Н.В.Емельянов

ПРАКТИЧЕСКАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Оглавление.

Глава 3. **Модели движения небесных тел. Аналитические методы решения уравнений движения.**

3.1.1. Применение теории возмущений.

3.1.1.1. Общая схема методов теории возмущений в небесной механике.

Теория возмущений применяется во многих областях науки. Основная идея всюду одна и та же. Различаются лишь формы методов и вид формул. Рассмотрим здесь один из методов теории возмущений в форме, наиболее часто применяемой в небесной механике.

Для простоты и наглядности изложения основной идеи метода ограничимся рассмотрением механической модели, в которой движение материальной точки описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{1}$$

где x, y, z – координаты материальной точки в некоторой системе прямоугольных координат, t – время, а U – силовая функция. Как правило, в практических задачах силовая функция имеет такой вид, что точное аналитическое решение уравнений движения найти невозможно.

Основная идея теории возмущений заключается в следующем. Разложим силовую функцию на два слагаемых

$$U = V + R$$

при соблюдении следующих двух условий:

1. После замены в уравнениях движения силовой фукнкции U на функцию V может быть найдено их общее аналитическое решение.

2. По крайней мере в области рассматриваемого движения выполняется неравенство $|R| \ll |V|$.

Разумеется, не в любой задаче такое разбиение возможно. По крайней мере выполнение первого условия уже позволяет формально строить решение первоначальных уравнений (1) методами теории возмущений. Однако практический интерес представляют случаи, когда выполняется также и второе условие.

Уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z} \tag{2}$$

называют уравнениями невозмущенного движения, исходные уравнения (1) – уравнениями возмущенного движения, а R – возмущающей функцией. Исходные уравнения (1) можно записать в форме

$$\begin{aligned} &\tfrac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \tfrac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \tfrac{dz}{dt} = \dot{z}, \\ &\tfrac{d\dot{y}}{dt} = \tfrac{\partial(V+R)}{\partial y}, \quad \tfrac{d\dot{z}}{dt} = \tfrac{\partial(V+R)}{\partial z}, \quad \tfrac{d\dot{x}}{dt} = \tfrac{\partial(V+R)}{\partial x}, \end{aligned} \tag{3}$$

где переменные $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ являются искомыми функциями.

Общее решение уравнений невозмущенного движения будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ y &= y(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ z &= z(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{x} &= \dot{x}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \end{aligned} \tag{4}$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – произвольные постоянные.

В методе теории возмущений последние формулы используются как формулы замены переменных $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ на переменные c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 в уравнениях возмущенного движения (3). Заменяются зависимые переменные – искомые функции. В итоге преобразований получают дифференциальные уравнения возмущенного движения относительно новых переменных $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ в виде

$$\frac{dc_i}{dt} = A_i(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \tag{5}$$

Точное аналитическое решение этих уравнения также, как и уравнений (1), найти невозможно. Однако они имеют одно очевидное преимущество. Если в уравнениях (3) положить $R = 0$, то они превратятся в уравнения (2), а в соответствующем решении (4) аргументы c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 будут постоянными величинами. Следовательно в преобразованных уравнениях (5) правые части окажутся равными нулю. При R не равной нулю и соблюдении второго условия применения теории возмущений $|R| \ll |V|$ правые части уравнений (5) будут содержать множителем некоторый малый параметр. Это позволяет находить приближенное решение уравнений возмущенного движения методом малого параметра. Успех применения метода малого параметра зависит в первую очередь от величины самого малого параметра, то есть от отношения $|R|/|V|$. Поэтому при разложении силовой функции U на два слагаемых V и R естественно стремление уменьшить величину $|R|$ при сохранении первого условия применения методов теории возмущений.

В разнообразии задач небесной механики вид уравнений движения при применении методов теории возмущений может быть различным, однако общая схема изложенного здесь подхода сохраняется.

3.1.1.2. Обстоятельства в движении реальных небесных тел, позволяющие применять методы теории возмущений.

В общем случае при рассмотрении движения произвольного числа небесных тел совсем не очевидно, что выполняются условия применения методов теории возмущений. Однако в соотношениях размеров большинства реальных небесных тел, расстояний между ними и свойствах их движения существует определенная иерархия. Параметры движения планет Солнечной системы и почти всех их спутников удовлетворяют условиям, необходимым для решения уравнений движения методами теории возмущений. Рассмотрим несколько конкретных случаев, которые приводят к фундаментальным задачам теории движения тел Солнечной системы.

