. Астрометрические результаты наблюдений взаимных покрытий и затмений галилеевых спутников Юпитера в 1997 году. Астрономический вестник. 2009. Т. 43. № 3. С. 251-264.

Емельянов Н.В. Возмущенное движение при малых эксцентриситетах. Астрономический вестник. 2015. Т. 49. № 5. С. 380–394.

Емельянов Н. В. Актуальные задачи динамики спутников планет и двойных астероидов на основе наблюдений. Астрономический

вестник. 2017. Т. 51. № 1. С. 24-43.

Каула У. Спутниковая геодезия / Пер. с англ. – М: Мир. 1970. 172 с.

Лукьянов Л.Г., Емельянов Н.В., Ширмин Г.И. Обобщенная задача двух неподвижных центров или задача Дарбу-Гредеакса. Космические исследования. 2005. Т. 43. № 3. С. 194-200.

Маров М.Я., Шевченко И.И. Экзопланеты. Природа. 2014. N 6. С. 3-15.

Мельников А.В., Шевченко И.И. Необычные режимы вращения малых спутников планет. Астрономический вестник. 2007. Т. 41. № 6. С. 521-530.

Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы / Пер. с англ. – М: Физматлит. 2010. 588 с.

Питьева Е. В. EPM2011 – обновленные планетные эфемериды ИПА РАН и их использование для научных исследований. Астрономический вестник. 2013. Т. 47. С. 419-435.

Сагитов М.У., Таджидинов Х.Т., Михайлов Б.О. Модель гравитационного поля Фобоса. Астрономический вестник. 1981. Т. 15. С. 142-152.

Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. – М: Наука. 1968. 800 с.

Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. – М.: Мир. 1979. 312 с.

Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. – М.: Наука. 1976.

Acton C., Bachman N., Folkner W.M., Hilton J. SPICE as an IAU recommendation for planetary ephemerides. IAU General Assembly. 2015. Meeting #29. #2240327.

Aksnes K., Franklin F. Mutual phenomena of the Galilean satellites in 1973. III - Final results from 91 light curves. Astronomical Journal. 1976. V. 81. P. 464–481.

Aksnes K., Franklin F., Millis R., Birch P., Blanco C., Catalano S., Piironen J. Mutual phenomena of the Galilean and Saturnian satellites in 1973 and 1979/1980. Astronomical Journal. 1984. V. 89. P.

280–288.

Aksnes K., Franklin F. A. Secular Acceleration of Io Derived from Mutual Satellite Events Astronomical Journal. 2001. V. 122. N. 5. P. 2734-2739.

Anderson J. D., Jacobson R. A., McElrath T. P., Moore W. B., Schubert G., and Thomas P. C. Shape, Mean Radius, Gravity Field, and Interior Structure of Callisto. 2001. Icarus. V. 153. P. 157-161.

Archinal B. A., A'Hearn M. F., Bowell E., Conrad A., Consolmagno G. J., Courtin R., Fukushima T., Hestroffer D., Hilton J.L., Krasinsky G.A., and 7 coauthors. Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2011. V. 109. P. 101-135.

Arlot J.E., Thuillot W., Barroso J. Jr., Bergeal L., Blanco C., Boninsegna R., Bouchet P., Briot D., Bulder H., Bourgeois J. A catalogue of the observations of the mutual phenomena of the Galilean satellites of Jupiter made in 1985 during the PHEMU85 campaign. Astronomy and Astrophysics Suppl. Ser. 1992. V. 92. P. 151–205.

Arlot J.E., Ruatti C., Thuillot W., Arsenijevic J., Baptista R., Barroso J. Jr., Bauer C., Berthier J., and 63 coauthors. A catalogue of the observations of the mutual phenomena of the Galilean satellites made in 1991 during the PHEMU91 campaign. Astronomy and Astrophysics Suppl. Ser. 1997. V. 125. P. 399–405.

Arlot J.-E., Thuillot W., Ruatti C. and 61 co-autors. The PHEMU97 catalogue of observations of the mutual phenomena of the Galilean satellites of Jupiter. Astronomy and Astrophysics. 2006. V. 451. P. 733-737.

