



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. М. В. ДОМОНОСОВА

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ИМ. П. К. ШТЕРНБЕРГА

Профессор АКСЕНОВ Евгений Петрович

ГЛАВНАЯ ПРОБЛЕМА  
ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М. В. ЛОМОНОСОВА

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

им. П. К. ШТЕРНБЕРГА

Профессор **АКСЁНОВ Евгений Петрович**

**ГЛАВНАЯ ПРОБЛЕМА  
ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ**

Издательство “Ким Л.А.”

Москва — 2019

УДК 629.78(075.8)

ББК 39.62я73

A42

A42 *Аксёнов Е.П.* Главная проблема теории движения ИСЗ.

— М.: Изд-во “Ким Л.А.”, 2019. — 88 с.

ISBN 978-5-6042151-7-3

Издание является реконструкцией первых четырёх глав монографии профессора Е.П.Аксёнова “Теория движения искусственных спутников Земли”, вышедшей в издательстве “Наука” в 1977 году.

Содержание монографии соответствовало уровню научных достижений того времени. Основное внимание было уделено выводу формул, необходимых для практических приложений.

Промежуточная орбита на основе обобщённой задачи двух неподвижных центров была построена с точностью до второго порядка относительно малого параметра, сжатия Земли.

В данной книге использован другой подход. Вместо вывода формул представлено описание вычислительных алгоритмов. Точность алгоритмов ограничена только накоплением ошибок округления.

Илл. 3, библиограф. 39 назв.

© *Е.П.Аксёнов*, текст, 1977 г.

© *Е.П.Аксёнов*, лекции, 1987 г.

© **Ким Л.А.**, издательство, 2019 г.

ISBN 978-5-6042151-7-3

## Содержание

Из предисловия к монографии 1977 года	
“Теория движения искусственных спутников Земли”	4
<b>Лекция 1. Гравитационный потенциал</b>	<b>6</b>
<b>Лекция 2. Промежуточный потенциал</b>	<b>16</b>
<b>Лекция 3. Первые интегралы</b>	<b>26</b>
<b>Лекция 4. Качественные исследования</b>	<b>36</b>
<b>Лекция 5. Обращение квадратур</b>	<b>46</b>
<b>Лекция 6. Эллиптические интегралы</b>	<b>56</b>
<b>Лекция 7. Канонические уравнения</b>	<b>66</b>
<b>Послесловие</b>	<b>76</b>
<b>Литература</b>	<b>81</b>
Именной указатель . . . . .	86
Предметный указатель . . . . .	87
<b>Список иллюстраций</b>	
1 Система координат . . . . .	6
2 График многочлена $\Phi(\xi)$ . . . . .	39
3 График многочлена $F(\eta)$ . . . . .	40

## Из предисловия к монографии 1977 года “Теория движения искусственных спутников Земли”

Изучение движения искусственных спутников Земли интересует широкий круг учёных, и прежде всего астрономов, геофизиков и геодезистов. Определение постоянных гравитационного поля Земли и параметров земной атмосферы, изучение лунно-солнечных приливов и движения полюса — вот неполный перечень задач, которые уже сейчас успешно решаются с помощью наблюдений ИСЗ.

Для исследования движения искусственных спутников Земли используются все методы небесной механики: численные, аналитические и качественные. Особое место среди них занимают аналитические методы, которые могут конкурировать по точности и быстрдействию с методами численного интегрирования, а вместе с качественными позволяют нарисовать довольно полную картину движения спутника на больших интервалах времени. Очень важно, что они дают возможность просто и наглядно охарактеризовать влияние каждого фактора, действующего на движение спутника.

Важнейшими из возмущающих факторов являются несферичность Земли, сопротивление атмосферы, притяжение Луны и Солнца и световое давление. Однако наибольшие возмущения в движении близких спутников связаны с одним фактором, а именно со второй зональной гармоникой потенциала притяжения Земли. Она вызывает возмущения, которые в сотни и тысячи раз

превосходят неравенства от других возмущающих сил. Поэтому здесь следует выделить **главную проблему**. Эта проблема заключается в интегрировании дифференциальных уравнений движения, правые части которых составлены с учётом лишь первых двух гармоник геопотенциала. Решение главной проблемы составляет первый этап построения аналитической теории движения ИСЗ. Второй этап состоит в определении остальных, уже менее значительных возмущений.

**Главная проблема** может быть решена двумя способами: во-первых, с помощью классических методов возмущений и, во-вторых, путём построения промежуточных орбит. Поскольку результаты применения классических методов приведены во многих монографиях по небесной механике, ограничимся изложением второго способа. В основу будет положена обобщённая задача двух неподвижных центров, силовая функция которой включает в себя как вторую, так и третью зональную гармонику геопотенциала и позволяет проинтегрировать уравнения движения в квадратурах.

В заключение автор благодарит своих друзей и коллег Е.А.Гребеникова и В.Г.Дёмина, добрые советы которых ускорили работу над книгой. Автор благодарен также своим ученикам и коллегам С.Н.Вашковьяк, Н.В.Емельянову, Л.П.Насоновой, Б.Н.Носкову, И.П.Прохоровой, Н.А.Сорокину, В.С.Уральской и В.М.Чепуровой за помощь при подготовке рукописи к печати.

**Профессор МГУ АКСЁНОВ Евгений Петрович.**

## Лекция 1. Гравитационный потенциал

Рассмотрим задачу о притяжении материальной точки  $P$  единичной массы некоторым телом  $M$ . Будем предполагать, что тело имеет произвольную форму, а плотность  $\varkappa$  распределения масс внутри него является кусочно-непрерывной функцией координат.

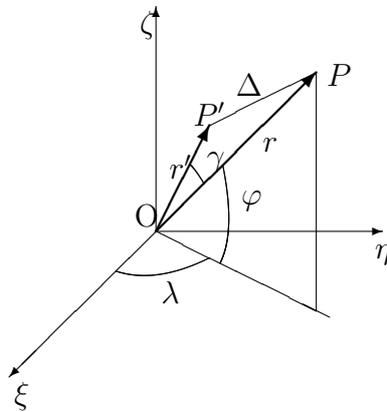


Рис. 1: Система координат

Возьмём прямоугольную, жёстко связанную с телом систему координат  $O\xi\eta\zeta$  с началом в центре масс тела (рис. 1). Тогда потенциал притяжения или силовая функция тела  $M$  в точке  $P$  с координатами  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  будет даваться формулами:

$$U = f \int \int \int_T \frac{\varkappa d\tau}{\Delta}, \quad (1)$$

$$\Delta = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2},$$

где  $f$  – постоянная притяжения,  $\Delta$  есть расстояние точки  $P$  от текущей точки  $P'$  с координатами  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ , в которой находит-

ся элемент объёма  $d\tau$ , а интеграл берётся по всему объёму  $T$ , занятому притягивающим телом.

Если через  $r$  и  $r'$  обозначить радиусы-векторы точек  $P$  и  $P'$ , а через  $\gamma$  – угол между ними, то для  $\Delta$  и  $\gamma$  будем иметь:

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}, \quad (2)$$

$$\cos \gamma = \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{rr'}. \quad (3)$$

В конечном виде интеграл (1) берётся только в некоторых частных случаях, таких, например, как случай однородного шара или шара с концентрическим распределением плотности и случай однородного двухосного или трёхосного эллипсоида. Так, для концентрического шара потенциал даётся формулой:

$$U = \frac{fm}{r}, \quad (4)$$

где  $m$  – масса шара.

Если же на форму тела и на распределение масс внутри него не накладывається никаких ограничений, кроме тех, которые были сделаны в начале этой лекции, интеграл (1) можно вычислить только при помощи ряда. Наиболее распространённым в настоящее время разложением для потенциала является разложение по сферическим функциям. Применение сферических функций позволяет получить довольно простую и удобную для практических приложений аналитическую формулу для потенциала. Составными элементами сферических функций являются полиномы Лежандра и присоединённые функции Лежандра.

Полином Лежандра  $P_n(z)$  порядка  $n$  можно определить формулой:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (z^2 - 1)^n}{dz^n}, \quad (5)$$

носящей название *формулы Родрига*.

Для первых  $P_n(z)$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} P_0(z) &= 1, \\ P_1(z) &= z, \\ P_2(z) &= \frac{1}{2}(-1 + 3z^2), \\ P_3(z) &= \frac{1}{2}(-3z + 5z^3), \\ P_4(z) &= \frac{1}{8}(3 - 30z^2 + 35z^4), \\ P_5(z) &= \frac{1}{8}(15z - 70z^3 + 63z^5), \\ P_6(z) &= \frac{1}{16}(-5 + 105z^2 - 315z^4 + 231z^6). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из формулы (5) легко получается следующее выражение:

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^h (-1)^r \frac{(2n - 2r)!}{2^n r! (n - r)! (n - 2r)!} z^{n-2r},$$

где  $h = n/2$  или  $h = (n - 1)/2$ , смотря по тому, которое из этих чисел чётное.

Полиномы Лежандра высших порядков могут быть вычислены при помощи рекуррентного соотношения:

$$(n + 1)P_{n+1}(z) - (2n + 1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0. \quad (7)$$

Полиномы Лежандра и их первые производные связаны соотношениями:

$$\frac{dP_n(z)}{dz} = nP_{n-1}(z) + z \frac{dP_{n-1}(z)}{dz}, \quad (8)$$

$$\frac{dP_n(z)}{dz} = (2n-1)P_{n-1}(z) + \frac{dP_{n-2}(z)}{dz}. \quad (9)$$

Из формулы (9) следует простая рекуррентная формула для вычисления производных высших порядков:

$$\frac{d^k P_n(z)}{dz^k} = (2n-1) \frac{d^{k-1} P_{n-1}(z)}{dz^{k-1}} + \frac{d^k P_{n-2}(z)}{dz^k}. \quad (10)$$

Отметим некоторые свойства полиномов Лежандра.

1. Полином Лежандра является чётной или нечётной функцией в зависимости от того, чётна или нечётна его степень, так что

$$P_n(-z) = (-1)^n P_n(z).$$

2. На границах интервала  $[-1, +1]$  полином Лежандра принимает следующие значения:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \quad (11)$$

3. Для любого  $z$  из промежутка  $(-1, +1)$  и  $n > 0$

$$|P_n(z)| < 1.$$

4. Функция  $(1-2\alpha z + \alpha^2)^{-1/2}$  является производящей функцией для  $P_n(z)$  при  $0 < \alpha < 1$  и  $|z| < 1$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(z). \quad (12)$$

Присоединённые функции Лежандра  $P_n^{(k)}(z)$  порядка  $n$  и индекса  $k$  можно определить формулой:

$$P_n^{(k)}(z) = (1 - z^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(z)}{dz^k}. \quad (13)$$

При помощи равенств (6) из формулы (13) легко находим явные выражения для нескольких первых  $P_n^{(k)}(z)$ :

$$\begin{aligned} P_2^{(1)} &= 3z(1 - z^2)^{1/2}, \\ P_2^{(2)} &= 3(1 - z^2), \\ P_3^{(1)} &= \frac{3}{2}(-1 + 5z^2)(1 - z^2)^{1/2}, \\ P_3^{(2)} &= 15z(1 - z^2), \\ P_3^{(3)} &= 15(1 - z^2)^{3/2}, \\ P_4^{(1)} &= \frac{5}{2}(-3z + 7z^3)(1 - z^2)^{1/2}, \\ P_4^{(2)} &= \frac{15}{2}(-1 + 7z^2)(1 - z^2), \\ P_4^{(3)} &= 105z(1 - z^2)^{3/2}, \\ P_4^{(4)} &= 105(1 - z^2)^2. \end{aligned}$$

Функции двух аргументов  $\theta$  и  $\psi$

$$P_n^{(k)}(\cos \theta) \cos k\psi \quad \text{и} \quad P_n^{(k)}(\cos \theta) \sin k\psi$$

называются *элементарными сферическими функциями*, а *сферическая функция*  $Y_n(\theta, \psi)$  порядка  $n$  определяется формулой:

$$Y_n(\theta, \psi) = \sum_{k=0}^n P_n^{(k)}(\cos \theta) [A_{nk} \cos k\psi + B_{nk} \sin k\psi],$$

где  $A_{nk}$  и  $B_{nk}$  – произвольные постоянные.

Приведём теперь формулу, которая играет важную роль в теории сферических функций и их приложениях. Она имеет вид

$$P_n(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega) = P_n(\cos \theta)P_n(\cos \theta') + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\cos \theta)P_n^{(k)}(\cos \theta') \cos k\omega \quad (14)$$

и носит название *теоремы сложения для полиномов Лежандра*.

Вернёмся к формуле для потенциала притяжения (1). Предполагая, что точка  $P$  лежит вне притягивающего тела, разложим  $\Delta^{-1}$  в ряд по степеням отношения  $r'/r$ . Прежде всего, мы имеем:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \left(\frac{r'}{r}\right) \cos \gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}},$$

а это даёт нам возможность применить формулу (12). При помощи этой формулы находим следующее разложение:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma), \quad (15)$$

подставляя которое в (1), получаем:

$$U = f \int \int \int_T \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma) \kappa d\tau. \quad (16)$$

Перейдём теперь к полярным координатам

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \varphi \cos \lambda, & \xi' &= r' \cos \varphi' \cos \lambda', \\ \eta &= r \cos \varphi \sin \lambda, & \eta' &= r' \cos \varphi' \sin \lambda', \\ \zeta &= r \sin \varphi, & \zeta' &= r' \sin \varphi'. \end{aligned}$$

Тогда для  $\cos \gamma$  найдём:

$$\cos \gamma = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda').$$

Для того, чтобы выразить правую часть (16) через полярные координаты, воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра (14), которая в данном случае выглядит так:

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\sin \varphi)P_n(\sin \varphi') + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin \varphi)P_n^{(k)}(\sin \varphi') \cos k(\lambda - \lambda'). \quad (17)$$

Поскольку

$$\cos k(\lambda - \lambda') = \cos k\lambda \cos k\lambda' + \sin k\lambda \sin k\lambda',$$

то равенство (17) можно представить в виде:

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\sin \varphi)P_n(\sin \varphi') + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \cos k\lambda [P_n^{(k)}(\sin \varphi') \cos k\lambda'] + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin \varphi) \sin k\lambda [P_n^{(k)}(\sin \varphi') \sin k\lambda'].$$

Если подставить это равенство в формулу (16) и ввести следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} mr_0^n J_n &= - \int \int \int_T r'^m P_n(\sin \varphi') \kappa d\tau, \\ mr_0^n C_{nk} &= \int \int \int_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^m P_n^{(k)}(\sin \varphi') \cos k\lambda' \kappa d\tau, \\ mr_0^n S_{nk} &= \int \int \int_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^m P_n^{(k)}(\sin \varphi') \sin k\lambda' \kappa d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где  $m$  – масса тела,  $r_0$  – некоторая линейная величина, то получим:

$$U = -\frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin \varphi) + \frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda]. \quad (19)$$

В случае Земли в качестве  $r_0$  удобно принять экваториальный радиус. Очевидно, что коэффициенты  $J_n$ ,  $C_{nk}$  и  $S_{nk}$  являются безразмерными.

Числовые значения величин  $J_n$ ,  $C_{nk}$  и  $S_{nk}$  зависят от формы тела и распределения масс внутри него.

Пусть в (18)  $n = 0$ . Тогда  $\int \int \int_T \kappa d\tau = m$  и  $J_0 = -1$ .

Полагая в формулах (18)  $n = 1$  и  $k = 1$  и учитывая, что

$$P_1(\sin \varphi') = \sin \varphi', \quad P_1^{(1)}(\sin \varphi') = \cos \varphi',$$

находим:

$$mr_0 J_1 = - \int \int \int_T \kappa r' \sin \varphi' d\tau = - \int \int \int_T \zeta' dm = -m\zeta_0,$$

$$mr_0 C_{11} = \int \int \int_T \kappa r' \cos \varphi' \cos \lambda' d\tau = \int \int \int_T \xi' dm = m\xi_0,$$

$$mr_0 S_{11} = \int \int \int_T \kappa r' \cos \varphi' \sin \lambda' d\tau = \int \int \int_T \eta' dm = m\eta_0,$$

где  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  и  $\zeta_0$  – координаты центра масс тела.