Сначала упростим рассмотрение системы Солнца, планет и спутников, полагая, что все эти тела являются материальными точками. Тогда к ним подойдет механическая модель задачи о движении $n+1$ материальной точки. Среди этих точек будут Солнце, планеты и их спутники. Поместим начало координат в одну из них. Опишем движение системы

$n+1$ материальных точек уравнениями относительного движения

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial(V_i+R_i)}{\partial x_i},\quad \frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial(V_i+R_i)}{\partial y_i},\quad \frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial(V_i+R_i)}{\partial z_i},\qquad (6)$$

где

$$V_i=\frac{G(m_0+m_i)}{r_i},\quad R_i=G{\sum_{j=1}^{n}}{}'\, m_j\left(\frac{1}{\Delta_{ij}}-\frac{x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j}{r_j^3}\right),$$

$$\Delta_{ij}=\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2+(z_j-z_i)^2},\quad r_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2},$$

G – гравитационная постоянная, x_i,y_i,z_i,m_i $(i=1,2,...,n)$ – прямоугольные координаты и массы тел, соответственно, а m_0 – масса центрального тела. Штрих у знака суммы означает, что отсутствует слагаемое при $j=i$.

Рассмотрим несколько практических задач.

Планетная задача.

Будем изучать движение n планет по действием притяжения Солнца и их взаимного притяжения. Малым влиянием других тел пренебрежем. В уравнениях относительного движения центральным телом будет Солнце. В данном случае для уравнений невозмущенного движения при $R_i=0$ $(i=1,2,...,n)$ известно общее решение, так как система уравнений распадается на n независимых систем уравнений движения двух тел, для каждого из которых известно общее решение. Таким образом первое условие применения методов теории возмущений выполняется. Проверим теперь выполнение второго условия. Рассмотрим отношение R_i/V_i. Из уравнений относительного движения следует

$$\frac{R_i}{V_i}={\sum_{j=1}^{n}}{}'\,\frac{m_j}{m_0+m_i}\left[\frac{r_i}{\Delta_{ij}}-\frac{r_i(x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j)}{r_j^3}\right].\qquad (7)$$

Здесь $i=1,2,...,n$.

Параметры орбит девяти больших планет таковы, что планеты не испытывают ни тесных сближений с Солнцем, ни тесных взаимных сближений. Поэтому величины $x_i,y_i,z_i,\Delta_{ij},r_i$ можно считать величинами примерно одного порядка. С другой стороны, слагаемые в формуле (7) имеют множители

$$\frac{m_j}{m_0+m_i},$$

которые являются малыми параметрами в силу малости масс планет по сравнению с массой Солнца. Таким образом выполнение второго условия применения методов теории возмущений в планетной задаче обеспечивается малостью масс планет по сравнению с массой Солнца. При решении уравнений возмущенного движения (5) малыми параметрами будут отношения

$$\varepsilon_j = \frac{m_j}{m_0} \quad (j = 1, 2, ..., n) \ .$$

Спутниковая задача.

Рассмотрим движение системы спутников планеты по действием притяжения планеты, Солнца и взаимного притяжения спутников. Притяжением других планет пренебрежем в силу их удаленности. Притяжением Солнца, несмотря на его удаленность, пренебречь нельзя, так как оно имеет большую массу. В уравнениях относительного движения центральным телом будет планета. С ней и совместим начало координат. Солнце будем считать телом номер 1 $(i = 1)$. Уравнения при $i = 1$ рассматривать не будем, так как они определяют относительное движение планеты и Солнца.

В рассматриваемой спутниковой задаче для уравнений невозмущенного движения при $R_i = 0 \quad (i = 2, 3, ..., n)$ также известно общее решение, так как система уравнений распадается на независимые системы уравнений движения двух тел. Таким образом первое условие применения методов теории возмущений выполняется. Проверим теперь выполнение второго условия. Рассмотрим выражение

$$\frac{R_i}{V_i} = \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{m_0 + m_i} \left[\frac{r_i}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j)}{r_j^3} \right] \tag{8}$$

для $i = 2, ..., n$. Малость слагаемых при $j = 2, ..., n$ также, как и в планетной задаче, обеспечивается малостью масс спутников m_j по сравнению с массой планеты m_0. Слагаемое при $j = 1$ (влияние притяжения Солнца) требует особого рассмотрения. Обозначим это слагаемое в величине R_i через $(R_i)_1$, а в величине $\frac{R_i}{V_i}$ – через $(\frac{R_i}{V_i})_1$.

Воспользуемся соотношениями

$$x_i x_1 + y_i y_1 + z_i z_1 = r_i r_1 \cos H_{1i}, \quad \Delta_{i1}^2 = r_i^2 + r_1^2 - 2\, r_i r_1 \cos H_{1i}.$$

Здесь r_i – планетоцентрическое расстояние спутника, r_1 – гелиоцентрическое расстояние планеты, а H_{1i} – угол между планетоцентрическими направлениями на спутник и на Солнце. Очевидно, что пока спутник остается спутником планеты, отношение r_i/r_1 будет малым. Разложим величину $\frac{1}{\Delta_{i1}}$, а затем и $(R_i)_1$ в ряд по степеням малого параметра r_i/r_1. Будем иметь

$$(R_i)_1 = G\, m_1\, \frac{1}{r_1} \left[1 + \left(\frac{r_i}{r_1} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right) + ... \right],$$

где невыписанные члены имеют более высокий порядок малости, чем $(\frac{r_i}{r_1})^2$.