Arlot J.-E., Emelyanov N. V. The NSDB natural satellites astrometric database. Astronomy and Astrophysics. 2009. V. 503. P. 631–638.

Arlot J.-E., Thuillot W., Ruatti C., Ahmad A., Amosse A., Anbazhagan P., Andreyev M., Antov A., Appakutty M., Asher D. and 109 coauthors. The PHEMU03 catalogue of observations of the mutual phenomena of the Galilean satellites of Jupiter. Astronomy and Astrophysics. 2009. V. 493. P. 1171–1182.

Arlot J.-E., Emelyanov N.V., Lainey V., Andreev M., Assafin M., Braga-Ribas F., Camargo J.I.B., Casas R., and 27 coauthors. Astrometric results of observations of mutual occultations and eclipses of the

Saturnian satellites in 2009. Astronomy and Astrophysics. 2012. V. 544. Id. A29. 7 pp.

Arlot J.-E., Emelyanov N.V., Aslan Z., Assafin M., Bel J., Bhatt B. C., Braga-Ribas F., Camargo J.I.B., and 16 coauthors. Astrometric results of observations of mutual occultations and eclipses of the Uranian satellites in 2007. Astronomy and Astrophysics. 2013. V. 557. Id. A4. 6 pp.

Arlot J.-E., Emelyanov N., Varfolomeev M.I., Amosse A., Arena C., Assafin M., Barbieri L., Bolzoni S., and 86 coauthors. The PHEMU09 catalogue and astrometric results of the observations of the mutual occultations and eclipses of the Galilean satellites of Jupiter made in 2009. Astronomy and Astrophysics 2014. V. 572. Id. A120. 9 pp.

Belikov M. V. Methods of numerical integration with uniform and mean square approximation for solving problems of ephemeris astronomy and satellite geodesy. Manuscripta Geodaetica. 1993. V. 18. P. 182-200.

Bouquillon S., Souchay J. Pricise modelling of the precession-nutation of Mars. Astronomy and Astrophysics. 1999. V. 345. P. 282-297.

Brouwer D., van Woerkom A. J. J. The Secular Variations of the Orbital Elements of the Principal Planets. Astronomical papers prepared for the use of the American ephemeris and nautical almanac. 1950. V. 13. Pt. 2. Washington : U.S. Govt. Print. Off. P. 81-107.

Bretagnon P. Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSOP82. Astronomy and Asrophysics. 1982. V. 114. P. 278-288.

Bretagnon P., Francou G. Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP87 solutions. Astronomy and Asrophysics. 1988. V. 202. P. 309-315.

Brower D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. Astronomical Journal. 1959. V. 64. P. 378-397.

Brozović M., Jacobson R. A. The Orbits of Jupiter's Irregular Satellites. Astronomical Journal. 2017. V. 153. Issue 4. Article id. 147. 10 pp.

Butcher J.C. Coefficients for the Study of Runge-Kutta Integration Processes. – J. Austral. Math. Soc. 1963. V. 3. P. 185-201.

Butcher J.C. On the Runge-Kutta Processes of High Order. – J. Austral. Math. Soc., 1964a, V. 4. P. 179-195.

Butcher J.C. Implicit Runge-Kutta Processes. – Math. Comp., 1964б, V. 1. P. 50-64.

Chapront-Touzé M. La solution ELP du problème central de la Lune. Astronomy and Asrophysics. 1980. V. 83. P. 86-94.

Chapront-Touzé M., Chapront J. The lunar ephemeris ELP 2000. Astronomy and Asrophysics. 1983. V. 124. P. 50-62.

Christensen E. J., Balmino G. Development and analysis of a twelfth degree and order gravity model for Mars. Journal of Geophysical Research. 1979. V. 84. P. 7943-7953.

Correia A. C. M., Laskar J. The four final rotation states of Venus. Nature. 2001. V. 411. Issue 6839. P. 767-770.