Поскольку начало системы координат  $O\xi\eta\zeta$  находится в центре инерции тела, то отсюда заключаем, что

$$J_1 = 0, \quad C_{11} = 0, \quad S_{11} = 0. \quad (20)$$

Если в формулах (18) положить  $n = 2$  и  $k = 1$ ,  $k = 2$ , то можно легко получить следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= \frac{2C - (A + B)}{2mr_0^2}, \\ C_{21} &= \frac{E}{mr_0^2}, & S_{21} &= \frac{D}{mr_0^2}, \\ C_{22} &= \frac{B - A}{4mr_0^2}, & S_{22} &= \frac{F}{2mr_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

В равенствах (21)  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – главные центральные моменты инерции;  $D$ ,  $E$ ,  $F$  – произведения инерции:

$$\begin{aligned} A &= \int \int \int_T (\eta'^2 + \zeta'^2) \varkappa d\tau, & B &= \int \int \int_T (\xi'^2 + \zeta'^2) \varkappa d\tau, \\ C &= \int \int \int_T (\xi'^2 + \eta'^2) \varkappa d\tau, & D &= \int \int \int_T \eta' \zeta' \varkappa d\tau, \\ E &= \int \int \int_T \zeta' \xi' \varkappa d\tau, & F &= \int \int \int_T \xi' \eta' \varkappa d\tau. \end{aligned}$$

Формула (19) принимает следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} U &= \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Сделаем теперь несколько замечаний.

1. Полученное разложение для потенциала  $U$  сходится абсолютно и равномерно при  $r > r_0$ .
2. Если ось  $O\zeta$  совпадает с главной центральной осью инерции, то произведения инерции  $D$  и  $E$  равны нулю, а поэтому  $C_{21} = 0$  и  $S_{21} = 0$ . Если все три оси совпадают с главными центральными осями инерции, то и  $S_{22} = 0$ .
3. При выводе формулы (22) мы предполагали, что плотность является функцией лишь координат. Очевидно, эта формула будет иметь место, если плотность  $\varkappa$  зависит также от времени. В случае абсолютно твёрдого тела, как показывают равенства (18), коэффициенты  $J_n$ ,  $C_{nk}$  и  $S_{nk}$  будут постоянными. Если же плотность  $\varkappa$  и форма тела зависят от времени, то  $J_n$ ,  $C_{nk}$  и  $S_{nk}$  будут функциями времени.

Представление потенциала притяжения Земли в виде ряда по сферическим функциям стало классическим [11]. В силу простоты сферических функций оно очень удобно для аналитических и численных исследований движения искусственных спутников. Однако такое разложение обладает одним существенным недостатком, а именно медленной сходимостью, вследствие чего при точных исследованиях движения близких спутников необходимо учитывать достаточно большое число членов. Это обстоятельство заставляет искать другие формы разложения потенциала.

В 1965 году Г.Н.Дубошин получил разложение потенциала объёмного тела в ряд по функциям Ламе [34]. Л.А.Савров нашёл формулы, связывающие коэффициенты разложения по функциям Ламе с коэффициентами разложения по сферическим функциям [20].

В 1971 году Балмино представил аномальную часть потенциала Земли потенциалом притяжения некоторой совокупности точечных масс [31]. Им было использовано 126 материальных точек с заданными координатами в теле Земли. Важные исследования в этом направлении выполнил В.А.Антонов [6]. В работе [23] представлены результаты сравнительных вычислений.

По-видимому, самым существенным фактом является то, что для описания гравитационного поля Земли с нужной нам в настоящее время точностью требуется большое число постоянных (порядка 100000, а может быть и больше). Трудности обусловлены скорее физической стороной проблемы, чем математической.

## Лекция 2. Промежуточный потенциал

Рассмотрим структуру разложения потенциала  $U$  (22).

Все члены этого разложения можно разделить на три типа.

Пусть  $k = 0$ . Тогда мы будем иметь члены вида:

$$-\frac{fm}{r} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi). \quad (23)$$

Поскольку полином Лежандра  $P_n$  имеет  $n$  действительных различных и по абсолютной величине меньших единицы корней, то на сфере  $P_n(\sin \varphi)$  будет менять знак на  $n$  параллелях. Таким образом, сфера разделится на  $n + 1$  широтных зон, в которых этот член будет попеременно принимать положительные и отрицательные значения. Такой член называется *зональной гармоникой порядка  $n$* .

Пусть  $0 < k < n$ . Тогда мы будем иметь члены вида:

$$\frac{fm}{r} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n [C_{nk}, S_{nk}] P_n^{(k)}(\sin \varphi) \cos k\lambda,$$

которые обращаются в нуль на  $n - k$  параллелях, определяемых уравнениями

$$dP_n(\sin \varphi)/d^k \sin \varphi = 0,$$

и на  $2k$  меридианах:

$$\cos k\lambda = 0 \text{ или } \sin k\lambda = 0.$$

Следовательно, в этом случае сфера делится на  $n + k + 1$  сферических трапеций, в каждой из которых эти члены сохраняют знаки. Такие слагаемые называются *тессеральными гармониками порядка  $n$  и индекса  $k$* .

Пусть, наконец,  $k = n$ , и мы получим члены вида:

$$\frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n [C_{nn}, S_{nn}] P_n^{(n)}(\sin \varphi) \cos n\lambda.$$

Поскольку

$$dP_n(\sin \varphi)/d^n \sin \varphi = \text{const},$$

то такие члены обращаются в нуль только на меридианах:

$$\cos n\lambda = 0 \text{ или } \sin n\lambda = 0.$$

Сфера делится на  $2n$  знакопостоянных секторов, слагаемые называются *секториальными гармониками порядка  $n$* .

Рассмотрим теперь механический смысл различных слагаемых разложения (22). Поскольку первый член представляет собой потенциал шара со сферическим распределением плотности, то все остальные слагаемые характеризуют отличие Земли от тела сферической структуры. Основным из этих слагаемых является вторая зональная гармоника, которая определяет сплюснутость Земли у полюсов, то есть полярное сжатие Земли. Другие гармоники характеризуют более мелкие детали. Так, тессеральные и секториальные гармоники характеризуют отличие Земли от тела, динамически симметричного относительно оси вращения, а зональные гармоники нечётного порядка и тессеральные гармоники, для которых  $n - k$  нечётно, определяют асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

Числовые значения коэффициентов разложения потенциала притяжения Земли определяются как при помощи гравиметрических и геодезических измерений, так и по наблюдениям Луны и искусственных небесных тел.

Рассмотрим следующую функцию координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  :

$$W = \frac{fm}{r} \left( \frac{1+i\sigma}{r_1} + \frac{1-i\sigma}{r_2} \right), \quad (24)$$

где  $f$  и  $m$  – постоянная притяжения и масса Земли,  $i = \sqrt{-1}$ ,

$$r_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [\zeta - c(\sigma + i)]^2},$$

$$r_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [\zeta - c(\sigma - i)]^2},$$

а  $c$  и  $\sigma$  – вещественные постоянные.

Разложим  $W$  в ряд по степеням  $c/r$ , где  $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ .

Для этого воспользуемся формулой (12). Тогда

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n (\sigma + i)^n}{r^n} P_n \left( \frac{\zeta}{r} \right), \quad (25)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n (\sigma - i)^n}{r^n} P_n \left( \frac{\zeta}{r} \right). \quad (26)$$

Подставляя это разложение в формулу (24) и вводя экваториальный радиус  $r_0$  и геоцентрическую широту  $\varphi$ , получим:

$$W = -\frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} J'_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi), \quad (27)$$

где

$$J'_n = -\frac{1}{2} \left( \frac{c}{r_0} \right)^n [(1+i\sigma)(\sigma+i)^n + (1-i\sigma)(\sigma-i)^n]. \quad (28)$$

Из равенств (25) и (26) следует, что разложения для  $1/r_1$  и  $1/r_2$  абсолютно сходятся в области

$$r > c\sqrt{1+\sigma^2}. \quad (29)$$

В этой же области будет сходиться и ряд (27).

Положим в (28)  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} J'_0 &= -1, \\ J'_1 &= 0, \\ J'_2 &= \kappa^2(1 + \sigma^2), \\ J'_3 &= 2\kappa^3\sigma(1 + \sigma^2), \\ J'_4 &= -\kappa^4(1 + \sigma^2)(1 - 3\sigma^2), \\ J'_5 &= -4\kappa^5\sigma(1 - \sigma^4), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где

$$\kappa = \frac{c}{r_0}.$$

Легко убедиться в том, что все коэффициенты  $J'_n$  являются вещественными. Для этого достаточно заметить, что при любом целом  $n$  величины  $(\sigma + i)^n$  и  $(\sigma - i)^n$ , входящие в формулу (28), будут комплексно сопряжёнными. Поэтому  $W$  является вещественной функцией координат  $r$  и  $\varphi$ .

С учётом первых двух равенств (30) формула (27) может быть представлена в виде:

$$W = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J'_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \right\}. \quad (31)$$

Сравнение этой формулы с формулой (22) показывает, что функцию  $W$  можно интерпретировать как потенциал притяжения некоторого тела, обладающего осевой симметрией.

Поставим следующую задачу: подберём числовые значения постоянных  $c$  и  $\sigma$  таким образом, чтобы функция  $W$  по возможности была бы наиболее близкой к потенциалу притяжения Земли.

Поскольку в разложении (31)  $m$  – масса Земли, то первый член этого разложения равен первому члену разложения (22) для потенциала  $U$ . Если теперь постоянными  $c$  и  $\sigma$  распорядиться так, чтобы

$$J'_2 = J_2, \quad J'_3 = J_3,$$

то есть выбрать их из условий

$$c^2(1 + \sigma^2) = J_2 r_0^2, \quad 2c^3 \sigma(1 + \sigma^2) = J_3 r_0^3, \quad (32)$$

то уже первые три члена разложения (31) будут соответственно равны первым трём членам разложения (22).

Разрешая уравнения (32) относительно  $c$  и  $\sigma$ , находим

$$\left. \begin{aligned} c &= r_0 \left\{ J_2 - \left( \frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{1/2}, \\ \sigma &= \frac{J_3}{2J_2} \left\{ J_2 - \left( \frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Так как в случае Земли

$$J_2 \approx 1.0826 \cdot 10^{-3} > 0, \quad J_3 \approx -2.532 \cdot 10^{-6}, \quad J_2 > \left( \frac{J_3}{2J_2} \right)^2,$$

то из формул (33) следует, что постоянные  $c$  и  $\sigma$  будут действительными величинами.

Подставляя в (33) вместо  $r_0 \approx 6378.137$  км,  $J_2$  и  $J_3$  их числовые значения, получим:

$$c \approx +209.73 \text{ км}, \quad \sigma \approx -0.0356. \quad (34)$$

При этих значениях для  $r_0$ ,  $c$  и  $\sigma$  находим

$$\begin{aligned} J'_4 &\approx -1.166 \cdot 10^{-6}, \\ J'_5 &\approx +0.0055 \cdot 10^{-6}, \\ J'_6 &\approx +0.0012 \cdot 10^{-6}, \end{aligned} \quad (35)$$

причём коэффициенты  $J'_n$  при  $n > 6$  будут меньше  $10^{-9}$ .

Таким образом, хотя  $J'_4$  и  $J_4 \approx -1.618 \cdot 10^{-6}$  не равны друг другу, однако их разность меньше, чем  $J_4$ .

Вследствие малости отношения  $c/r_0$  постоянные  $J'_n$  будут убывать с возрастанием  $n$  быстрее, чем  $J_n$ . Поэтому разности  $J_n - J'_n$  будут иметь порядок  $10^{-6}$  и выше.

В дальнейшем гравитационное поле, потенциал которого определяется формулами (31), (28), (33), будем называть *промежуточным гравитационным полем Земли*. Такое название объясняется тем обстоятельством, что потенциал  $W$  имеет промежуточный характер между потенциалом истинной Земли и потенциалом Земли шарообразной.

Отметим важнейшие свойства функции  $W$ .

1. Функция  $W$  включает в себя вторую, третью и частично четвёртую зональные гармоники потенциала притяжения Земли.
2. Разность  $U - W$  содержит члены, порядок которых равен  $10^{-6}$  и выше.
3. Функция  $W$  зависит от постоянных  $fm$ ,  $r_0$ ,  $J_2$  и  $J_3$ , которые в настоящее время определены с наиболее высокой точностью.

4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в поле с потенциалом  $W$  строго интегрируются в квадратурах.

Последнее, чрезвычайно важное для приложений свойство, является следствием того, что  $W$  может рассматриваться как силовая функция задачи двух неподвижных центров с массами

$$\frac{m}{2} \cdot (1 + \sqrt{-1}\sigma) \text{ и } \frac{m}{2} \cdot (1 - \sqrt{-1}\sigma),$$

удалёнными друг от друга на расстояние, равное  $2\sqrt{-1}c$ .

Задача двух неподвижных центров, как известно, одна из немногих задач механики, которые интегрируются в квадратурах. В отличие от классической задачи, в которой массы центров и их взаимное расстояние являются действительными величинами, эту задачу мы будем называть в дальнейшем *обобщённой задачей двух неподвижных центров*.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи. Положим в (31) и (28)  $\sigma = 0$ . Тогда найдём:

$$W = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J'_{2n} \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \varphi) \right\}, \quad (36)$$

где

$$J'_{2n} = (-1)^{n+1} \left( \frac{c}{r_0} \right)^{2n}.$$

Полученная формула содержит только чётные зональные гармоники. Поэтому можно различать два варианта задачи: *симметричный* ( $\sigma = 0$ ) и *несимметричный* ( $\sigma \neq 0$ ).

В обоих вариантах силовая функция строго учитывает вторую зональную гармонику — самый существенный (после первого) член потенциала притяжения Земли.

Несимметричный вариант имеет преимущество перед симметричным, поскольку он учитывает частично (посредством третьей гармоники) асимметрию относительно плоскости экватора.

Пусть теперь  $c = 0$  и  $\sigma = 0$ . Тогда

$$W = \frac{fm}{r},$$

то есть в этом случае силовая функция  $W$  представляет собой потенциал шарообразной Земли.

Возвращаясь к потенциалу реальной Земли (22) и к силовой функции обобщённой задачи двух неподвижных центров (31), запишем

$$U = W + R_{\oplus}. \quad (37)$$

Тогда  $R_{\oplus}$  можно назвать *возмущающим потенциалом* и представить в виде следующего выражения

$$\begin{aligned} R_{\oplus} = & \frac{fm}{r} \sum_{n=4}^{\infty} j_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \\ & + \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda], \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$j_n = -(J_n - J'_n), \quad (39)$$

причём  $J'_n$  даются формулой (28).

В гравиметрии гравитационное поле Земли обычно разбивают на две части: нормальную и аномальную.

Под *нормальным гравитационным полем* понимают поле некоторой идеализированной Земли, потенциал которого содержит наиболее значительные члены разложения: нулевого, первого и некоторые члены второго порядка относительно сжатия Земли. В *аномальный потенциал* включают члены второго порядка и выше. В этом отношении промежуточное гравитационное поле

$$\frac{fm}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J'_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \right]$$

может рассматриваться как нормальное поле. Главное же отличие промежуточного потенциала  $W$  от других нормальных потенциалов заключается лишь в том, что он позволяет строго проинтегрировать дифференциальные уравнения движения.

Первые аппроксимирующие выражения для потенциала притяжения Земли (на практике, в сущности, совпадающие друг с другом), которые допускают интегрирование в квадратурах, были предложены в 1959 и 1960 годах в работах Дж.Винти [39] и М.Д.Кислика [15]. Значение этих работ для теории движения спутников трудно переоценить.

Если выражения Винти и Кислика разложить в ряды по сферическим функциям, то они могут быть представлены формулой (36), то есть будут совпадать с симметричным вариантом силовой функции задачи двух неподвижных центров. Такая связь задач была установлена в 1961 году в статье Е.П.Аксёнова, Е.А.Гребеникова и В.Г.Дёмина [3]. Указание на такую аналогию содержится также в книге Д.Брауэра и Дж.Клеменса [7], изданной в США в 1961 году.

Интересный обзор выполнил М.С.Яров-Яровой [29].

Идея применить обобщённую задачу двух неподвижных центров для построения промежуточных орбит искусственных спутников Земли была выдвинута Е.П.Аксёновым, Е.А.Гребениковым и В.Г.Дёминым в статьях 1961 года [4, 5].

Предложенная этими авторами формула (31) обобщала результаты Дж.Винти и М.Д.Кислика на случай несимметричного тела. Оказалось также, что менее удачная, но, несомненно, представляющая интерес аппроксимирующая формула Р.Баррара [32] может рассматриваться как некоторый предельный случай формулы (31). Другими словами, формула (31) содержит в себе все аппроксимирующие выражения для потенциала как частные или предельные случаи.

Если обозначить  $J_n = -\sqrt{2n+1} \bar{C}_{n0}$ ,  $\bar{S}_{n0} = 0$  и использовать полностью нормированные полиномы  $\bar{P}_n^{(0)}(z) = \sqrt{2n+1} P_n(z)$  и присоединённые функции Лежандра

$$\bar{P}_n^{(k)}(z) = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!}} P_n^{(k)}(z)$$

и соответствующие им коэффициенты разложения  $\bar{C}_{nk}$ ,  $\bar{S}_{nk}$ , то

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \bar{P}_n^{(k)}(\sin \varphi) [\bar{C}_{nk} \cos k\lambda + \bar{S}_{nk} \sin k\lambda] \right\}.$$

Во всех моделях геопотенциала числовые значения коэффициентов  $\bar{C}_{21} \neq 0$ ,  $\bar{S}_{21} \neq 0$ ,  $\bar{S}_{22} \neq 0$ .

