Н.В.Емельянов

ПРАКТИЧЕСКАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Оглавление.

Глава 2. **Простейшие механические модели в небесной механике.**

2.33. Задача двух неподвижных центров.

2.33. Задача двух неподвижных центров.

Общие сведения.

Задача двух неподвижных центров состоит в изучении движения пассивно гравитирующей материальной точки, притягиваемой двумя неподвижными точечными массами по закону Ньютона.

Неподвижные точечные массы называются притягивающими центрами.

В прямоугольной барицентрической системе координат $Oxyz$ с началом в центре масс O неподвижных точек с массами m_1 и m_2 и с осью абсцисс, проходящей через эти точки, дифференциальные уравнения движения пассивно гравитирующей материальной точки (пренебрежимо малой или нулевой массы) и силовая функция U задачи имеют вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dU}{dz},$$

$$U \;=\; G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right).$$

Здесь x, y, z — координаты пассивно гравитирующей материальной точки,

G — гравитационная постоянная,

m_1 и m_2 — массы неподвижных притягивающих точек,

r_1 и r_2 — расстояния от движущейся точки до притягивающих центров:

$$r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + z^2},$$

$$x_1 = -\frac{2\,c\,m_2}{m_1+m_2}, \qquad x_2 = \frac{2\,c\,m_1}{m_1+m_2},$$

где c — постоянная, равная половине расстояния между притягивающими центрами.

Задача двух неподвижных центров относится к интегрируемым задачам небесной механики. Решение этой задачи можно получить в квадратурах методом Гамильтона-Якоби.

Решение задачи двух неподвижных центров может применяться при изучении движения малого тела солнечной системы в окрестности планеты. Орбиту пассивно гравитирующей материальной точки, определяемую решением задачи двух неподвижных центров, можно рассматривать как промежуточную или невозмущенную орбиту в ограниченной задаче трех тел, используя метод вариации произвольных постоянных.

Решение задачи двух неподвижных центров.

Интегрирование уравнений движения пассивно гравитирующей материальной точки с нулевой массой удобнее выполнять в эллипсоидальных координатах λ, μ, w, связанных с введенными ранее прямоугольными координатами x, y, z с помощью следующих соотношений:

$$x = c\,\lambda\,\mu + \frac{c\,(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}, \qquad +1 \le \lambda < +\infty$$

$$-1 \le \mu \le +1$$

$$y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\,\cos w, \qquad 0 \le w \le 2\pi$$

$$z = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\,\sin w,$$

Силовая функция и расстояния до притягивающих центров в новых переменных будут иметь вид:

$$U = \frac{G}{c} \cdot \frac{(m_1 + m_2)\lambda - (m_1 - m_2)\mu}{\lambda^2 - \mu^2},$$

$$r_1 = c\,(\lambda + \mu),$$

$$r_2 = c\,(\lambda - \mu),$$

где G — гравитационная постоянная, c — постоянная, равная половине расстояния между притягивающими центрами.

Используя выражение для кинетической энергии T:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{c^2(\lambda^2 - \mu^2)}{4}\left[\frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2 - 1} + \frac{\dot{\mu}^2}{1 - \mu^2}\right] +$$

$$+\frac{c^2(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)\dot{w}^2}{2},$$

в котором использованы общепринятые обозначения для производных от координат по времени, введем обобщенные импульсы λ', μ', w' обычными формулами:

$$\lambda' = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}\, \dot{\lambda},$$

$$\mu' = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mu}} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}\, \dot{\mu},$$

$$w' = \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} = c^2\,(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)\dot{w}.$$

Уравнения движения точки с нулевой массой в канонических переменных

$$\lambda,\ \mu,\ w,\ \lambda',\ \mu',\ w'$$

определяются системой Гамильтона:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda'}, \qquad \frac{d\lambda'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda},$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mu'}, \qquad \frac{d\mu'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mu},$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial H}{\partial w'}, \qquad \frac{dw'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial w}$$

с характеристической функцией

$$H = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda'}^2 + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2}{\mu'}^2 +$$

$$+ \frac{{w'}^2}{2c^2(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} - \frac{G}{c} \cdot \frac{(m_1 + m_2)\lambda - (m_1 - m_2)\mu}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Эта система интегрируется методом Гамильтона-Якоби и имеет первые интегралы

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\sqrt{\Phi(\lambda)}}{J}, \qquad \frac{d\mu}{dt} = \frac{\sqrt{F(\mu)}}{J}, \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{\alpha_3}{c^2(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)},$$

где

$$J = \frac{r_1 r_2}{2} = \frac{1}{2}c^2(\lambda^2 - \mu^2),$$

$$\Phi(\lambda) = hc^2\lambda^4 + Gc(m_1 + m_2)\lambda^3 + (\alpha_2 - hc^2)\lambda^2 - Gc(m_1 + m_2)\lambda - \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \alpha_2,$$

$$F(\mu) = hc^2\mu^4 + Gc(m_1 - m_2)\mu^3 + (\alpha_2 + hc^2)\mu^2 - Gc(m_1 - m_2)\mu - \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \alpha_2,$$

где через h, α_2, α_3 обозначены постоянные интегрирования.

Вводя новую независимую переменную τ, связанную со временем t дифференциальным соотношением

$$dt \;=\; J\,d\tau,$$

решение задачи двух неподвижных центров можно записать в виде следующих квадратур:

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{\Phi(\lambda)}} = \tau + C_1, \qquad \int \frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}} = \tau + C_2,$$

$$\frac{\alpha_3}{2}\int \frac{\lambda^2 - \mu^2}{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}d\tau = w + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования.

После обращения эллиптических интегралов находят функции $\lambda(\tau)$, $\mu(\tau)$, $w(\tau)$, как эллиптические функции вспомогательной переменной τ, а после решения дифференциального уравнения для t:

$$\frac{dt}{d\tau} = J(\lambda, \mu)$$

получаем связь τ со временем t. Общее решение задачи двух неподвижных центров зависит от шести произвольных постоянных. Более подробно исследовано движение в плоскости, содержащей неподвижные центры. Получены явные выражения для эллипсоидальных координат точки в зависимости от τ, из которых следует, что λ и μ всегда являются периодическими функциями τ. В зависимости от соизмеримости периодов этих функций, движение будет либо периодическим по τ по замкнутой орбите, либо условно-периодическим по траектории, заполняющей всюду плотно некоторую область пространства λ, μ.

В общем случае пространственных движений явные выражения для эллипсоидальных координат точки в зависимости от τ не получены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. Учебное пособие для студентов университетов. Издание 2-е, переработанное. 1978. Наука. Москва. С. 456.