Н.В.Емельянов

ПРАКТИЧЕСКАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Оглавление.

Глава 2. **Простейшие механические модели в небесной механике.**

2.34. Обобщенная задача двух неподвижных центров.

Общие сведения.

Обобщенная задача двух неподвижных центров заключается в изучении движения материальной точки в гравитационном поле, силовая функция которого дается формулой

$$W = \frac{G\,m}{2}\left[\frac{1+\sqrt{-1}\,\sigma}{r_1} + \frac{1-\sqrt{-1}\,\sigma}{r_2}\right],$$

где

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + \left[z - c\,(\sigma + \sqrt{-1})\right]^2,$$

$$r_2^2 = x^2 + y^2 + \left[z - c\,(\sigma - \sqrt{-1})\right]^2,$$

G — гравитационная постоянная; m, c, σ — некоторые вещественные постоянные, а x, y, z —- прямоугольные координаты точки.

Силовая функция задачи представляет собой сумму двух комплексно-сопряженных величин, поэтому является величиной действительной.

Из выражения для силовой функции видно, что ее можно интерпретировать как силовую функцию задачи двух неподвижных центров с комплексными массами

$$\frac{m}{2}(1+\sqrt{-1}\,\sigma), \quad \frac{m}{2}(1-\sqrt{-1}\,\sigma)$$

и с мнимым расстоянием между ними, равным $2c\sqrt{-1}$.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в обобщенной задаче двух неподвижных центров могут быть проинтегрированы (например, методом Гамильтона-Якоби). Но решение в конечном виде может быть выражено только с помощью квадратур.

Важное значение обобщенной задачи двух неподвижных центров в небесной механике обусловлено тем, что силовая функция этой задачи описывает притяжение сжатой планеты значительно точнее, чем силовая функция задачи двух тел.

2.31.7.1. Решение обобщенной задачи двух неподвижных центров.

Дифференциальные уравнения движения в обобщенной задаче двух неподвижных центров в прямоугольных координатах имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dW}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dW}{dy}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dW}{dz},$$

где x, y, z — прямоугольные координаты, t — время, W — силовая функция.

Эти уравнения могут быть проинтегрированы методом Гамильтона-Якоби, если ввести сфероидальные координаты ξ, η, ζ, связанные с x , y, z соотношениями

$$x = \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}\ \cos w,$$

$$y = \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}\ \sin w,$$

$$z = c\sigma + \xi\eta.$$

Существуют три первых интеграла задачи

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{J}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\sqrt{F(\eta)}}{J}, \quad (1 - \eta^2)(\xi^2 + c^2)\frac{dw}{dt} = \alpha_3,$$

$$\Phi(\xi) = (\xi^2 + c^2)(2\alpha_1\xi^2 + 2Gm\xi - \alpha_2^2) + c^2\alpha_3^2,$$

$$F(\eta) = (1 - \eta^2)(2\alpha_1 c^2\eta^2 - 2\, G\, m\, c\, \sigma\, \eta + \alpha_2^2) - \alpha_3^2,$$

$$J = \xi^2 + c^2\eta^2,$$

а α_1, α_2, α_3 — произвольные постоянные.

Вводя новую независимую переменную τ посредством уравнения

$$dt = J d\tau,$$

решение обобщенной задачи двух неподвижных центров можно записать в виде следующих квадратур:

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} = \tau + c_1, \qquad \int \frac{d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} = \tau + c_2,$$

$$w = \alpha_3 \int \frac{\xi^2 + c^2\eta^2}{(1 - \eta^2)(\xi^2 + c^2)} d\tau + c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные интегрирования. После обращения квадратур находятся функции $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, $w(\tau)$, а после решения уравнения

$$\frac{dt}{d\tau} = J(\xi, \eta),$$

которое легко выражается в виде квадратуры, получается связь τ со временем t.

Обращение выписанных здесь квадратур — это непростая задача. Оно выполнено в работах Е.П.Аксенова, Е.А.Гребеникова, В.Г.Демина. В итоге точное решение обобщенной задачи двух неподвижных центров выражается с помощью эллиптических функций в конечном виде через τ, а с помощью разложений по степеням параметров c и σ также и через время t.

2.31.7.2. Приложение решения обобщенной задачи двух неподвижных центров.

Силовая функция обобщенной задачи двух неподвижных центров обладает тем замечательным свойством, что при соответствующем выборе значений постоянных m, c, σ она хорошо описывает притяжение сжатого тела конечных размеров. Этот факт успешно используется при построении аналитической теории движения спутника сжатой планеты, в частности, в теории движения ИСЗ.

Для количественного описания указанных свойств решения обратимся к разложениям силовых функций в ряды по сферическим функциям. Поскольку главным проявлением несферичности любой планеты оказывается сжатие вдоль оси вращения, ограничимся рассмотрением осесимметричных тел.