Числовые значения полностью нормированных коэффициентов  $\bar{C}_{nk}$ ,  $\bar{S}_{nk}$  весьма медленно убывают с возрастанием  $n$ .

### Лекция 3. Первые интегралы

На первой лекции мы ввели подвижную, жёстко связанную с Землёй, систему координат  $O\xi\eta\zeta$ . Рассмотрим теперь следующий идеализированный вариант задачи. Возьмём неподвижную систему координат  $Oxyz$  с началом в центре масс Земли такую, чтобы ось  $Oz$ , как и ось  $O\zeta$ , была направлена в северный полюс, а оси  $Ox$  и  $Oy$  располагались в плоскости экватора, то есть в той же плоскости, что и подвижные оси  $O\xi$  и  $O\eta$ . Долготу, отсчитываемую от неподвижной оси  $Ox$ , обозначим  $w$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos w, \\ y &= r \cos \varphi \sin w, \\ z &= r \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Предположим сначала, что на спутник действует только сила притяжения, обусловленная промежуточным потенциалом Земли  $W$  (31). Тогда дифференциальные уравнения движения запишутся в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (41)$$

Уравнения (41) не являются точными *уравнениями возмущённого движения* спутника, поскольку они не учитывают влияние тессеральных, секториальных и, начиная с четвёртой, зональных гармоник геопотенциала и таких сил, как сопротивление атмосферы, притяжение Луны и Солнца, световое давление, возмущения от приливных деформаций Земли.

Уравнения движения материальной точки под действием силы притяжения одного неподвижного центра с потенциалом (4) называются *уравнениями невозмущённого движения*. Уравнения (41) можно назвать *уравнениями промежуточного движения*, поскольку они имеют промежуточный характер между уравнениями возмущённого движения и уравнениями невозмущённого движения. Орбиты, описываемые уравнениями (41), будем называть *промежуточными орбитами*.

Поставим следующую задачу: свести дифференциальные уравнения (41) к квадратурам, которые и будут в дальнейшем использованы для построения промежуточной орбиты спутника. Для этого мы воспользуемся методом Гамильтона – Якоби и сферическими координатами  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $w$ , которые связаны с прямоугольными координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cos w, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \sin w, \\ z &= c\sigma + \xi\eta. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Формулы для преобразования скоростей следующие:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x\xi\dot{\xi}}{\xi^2 + c^2} - \frac{x\eta\dot{\eta}}{1 - \eta^2} - y\dot{w}, \\ \dot{y} &= \frac{y\xi\dot{\xi}}{\xi^2 + c^2} - \frac{y\eta\dot{\eta}}{1 - \eta^2} + x\dot{w}, \\ \dot{z} &= \dot{\xi}\eta + \xi\dot{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Путаницы в обозначениях не должно возникнуть: прежде, в формуле (3), например, переменные  $\xi$  и  $\eta$  являлись прямоуголь-

ными координатами в подвижной системе отсчёта, в выражении (42) и везде в дальнейшем этими же греческими буквами обозначены сфероидальные координаты, но уже в неподвижной системе отсчёта, переменная  $w$ , как и в формуле (40), имеет смысл долготы.

Обратное преобразование имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}^2 &= x^2 + y^2 + (z - c\sigma)^2, \\ \xi^2 &= \frac{\bar{r}^2 - c^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\bar{r}^2 - c^2}{2}\right)^2 + c^2(z - c\sigma)^2}, \\ \eta &= \frac{z - c\sigma}{\xi}, \\ \cos w &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin w &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\xi[x\dot{x} + y\dot{y} + (z - c\sigma)\dot{z}] - c^2\eta\dot{z}}{\xi^2 + c^2\eta^2}, \\ \dot{\eta} &= \frac{\dot{z} - \dot{\xi}\eta}{\xi}, \\ \dot{w} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Согласно (24) в уравнениях (41) функция  $W$  определяется так:

$$W = \frac{fm}{r} \left( \frac{1 + i\sigma}{r_1} + \frac{1 - i\sigma}{r_2} \right),$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2}, \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2}. \end{aligned}$$

В новых координатах функция  $W$  запишется в виде:

$$W = \frac{fm(\xi - c\sigma\eta)}{J}, \quad (46)$$

где

$$J = \xi^2 + c^2\eta^2.$$

Пусть теперь  $T$  — кинетическая энергия спутника:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

В координатах  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $w$  она будет дана формулой:

$$T = \frac{J}{2} \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 + c^2} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} + \frac{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}{J} \dot{w}^2 \right). \quad (47)$$

Определяя импульсы  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $w'$  формулами

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = \frac{J\dot{\xi}}{\xi^2 + c^2}, \\ \eta' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = \frac{J\dot{\eta}}{1 - \eta^2}, \\ w' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} = (\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)\dot{w}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

из (47) найдём

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{\xi^2 + c^2}{J} \xi'^2 + \frac{1 - \eta^2}{J} \eta'^2 + \frac{w'^2}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \right). \quad (49)$$

Дифференциальные уравнения промежуточного движения теперь запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial \xi'}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial \eta'}, & \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial w'}, \\ \frac{d\xi'}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial \xi}, & \frac{d\eta'}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial \eta}, & \frac{dw'}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial w}, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где

$$K = T - W. \quad (51)$$

Система (50) имеет интеграл энергии:

$$T - W = \alpha_1, \quad (52)$$

где  $\alpha_1$  – постоянная интегрирования. Составляя при помощи (52), (49) и (46) уравнение Гамильтона – Якоби, получим

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2 + c^2}{2J} \left( \frac{\partial S}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1 - \eta^2}{2J} \left( \frac{\partial S}{\partial \eta} \right)^2 \\ + \frac{1}{2(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \left( \frac{\partial S}{\partial w} \right)^2 = \frac{fm(\xi - c\sigma\eta)}{J} + \alpha_1. \end{aligned} \quad (53)$$

Полный интеграл этого уравнения будем искать в виде

$$S = S_1(\xi) + S_2(\eta) + \alpha_3 w,$$

где  $\alpha_3$  – произвольная постоянная. Тогда для определения функций  $S_1$  и  $S_2$  приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} (\xi^2 + c^2) \left( \frac{\partial S_1}{\partial \xi} \right)^2 &= \frac{c^2 \alpha_3^2}{\xi^2 + c^2} + 2\alpha_1 \xi^2 + 2fm\xi - \alpha_2^2, \\ (1 - \eta^2) \left( \frac{\partial S_2}{\partial \eta} \right)^2 &= -\frac{\alpha_3^2}{1 - \eta^2} + 2\alpha_1 c^2 \eta^2 - 2fmc\sigma\eta + \alpha_2^2, \end{aligned}$$

где  $\alpha_2$  – произвольная постоянная. Поэтому

$$S = \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{\xi^2 + c^2} d\xi + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\sqrt{F(\eta)}}{1 - \eta^2} d\eta + \alpha_3 w. \quad (54)$$

Здесь  $\xi_1$  и  $\eta_1$  – постоянные, которые будут определены позже.

Функции одного аргумента  $F(\eta)$  и  $\Phi(\xi)$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\xi) &= (\xi^2 + c^2)(2\alpha_1\xi^2 + 2fm\xi - \alpha_2^2) + c^2\alpha_3^2, \\ F(\eta) &= (1 - \eta^2)(2\alpha_1c^2\eta^2 - 2fmc\sigma\eta + \alpha_2^2) - \alpha_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Общий интеграл системы (50) будет даваться уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} &= t + \beta_1, & \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} &= \beta_2, & \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} &= \beta_3, \\ \frac{\partial S}{\partial \xi} &= \xi', & \frac{\partial S}{\partial \eta} &= \eta', & \frac{\partial S}{\partial w} &= w'. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Запишем первые три из них в развёрнутой форме:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{c^2 \eta^2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} &= t + \beta_1, \\ - \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\alpha_2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\alpha_2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} &= \beta_2, \\ - \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{c^2 \alpha_3 d\xi}{(\xi^2 + c^2) \sqrt{\Phi(\xi)}} + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\alpha_3 d\eta}{(1 - \eta^2) \sqrt{F(\eta)}} &= w - \beta_3, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

где  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_3$  – произвольные постоянные.

Подставляя в три других уравнения (56) равенства (48) и дифференцируя (54), легко находим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} &= \frac{dt}{J}, \\ \frac{d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} &= \frac{dt}{J}, \\ (1 - \eta^2)(\xi^2 + c^2)dw &= \alpha_3 dt. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Теперь вместо переменной  $t$  введём новую независимую переменную  $\tau$  по формуле

$$dt = J d\tau = (\xi^2 + c^2 \eta^2) d\tau. \quad (59)$$

Из уравнений (58) найдём

$$\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} = \tau + c_3, \quad \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} = \tau + c_4, \quad (60)$$

где  $c_3$  и  $c_4$  – постоянные интегрирования.

Итак, задача свелась к обращению квадратур (60). После того как мы найдём  $\xi$  и  $\eta$  в виде явных функций  $\tau$ , третья координата определится следующей квадратурой:

$$w = \alpha_3 \int_0^{\tau} \frac{\xi^2 + c^2\eta^2}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} d\tau + c_5, \quad (61)$$

которая легко выводится из третьего уравнения (58).

Связь же переменной  $\tau$  с временем  $t$  даётся уравнением

$$t - t_0 = \int_0^{\tau} (\xi^2 + c^2\eta^2) d\tau + c_6. \quad (62)$$

В уравнениях (61) и (62)  $c_5$  и  $c_6$  – произвольные постоянные, а  $t_0$  – начальный момент времени.

Формулы (60), (61), (62) содержат семь постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, c_3, c_4, c_5, c_6$ . Но, как будет показано далее, постоянные  $c_3$  и  $c_4$  входят в окончательные формулы только посредством комбинации  $c_3 - c_4$ . Поэтому независимыми являются шесть постоянных.

Рассмотрим первые интегралы промежуточного движения. Обозначим через  $V$  орбитальную скорость спутника. Тогда на основании (52) и (46) интеграл энергии запишется в виде:

$$V^2 = \frac{2fm(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + 2\alpha_1. \quad (63)$$

В сфероидальных координатах  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $w$  интеграл площадей, как это следует из (58), имеет вид:

$$(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2) \frac{dw}{dt} = \alpha_3. \quad (64)$$

Если перейти от сфероидальных координат к прямоугольным координатам, то он примет форму:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \alpha_3. \quad (65)$$

Существование этих двух интегралов обусловлено общими свойствами силового поля, определяемого потенциалом  $W$ . Оно не зависит от времени (интеграл энергии) и симметрично относительно оси  $Oz$  (постоянство проекции вектора кинетического момента на ось  $Oz$ ).

Рассмотрим теперь третий интеграл. Пусть

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 &= x^2 + y^2 + (z - c\sigma)^2, \\ r' &= x\dot{x} + y\dot{y} + (z - c\sigma)\dot{z}. \end{aligned}$$

Тогда при помощи уравнений (40) имеем:

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 &= \xi^2 + c^2(1 - \eta^2), \\ r' &= \xi\dot{\xi} - c^2\eta\dot{\eta}. \end{aligned}$$

Кроме того, дифференцируя третье уравнение (40), находим:

$$\dot{z} = \xi\dot{\eta} + \eta\dot{\xi}, \quad (66)$$

поэтому

$$r'^2 + c^2\dot{z}^2 = J(\dot{\xi}^2 + c^2\dot{\eta}^2). \quad (67)$$

Согласно (58)

$$\begin{aligned} J^2 \dot{\xi}^2 &= \Phi(\xi), \\ J^2 \dot{\eta}^2 &= F(\eta). \end{aligned}$$

Следовательно, если воспользоваться формулами (55), мы вместо (67) получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} J(r'^2 + c^2 \dot{z}^2) &= 2\alpha_1 [\xi^2(\xi^2 + c^2) + c^4 \eta^2(1 - \eta^2)] \\ &+ 2fm [\xi(\xi^2 + c^2) - c^3 \sigma \eta(1 - \eta^2)] \\ &- \alpha_2^2(\xi^2 + c^2 \eta^2). \end{aligned} \quad (68)$$

Вычитая из него интеграл энергии (63), умноженный на  $J\bar{r}^2$ , найдём:

$$\bar{r}^2 V^2 - r'^2 - c^2 \dot{z}^2 = -\frac{2fm \xi \eta (c^2 \eta + c\sigma\xi)}{J} + \alpha_2^2,$$

или

$$\alpha_2^2 = \bar{r}^2 V^2 - r'^2 - c^2 \dot{z}^2 + \frac{2fm \xi \eta (c^2 \eta + c\sigma\xi)}{\xi^2 + c^2 \eta^2}. \quad (69)$$

Интеграл (69) есть тот третий интеграл, наличие которого даёт возможность проинтегрировать уравнения движения до конца.

Если интегралы (63) и (64) имеют наглядный механический смысл, то этого нельзя сказать об интеграле (69). Однако, поскольку

$$\bar{r}^2 V^2 - r'^2 = (y\dot{z} - \bar{z}\dot{y})^2 + (\bar{z}\dot{x} - x\dot{z})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})^2, \quad (70)$$

где

$$\bar{z} = z - c\sigma,$$

то в предельном случае, когда  $c = 0$  и  $\sigma = 0$ , величина  $\alpha_2$  равна модулю момента количества движения спутника (на единицу массы).

Изложение теории промежуточных орбит ИСЗ окажется неполным без упоминания об исследованиях Б.Гарфинкеля [35], Т.Штерна [38] и К.Акснеса [30]. В этих работах рассмотрены модельные задачи, которые дают приближённые решения проблемы движения спутника с учётом сжатия Земли. Такие решения определяют некоторые промежуточные орбиты, которые более близки к истинной орбите спутника, чем кеплеровская орбита, и могут рассматриваться как невозмущённые при построении полной теории движения спутника [1].

Предложенные Т.Штерном, Б.Гарфинкелем и К.Акснесом промежуточные потенциалы по своей структуре имеют много общего друг с другом. Все три потенциала можно записать в виде:

$$V = F(r) + \frac{\Phi(\varphi)}{r^2}.$$

Отсюда и следует интегрируемость рассмотренных задач, ибо эта форма позволяет проинтегрировать соответствующее уравнение Гамильтона – Якоби методом разделения переменных [10].

Недостатки этих промежуточных потенциалов заключаются в следующем. Все они зависят не только от характеристик гравитационного поля Земли, но и от элементов орбиты спутника. Поэтому точность аппроксимации для разных орбит будет разной. Во всех случаях возмущающая функция содержит короткопериодические члены первого порядка относительно коэффициента при второй зональной гармонике  $J_2$ . Следовательно, промежуточные орбиты не учитывают влияние этих слагаемых. Соответствующие неравенства нужно определять методами теории возмущений.

## Лекция 4. Качественные исследования

Рассмотрим уравнения (42), связывающие прямоугольные координаты  $x, y, z$  со сфероидальными координатами  $\xi, \eta, w$ . Переменные  $\xi, \eta, w$  могут принимать значения в следующей области:

$$0 \leq \xi < \infty, \quad -1 \leq \eta \leq +1, \quad -\infty < w < +\infty. \quad (71)$$

Из (42) следует, что если согласно уравнениям движения координата  $\xi$  будет изменяться в ограниченных пределах, то и прямоугольные координаты будут также величинами ограниченными, а следовательно, и движение спутника будет происходить в ограниченной части пространства. Но если  $\xi$  будет величиной неограниченной, то и движение будет происходить в неограниченном пространстве.

Выясним теперь возможный характер движений, допускаемых уравнениями промежуточного движения. С этой целью рассмотрим сначала интеграл энергии:

$$V^2 = \frac{2fm(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + 2\alpha_1. \quad (72)$$

Так как левая часть этого равенства есть величина неотрицательная, то

$$\frac{fm(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + \alpha_1 \geq 0. \quad (73)$$

Разберём отдельно случаи  $\alpha_1 < 0$ ,  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_1 > 0$ .

Если  $\alpha_1 < 0$ , то, обозначая через  $\alpha'$  положительную величину  $-fm/2\alpha_1$ , из условия (73) найдём:

$$(\xi - \alpha')^2 + (c\eta + \sigma\alpha')^2 \leq \alpha'^2(1 + \sigma^2). \quad (74)$$

Если  $\alpha_1 = 0$ , то из (73) следует, что

$$\xi - c\sigma\eta \geq 0. \quad (75)$$

Наконец, при  $\alpha_1 > 0$  будем иметь

$$(\xi + \alpha'')^2 + (c\eta - \sigma\alpha'')^2 \geq \alpha''^2(1 + \sigma^2), \quad (76)$$

где через  $\alpha''$  обозначена положительная величина  $fm/2\alpha_1$ .