Emelyanov N. V. Ephemerides of the outer Jovian satellites. Astronomy and Astrophysics. 2005. V. 435, P. 1173-1179.

Emelyanov N.V., Gilbert R. Astrometric results of observations of mutual occultations and eclipses of the Galilean satellites of Jupiter in 2003. Astronomy and Astrophysics. 2006. V. 453. P. 1141-1149.

Emelyanov N.V. Mutual occultations and eclipses of the Galilean satellites of Jupiter in 2002–2003: final astrometric results. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2009. V. 394. P. 1037-1044.

Emelyanov N. Precision of the ephemerides of outer planetary satellites. Planetary and Space Science. 2010. V. 58. P. 411-420.

Emelyanov N. V., Samorodov M. Yu. Analytical theory of motion and new ephemeris of Triton from observations Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2015. V. 454. P. 2205–2215.

Everhart E. Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits. Celestial Mechanics. 1974. V. 10, Issue 1. P.35-55.

Explanatory supplement to the astronomical almanac. University science books. Mill Valley, California. 1992.

Folkner W.M., Williams J.G., Boggs D.H., Park R.S., Kuchynka P. The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431. The Interplanetary Network Progress Report. 2014. V. 42-196. P. 1-81.

French R. G., Hall K. J., MCGhee C. A., Nicholson P. D., Cuzzi J., Dones L., Lissauer J. The Peregrinations of Prometheus. American Astronomical Society, DDA meeting N 30, N 02.04. 1998. V. 30. P.

1141.

Gozdziewski K., Maciejewski A. J., Stooke P. J. A model of the gravitational field of Amalthea. Part 1: Derivation. Earth, Moon, and Planets. 1994. V. 64. N. 3. P. 243-264.

IERS : 1992. IERS standards (1992). IERS Technical notes. V. 13. Ed. McCarthy D. D. Observatoires de Paris.

Inroduction aux éphémérides astronomiques. Supplément explicatif à la connaissance des temps. Bureau des longitudes. Les éditions de physique. France. 1998.

Jacobson R., Brozovic M., Gladman B., Alexandersen M., Nicholson P. D., Veillet C. Irregular satellites of the outer planets: orbital uncertainties and astrometric recoveries in 2009–2011. Astronomical Journal. 2012. V. 144:132 (8pp).

Klavetter J. J. The Chaotic Rotation of Hyperion. Bulletin of the American Astronomical Society. 1989. V. 21. P. 983.

Laskar J., Robutel P. The chaotic obliquity of the planets Nature. 1993. V. 361. N. 6413. P. 608-612.

Laskar J., Joutel F., Robutel P. Stabilization of the Earth's obliquity by the Moon. Nature. 1993. V. 361. P. 615-617.

LeMaistre S., Rosenblatt P., Rambaux N., Castillo-Rogez J. C., Dehant V., Marty J.-C. Phobos interior from librations determination using Doppler and star tracker measurements. Planetary and Space Science. 2013. V. 85. P. 106–122.

Noyelles, B., Vienne, A., Descamps, P. Astrometric reduction of lightcurves observed during the PHESAT95 campaign of Saturnian satellites. Astronomy and Astrophysics. 2003. V. 401. 1159-1175.

Pavlov D.A., Williams J.G., Suvorkin V.V. Determining parameters of Moon's orbital and rotational motion from LLR observations using GRAIL and IERS-recommended models. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2016. V. 126. Issue 1-3. P. 61-88.

Petrova N., Zagidullin A., Nefedyev Y., Kosulin V., Andreev A. The analytical and numerical approaches to the theory of the Moon's librations: Modern analysis and results. Advances in Space Research. 2017. V. 60. Issue 10. P. 2303-2313.

Rambaux N., Williams J.G. The Moon's physical librations and determination. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2011. V. 109. Issue 1. P. 85-100.

Rambaux N., Castillo-Rogez J. C., Le Maistre S., Rosenblatt P. Rotational motion of Phobos. Astronomy and Astrophysics. 2012. V. 548. Id. A14. 11 pp.