Итак, разложение силовой функции притяжения осесимметричного тела в ряд по сферическим функциям имеет вид

$$U = \frac{Gm}{r} \sum_{k=0}^{\infty} I_k \left(\frac{r_0}{r}\right)^k P_k\left(\frac{z}{r}\right),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где G — гравитационная постоянная, m — масса тела; x, y, z — его прямоугольные координаты, $P_k(...)$ — полиномы Лежандра. Система координат здесь выбрана специальным образом: начало в центре массы тела, ось z по оси симметрии. В этом случае параметры r_0, I_k $(k =$

$0, 1, 2, ...)$ являются постоянными, которые полностью описывают притяжение осесимметричного тела. Кроме того, $I_0 = 1$, $I_1 = 0$. На практике значение r_0 принимают равным среднему экваториальному радиусу планеты.

Силовую функцию обобщенной задачи двух неподвижных центров также можно разложить в ряд по сферическим функциям

$$W = \frac{Gm}{r} \sum_{k=0}^{\infty} I'_k \left(\frac{r_0}{r}\right)^k P_k\left(\frac{z}{r}\right),$$

где постоянные $I_0 = 1$, $I_1 = 0$, а r_0, I'_k $(k = 2, 3, ...)$ связаны с c и σ соотношениями

$$I'_2 = -\left(\frac{c}{r_0}\right)^2 (1 + \sigma^2),$$

$$I'_3 = -2\left(\frac{c}{r_0}\right)^3 \sigma(1 + \sigma^2),$$

$$\cdots$$

$$I'_k = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{r_0}\right)^k \left[(1 + \sqrt{-1}\,\sigma)(\sigma + \sqrt{-1})^k + (1 - \sqrt{-1}\,\sigma)(\sigma - \sqrt{-1})^k\right],$$

$$(k = 2, 3, ...).$$

Из формы разложений видно, что значения c и σ можно выбрать так, чтобы выполнились равенства

$$I_2 = I'_2, \qquad I_3 = I'_3.$$

При этом должно быть $I_2 < 0$. Тогда члены разложения силовой функции обобщенной задачи двух неподвижных центров W и силовой функции реального тела U при $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ совпадут.

Для известных нам планет, в том числе для Земли, главным проявлением несферичности является сжатие у полюсов. При этом всегда $I_2 < 0$, а значение I_3 по модулю во много раз меньше I_2.

Для Земли из наблюдений ИСЗ при $r_0 = 6378.14$ км получены значения:

$$I_2 = -0.00108262683, \qquad I_3 = 0.000002535635.$$

Для Земли и других планет члены разложения силовой функции притяжения при $k > 2$ дают существенно меньший вклад, чем первые члены. А члены разложения силовой функции обобщенной задачи двух неподвижных центров при $k > 2$ быстро убывают. Поэтому решение обобщенной задачи двух неподвижных центров хорошо описывает движение спутников планет. На основе этого решения ряд авторов успешно построили достаточно точные аналитические теории движения искусственных спутников Земли.

2.31.7.3. Силовая функция обобщенной задачи двух неподвижных центров.

Силовая функция обобщенной задачи двух неподвижных центров обычно публикуется в литературе в следующей форме:

$$W = \frac{G \cdot m}{2}\left[\frac{1+\sqrt{-1}\,\sigma}{r_1} + \frac{1-\sqrt{-1}\,\sigma}{r_2}\right],$$

где

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + \left[z - c\,(\sigma + \sqrt{-1})\right]^2,$$

$$r_2^2 = x^2 + y^2 + \left[z - c\,(\sigma - \sqrt{-1})\right]^2,$$

G — гравитационная постоянная; m, c, σ — некоторые вещественные постоянные, а x, y, z — прямоугольные координаты точки.

Такая форма непригодна при решении тех задач, в которых необходимо вычислять компоненты силы, действующей на исследуемое тело. Такое случается, например, при численном интегрировании уравнений движения. Поэтому приводим здесь выражения для производных от силовой функции по координатам:

$$\frac{dW}{dx} = -GmD\frac{x}{r_3}, \quad \frac{dW}{dy} = -GmD\frac{y}{r_3},$$

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{Gm}{r_3}\left[Dz + \frac{c\,(1+\sigma^2)B}{Ag^3\sqrt{2}}\right],$$

где

$$D = \frac{A^2 - \sigma B}{Ag^3\sqrt{2}},$$

$$A = \sqrt{a^3 - 3ab^2 + g^3}, \quad B = b^3 - 3a^2 b, \quad g = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = 1 + \left(\frac{c}{r}\right)^2 (\sigma^2 - 1) - 2\sigma\frac{cz}{r^2}, \quad b = 2\sigma\left(\frac{c}{r}\right)^2 - \frac{2cz}{r^2},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Вычисления по приведенным здесь формулам могут быть легко запрограммированы для численного интегрирования уравнений движения обобщенной задачи двух неподвижных центров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Аксенов Е. П. Теория движения искусственных спутников Земли. 1977. Наука. Москва. С.360.