Условия (75) и (76) показывают, что при  $\alpha_1 \geq 0$  переменная  $\xi$  может принимать любые значения из области (71). А тогда, как уже было отмечено, движение спутника будет неограниченным в пространстве. При  $\alpha_1 < 0$  из условия (74) вытекает, что  $\xi$  изменяется в следующих пределах:

$$\alpha'(1 - \sqrt{1 + \sigma^2}) \leq \xi \leq \alpha'(1 + \sqrt{1 + \sigma^2}),$$

и следовательно, в этом случае движение спутника будет происходить в ограниченной части пространства.

Итак, с точки зрения применения этих результатов к искусственным спутникам нас может интересовать только случай, когда постоянная энергии  $\alpha_1$  отрицательна.

Рассмотрим теперь интегралы (58), которые можно записать в виде:

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 = \Phi(\xi), \quad \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 = F(\eta).$$

Поскольку левые части этих интегралов суть величины неотрицательные, то области, в которых должны изменяться координаты  $\xi$  и  $\eta$ , определяются условиями:

$$\Phi(\xi) \geq 0, \quad F(\eta) \geq 0. \quad (77)$$

Исследуем сначала многочлен  $\Phi(\xi)$ :

$$\Phi(\xi) = 2\alpha_1\xi^4 + 2fm\xi^3 + (2\alpha_1c^2 - \alpha_2^2)\xi^2 + 2fmc^2\xi + c^2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2).$$

Обозначим его корни через  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  и покажем, что все они не могут быть комплексными. Действительно, когда  $\alpha_1 < 0$ , коэффициент при  $\xi^4$  отрицателен, и поэтому в случае всех комплексных корней многочлен  $\Phi(\xi)$  принимал бы только отрицательные значения и, как следует из (77), мы тогда бы не имели никаких реальных движений. Поэтому многочлен  $\Phi(\xi)$  должен иметь два действительных корня (пусть это будут  $\xi_1$  и  $\xi_2$ ). Таким образом, для многочлена  $\Phi(\xi)$  имеются только следующие возможности:

- а)  $\xi_1$  и  $\xi_2$  действительные, а  $\xi_3$  и  $\xi_4$  — комплексные,
- б)  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  — все действительные.

Поведение многочлена  $\Phi(\xi)$  в этих случаях показано на рис. 2.

Перейдём к изучению многочлена  $F(\eta)$ :

$$F(\eta) = -2\alpha_1c^2\eta^4 + 2fmc\sigma\eta^3 + (2\alpha_1c^2 - \alpha_2^2)\eta^2 - 2fmc\sigma\eta - (\alpha_3^2 - \alpha_2^2).$$

Прежде всего имеем

$$\left. \begin{aligned} F(-1) = -\alpha_3^2 \leq 0, & \quad F(+1) = -\alpha_3^2 \leq 0, \\ F(-\infty) > 0, & \quad F(+\infty) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Отсюда видно, что многочлен  $F(\eta)$  имеет два корня, один из которых меньше или равен  $-1$ , а второй больше или равен  $+1$ . Обозначим эти корни соответственно через  $\eta_3$  и  $\eta_4$ .

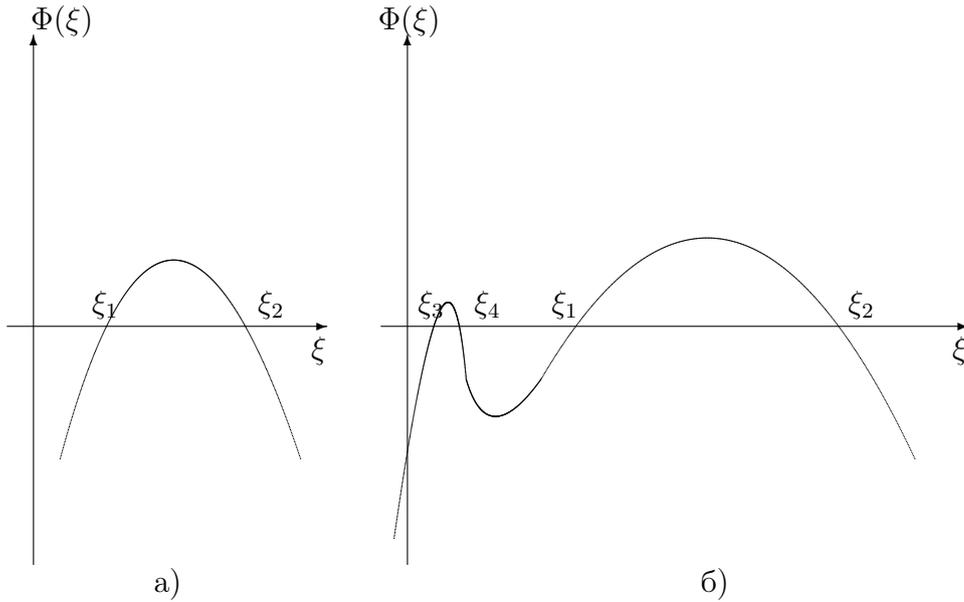


Рис. 2: График многочлена  $\Phi(\xi)$

Покажем, что два других корня (пусть  $\eta_1$  и  $\eta_2$ ) являются также вещественными и лежат на отрезке  $[-1, +1]$ . Действительно, если бы многочлен  $F(\eta)$  не имел таких корней, то никакими вещественными значениями  $\eta$  мы не смогли бы удовлетворить одновременно второму условию (77) и второму условию (71). Поведение многочлена  $F(\eta)$  показано на рис.3.

Из проведённого анализа следует, что переменная  $\eta$  будет изменяться в области

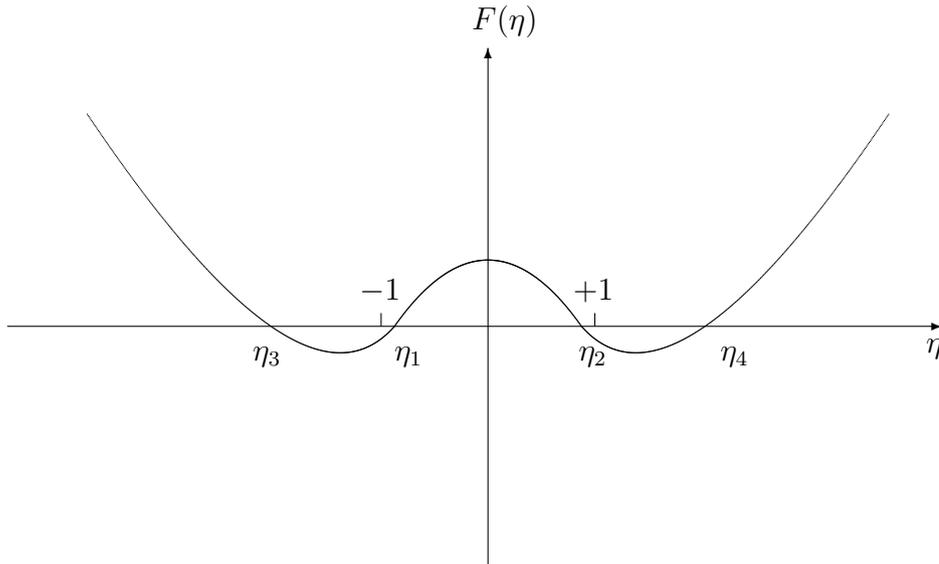
$$-1 \leq \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 \leq +1. \quad (79)$$

Для переменной  $\xi$  в случае а) мы имеем

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (80)$$

а в случае б) возможны две области изменения  $\xi$ :

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \text{ и } \xi_3 \leq \xi \leq \xi_4. \quad (81)$$

Рис. 3: График многочлена  $F(\eta)$ 

Однако, как покажем в дальнейшем, меньшие корни (пусть  $\xi_3$  и  $\xi_4$ ) при всех допустимых значениях  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  не будут превосходить постоянной  $c$ . Но на основании формул (42)

$$r = \sqrt{\xi^2 + 2c\sigma\xi\eta - c^2\eta^2 + c^2(1 + \sigma^2)}.$$

Поэтому во второй области (81) будет иметь место следующее ограничение:

$$r < c\sqrt{2 + 2\sigma + \sigma^2} \approx 330 \text{ км}, \quad (82)$$

а эта область полностью лежит внутри Земли и её можно не рассматривать.

При выводе формул промежуточного движения важным моментом является выбор элементов орбиты. Ясно, что эта задача не имеет однозначного решения. Однако при её решении следует стремиться к тому, чтобы, во-первых, эти элементы имели наглядный геометрический смысл, во-вторых, чтобы они бы-

ли близкими к соответствующим кеплеровским элементам и, в-третьих, чтобы выражения для координат спутника через элементы и время имели по возможности наиболее простой вид.

Очевидно, что постоянные  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  не удовлетворяют указанным требованиям. Поэтому вместо них мы будем пользоваться элементами  $a$ ,  $e$  и  $\delta$ , которые введём следующими формулами:

$$\xi_1 = a(1 - e), \quad \xi_2 = a(1 + e), \quad \eta_2 = \delta, \quad (83)$$

где  $\xi_1 \leq \xi_2$  — два корня многочлена  $\Phi(\xi)$ , а  $\eta_2$  — корень многочлена  $F(\eta)$ , лежащий на отрезке  $[-1, +1]$ . Другой корень  $F(\eta)$ , лежащий на отрезке  $[-1, +1]$ , обозначим  $\eta_1 = \delta^*$ .

Условиям (79), (80), (81) удовлетворяют элементы  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$ , принимающие любые значения из области

$$a > 0, \quad 0 \leq e < 1, \quad \delta \leq 1. \quad (84)$$

При этом области (84) будут соответствовать *все возможные* ограниченные движения, допускаемые уравнениями промежуточного движения.

Связь между старыми постоянными  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  и новыми элементами  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$  будет даваться равенствами

$$\Phi[a(1 - e)] = 0, \quad \Phi[a(1 + e)] = 0, \quad F(\delta) = 0, \quad (85)$$

которые можно рассматривать как три линейных уравнения относительно неизвестных  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2^2$  и  $\alpha_3^2$ .

Решив эти уравнения, мы выразим постоянные интегрирования  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2^2$  и  $\alpha_3^2$  через новые элементы  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$ .

Решение имеет вид:

$$2\alpha_1 = -\frac{fm}{a} [1 - \varepsilon^2(1 - e^2)Q], \quad (86)$$

$$\alpha_2^2 = +fma(1 - e^2) [1 + 2\varepsilon^2(1 + e^2)Q + \varepsilon^4(1 - e^2)^2Q], \quad (87)$$

$$\alpha_3^2 = +fma(1 - e^2) [1 + 2\varepsilon^2(1 + e^2) + \varepsilon^4(1 - e^2)^2]Q, \quad (88)$$

где

$$\varepsilon = \frac{c}{a(1 - e^2)}, \quad (89)$$

$$Q = \frac{(1 - \delta^2) [1 - 2\varepsilon\sigma\delta - \varepsilon^2\delta^2(1 - e^2)]}{1 + 2\varepsilon^2\delta^2(1 + e^2) + \varepsilon^4\delta^4(1 - e^2)^2}. \quad (90)$$

Приравнивая  $\eta_1 = \delta^*$  величине  $-\delta + \Delta\delta$ , получим неявное уравнение для вычисления поправки  $\Delta\delta$ :

$$\Delta\delta = \frac{2fmc\sigma(1 - \eta_2^2)}{(2\alpha_1c^2 - \alpha_2^2) + 2fmc\sigma\eta_1 - 2\alpha_1c^2(\eta_1^2 + \eta_2^2)}. \quad (91)$$

В конце этой лекции будет показано, что числовое значение параметра  $\varepsilon$  не превосходит  $1/30$ . Поэтому величины  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon\sigma$  имеют порядок  $10^{-3}$ .

Это обстоятельство, никак не использованное при решении уравнений (85), окажется, тем не менее, чрезвычайно полезным для определения численных значений параметров  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$ ,  $\delta^*$  на основе численных же значений постоянных  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2^2$ ,  $\alpha_3$ . Очевидно, что в этом случае уравнения (86), (87), (88) и (91) могут быть разрешены относительно  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$ ,  $\delta^*$  методом последовательных приближений.

Постоянная  $\alpha_3 \geq 0$  в случае прямых движений и  $\alpha_3 < 0$  в случае движений обратных. Это обстоятельство является след-

ствием того, что  $\alpha_3$  есть проекция удельного момента количества движения спутника на ось  $Oz$ .

Из формул (42) легко находим

$$\frac{x^2 + y^2}{\xi^2 + c^2} + \frac{(z - c\sigma)^2}{\xi^2} = 1, \quad (92)$$

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2(1 - \eta^2)} - \frac{(z - c\sigma)^2}{c^2\eta^2} = 1, \quad (93)$$

$$\frac{x}{\cos w} - \frac{y}{\sin w} = 0. \quad (94)$$

Равенства (92) и (93) показывают, что уравнению  $\xi = \text{const}$  соответствует семейство сжатых эллипсоидов вращения, а уравнение  $\eta = \text{const}$  определяет семейство однополостных гиперболоидов вращения. Ось вращения эллипсоидов и гиперболоидов совпадает с осью  $Oz$  неподвижной прямоугольной системы координат  $Oxyz$ , а их центры лежат в точке пересечения этой оси с плоскостью  $z = c\sigma$ . Далее, формула (94) при  $w = \text{const}$  представляет собой уравнение плоскости, проходящей через ось  $Oz$ .

Согласно (79), (80) и (83) переменные  $\xi$  и  $\eta$  изменяются в следующих пределах:

$$a(1 - e) \leq \xi \leq a(1 + e), \quad (95)$$

$$\delta^* \leq \eta \leq \delta, \quad (96)$$

где  $\delta^*$  – наименьший корень  $F(\eta)$  на отрезке  $[-1, +1]$ .

Отсюда заключаем, что область пространства, где происходит движение спутника, представляет собой тороидальное тело, ограниченное двумя эллипсоидами  $\xi = a(1 - e)$ ,  $\xi = a(1 + e)$  и двумя гиперболоидами  $\eta = \delta$ ,  $\eta = \delta^*$ .

Большая и малая полуоси внутреннего ограничивающего эллипсоида соответственно равны

$$\sqrt{a^2(1 - e)^2 + c^2} \text{ и } a(1 - e),$$

а полуоси внешнего ограничивающего эллипсоида суть

$$\sqrt{a^2(1 + e)^2 + c^2} \text{ и } a(1 + e).$$

Эксцентриситеты внутреннего и внешнего эллипсоидов определяются соответственно формулами

$$e_1 = \frac{c}{\sqrt{a^2(1 - e)^2 + c^2}}, \quad e_2 = \frac{c}{\sqrt{a^2(1 + e)^2 + c^2}}.$$

Наибольшая разность между большой и малой полуосями (когда эллипсоид касается поверхности Земли) равна  $\sim 3.5$  км. При неограниченном возрастании величины  $a(1 - e)$  эти эллипсоиды стремятся к сферам, центр которых лежит южнее центра Земли примерно на 7.5 км.

Действительная и мнимая полуоси гиперболоида, ограничивающие движение в верхнем полупространстве, соответственно равны

$$c\sqrt{1 - \delta^2} \text{ и } c\delta.$$

Для второго гиперболоида подобные величины будут равны

$$c\sqrt{1 - \delta^{*2}} \text{ и } c\delta^*.$$

Поскольку  $\delta^*$  есть функция  $a$ ,  $e$  и  $\delta$ , то область пространства, где происходит движение спутника, полностью определяется тремя элементами  $a$ ,  $e$  и  $\delta$ .

Орбита спутника касается одного эллипсоида, затем гиперболоида, второго эллипсоида и второго гиперболоида и так далее. В одной из следующих лекций будет показано, что промежуточное движение спутника является условно периодическим с тремя периодами.

В заключение найдём оценку для параметра  $\varepsilon$  и покажем, что сумма квадратов  $\xi_3^2 + \xi_4^2$  меньших корней уравнения  $\Phi(\xi) = 0$  не превосходит  $c^2$ .

Поскольку малая полуось внутреннего ограничивающего эллипсоида не может быть меньше экваториального радиуса Земли, то

$$\varepsilon = \frac{c}{a(1 - e^2)} \leq \frac{c}{a(1 - e)} < \frac{c}{r_0},$$

а поэтому, если воспользоваться оценками численных значений параметров (34) на стр. 20, то  $\varepsilon < 0.033$ .

Итак, величины  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon\sigma$  имеют порядок  $10^{-3}$  и пропорциональны малому параметру – сжатию Земли.

Два корня  $\xi_1, \xi_2$  многочлена  $\Phi(\xi)$  даются формулами (83). Для двух других корней теорема Виета гласит

$$\begin{aligned} \xi_3 + \xi_4 &= -\frac{fm}{\alpha_1} - (\xi_1 + \xi_2), \\ \xi_3 \cdot \xi_4 &= \frac{c^2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_1\xi_1\xi_2}. \end{aligned}$$

Используя выражения (86), (87), (88), получаем, что при малых числовых значениях  $\varepsilon$  и  $\sigma$  абсолютные значения корней  $\xi_3$  и  $\xi_4$  действительно не превосходят числового значения постоянной  $c$ .