Robert V., Pascu D., Lainey V., Arlot J.-E., De Cuyper J.-P., Dehant V., Thuillot W. New astrometric measurement and reduction of USNO photographic observations of the main Saturnian satellites: 1974-1998. Astronomy and Astrophysics. 2016. V. 596. Id. A37. 10 pp.

Saquet E., Emelyanov N., Robert V., Arlot J.-E., Anbazhagan P., Bardecker J., Berezhnoy A.A., Bretton M., and 110 coauthors. The PHEMU15 catalog and astrometric results of the Jupiter's Galilean satellite mutual occultation and eclipse observations made in 2014-2015. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2017. In press.

Selim I.M., Abd el-Hameed Afaf M., Bakhtigaraev N.S., Attita Gamal F. Optical and photometric studies of Earth orbiting small space objects. Астрономический вестник. 2016. Т. 93. С. 339

Simon J.-L., Francou G. Construction des théories planètaires analytiques de l'IMCCE. Notes Scientifiques et Techniques de l'Institut de mécanique céleste. 2016. S103. P. 1-76.

Standish E. M. The observational basis for JPL's DE200, the planetary ephemerides of the Astronomical almanac. Astronomy and Asrophysics. 1990. V. 233. P. 252-271.

Vasundhara R. Mutual phenomena of the Galilean satellites: an analysis of the 1991 observations from VBO. Astronomy and Astrophysics. 1994. V. 281. 565-575.

Vasundhara R., Arlot J. E., Lainey V., Thuillot W. Astrometry from mutual events of Jovian satellites in 1997. Astronomy and Astrophysics. 2003. V. 410. P. 337-341.

Приложение 1 (к Главе 3).

П 1.1. Функции наклона.

Функции наклона $F_{k,m,p}(i)$ появляются в теории возмущенного движения спутника при разложении возмущающей функции, обусловленной несферичностью планеты, или от притяжения внешнего тела. Как выводятся функции наклона – изложено в Главе 3.

В статье (Брумберг, 1967) можно найти выражение для $F_{kmp}(i)$ через $\sin i/2$ и $\cos i/2$. В публикации (Фоминов, Филенко, 1978) даются удобные формулы для вычисления функций наклона и их производных, а также соответствующие вычислительные программы. При необходимости определения функций наклона для больших значений индексов можно воспользоваться методом, основанном на специальных рекуррентных соотношениях и изложенным в работе (Емельянов, 1985). Эффективный метод вычисления функций наклона с помощью рекуррентных соотношений предложен в работе (Emelianov, Kanter, 1989).

Явные выражения функций наклона с индексами $k = 2, 3, 4$, $m = 0, 1, ..., k$, $p = 0, 1, ..., k$ даны в книге (Каула, 1970).

Ниже приводятся явные выражения для функций наклона с индексами $k = 2$, $m = 0, 1, 3$, $p = 0, 1, 2$.

$$
\begin{aligned}
&F_{200}(i) = -\tfrac{3}{8}\sin^2 i, && F_{201}(i) = \tfrac{3}{4}\sin^2 i - \tfrac{1}{2},\\
&F_{202}(i) = -\tfrac{3}{8}\sin^2 i, && F_{210}(i) = \tfrac{3}{4}\sin i(1+\cos i),\\
&F_{211}(i) = -\tfrac{3}{2}\sin i\cos i, && F_{212}(i) = -\tfrac{3}{4}\sin i(1-\cos i),\\
&F_{220}(i) = \tfrac{3}{4}(1+\cos i)^2, && F_{221}(i) = \tfrac{3}{2}\sin^2 i,\\
&F_{222}(i) = \tfrac{3}{4}(1-\cos i)^2,
\end{aligned}
$$

П 1.2. Функции эксцентриситета.