Возмущающая функция R_i входит в уравнения движения только под знаком производных по x_i, y_i, z_i. Производные от первого слагаемого дадут нуль. Поэтому его можно опустить. Оставляя только самое существенное слагаемое в разложении, получим

$$(R_i)_1 = G\, m_1\, \frac{r_i^2}{r_1^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right).$$

Тогда пренебрегая массой спутника m_i по сравнению с массой планеты m_0 слагаемое в величине $\frac{R_i}{V_i}$, обусловленное притяжением Солнца, можно записать в виде

$$\left(\frac{R_i}{V_i} \right)_1 = \frac{m_1}{m_0}\, \frac{r_i^3}{r_1^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right).$$

Несмотря на то, что масса Солнца m_1 во много раз больше массы планеты m_0, отношение $(\frac{R_i}{V_i})_1$ для спутников планет оказывается малой величиной за счет того, что расстояния спутников до планеты r_i малы по сравнению с расстоянием r_1 планеты до Солнца. Таким образом, выполнение второго условия применения методов теории возмущений в спутниковой задаче обеспечивается малостью масс спутников $m_2, m_3, ..., m_n$ по сравнению с массой планеты m_0, а также малостью расстояний спутников до планеты по сравнению с расстоянием планеты до Солнца. При решении уравнений возмущенного движения (5) используются следующие малые параметры:

$$\varepsilon_j = \frac{m_j}{m_0}, \quad \varepsilon'_j = \frac{m_1}{m_0}\, \frac{r_j^3}{r_1^3} \;\; (j = 2, 3, ..., n).$$

Задача о движении спутника несферичной планеты.

Рассмотрим теперь пример движения в задаче двух тел, когда одно из тел (спутник) можно считать материальной точкой, а другое (планета) создает нецентральное гравитационное поле. Уравнения движения спутника в этом случае можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial z}, \tag{9}$$

где

$$V = \frac{G\,m}{r}, \quad R = \frac{G\,m}{r}\,J\,X(x,y,z),$$

x, y, z – планетоцентрические прямоугольные координаты спутника, m - масса планеты, G – гравитационная постоянная, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, J – постоянный параметр, а $X(x,y,z)$ – некоторая известная функция. Последними двумя величинами можно распорядиться так, чтобы функция $X(x,y,z)$ в области движения спутника принимала значения, не много отличающиеся от единицы. Параметр J в этом случае будет характеризовать отличие планеты от шара с концентрическим распределением плотности. Известные гравитационные поля Земли, других планет и многих естественных спутников планет мало отличаются от поля притяжения материальной точки. Поэтому значения параметра J оказываются малыми. Таким образом, условия применимости методов теории возмущений в данном случае также выполняются, а J является характерным малым параметром.

Формы больших планет и их основных спутников близки к форме сжатого осесимметричного тела. Поэтому в качестве параметра J берется кэффициент при второй зональной гармонике разложения силовой функции притяжения планеты в ряд по сферическим функциям.

Другие случаи применения теории возмущений.

Рассмотренные выше конфигурации небесных тел являются лишь примерами многочисленных применений теории возмущений в небесной механике. Отметим здесь только еще одну группу задач, когда в качестве невозмущенного движения рассматривается частное решение уравнений движения. Возмущенное движение происходит вблизи этого частного решения. Малые параметры в таких задачах характеризуют разности координат в возмущенном и невозмущенном движениях, а дополнительным условием применимости теории возмущений является сохранение малости этих разностей по крайней мере на исследуемом интервале времени.

При рассмотрении различных малых параметров в задачах небесной механики следует отличать параметры, которые характеризуют малость возмущающей функции. Возмущающая функция может разлагаться в ряды по степеням также и других малых параметров. Это часто делается для обеспечения возможности решения уравнений возмущенного движения в форме (5).

Отметим еще случаи, когда силы, действующие на небесное тело, не имеют силовой функции. Примером таких сил служит сила сопротивления атмосферы, действующая на искусственный спутник Земли. В таких случаях исходные уравнения движения в прямоугольных координатах записываются в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = V_x + R_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = V_y + R_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = V_z + R_z, \tag{10}$$

где слагаемые V_x, V_y, V_z должны выбираться так, чтобы можно было найти общее решение уравнений движения при отбрасывании слагаемых R_x, R_y, R_z. Эти последние слагаемые называются компонентами возмущающего ускорения. Для возможности применения теории возмущений необходимо, чтобы R_x, R_y, R_z были малы по сравнению с V_x, V_y, V_z .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Учебник для студентов университетов, обучающихся по специальности "Астрономия". Издание 3-е, дополненное. М: Наука, 1975 . 800 с.
2. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М: Наука, 1968 . 800 с.