## Лекция 5. Обращение квадратур

На третьей лекции были найдены первые интегралы уравнений промежуточного движения, позволяющие записать общий интеграл задачи в квадратурах. Поскольку функции  $F(\eta)$  и  $\Phi(\xi)$ , входящие в формулы (60), суть многочлены четвёртой степени, то полученные квадратуры являются эллиптическими, вследствие чего общее решение должно выражаться через *эллиптические интегралы* и *эллиптические функции*. Поэтому перед тем, как приступить к обращению квадратур, мы изложим основные сведения об эллиптических интегралах и функциях.

Пусть имеется интеграл вида:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

где  $R(z)$  есть многочлен четвёртой степени. Всегда существует такая дробно-линейная подстановка, которая приводит его к виду

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \quad (97)$$

Интеграл (97) называется *эллиптическим интегралом первого рода в нормальной форме Лежандра*. Число  $k$  ( $0 < k < 1$ ) называется *модулем* этого интеграла, а  $k' = \sqrt{1-k^2}$  его *дополнительным модулем*.

Подстановкой  $t = \sin \varphi$  эллиптический интеграл приводится к *нормальной тригонометрической форме*:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (98)$$

Эллиптический интеграл, взятый в пределах от 0 до  $\pi/2$ , называется *полным эллиптическим интегралом первого рода* и обозначается  $\mathbf{K}(k)$ :

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Рассмотрим теперь равенство

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (99)$$

С одной стороны, оно определяет  $u$  как однозначную функцию верхнего предела  $\varphi$ :

$$u = F(\varphi, k).$$

С другой стороны, мы можем рассматривать верхний предел  $\varphi$  как функцию самого интеграла  $u$ . Такая функция обозначается

$$\varphi = \operatorname{am}(u, k)$$

и называется *амплитудой*. Таким образом,  $\operatorname{am}(u, k)$  есть результат *обращения* эллиптического интеграла первого рода в нормальной тригонометрической форме Лежандра.

*Эллиптические функции Якоби* вводятся следующими формулами:

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin[\operatorname{am}(u, k)],$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos[\operatorname{am}(u, k)],$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)},$$

и называются соответственно *эллиптическим синусом*, *эллиптическим косинусом* и *дельтой амплитуды*.

Часто модуль  $k$  опускают и пишут просто:

$$\operatorname{am} u, \quad \operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn} u,$$

но всегда нужно помнить, что эти эллиптические функции Якоби зависят от аргумента  $u$  и параметра  $k$ .

Разложение для  $\mathbf{K}(k)$  имеет вид:

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \dots + \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} + \dots \right\}. \quad (100)$$

Ряд сходится при  $k < 1$ .

Приведём теперь квадратуры (60) к виду (99).

Два корня многочлена  $\Phi(\xi)$  и новые постоянные  $a$ ,  $e$  связаны формулами

$$\xi_1 = a(1 - e), \quad \xi_2 = a(1 + e).$$

Положим

$$\xi_3 = p + iq, \quad \xi_4 = p - iq$$

и воспользуемся теоремой Виета, которая даёт

$$\begin{aligned} 2(a + p) &= -\frac{fm}{\alpha_1}, \\ a^2(1 - e^2)(p^2 + q^2) &= \frac{c^2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_1}. \end{aligned} \quad (101)$$

Многочлен  $\Phi(\xi)$  можно представить в виде:

$$\Phi(\xi) = -2\alpha_1(\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_1)[p^2 + q^2 - 2p\xi + \xi^2], \quad (102)$$

где  $q^2$  в случае комплексных  $\xi_3$  и  $\xi_4$  будет величиной положительной, а в случае всех действительных корней – отрицательной.

На основании (60) и (102) запишем квадратуру для определения переменной  $\xi$  в виде:

$$\int_{\xi_1}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_1)[p^2 + q^2 - 2p\xi + \xi^2]}} = \sqrt{-2\alpha_1}(\tau + c_4), \quad (103)$$

где  $c_4$  – постоянная интегрирования. Делая подстановку

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} + \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} \cdot \frac{(n' + n'') \cos \psi + (n' - n'')}{(n' - n'') \cos \psi + (n' + n'')}, \quad (104)$$

приведём уравнение (103) к виду:

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \bar{k}_2^2 \cos^2 \psi}} = \bar{\sigma}_2(\tau + c_4), \quad (105)$$

а для  $\xi$  получим выражение

$$\xi = \frac{a[1 - e\bar{e} + (\bar{e} - e) \cos \psi]}{1 + \bar{e} \cos \psi}, \quad (106)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_2 &= \sqrt{-2\alpha_1 n' n'' (1 - k_2^2)}, \\ \bar{k}_2^2 &= -\frac{k_2^2}{1 - k_2^2}, \\ k_2^2 &= \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2 - (n' - n'')^2}{4n' n''}, \\ \bar{e} &= \frac{n' - n''}{n' + n''}, \\ n' &= \sqrt{p^2 + q^2 - 2p\xi_2 + \xi_2^2}, \\ n'' &= \sqrt{p^2 + q^2 - 2p\xi_1 + \xi_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Величины  $p$ ,  $p^2 + q^2$ ,  $\bar{k}_2^2$  пропорциональны сжатию.

Дифференцируя равенство (106) по времени  $t$  и принимая во внимание выражения (59) и (105), найдём, что

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{a e \bar{\sigma}_2 (1 - \bar{e}^2) \sin \psi \sqrt{1 - \bar{k}_2^2 \cos^2 \psi}}{(\xi^2 + c^2 \eta^2) (1 + \bar{e} \cos \psi)^2}. \quad (108)$$

Следует подчеркнуть, что полученные здесь формулы справедливы как в случае, когда  $\Phi(\xi)$  имеет пару комплексных корней и два действительных корня, так и в случае, когда все корни этого многочлена действительны. Это обстоятельство является следствием того, что подстановкой (104) можно пользоваться как при положительных, так и при отрицательных  $q^2$ .

Два корня многочлена  $F(\eta)$  и новые постоянные  $\delta$ ,  $\delta^*$  связаны формулами:

$$\eta_1 = \delta^*, \quad \eta_2 = \delta.$$

Согласно теореме Виета

$$\begin{aligned} \eta_3 + \eta_4 + \delta + \delta^* &= \frac{fm\sigma}{\alpha_1 c}, \\ \delta\delta^*\eta_3\eta_4 &= \frac{(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_1 c^2}. \end{aligned}$$

Пусть

$$p' = \frac{\eta_3 + \eta_4}{2} c^2, \quad q'^2 - p'^2 = -c^2 \eta_3 \eta_4.$$

После несложных вычислений получаем:

$$\begin{aligned} p' &= \frac{fm}{2\alpha_1} c \sigma - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} c^2, \\ q'^2 - p'^2 &= -\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1} + c^2 (1 - \eta_2^2 - \eta_1 \eta_2 - \eta_1^2) + \frac{2fmc\sigma(\eta_1 + \eta_2)}{2\alpha_1}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\eta_3\eta_4 < 0$ , то  $q'^2 > 0$ , и многочлен  $F(\eta)$  можно представить в форме:

$$F(\eta) = -2\alpha_1(\eta_2 - \eta)(\eta - \eta_1)[q'^2 - p'^2 + 2p'\eta - c^2\eta^2]. \quad (109)$$

На основании (60) и (109) запишем квадратуру для определения переменной  $\eta$  в виде:

$$\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta_2 - \eta)(\eta - \eta_1)[q'^2 - p'^2 + 2p'\eta - c^2\eta^2]}} = \sqrt{-2\alpha_1}(\tau + c_3), \quad (110)$$

где  $c_3$  – постоянная интегрирования.

Чтобы найти отсюда  $\eta$ , воспользуемся подстановкой

$$\eta = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} + \frac{\eta_1 - \eta_2}{2} \cdot \frac{(m' + m'') \cos \tilde{\varphi} + (m' - m'')}{(m' - m'') \cos \tilde{\varphi} + (m' + m'')} \quad (111)$$

и приведём уравнение (110) к виду:

$$\int_0^{\tilde{\varphi}} \frac{d\tilde{\varphi}}{\sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}} = \sigma_1(\tau + c_3), \quad (112)$$

а для  $\eta$  получим выражение

$$\eta = \frac{-s \cos \tilde{\varphi} + \gamma}{1 - d \cos \tilde{\varphi}}. \quad (113)$$

Параметры  $\gamma, d, k_1^2$  – малые величины первого порядка,

$$\begin{aligned} m' &= \sqrt{q'^2 - p'^2 + 2p'\eta_2 - c^2\eta_2^2}, \\ m'' &= \sqrt{q'^2 - p'^2 + 2p'\eta_1 - c^2\eta_1^2}. \end{aligned} \quad (114)$$

Дифференцируя равенство (113) по времени  $t$  и принимая во внимание выражения (59) и (112), найдём, что

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{(s - \gamma d) \sigma_1 \sin \tilde{\varphi} \sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}}{(\xi^2 + c^2\eta^2)(1 - d \cos \tilde{\varphi})^2}. \quad (115)$$

Параметры в формулах определены явными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{-2\alpha_1 m' m'' (1 + \hat{k}_1^2)}, \\ k_1^2 &= \frac{\hat{k}_1^2}{1 + \hat{k}_1^2}, \\ \hat{k}_1^2 &= \frac{c^2(\eta_2 - \eta_1)^2 + (m' - m'')^2}{4m' m''}, \\ s &= \frac{m'' \eta_2 - m' \eta_1}{m' + m''}, \\ \gamma &= \frac{m'' \eta_2 + m' \eta_1}{m' + m''}, \\ d &= \frac{m'' - m'}{m' + m''}. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Переменные  $\psi$  и  $\tilde{\varphi}$  связаны с  $\tau$  уравнениями (105) и (112).

При взятии интегралов воспользуемся разложением

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} (\cos \varphi)^{2n}$$

и первой из двух формул

$$\left. \begin{aligned} (\cos \varphi)^{2n} &= \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{j=1}^n C_{2n}^{n+j} \cos 2j\varphi, \\ (\cos \varphi)^{2n-1} &= \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{j=1}^n C_{2n-1}^{n+j-1} \cos (2j-1)\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

где для “биномиальных коэффициентов” принято обозначение

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

После интегрирования находим:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_2(\tau + c_4) &= \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2) \psi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (\bar{k}_2^2)^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} C_{2n}^{n+j} \sin 2j\psi, \\ \sigma_1(\tau + c_3) &= \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) \tilde{\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (k_1^2)^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} C_{2n}^{n+j} \sin 2j\tilde{\varphi}. \end{aligned}$$

Если исключить отсюда  $\tau$ , то получим:

$$\tilde{\varphi} = (1 + \nu)\psi + \tilde{\omega}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{2j} \sin 2j\psi + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\varkappa}_{2j} \sin 2j\tilde{\varphi}, \quad (118)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \nu &= +\frac{\sigma_1 \mathbf{K}(\bar{k}_2)}{\bar{\sigma}_2 \mathbf{K}(k_1)} - 1, \\ \varkappa_{2j} &= +\frac{\pi \sigma_1}{2 \bar{\sigma}_2 \mathbf{K}(k_1)} \frac{1}{j} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} C_{2n}^{n+j} (\bar{k}_2^2)^n, \\ \bar{\varkappa}_{2j} &= -\frac{\pi}{2 \mathbf{K}(k_1)} \frac{1}{j} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} C_{2n}^{n+j} (k_1^2)^n, \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

а  $\tilde{\omega}_0$  – постоянная интегрирования, пропорциональная  $c_3 - c_4$ .

Параметр  $\nu$  является малой величиной первого порядка относительно сжатия. Параметры  $\varkappa_{2j}$ ,  $\bar{\varkappa}_{2j}$  пропорциональны сжатию в степени  $j$ , их числовые значения быстро убывают при увеличении индекса  $j$ . По этой причине верхний предел суммирования, равный бесконечности, можно с учётом вычислительной точности заменить на некоторое целое число  $J$ . Коэффициент при второй зональной гармонике разложения геопотенциала имеет порядок  $10^{-3}$ , поэтому значение  $J = 7$  обеспечит точность вычислений с 20 значащими цифрами.

В случае кеплеровской промежуточной орбиты  $c = 0$ ,  $\sigma = 0$ .

При этих условиях

$$\xi = r, \quad \eta = \frac{z}{r}, \quad \bar{e} = e, \quad s = \delta = \sin(\text{угол наклона}).$$

Угловая переменная  $\psi$  аналогична истинной аномалии, а переменная  $\tilde{\varphi}$  и постоянная интегрирования  $\tilde{\omega}_0$  аналогичны аргументу широты и аргументу перигея, увеличенным на  $\pi/2$ .

В задаче двух тел связь аргумента широты с истинной аномалией линейная. В обобщённой задаче двух неподвижных центров переменные  $\psi$  и  $\tilde{\varphi}$  связаны неявным соотношением (118). Нахождение значения переменной  $\tilde{\varphi}$  по заданным численным значениям  $\psi$  и  $\tilde{\omega}_0$  может быть выполнено методом последовательных приближений. В силу малости величин  $\varkappa_2$  и  $\bar{\varkappa}_2$  приближения сходятся очень быстро.

Теперь, когда выполнено обращение квадратур (60) и найдены явные зависимости  $\xi(\psi)$  и  $\eta(\tilde{\varphi})$ , можно перейти к вычислению эллиптических интегралов (61) и (62). В монографии [2] получены формулы в буквенном виде. Зависимость между переменными в этих формулах – явная. Точность вычислений ограничена вторым порядком малости относительно сжатия Земли.

С помощью специальной программы “универсальный пуассоновский процессор” [8], созданной коллективом под руководством В.А.Брумберга, Н.В.Емельянов [13] довёл решение до четвёртого порядка малости относительно сжатия.

При использовании неявных соотношений можно построить алгоритм для проведения расчётов с точностью, ограниченной только возможностями компьютера.

Пусть известны численные значения величин

$$\alpha_1, \alpha_2^2, \alpha_3.$$

Соотношения (86), (87), (88), (91) и метод последовательных приближений помогут найти значения

$$a, e, \delta, \delta^*.$$

Затем будут вычислены параметры (107), (116) и коэффициенты (119). После этого все необходимые нам функции могут быть представлены в виде многочленов с численными коэффициентами по степеням  $\cos \psi$  или  $\cos \tilde{\varphi}$ .

В этом случае совокупность формул, выражающая как явные, так и неявные зависимости между переменными, становится *алгоритмом* для решения поставленной задачи и может быть запрограммирована.

Входными данными вычислительной процедуры будут числовые значения параметров модели гравитационного поля Земли  $fm$ ,  $r_0$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  и численные значения произвольных постоянных интегрирования. Результатом её работы станут численные значения всех параметров, необходимых для построения промежуточной орбиты.

Статья М.Д.Кислика [16] является, по-видимому, одной из первых важных публикаций, в которой вместо вывода буквенных формул разработаны численные алгоритмы обращения квадратур и взятия эллиптических интегралов. Как и в наших лекциях, алгоритмы, реализованные М.Д.Кисликом, основаны на операциях с многочленами относительно тригонометрических функций.

И.А.Герасимову удалось найти общее решение задачи двух неподвижных центров в функциях Вейерштрасса [9].

Вклад в алгоритмическую часть теории промежуточных орбит внёс Ю.Х.Жагар [14]. Им составлена программа, построенная на прямом вычислении эллиптических функций Якоби.

## Лекция 6. Эллиптические интегралы

Перейдём теперь к выводу формулы для долготы  $w$ . На основании (61) имеем:

$$w = \alpha_3 \int_0^\tau \frac{d\tau}{1 - \eta^2} - \alpha_3 c^2 \int_0^\tau \frac{d\tau}{\xi^2 + c^2} + c_5, \quad (120)$$

где  $c_5$  – произвольная постоянная.

Займёмся сначала вычислением первого интеграла. Согласно (112)

$$d\tau = \frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}} d\tilde{\varphi},$$

или

$$d\tau = \frac{1}{\sigma_1} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k_1^{2n} (\cos \tilde{\varphi})^{2n} \right] d\tilde{\varphi}. \quad (121)$$

Верхний предел суммирования заменим на число  $J = 7$ . Получаем также, что

$$\frac{1}{1 - \eta^2} = \frac{1 - 2d \cos \tilde{\varphi} + d^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}{A + B \cos \tilde{\varphi} + C \cos^2 \tilde{\varphi}},$$

где

$$A = 1 - \gamma^2, \quad B = 2(s\gamma - d), \quad C = d^2 - s^2.$$

Условимся теперь, что мы имеем дело с численными значениями величин  $k_1^2$ ,  $d$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Выражения становятся многочленами с численными коэффициентами. Для таких объектов определены операции сложения, умножения и выделения целой части.