Функции эксцентриситета появляются в теории возмущенного движения спутника при разложении возмущающей функции, обусловленной несферичностью планеты, или притяжением внешнего тела. Следующие функции от расстояния r и истинной аномалии v приходится разлагать в ряд по кратным средней аномалии M при малых

эксцентриситетах e:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp\sqrt{-1}jv = \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_q^{n,j}(e) \exp\sqrt{-1}qM, \tag{202}$$

где $X_q^{n,j}(e)$ – специальные функции небесной механики, называемые функциями эксцентриситета. Вывод такого разложения и формулы для вычисления функций эксцентриситета, можно найти в работах (Брумберг, 1967; Аксенов, 1986). Оказывается, что записанный выше ряд по кратным средней аномалии сходится при всех значениях эксцентриситета, меньших единицы.

Отметим некоторые свойства функций эксцентриситета.

Количество вычислений можно сократить, используя соотношение

$$X_{-q}^{k,-j}(e) = X_q^{k,j}(e).$$

Для всех допустимых значений индексов можно записать разложение

$$X_q^{k,j}(e) = e^{|q-j|} \sum_{s=0}^{\infty} X_{q,s}^{k,j} e^{2s},$$

где $X_{q,s}^{k,j}$ – некоторые числа, а ряд сходится при всех $e < 1$. Вычислить все необходимые коэффициенты $X_{q,s}^{k,j}$ можно с помощью рекуррентных соотношений, которые взяты из работы (Cherniack, 1972) и приведены к удобному для программирования виду в публикации (Фоминов, Филенко, 1978). Аналогичные рекуррентные соотношения даны еще в работе (Hughes, 1981) и приведены в книге (Мюррей, Дермотт, 2010). Функциям эксцентриситета уделено много внимания в книге (Аксенов, 1986).

При значении индекса $q = 0$ функции эксцентриситета выражаются в конечном виде. Для этого частного случая вычисления можно выполнять по рекуррентным соотношениям, взятым из работы (Hughes, 1981).

При вычислении возмущений оказывается важным следующее свойство:

$$X_0^{-3,2}(e) = X_0^{-3,-2}(e) = 0$$

при всех $e < 1$.

Явные выражения функций $X_q^{k,j}(e)$ длл $k = -3, -4, -5$ и некоторых значений j, q даны в книге (Каула, 1970).

Заметим, что в литературе числа $X_{q,s}^{k,j}$ называются еще операторами Ньюкома, а сами функции эксцентриситета – коэффициентами Ганзена.

Ниже приводятся выражения для некоторых функций эксцентриситета при $q = 0$.

$$X_0^{2,0} = 1 + \frac{3}{2}e^2, \quad X_0^{2,1} = -2e - \frac{1}{2}e^3, \quad X_0^{2,2} = \frac{5}{2}e^2,$$

$$X_0^{-3,0} = (1-e^2)^{-3/2}, \quad X_0^{-4,1} = e(1-e^2)^{-5/2},$$

$$X_0^{-5,2} = \frac{3}{4}e^2(1-e^2)^{-7/2}, \quad X_0^{-5,0} = (1+\frac{3}{2}e^2)(1-e^2)^{-7/2},$$

Литература в Приложению 1

Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. – М.: Наука. 1986.

Брумберг В. А. Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. Бюллетень ИТА. 1967. Т. 11. № 2. С. 73-83.

Емельянов Н. В. Вычисление нормированных функций наклона и их производных при больших значениях индексов. Труды ГАИШ. 1985. Т. 57. С. 83-91.

Каула У. Спутниковая геодезия. – М.: Мир. 1970.

Фоминов А.М., Филенко Л.Л. Вычисление нормированных функций наклона и их производных. Вычисление коэффициентов Ганзена и их производных. Алгоритмы небесной механики. 1978. № 19. ИТА АН СССР. Ленинград, 1978.

Cherniack J. R. Computation of Hansen coefficients. SAO Special Report. 1972. N. 346.

Emelianov N. V., Kanter A. A. A method to compute inclination functions and their derivatives. Manuscripta geodaetica. 1989. V. 14. C. 77-83.

Hughes, S. The Computation of Tables of Hansen Coefficients. Celestial Mechanics. 1981. V. 25. Issue 1. P. 101-107.