Н.В.Емельянов

ПРАКТИЧЕСКАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Оглавление.

Глава 2. **Простейшие механические модели в небесной механике.**

2.12. Формулы кеплеровского движения относительно несингулярных элементов (элементов Лагранжа).

Кеплеровское движение является простейшим законом движения небесных тел. Выражения для координат и компонент скорости, как функций времени, следуют из общего решения уравнений движения задачи двух тел. Общее решение зависит также от шести независимых произвольных постоянных. Выбор независимых произвольных постоянных не является однозначным. В предыдущих разделах в качестве произвольных постоянных рассматривались кеплеровские элементы орбиты, которые имеют наглядный геометрический смысл. Однако в ряде практических задач выбор кеплеровских элементов в качестве параметров орбиты приводит к потере точности при вычислениях с ограниченным числом значащих цифр в значениях переменных. При применениях теории возмущений возникают проблемы, связанные с неравноценным вкладом различных членов в выражениях для возмущений кеплеровских элементов. В конечном счете это также приводит к потере точности теории. Такие проблемы возникают в случаях, когда эллиптическая орбита очень близка к круговой. Круговая орбита является вырождением эллиптической при стремлении эксцентриситета к нулю. Аналогичная ситуация возникает в случаях очень малых наклонов орбиты. В этих случаях угловое расстояние от восходящего узла орбиты и долгота узла определяются из наблюдений с пониженной точностью при неизменной точности самих наблюдений.

Преодолеть указанные трудности при малых эксцентриситетах и наклонах кеплеровской орбиты позволяют элементы Лагранжа, выбранные в качестве независимых произвольных постоянных в общем решении уравнений задачи двух тел. Рассмотрим ниже формулы, которые позволяют непосредственно из элементов Лагранжа вычислять прямоугольные координаты тела.

Элементы орбиты связывают с произвольной невращающейся системой прямоугольных координат x, y, z , начало которой либо размещают в центре масс двух тел, либо совмещают с одним из тел.

Для введения элементов Лагранжа воспользуемся принятыми в литературе обозначениями для кеплеровских элементов орбиты:

n — среднее движение, размерность радиан/ед.времени;
e — эксцентриситет, безразмерный;
i — наклон (двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью Oxy), рад.;
M_0 — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии M в начальный момент временении — эпоху), рад.;
ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;
Ω — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости Oxy между осью x и линией узлов), рад.;
t_0 — начальный момент времени — эпоха элементов;
t — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

В некоторых случаях вместо среднего движения n в качестве исходного параметра орбиты рассматривают большую полуось орбиты a, связанную с n соотношением

$$a^3 n^2 = \mu, \tag{1}$$

где μ - гравитационный параметр двух тел.

Средняя аномалия M в любом случае вычисляется по формуле

$$M = n(t - t_0) + M_0. \tag{2}$$

Будем полагать, что для вычисления прямоугольных координат на заданный момент времени известны пять элементов кеплеровской орбиты a, e, i, ω, Ω и средняя аномалия M. Элементами Лагранжа считаются величины $a, \overline{\lambda}, k, h, q, p$, пять из которых определяются соотношениями

$$\begin{gathered} \overline{\lambda} = M + \omega + \Omega, \\ k = e\cos(\omega + \Omega), \quad h = e\sin(\omega + \Omega), \\ q = \sin\tfrac{i}{2}\cos\Omega, \quad q = \sin\tfrac{i}{2}\sin\Omega. \end{gathered} \tag{3}$$

Заметим, что $\overline{\lambda}$ называется средней долготой и является линейной функцией времени.