Алгоритм умножения полиномов опубликован в монографии Н.В.Емельянова [12].

Пусть заданы многочлены переменной  $z$

$$A = a_0 + \sum_{i=1}^I a_i z^i, \quad B = b_0 + \sum_{j=1}^J b_j z^j$$

с численными коэффициентами  $a_i, b_j$ . Результатом умножения полиномов будет многочлен с численными коэффициентами  $c_k$ :

$$C = c_0 + \sum_{k=1}^K c_k z^k, \quad K = I + J, \quad (122)$$

причём

$$c_0 = a_0 b_0, \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}, \quad i \leq I, \quad k - i \leq J.$$

Интересен и алгоритм деления многочленов или, другими словами, алгоритм выделения целой части. Пусть  $I > J$ , тогда

$$\frac{a_0 + \sum_{i=1}^I a_i z^i}{b_0 + \sum_{j=1}^J b_j z^j} = \frac{d_0 + \sum_{k=1}^{J-1} d_k z^k}{b_0 + \sum_{j=1}^J b_j z^j} + g_0 + \sum_{n=1}^{I-J} g_n z^n. \quad (123)$$

Вычисление коэффициентов  $d_k$  и  $g_n$  происходит за  $I - J + 1$  шагов. Начальные значения  $d_k = a_k, 0 \leq k \leq I$  и  $g_n = 0$ . Далее на каждом шаге изменяются численные значения  $J$  коэффициентов  $d_k$ , причём коэффициент  $d_k$  при старшей степени  $z^k$  становится равным нулю, и степень многочлена в числителе уменьшается на единицу. Это достигается вычитанием из текущего многочлена в числителе многочлена в знаменателе, умноженного на выражение  $g_{k-J} \cdot z^{k-J} = d_k / b_J \cdot z^{k-J}$ .

Применяя алгоритм умножения полиномов (122) к многочлену (121) и выражению

$$1 - 2d \cos \tilde{\varphi} + d^2 \cos^2 \tilde{\varphi},$$

а затем алгоритм выделения целой части (123), то есть деления на квадратный трёхчлен

$$A + B \cos \tilde{\varphi} + C \cos^2 \tilde{\varphi},$$

получим:

$$\int_0^\tau \frac{d\tau}{1 - \eta^2} = \int_{\tilde{\varphi}_0}^{\tilde{\varphi}} \left[ \frac{(S - R \cos \tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi}}{A + B \cos \tilde{\varphi} + C \cos^2 \tilde{\varphi}} + r_0 + \sum_{i=1}^{2J-2} r_i (\cos \tilde{\varphi})^i \right] \frac{d\tilde{\varphi}}{\sigma_1}, \quad (124)$$

где  $\tilde{\varphi}_0$  есть значение  $\tilde{\varphi}$  при  $\tau = 0$ .

Выполним преобразование знаменателя дроби, стоящей в правой части, к виду:

$$A + B \cos \tilde{\varphi} + C \cos^2 \tilde{\varphi} = \frac{1}{\bar{\gamma}} [1 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \tilde{\varphi} - (1 - \alpha^2) \cos^2 \tilde{\varphi}],$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\bar{\gamma}$  определяются из уравнений

$$1 + \beta^2 = A\bar{\gamma}, \quad 2\alpha\beta = -B\bar{\gamma}, \quad 1 - \alpha^2 = -C\bar{\gamma},$$

то есть

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\bar{\gamma}} (\sqrt{A - B + C} + \sqrt{A + B + C}), \\ \beta &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\bar{\gamma}} (\sqrt{A - B + C} - \sqrt{A + B + C}), \\ \bar{\gamma} &= \frac{4}{(\sqrt{A - B + C} + \sqrt{A + B + C})^2 - 4C}. \end{aligned}$$

Придавая постоянным интегрирования  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2^2$ ,  $\alpha_3$  различные допустимые начальные значения, прямым вычислением легко проверить, что во всех случаях выполняются равенства:

$$\frac{R}{S} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_3}{\sigma_1} \cdot \frac{\bar{\gamma}}{\alpha} \cdot S = \pm 1.$$

Величинам  $\alpha$  и  $\beta$  припишем знак постоянной  $\alpha_3$ , тогда

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}\sqrt{\bar{\gamma}} \operatorname{sign}(\alpha_3) (\sqrt{A - B + C} + \sqrt{A + B + C}), \\ \beta &= \frac{1}{2}\sqrt{\bar{\gamma}} \operatorname{sign}(\alpha_3) (\sqrt{A - B + C} - \sqrt{A + B + C}), \\ \bar{\gamma} &= \frac{4}{(\sqrt{A - B + C} + \sqrt{A + B + C})^2 - 4C}, \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

и

$$\frac{\alpha_3}{\sigma_1} \cdot \frac{R - S \cos \tilde{\varphi}}{A + B \cos \tilde{\varphi} + C \cos^2 \tilde{\varphi}} = \frac{\alpha - \beta \cos \tilde{\varphi}}{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \tilde{\varphi} - (1 - \alpha^2) \cos^2 \tilde{\varphi}}.$$

Но

$$\int \frac{(\alpha - \beta \cos \tilde{\varphi})d\tilde{\varphi}}{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \tilde{\varphi} - (1 - \alpha^2) \cos^2 \tilde{\varphi}} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right),$$

поэтому, интегрируя (124) и используя формулы (117), получим

$$\alpha_3 \int_0^\tau \frac{d\tau}{1 - \eta^2} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right) + \beta_0 \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{2J} \beta'_i \sin i\tilde{\varphi} + c'_5, \quad (126)$$

где  $\beta'_i$  – численные коэффициенты,  $c'_5$  – постоянная.

Перейдём теперь к вычислению второго интеграла (120). Воспользуемся уравнением

$$d\tau = \frac{1}{\bar{\sigma}_2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^J \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \bar{k}_2^{2n} (\cos \psi)^{2n} \right] d\psi, \quad (127)$$

в котором верхний предел суммирования, равный  $\infty$ , заменён на число  $J$ , и выполним разложение подынтегральной функции в ряд по степеням  $c/\xi$ :

$$\frac{c^2}{\xi^2 + c^2} = \frac{c^2}{\xi^2} \cdot \left[ 1 + \sum_{n=1}^{J-1} (-1)^n \left( \frac{c^2}{\xi^2} \right)^n \right]. \quad (128)$$

Отношение  $c^2/\xi^2$  с помощью (106) может быть представлено в виде многочлена по степеням  $\cos \psi$ . Действительно:

$$\frac{c}{\xi} = \frac{c}{a(1 - e\bar{e})} \cdot \frac{1 + \bar{e} \cos \psi}{1 - \bar{q} \cos \psi},$$

$$\bar{q} = \frac{e - \bar{e}}{1 - e\bar{e}},$$

$$\frac{1}{1 - \bar{q} \cos \psi} = 1 + \sum_{n=1}^J \bar{q}^n \cos^n \psi,$$

где  $\bar{q}$  – величина первого порядка малости относительно сжатия.

Применяя к ряду для  $1/(1 - \bar{q} \cos \psi)$  и выражению в числителе  $1 + \bar{e} \cos \psi$  алгоритм умножения многочленов и учитывая множитель  $c/[a(1 - e\bar{e})]$ , получаем:

$$\frac{c}{\xi} = q_0 + \sum_{k=1}^{J+1} q_k \cos^k \psi. \quad (129)$$

После возведения (129) в квадрат будем иметь искомый многочлен с численными коэффициентами:

$$\frac{c^2}{\xi^2} = q'_0 + \sum_{k=1}^{J+2} q'_k \cos^k \psi. \quad (130)$$

Выполняя  $J - 1$  раз операцию умножения текущего многочлена на выражение (130) и складывая, получим многочлен для подынтегральной функции (128). Умножим его на дифференциал (127) и проинтегрируем, учитывая формулы (117):

$$-\alpha_3 c^2 \int_0^\tau \frac{d\tau}{\xi^2 + c^2} = \alpha'_0 \psi + \sum_{i=1}^{2J} \alpha'_i \sin i\psi + c''_5, \quad (131)$$

где  $c''_5$  – значение интеграла при  $\tau = 0$ .

Подставим, наконец, формулы (126) и (131) в (120). Тогда окончательно получим:

$$w = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right) + \tilde{\Omega},$$

где

$$\tilde{\Omega} = \alpha'_0 \psi + \beta_0 \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{2J} (\alpha'_i \sin i\psi + \beta_i \sin i\tilde{\varphi}) + \tilde{c}_5,$$

причём  $\tilde{c}_5 = c_5 + c'_5 + c''_5$ .

Учитывая формулу (118) и определяя параметры

$$\mu = \alpha'_0 + (1 + \nu)\beta_0, \quad \alpha_i^p = \alpha'_i + \beta_0 \varkappa_i, \quad \beta_i^f = \beta_i + \beta_0 \bar{\varkappa}_i,$$

придадим последнему выражению вид:

$$\tilde{\Omega} = \mu\psi + \sum_{i=1}^{2J} \left( \alpha_i^p \sin i\psi + \beta_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right) + \tilde{\Omega}_0. \quad (132)$$

Очевидно, что постоянную  $\tilde{\Omega}_0 = \tilde{c}_5 + \beta_0 \tilde{\omega}_0$  мы можем рассматривать как произвольную постоянную, вместо постоянной  $c_5$ .

Запишем  $w$  в виде:

$$w = \tilde{w} + \tilde{\Omega}, \quad (133)$$

где

$$\tilde{w} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right). \quad (134)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sin \tilde{w} &= \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \tilde{\varphi} - (1 - \alpha^2) \cos^2 \tilde{\varphi}}}, \\ \cos \tilde{w} &= \frac{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \tilde{\varphi} - (1 - \alpha^2) \cos^2 \tilde{\varphi}}}. \end{aligned}$$

Но

$$1 - \eta^2 = \frac{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \tilde{\varphi} - (1 - \alpha^2) \cos^2 \tilde{\varphi}}{\bar{\gamma}(1 - d \cos \tilde{\varphi})^2},$$

поэтому

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{1 - \eta^2} \sin \tilde{w} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}}} \frac{\sin \tilde{\varphi}}{1 - d \cos \tilde{\varphi}}, \\ \sqrt{1 - \eta^2} \cos \tilde{w} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}}} \frac{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta}{1 - d \cos \tilde{\varphi}}. \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

Найдём теперь связь времени  $t$  и угловых переменных  $\psi$  и  $\tilde{\varphi}$ .

Для начала формулой

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

определим новую угловую переменную  $E$ , аналогичную эксцентрисической аномалии кеплеровской промежуточной орбиты. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin E}{1 - \bar{e} \cos E}, & \sin E &= \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin \psi}{1 + \bar{e} \cos \psi}, \\ \cos \psi &= \frac{\cos E - \bar{e}}{1 - \bar{e} \cos E}, & \cos E &= \frac{\cos \psi + \bar{e}}{1 + \bar{e} \cos \psi}, \end{aligned}$$

а из формулы (106) следуют соотношения

$$\xi = a(1 - e \cos E) \quad \text{и} \quad d\xi = ae \sin E dE,$$

позволяющие другим способом записать как многочлен  $\Phi(\xi)$  (формула (102))

$$\Phi(\xi) = -2\alpha_1 a^2 e^2 \sin^2 E [\xi^2 - 2p\xi + p^2 + q^2],$$

так и дифференциальное выражение

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1}} \frac{1}{\xi} \left( 1 - \frac{2p}{\xi} + \frac{p^2 + q^2}{\xi^2} \right)^{(-\frac{1}{2})} dE. \quad (136)$$

Величины  $p$  и  $p^2 + q^2$  имеют первый порядок малости. Справедливо разложение:

$$\left(1 - \frac{2p}{\xi} + \frac{p^2 + q^2}{\xi^2}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 + \frac{p}{\xi} - \frac{p^2 + q^2}{2\xi^2} + \sum_{n=2}^J \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2p}{\xi} - \frac{p^2 + q^2}{\xi^2}\right)^n. \quad (137)$$

На основании (62) уравнение, связывающее время  $t$  с промежуточной переменной  $\tau$ , имеет вид:

$$t - t_0 = \int_0^\tau \xi^2 d\tau + c^2 \int_0^\tau \eta^2 d\tau + c_6, \quad (138)$$

где  $t_0$  – начальный момент времени, а  $c_6$  – постоянная интегрирования.

Займёмся вычислением первого интеграла. Объединим (58), (136) и разложение (137), тогда

$$\int \xi^2 d\tau = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int (\xi + p) dE + \frac{a}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int I_E \frac{a}{\xi} dE, \\ I_E = -\frac{p^2 + q^2}{2a^2} + \sum_{n=2}^J \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{a}{\xi}\right)^{n-2} \left(\frac{2p}{a} - \frac{p^2 + q^2}{a^2} \frac{a}{\xi}\right)^n.$$

С учётом (101) имеем:

$$\xi + p = a + p - ae \cos E = \frac{fm}{(-2\alpha_1)} - ae \cos E.$$

Определим новые параметры  $n_0$ ,  $e^*$  формулами

$$n_0 = \frac{\sqrt{(-2\alpha_1)^3}}{fm}, \quad e^* = \frac{(-2\alpha_1) a e}{fm} \quad (139)$$

и запишем

$$\frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int (\xi + p) dE = \frac{1}{n_0} \cdot (E - e^* \sin E). \quad (140)$$

Для вычисления интеграла, в который входит  $I_E$ , учтём, что

$$dE = \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}{1 + \bar{e} \cos \psi} d\psi, \quad \frac{a}{\xi} = \frac{1 + \bar{e} \cos \psi}{(1 - e\bar{e})(1 - \bar{q} \cos \psi)},$$

и представим последовательно выражения

$$\frac{a}{\xi}, \quad \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2}}{1 - e\bar{e}} \frac{1}{1 - \bar{q} \cos \psi} \quad \text{и} \quad \frac{2p}{a} - \frac{p^2 + q^2}{a^2} \frac{a}{\xi}$$

в виде полиномов по степеням  $\cos \psi$ . Далее с помощью алгоритма умножения полиномов составим подынтегральное выражение и проинтегрируем его. Умножим результат на числовой множитель и добавим его к выражению (140):

$$\int_0^\tau \xi^2 d\tau = \frac{1}{n_0} \left[ (E - e^* \sin E) + \gamma_0 \psi + \sum_{i=1}^{2J} \gamma_i \sin i\psi \right] + c'_6,$$

где через  $c'_6$  обозначено значение интеграла при  $\tau = 0$ .

Для вычисления второго интеграла в (138) заметим, что

$$\eta^2 = (\gamma^2 - 2s\gamma \cos \tilde{\varphi} + s^2 \cos^2 \tilde{\varphi}) \left( 1 + \sum_{n=1}^J nd^n \cos^n \tilde{\varphi} \right).$$

Для дифференциала  $d\tau$  используем формулу (121). Применяем алгоритм умножения многочленов и интегрируем:

$$c^2 \int_0^\tau \eta^2 d\tau = \frac{1}{n_0} \left[ \gamma'_0 \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{2J} \gamma'_i \sin i\tilde{\varphi} \right] + c''_6,$$

где  $c''_6$  – значение интеграла при  $\tau = 0$ .

Снова примем во внимание формулу (118). Определим параметры

$$\lambda = -\gamma_0 - (1 + \nu)\gamma'_0, \quad \gamma_i^p = \gamma_i + \gamma'_0 \varkappa_i, \quad \gamma_i^f = \gamma_i + \gamma'_0 \bar{\varkappa}_i$$

и придадим интегралу (138) окончательный вид:

$$n_0 \cdot (t - t_0) + \tilde{M}_0 = E - e^* \sin E - \lambda \psi + \sum_{i=1}^{2J} \left( \gamma_i^p \sin i\psi + \gamma_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right), \quad (141)$$

где  $\tilde{M}_0 = -n_0(c_6 + c'_6 + c''_6) - \gamma'_0 \tilde{\omega}_0$  – шестая и последняя произвольная постоянная.

Величины  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_3$ , входящие в соотношения (57), связаны с новыми произвольными постоянными простыми формулами:

$$\beta_1 = \frac{\tilde{M}_0}{n_0} - t_0, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{\pi}{2} \mathbf{K}(k_1) \tilde{\omega}_0, \quad \beta_3 = \tilde{\Omega}_0.$$

Выражение (141) аналогично уравнению Кеплера в эллиптическом движении. Отличие состоит в том, что решать его надо совместно с уравнением (118).

В случае  $c = 0$ ,  $\sigma = 0$ , когда промежуточная орбита обобщённой задачи двух неподвижных центров становится эллиптической орбитой, зависящей от средней аномалии  $M_0$  в начальный момент времени  $t_0$ , аргумента перигея  $\omega$  и долготы восходящего узла  $\Omega$ , произвольные постоянные  $\tilde{M}_0$ ,  $\tilde{\omega}_0$ ,  $\tilde{\Omega}_0$  равны

$$\tilde{M}_0 = M_0, \quad \tilde{\omega}_0 = \omega + \frac{\pi}{2}, \quad \tilde{\Omega}_0 = \Omega - \frac{\pi}{2}.$$

Неявная связь между координатами и временем является одной из особенностей задач небесной механики. Это подчёркивает А.Пуанкаре в предисловии к мемуару [19].

## Лекция 7. Канонические уравнения

В настоящей лекции будут рассмотрены система канонических переменных действие–угол и дифференциальные уравнения в канонической форме, которые позволяют находить возмущения, не принятые во внимание при построении промежуточной орбиты.

Подобно тому, как это имеет место в классической теории возмущений, при решении уравнений возмущённого движения за искомые функции примем элементы промежуточного движения.

Будем считать, что в возмущённом движении координаты и составляющие скорости спутника определяются формулами, в которых элементы промежуточной орбиты не являются постоянными, а суть некоторые функции времени.

Пусть возмущающие силы имеют силовую функцию  $R$ , тогда потенциал задачи можно записать как сумму  $W + R$ , где  $W$  – силовая функция обобщённой задачи двух неподвижных центров.

В невозмущённом движении  $R = 0$  и переменные разделяются. Система имеет общий интеграл (57), зависящий от шести произвольных постоянных:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3.$$

В возмущённом движении эти величины станут функциями времени, удовлетворяющими каноническим уравнениям:

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_k}, \quad \frac{d\beta_k}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_k}, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Параметры  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  аналогичны каноническим элементам Якоби в кеплеровском движении.

Известно, что элементы Якоби не являются удобными переменными при решении уравнений возмущённого движения. Их недостаток заключается в том, что в правых частях дифференциальных уравнений появляются смешанные члены, то есть члены вида  $t \sin \gamma t$ , где  $\gamma$  – постоянная. По аналогичным причинам элементы  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  необходимо заменить другими, более удобными каноническими элементами. В теории кеплеровского движения такими элементами служат элементы Делоне. В нашем случае задача существенно осложняется тем обстоятельством, что рассматриваемая промежуточная орбита характеризуется тремя частотами, в то время как кеплеровская орбита зависит только от одной частоты. Задача, тем не менее, и здесь успешно разрешается, если воспользоваться общей теорией условно–периодических движений, прекрасно развитой в книге К.Шарлье [27].

Переменные действия  $A_1, A_2, A_3$  определим формулами:

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sqrt{\Phi(\xi)} d\xi}{\xi^2 + c^2}, \quad A_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sqrt{F(\eta)} d\eta}{1 - \eta^2}, \quad A_3 = \alpha_3, \quad (142)$$

где  $\Phi(\xi)$  и  $F(\eta)$  даются равенствами (55),  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – корни многочлена  $\Phi(\xi)$ , между которыми изменяется координата  $\xi$ , а  $\eta_1$  и  $\eta_2$  – корни многочлена  $F(\eta)$ , лежащие в промежутке  $[-1, +1]$ .

Вторую группу элементов – переменные угол  $B_1, B_2, B_3$ , сопряжённые переменным действия  $A_1, A_2, A_3$ , запишем с помощью функции преобразования  $S$  (формула 54):

$$B_1 = \frac{\partial S}{\partial A_1}, \quad B_2 = \frac{\partial S}{\partial A_2}, \quad B_3 = \frac{\partial S}{\partial A_3}.$$

При дифференцировании  $S$  параметры  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  считаются функциями  $A_1, A_2, A_3$ .

Три первых уравнения общего интеграла (56) теперь можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} t + \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая выражения (54), (57) и (142), сразу получаем формулы для частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} &= +\frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{c^2 \eta^2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}}, \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} &= -\frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\alpha_2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\alpha_2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}}, \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} &= -\frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{c^2 \alpha_3 d\xi}{(\xi^2 + c^2) \sqrt{\Phi(\xi)}}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_3} &= \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\alpha_3 d\eta}{(1 - \eta^2) \sqrt{F(\eta)}}. \end{aligned}$$

Взятие интегралов, стоящих в правых частях каждого из равенств, составляло предмет двух предыдущих лекций. Учитывая пределы интегрирования, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} &= \frac{1 + \gamma_0}{n_0}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{\gamma'_0}{n_0}, & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_1} &= 0, \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} &= -\frac{\alpha_2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2), & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1), & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_2} &= 0, \\ \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} &= -\alpha'_0, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_3} &= -(1 + \beta_0), & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_3} &= 1. \end{aligned}$$

Обращение матрицы приводит к частным производным от параметров  $\alpha_k$  по элементам  $A_k$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_1}{\partial A_1} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1), \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial A_2} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\alpha_2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2), \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial A_3} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\alpha_2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2) (1 + \beta_0) + \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) \alpha'_0 \right], \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial A_1} &= -\frac{1}{\Delta} \frac{\gamma'_0}{n_0}, \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial A_2} &= \frac{1}{\Delta} \frac{1 + \gamma_0}{n_0}, \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial A_3} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{1 + \gamma_0}{n_0} (1 + \beta_0) - \frac{\gamma'_0}{n_0} \alpha'_0 \right], \\ \Delta &= \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) \frac{1 - \lambda}{n_0}.\end{aligned}$$

Выражения (142) перепишем в виде:

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\Phi(\xi) d\xi}{(\xi^2 + c^2) \sqrt{\Phi(\xi)}}, \quad A_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{F(\eta) d\eta}{(1 - \eta^2) \sqrt{F(\eta)}}.$$

Подставляя сюда явный вид функций  $\Phi(\xi)$ ,  $F(\eta)$  (55) и сравнивая результат подстановки с соотношениями (57), замечаем, что почти все интегралы, кроме двух новых, нам уже известны:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{2\alpha_1}{n_0} (1 + \gamma_0) - \frac{\alpha_2^2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2) - \alpha'_0 \alpha_3 + \frac{1}{\pi} 2fm \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi d\tau, \\ A_2 &= \frac{\alpha_2^2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) + \frac{2\alpha_1}{n_0} \gamma'_0 - (1 + \beta_0) \alpha_3 - \frac{1}{\pi} 2fmc\sigma \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta d\tau.\end{aligned}$$

Учёт формул (58), (112), (113), (136), (137) и (139) позволяет записать:

$$A_1 = \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}}(1 - \gamma_0) - \frac{\alpha_2^2}{\bar{\sigma}_2} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\bar{k}_2) - \alpha'_0 \alpha_3 + I_\xi,$$

$$A_2 = \frac{\alpha_2^2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) - \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}} \gamma'_0 - (1 + \beta_0) \alpha_3 - I_\eta,$$

где

$$I_\xi = \frac{2fm}{\sqrt{-2\alpha_1}} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^J \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^\pi \left(\frac{a}{\xi}\right)^{n-1} \left(\frac{2p}{a} - \frac{p^2 + q^2}{a^2} \frac{a}{\xi}\right)^n \frac{a}{\xi} dE,$$

$$I_\eta = \frac{2fmc\sigma}{\sigma_1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-s \cos \tilde{\varphi} + \gamma}{1 - d \cos \tilde{\varphi}} \frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}} d\tilde{\varphi}.$$

Численные значения интегралов

$$I_\xi(\cos \psi) \text{ и } I_\eta(\cos \tilde{\varphi})$$

находятся с помощью алгоритмов умножения и интегрирования многочленов относительно аргументов  $\cos \psi$  и  $\cos \tilde{\varphi}$  соответственно. Число  $\pi$  в знаменателе сокращается после подстановки пределов интегрирования.

Согласно теории канонических преобразований дифференциальные уравнения для элементов  $A_k$  и  $B_k$  будут иметь вид

$$\frac{dA_k}{dt} = \frac{\partial(-\alpha_1 + R)}{\partial B_k}, \quad \frac{dB_k}{dt} = -\frac{\partial(-\alpha_1 + R)}{\partial A_k}, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Канонические элементы действие–угол  $A_k$  и  $B_k$  свободны от того недостатка, который имеют первоначальные канонические элементы  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ . В промежуточном движении относительно каждой из угловых переменных  $B_k$  координаты спутника будут периодическими с периодом  $2\pi$ .

Введём новые элементы  $L, G, H, l, g, h$  по формулам

$$\begin{aligned} L &= A_1 + A_2 + A_3, & l &= B_1, \\ G &= A_2 + A_3, & g &= B_2 - B_1, \\ H &= A_3, & h &= B_3 - B_2. \end{aligned}$$

Поскольку, как легко проверить,

$$\sum_{i=1}^3 A_i dB_i - (Ldl + Gdg + Hdh) = 0,$$

то новые элементы являются каноническими, и дифференциальные уравнения, их определяющие, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial l}, & \frac{dG}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial g}, & \frac{dH}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial h}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial L}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial G}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial H}, \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

где  $K = -\alpha_1 + R$  – гамильтониан системы.

Для вычисления канонических переменных действия  $L, G, H$  имеем формулы:

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}} (1 + \lambda) + \nu G + \mu H + I_\xi - (1 + \nu)I_\eta, \\ G &= \frac{\alpha_2^2}{\sigma_1} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k_1) - \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}} \gamma'_0 - \beta_0 H - I_\eta, \\ H &= \alpha_3, \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

где  $\nu, \mu, \gamma'_0, \beta_0, \lambda, I_\xi, I_\eta$  – величины первого порядка малости относительно сжатия.

Если приравнять нулю параметры  $s$  и  $\sigma$  обобщённой задачи двух неподвижных центров, то, как нетрудно видеть,

$$L = \sqrt{fma}, \quad G = \sqrt{fma(1 - e^2)}, \quad H = \sqrt{fma(1 - e^2)} \cos i.$$

Частные производные от постоянных интегрирования  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  по переменным действия  $L$ ,  $G$ ,  $H$  принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L} &= \frac{n_0}{1-\lambda}, & \frac{\partial \alpha_2}{\partial L} &= -\frac{1}{\Delta} \frac{\gamma'_0}{n_0}, & \frac{\partial \alpha_3}{\partial L} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial G} &= \frac{n_0 \nu}{1-\lambda}, & \frac{\partial \alpha_2}{\partial G} &= +\frac{1}{\Delta} \frac{1+\gamma_0+\gamma'_0}{n_0}, & \frac{\partial \alpha_3}{\partial G} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial H} &= \frac{n_0 \mu}{1-\lambda}, & \frac{\partial \alpha_2}{\partial H} &= +\frac{1}{\Delta} \frac{(1+\gamma_0)\beta_0 - \gamma'_0 \alpha'_0}{n_0}, & \frac{\partial \alpha_3}{\partial H} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Первое полезное свойство совокупности частных производных (145) проявляется в алгоритме вычисления наборов величин  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$  и  $2\alpha_1$ ,  $\alpha_2^2$ ,  $\alpha_3$  на основе известных численных значений элементов  $L$ ,  $G$ ,  $H$ .

Для удобства обозначим  $L_1 = L$ ,  $L_2 = G$ ,  $L_3 = H$ .

В нулевом приближении полагаем:

$$(\alpha_1)_0 = -\frac{1}{2} \left( \frac{fm}{L_1} \right)^2, \quad (\alpha_2)_0 = L_2, \quad (\alpha_3)_0 = L_3.$$

Далее методом последовательных приближений на основе уравнений (86)-(91) находим числовые значения величин  $(a)_0$ ,  $(e)_0$ ,  $(\delta)_0$ , а затем, также в нулевом приближении, последовательно вычисляем другие параметры задачи: элементы  $(L)_0$ ,  $(G)_0$  и частные производные от величин  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  по этим элементам.

Уточнённые значения параметров находим по формуле линейных разностей:

$$\alpha_j = (\alpha_j)_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \alpha_j}{\partial L_i} [L_i - (L_i)_0], \quad j = 1, 2. \quad (146)$$

Процесс сходится очень быстро, за две – три итерации.

Второе полезное свойство соотношений (145) тоже достаточно очевидно. С их помощью выполняется дифференцирование позиционных параметров  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$  по каноническим элементам действия  $L$ ,  $G$ ,  $H$ . Алгоритм состоит из трёх шагов. Вначале надо продифференцировать каждую из формул (86), (87), (88) по явно входящим величинам  $a$ ,  $e^2$ ,  $\delta^2$  и вычислить матрицу:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial a} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial e^2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta^2} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial a} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial e^2} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta^2} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial a} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial e^2} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial \delta^2} \end{pmatrix}.$$

Численное обращение этой матрицы даст значения частных производных от параметров  $a$ ,  $e^2$ ,  $\delta^2$  по  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ . Численные значения производных по каноническим элементам получаем в результате суммирования произведений:

$$\frac{\partial(a, e^2, \delta^2)}{\partial L_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(a, e^2, \delta^2)}{\partial \alpha_k} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial L_j}.$$

Установим теперь зависимость между угловыми элементами.

При  $R = 0$ , то есть в случае промежуточного движения, из уравнений (143) и (145) находим:

$$\begin{aligned} l &= \frac{n_0}{1 - \lambda} (t - t_0) + l_0(t_0), \\ g &= \frac{n_0 \nu}{1 - \lambda} (t - t_0) + g_0(t_0), \\ h &= \frac{n_0 \mu}{1 - \lambda} (t - t_0) + h_0(t_0), \end{aligned} \tag{147}$$

где  $l_0(t_0)$ ,  $g_0(t_0)$ ,  $h_0(t_0)$  – постоянные интегрирования.

С другой стороны, в промежуточном движении время  $t$  входит в явном виде в формулу (141). Если положить

$$\begin{aligned}\tilde{M}_0 &= l_0(1 - \lambda), \\ g_0 &= \tilde{\omega}_0 + \nu l_0, \\ h_0 &= \tilde{\Omega}_0 + \mu l_0,\end{aligned}$$

то соотношения (141), (118), (132) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned}l &= E - e^* \sin E - \lambda(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2J} \left( \gamma_i^p \sin i\psi + \gamma_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right), \\ \tilde{\varphi} &= \psi + g + \nu(\psi - l) + \sum_{j=1}^J \left( \kappa_{2j} \sin 2j\psi + \bar{\kappa}_{2j} \sin 2j\tilde{\varphi} \right), \\ \tilde{\Omega} &= h + \mu(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2J} \left( \alpha_i^p \sin i\psi + \beta_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right).\end{aligned} \right\} (148)$$

Назовём *аномалистическим периодом* промежуток времени между двумя последовательными касаниями внешнего (внутреннего) эллипсоида. За аномалистический период угловая переменная  $\psi$  изменяется на величину  $2\pi$  радиан.

*Драконическим периодом* назовём промежуток времени между двумя последовательными пересечениями спутником плоскости  $z = c\sigma$ . Этому промежутку времени будет соответствовать изменение угловой переменной  $\tilde{\varphi}$  на величину  $2\pi$ .

Назовём *сидерическим периодом* промежуток времени, в течение которого долгота  $w$  возрастает на  $2\pi$  радиан.

Все три периода от оборота к обороту подвергаются малым колебаниям. Если пренебречь этими колебаниями, то получим некоторые средние значения этих периодов.

Средние значения периодов будут характеризовать движение спутника на больших интервалах времени.

В соответствие с этим введём среднее аномалистическое движение  $n_1$ , среднее драконическое движение  $n_2$  и среднее сидерическое движение  $n_3$  по формулам:

$$n_1 = \frac{n_0}{1 - \lambda}, \quad n_2 = \frac{n_0(1 + \nu)}{1 - \lambda}, \quad n_3 = \frac{n_0(1 + \nu + \mu)}{1 - \lambda}.$$

Величины  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  в известной степени определяют характер движения спутника.

Если  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  несоизмеримы, то траектория спутника будет всюду плотно заполнять область возможности движения. Картина изменяется, если отношения этих постоянных являются рациональными числами. В этом случае орбита спутника будет замкнутой кривой, а его движение – периодическим.

Изменение канонических элементов  $l$ ,  $g$ ,  $h$  определяется выражениями (147). Период изменения угловой переменной  $l$  совпадает со средним аномалистическим периодом. Периоды изменения  $g$  и  $h$ , по крайней мере, в 1000 раз больше. Иногда  $l$  называют “быстрой” переменной, а  $g$  и  $h$  – “медленными” переменными.

В промежуточной орбите, построенной на основе обобщённой задачи двух неподвижных центров, учтена самая существенная часть силовой функции, и возмущающая функция  $R$  в гамильтониане  $K$  пропорциональна второй степени сжатия.

Два этих обстоятельства позволяют при решении канонических дифференциальных уравнений движения (143) успешно применять методы теории возмущений.

## Послесловие

Слов, по-видимому, уже достаточно, сведём теперь вместе формулы, необходимые для вычисления промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров.

Пусть для момента времени  $t = t_0$ :

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

Требуется определить элементы  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$  и канонические переменные действие–угол  $L$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $h$ .