Если заданы элементы Лагранжа $a, \overline{\lambda}, k, h, q, p$, то прямоугольные координаты x, y, z и компоненты скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ можно вычислить по следующей последовательности формул. Сначала вычисляем

$$\begin{gathered} S = \sin\overline{\lambda}, \quad C = \cos\overline{\lambda}, \\ k' = k\,C + h\,S, \quad h' = k\,S - h\,C. \end{gathered} \tag{4}$$

Далее итерациями решаем уравнения

$$C_\nu = \cos\nu, \quad S_\nu = \sin\nu, \quad \nu = h'C_\nu + k'S_\nu, \tag{5}$$

полагая в нулевом приближении $\nu = h'$.

Вычисляем вспомогательные величины

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \sqrt{1 - k^2 - h^2}}, \tag{6}$$

$$S' = \frac{S_\nu - \nu' k' + h'}{1 - k'C_\nu + h'S_\nu}, \quad C' = \frac{C_\nu - \nu' h' - k'}{1 - k'C_\nu + h'S_\nu}, \tag{7}$$

$$S_\lambda = SC' + CS' \quad C_\lambda = CC' - SS'. \tag{8}$$

Теперь центральное расстояние r и прямоугольные координаты тела x, y, z найдутся по формулам

$$r = \frac{a\,(1 - k^2 - h^2)}{1 + k\,C_\lambda + h\,S_\lambda}, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} x = r\,C_\lambda(1 - 2p^2) + 2\,r\,S_\lambda p\,q, \\ y = r\,S_\lambda(1 - 2q^2) + 2\,r\,C_\lambda p\,q, \\ z = 2\,r\,\sqrt{1 - p^2 - q^2}(q\,S_\lambda - p\,C_\lambda). \end{gathered} \tag{10}$$

Для вычисления компонент скорости необходимо найти вспомогательные величины

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - k^2 - h^2)}}(k\,S_\lambda - h\,C_\lambda), \tag{11}$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - k^2 - h^2)}}(1 + k\,C_\lambda + h\,S_\lambda), \tag{12}$$

$$\begin{gathered} R_x = 2\,C_\lambda p\,q - S_\lambda(1 - 2\,p^2), \\ R_y = C_\lambda(1 - 2\,q^2) - 2\,S_\lambda p\,q, \\ R_z = 2\,\sqrt{1 - p^2 - q^2}(q\,C_\lambda + p\,S_\lambda). \end{gathered} \tag{13}$$

После этого компоненты скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ вычисляются с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \tfrac{x}{r} V_r + R_x V_n, \\
\dot{y} &= \tfrac{y}{r} V_r + R_y V_n, \\
\dot{z} &= \tfrac{z}{r} V_r + R_z V_n.
\end{aligned} \tag{14}$$

Комментарий.

Укажем здесь два примера, когда элементы Лагранжа нашли удачное применение.

Первый пример – это теория вековых возмущений планет, построенная Лагранжем. В возмущающей функции были оставлены только вековые члены (независящие от долгот планет). Учитывая малость эксцентриситетов и взаимных наклонов орбит больших планет Солнечной системы, вековая часть возмущающей функции была разложена в степенной ряд относительно эксцентриситетов и взаимных наклонов, и в разложении оставлены члены до второй степени включительно. При этом большие полуоси орбит планет считались неизменными. Относительно элементов Лагранжа удалось записать линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Решение этих уравнений получено Лагранжем в виде суммы тригонометрических функций относительно линейных по времени аргументов. Это позволило описать эволюцию орбит планет на больших промежутках времени и обнаружить интересные свойства взаимных возмущений планет. Хорошее описание метода Лагранжа можно найти в могографии М. Ф. Субботина (1968).

Второй пример является фактически применением метода Лагранжа для построения аналитической теории движения главных спутников Урана. Эта теория, созданная Ляскаром и Якобсоном (1987), до недавнего времени была единственным средством получения самых точных эфемерид главных спутников Урана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. Наука, М., 1968. 800 стр.

Laskar J., Jacobson R. A. (1987) GUST86 - An analytical ephemeris of the Uranian satellites. Astronomy and Astrophysics. V. 188. N. 1. P. 212-224.