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{r}_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - c\sigma)^2, \\ V_0^2 &= \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2, \\ r'_0 &= x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + (z_0 - c\sigma)\dot{z}_0. \end{aligned}$$

Тогда из уравнений (44) для момента  $t = t_0$  имеем:

$$\begin{aligned} \xi_0^2 &= \frac{\bar{r}_0^2 - c^2}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4c^2(z_0 - c\sigma)^2}{(\bar{r}_0^2 - c^2)^2}} \right], \\ \eta_0 &= \frac{z_0 - c\sigma}{\xi_0}, \\ \cos w_0 &= \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \\ \sin w_0 &= \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \end{aligned}$$

где через  $\xi_0, \eta_0, w_0$  обозначены сфероидальные координаты для начального момента времени.

Из уравнений (45) получим

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_0 &= \frac{\xi_0 r'_0 - c^2 \eta_0 \dot{z}_0}{\xi_0^2 + c^2 \eta_0^2}, \\ \dot{\eta}_0 &= \frac{\dot{z}_0 - \dot{\xi}_0 \eta_0}{\xi_0}, \\ \dot{w}_0 &= \frac{x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0}{(\xi_0^2 + c^2)(1 - \eta_0^2)}.\end{aligned}$$

Интегралы (63), (69) и (65) дают численные значения произвольных постоянных интегрирования

$$\begin{aligned}2\alpha_1 &= V_0^2 - \frac{2fm(\xi_0 - c\sigma\eta_0)}{\xi_0^2 + c^2\eta_0^2}, \\ \alpha_2^2 &= \bar{r}_0^2 V_0^2 - r_0'^2 - c^2 \dot{z}_0^2 + \frac{2fm\xi_0\eta_0(c^2\eta_0 + c\sigma\xi_0)}{\xi_0^2 + c^2\eta_0^2}, \\ \alpha_3 &= x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0.\end{aligned}$$

Методом итераций на основе уравнений (86)-(91) находим числовые значения величин  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$ ,  $\delta^*$ .

Из соотношений (107), (116) и (119) последовательно определяем значения параметров  $\bar{\sigma}_2$ ,  $\bar{e}$ ,  $\bar{k}_2^2$ ,  $\sigma_1$ ,  $s$ ,  $k_1^2$ ,  $d$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$ ,  $\varkappa_{2j}$ ,  $\bar{\varkappa}_{2j}$ . Добавляем к ним численные значения  $n_0$ ,  $e^*$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\bar{\gamma}$ , а также  $\alpha'_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\mu$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma'_0$ ,  $\lambda$  и коэффициенты периодических членов  $\alpha_j^p$ ,  $\beta_j^f$ ,  $\gamma_j^p$ ,  $\gamma_j^f$ .

Алгоритм (144) даст нам возможность вычислить канонические переменные  $L$ ,  $G$ ,  $H$ .

Перейдём к определению угловых элементов

$$l_0(t_0), g_0(t_0), h_0(t_0).$$

Найдём сначала значения переменных  $E$ ,  $\psi$ , и  $\tilde{\varphi}$  для  $t = t_0$ .

Поскольку в промежуточном движении

$$\xi = a(1 - e \cos E), \quad \dot{\xi} = +a e \sin E \cdot \dot{E},$$

где  $\dot{E} > 0$ , то

$$\begin{aligned} \cos E &= \frac{a - \xi_0}{a e}, & \sin E &= \text{sign}(\dot{\xi}) \sqrt{1 - \cos^2 E}, \\ \cos \psi &= \frac{\cos E - \bar{e}}{1 - \bar{e} \cos E}, & \sin \psi &= \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin E}{1 - \bar{e} \cos E}. \end{aligned}$$

Для переменной  $\tilde{\varphi}$  имеем:

$$\cos \tilde{\varphi} = \frac{\eta_0 - \gamma}{-s + \eta_0 d}, \quad \sin \tilde{\varphi} = \text{sign}(\dot{\eta}) \sqrt{1 - \cos^2 \tilde{\varphi}}.$$

Первое из уравнений (148) даёт значение  $l_0(t_0)$ :

$$l_0 = \frac{1}{1 - \lambda} \left[ E - e^* \sin E - \lambda \psi + \sum_{i=1}^{2J} \left( \gamma_i^p \sin i\psi + \gamma_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right) \right].$$

Из второго уравнения находим начальное значение  $g_0(t_0)$ :

$$g_0 = \tilde{\varphi} - \psi - \nu(\psi - l_0) - \sum_{j=1}^J (\varkappa_{2j} \sin 2j\psi + \bar{\varkappa}_{2j} \sin 2j\tilde{\varphi}).$$

Объединение третьего из уравнений (148) с выражениями (133) и (134) приводит к значению угловой переменной  $h_0(t_0)$ :

$$\begin{aligned} h_0 &= w_0 - \text{arctg} \left( \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right) \\ &\quad - \mu(\psi - l_0) - \sum_{i=1}^{2J} \left( \alpha_i^p \sin i\psi + \beta_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right). \end{aligned}$$

Решим теперь обратную задачу.

Пусть в произвольный момент времени  $t$  известны численные значения переменных действие–угол  $L, G, H, l, g, h$ . Требуется вычислить прямоугольные компоненты положения  $x, y, z$  и скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ .

Методом последовательных приближений, который представлен формулой (146) на с. 72, вычисляем величины

$$2\alpha_1, \alpha_2^2, \alpha_3, a, e, \delta.$$

Далее выполняем часть действий из предыдущего задания, то есть последовательно определяем значения параметров промежуточной орбиты.

После того, как все коэффициенты вычислены, методом последовательных приближений найдём значения угловых переменных  $E, \psi, \tilde{\varphi}$  из уравнений

$$l = E - e^* \sin E - \lambda(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2J} \left( \gamma_i^p \sin i\psi + \gamma_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right),$$

$$\tilde{\varphi} = \psi + g + \nu(\psi - l) + \sum_{j=1}^J (\kappa_{2j} \sin 2j\psi + \bar{\kappa}_{2j} \sin 2j\tilde{\varphi}),$$

используя при этом соотношения

$$\cos \psi = \frac{\cos E - \bar{e}}{1 - \bar{e} \cos E}, \quad \sin \psi = \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin E}{1 - \bar{e} \cos E}.$$

Переменную  $\tilde{\Omega}$  вычисляем по формуле:

$$\tilde{\Omega} = h + \mu(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2J} \left( \alpha_i^p \sin i\psi + \beta_i^f \sin i\tilde{\varphi} \right).$$

Сфероидальные координаты равны:

$$\xi = a(1 - e \cos E),$$

$$\eta = \frac{-s \cos \tilde{\varphi} + \gamma}{1 - d \cos \tilde{\varphi}},$$

$$w = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right) + \tilde{\Omega}.$$

Производные по времени от сфероидальных координат равны:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{ae\bar{\sigma}_2(1 - \bar{e}^2) \sin \psi \sqrt{1 - \bar{k}_2^2 \cos^2 \psi}}{(\xi^2 + c^2\eta^2)(1 + \bar{e} \cos \psi)^2}, \\ \dot{\eta} &= \frac{(s - \gamma d)\sigma_1 \sin \tilde{\varphi} \sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}}{(\xi^2 + c^2\eta^2)(1 - d \cos \tilde{\varphi})^2}, \\ \dot{w} &= \frac{\alpha_3}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}.\end{aligned}$$

Искомые прямоугольные координаты и производные по времени от прямоугольных координат определены формулами связи со сфероидальными координатами (42) и скоростями (43):

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cos w, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \sin w, \\ z &= c\sigma + \xi\eta, \\ \dot{x} &= \frac{x\xi\dot{\xi}}{\xi^2 + c^2} - \frac{x\eta\dot{\eta}}{1 - \eta^2} - y\dot{w}, \\ \dot{y} &= \frac{y\xi\dot{\xi}}{\xi^2 + c^2} - \frac{y\eta\dot{\eta}}{1 - \eta^2} + x\dot{w}, \\ \dot{z} &= \dot{\xi}\eta + \xi\dot{\eta}.\end{aligned}$$

Теория движения искусственных спутников Земли как раздел науки, объединяющий достижения вычислительной математики, небесной механики, геофизики, астрометрии и геодезии, берёт начало 4 октября 1957 года, дня запуска в СССР Первого спутника.

Студенты 21-ого века имеют уникальную возможность получать знания и умения от учёных, наблюдателей и теоретиков, стоявших у истоков космической эры.

## Список литературы

- [1] Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н.Дубошина. М., Наука, 1976.
- [2] Аксёнов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М., Наука, 1977.
- [3] Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г. Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. /Искусственные спутники Земли, 1961, вып.8, с.64-76.
- [4] Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г. Применение обобщённой задачи двух неподвижных центров в теории движения искусственных спутников Земли. /Проблемы движения искусственных спутников Земли. Изд-во АН СССР, 1963, с.92-96.
- [5] Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г. Обобщённая задача двух неподвижных центров и её применение в теории движения искусственных спутников Земли. //Астрономический журнал, 1963, т.40, вып.2, с.363-372.
- [6] Антонов В.А. Представление гравитационного поля планеты системой точечных масс. //Труды астрономической обсерватории Ленинградского государственного университета, 1978, т.34, с.145-155.

- [7] Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. Перевод с английского В.К.Абалакина. М., Мир, 1964.
- [8] Брумберг В.А. Аналитические алгоритмы небесной механики. М., Наука, 1980.
- [9] Герасимов И.А. Функции Вейерштрасса и их приложения к механике и астрономии. Москва. Изд-во Московского государственного университета, 1990.
- [10] Дёмин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М., Наука, 1968.
- [11] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Наука, 1975.
- [12] Емельянов Н.В. Методы составления алгоритмов и программ в задачах небесной механики. М., Наука, 1983.
- [13] Емельянов Н.В. Возмущения 3-го и 4-го порядков относительно сжатия планеты в орбите спутника. //Астрономический журнал, 1979, т.56, номер 5, с.1070-1076.
- [14] Жагар Ю.Х. Применение промежуточных орбит для прогнозирования движения ИСЗ. /Veröffentlichungen des Zentralinstitut für Physik der Erde, 1977, Nummer 52, Teil 3, S.990-1005.
- [15] Кислик М.Д. Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. /Искусственные спутники Земли, 1960, вып.4, с.3-17.

- [16] Кислик М.Д. Анализ интегралов уравнений движения искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. /Искусственные спутники Земли, 1963, вып.13, с.23-52.
- [17] Нестеров В.В. Стандарт основных вычислений астрономии. Основные алгоритмы спутниковой геодинамики. *Лекции для студентов старших курсов*. РФФИ. Москва. Изд-во Янус-К, 2001.
- [18] Проскурин В.Ф., Батраков Ю.В. Возмущения в движении искусственных спутников, вызываемые сжатием Земли. //Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР, 1960, т.7, номер 7, с.537-548.
- [19] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Том 1. Перевод с французского под ред. В.И.Арнольда. М., Наука, 1971.
- [20] Савров Л.А. Разложение аномалий силы тяжести в ряды по эллипсоидальным функциям Ламе. //Труды Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, 1972, т.43, номер 2, с.18-29
- [21] Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.-Л., ОНТИ, 1936.
- [22] Сорокин Н.А. Уравнения Энке в обобщённой задаче двух неподвижных центров. //Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. М., 1994, номер 4, с.88-95.

- [23] Сорокин Н.А., Абрикосов О.А., Марченко А.Н. Об использовании точечных масс при вычислении орбит ИСЗ. //Наблюдения искусственных спутников Земли, 1982, т.21, номер 1, с.116-128.
- [24] Стандартная Земля. Под ред. К.Лундквиста и Г.Вейса. Перевод с английского П.П.Медведева. М., Мир, 1969.
- [25] Холшевников К.В. Асимптотические методы небесной механики. Ленинград. Изд-во Ленинградского государственного университета, 1985.
- [26] Холшевников К.В., Питъев Н.В., Титов В.Б. Притяжение небесных тел. СПб.: Изд-во СПб ун-та, 2005, 104с.
- [27] Шарлье К. Небесная механика. М., Наука, 1966.
- [28] Эльясберг П.Е. Введение в теорию полёта искусственных спутников Земли. М., Наука, 1965.
- [29] Яров-Яровой М.С. Работы в области небесной механики в МГУ за 50 лет (1917 – 1967 гг.). /История и методология естественных наук. Москва. Изд-во Московского государственного университета, 1968, вып.7, Астрономия и радиофизика.
- [30] Aksnes K. A second order artificial satellite theory based on intermediate orbit. //Astronomical Journal, 1970, v.75, number 9, pp.1066-1076.

- [31] Balmino G. Contribution á l'amélioration du potentiel terrestre. /CNES Groupe de Recherches de Géodesie Spatiale Bull., 1974, number 12, p.1.
- [32] Barrar R.B. Some remarks on the motion of a satellite of an oblate planet. //Astronomical Journal, 1961, v.66, number 1, pp.11-15
- [33] Brouwer D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. //Astronomical Journal, 1959, v.64, number 9, pp.378-397.
- [34] Doubochine G.N. Sur le Développement du Potentiel de la Terre par les Fonctions de Lamé. /Trajectories des Corps Célestes Artificiels. Berlin – New York, 1966, p.68-71.
- [35] Garfinkel B. The orbit of a satellite of an oblate planet. //Astronomical Journal, 1959, v.64, number 9, pp.353-367.
- [36] Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits. //Celestial Mechanics, 1974, v.19, number 1, pp.35-55.
- [37] Kozai Y. The motion of a close Earth satellite. //Astronomical Journal, 1959, v.64, number 9, pp.367-377.
- [38] Sterne T.E. The gravitational orbit of a satellite of an oblate planet. //Astronomical Journal, 1958, v.63, pp.28-40.
- [39] Vinti J.P. Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy. //Journ. Res. Nat. Bur. Standards, 1961, v.B65, number 3, p.169-201.

## Именной указатель

- Абалакин В. К., 81  
Акснес К. (Aksnes K.), 35  
Антонов В. А., 15  
Аксёнов Е. П., 4, 5, 24, 81  
Балмино Г. (Balmino G.), 15  
Баррар Р. (Barrar R. V.), 25  
Батраков Ю. В., 83  
Брауэр Д. (Brouwer D.), 24, 82, 85  
Брумберг В. А., 54  
Вашковьяк С. Н., 5  
Винти Дж. (Vinti J. P.), 24  
Гарфинкель Б. (Garfinkel B.), 35  
Герасимов И. А., 55  
Гребеников Е. А., 5, 24  
Дёмин В. Г., 5, 24  
Дубошин Г. Н., 15, 82, 85  
Емельянов Н. В., 5, 54, 56  
Жагар Ю. Х., 55  
Кислик М.Д., 24, 25, 55, 83  
Клеменс Дж. (Clemence G.), 82  
Козаи И. (Kozai Y.), 85  
Насонова Л. П., 5  
Нестеров В. В., 83  
Носков Б. Н., 5  
Проскурин В. Ф., 83  
Прохорова И. П., 5  
Пуанкаре А. (Poincare H.), 65  
Рябов Ю. А., 81  
Савров Л. А., 15  
Сорокин Н.А., 5, 84, 85  
Уральская В. М., 5  
Холшевников К. В., 84  
Чепурова В. М., 5  
Шарлье К. (Charlier C. L.), 67  
Штерн Т.Е. (Sterne T. E.), 35  
Эверхарт Е. (Everhart E.), 85  
Эльясберг П. Е., 84  
Яров-Яровой М. С., 25, 84

## Предметный указатель

- Амплитуда эллиптической функции, 47
- Возмущающая функция, 23, 66, 75
- Гравитационное поле Земли, 23
- Зональные гармоники, 16
- Канонические уравнения движения, 66, 70, 71
- Метод Гамильтона-Якоби, 27, 30
- Модуль эллиптического интеграла, 46, 48
- Общий интеграл, 31
- Обобщённые импульсы, 29
- Переменные действие-угол, 67, 70, 71, 75
- Период аномалистический, 74  
– драконический, 74  
– сидерический, 74
- Полиномы Лежандра, 7, 9, 16
- Полный интеграл, 30
- Присоединённые функции Лежандра, 7, 10
- Промежуточная орбита, 27, 29, 32, 36, 40, 65, 66, 70, 75, 76
- Промежуточное гравитационное поле Земли, 21, 24
- Секториальные гармоники, 17
- Сфероидальные координаты, 27, 33, 76, 79
- Теорема Виета, 45, 48, 50  
– сложения для полиномов Лежандра, 11, 12
- Тессеральные гармоники, 16
- Уравнения промежуточного движения, 26, 29
- Формула Родрига, 8
- Эллиптический интеграл, 46, 56, 59, 63, 64, 68
- Эллиптические функции, 45, 48, 50

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М. В. ЛОМОНОСОВА

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

им. П. К. ШТЕРНБЕРГА

**Профессор АКСЁНОВ Евгений Петрович**

**ГЛАВНАЯ ПРОБЛЕМА  
ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ**

Составление и набор текста — Вадим Чазов

Типография “Элис групп”

<http://alicegroup.ru>