Н.В.Емельянов

ПРАКТИЧЕСКАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Оглавление.

Глава 3. **Модели движения небесных тел. Аналитические методы решения уравнений движения.**

3.1.2. Промежуточная орбита. Уравнения для элементов промежуточной орбиты

Рассмотри формы уравнений возмущенного движения небесного тела в теории возмущений. Для простоты понимания общей схемы теории возмущений ограничимся случаем движения одного небесного тела под действие сил, имеющих силовую функцию.

Исходные уравнения движения в прямоугольных координатах имеют общий вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{1}$$

где V и R являются функциями от координат x, y, z и времени t. Согласно теории возмущений слагаемое V выбирается так, чтобы можно было найти общее решение уравнений невозмущенного движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{2}$$

Тогда R называется возмущающей функцией. Предположим, что решение уравнений (2) найдено в форме

$$\begin{aligned}
x &= x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),\\
y &= y(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),\\
z &= z(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),\\
\dot{x} &= \dot{x}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),\\
\dot{y} &= \dot{y}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),\\
\dot{z} &= \dot{z}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – произвольные постоянные.

На этом вспомогательная роль уравнений (2) заканчивается. Достаточно того, что они породили нам соотношения (3). Далее эти соотношения рассматриваются как формулы, связывающие координаты и скорость тела в возмущенном движении с некоторыми новыми неизвестными функциями времени $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$. Соотношения (3) используют как формулы замены переменных в уравнениях (1) от переменных $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ к переменным c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6. Таким образом получаются новые уравнения возмущенного движения

$$\frac{dc_i}{dt} = C_i(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \tag{4}$$

преимущества которых заключаются в том, что правые части этих уравнений обращаются в нули, если в исходных уравнениях (1) положить $R = 0$. Это позволяет решать уравнения методом малого параметра.

Формулы (3), если в них c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 считаются заданными постоянными, определяют закон движения, который называют промежуточной орбитой. Сами эти формулы называются формулами промежуточной орбиты. Уравнения (4) называются уравнениями для элементов промежуточной орбиты.

Успех дальнейших действий существенно зависит от того, как выбраны произвольные постоянные $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$. Выбирать их можно бесконечным числом способов. В практике исследователей за последние три столетия были рассмотрены и успешно применялись множество вариантов. Для простоты понимания основных принципов, рассмотрим здесь один из них, который имел большое число применений.

В качестве силовой функции невозмущенного движения V выбираем силовую функцию задачи двух тел, рассматриваемых здесь, как материальные точки. Такой выбор обусловлен общей иерархией в движении тел Солнечной системы. Движение каждой планеты происходит под действием притяжения Солнца. Другие планеты и другие небесные тела влияют своим притяжением относительно слабо. Спутник потому и явлется спутником планеты, поскольку движется по действием ее притяжения. Другие спутники и даже Солнце лишь слегка искажают движение спутника по закону задачи двух тел.

Таким образом в данном рассмотрении мы имеем

$$V = \frac{\mu}{r}, \tag{5}$$

где μ – постоянная, а r – расстояние между двумя телами. Чаще всего начало координат помещают в одно из тел, которому присвоим номер 0. Тогда $\mu = G(m_0+m_1)$, где G – универсальная гравитационная постоянная, а $m_0 + m_1$ – сумма масс тел. В случае, когда начало координат располагается в барицентре двух тел, имеем $\mu = G\,\frac{m_0^3}{(m_0+m_1)^2}$

Решение задачи двух тел описывает движение, которое называется кеплеровым, поскольку происходит по законам Кеплера. Поскольку мы рассматриваем движение тел Солнечной системы, имеющее определенную иерархию, ограничимся эллиптическим типом движения. В соответствии с кеплеровым движением выбирают и произвольные постоянные, которые называются кеплеровыми элементами. Их смысл подробно объяснен в спецальном параграфе. Перечислим здесь кеплеровы элементы, а также связанные с ними моменты времени.

- n — среднее движение, размерность радиан/ед.времени;
- e — эксцентриситет, безразмерный;
- i — наклон (двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью Oxy), рад.;
- M_0 — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии M в начальный момент времении — эпоху), рад.;
- ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;
- Ω — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости Oxy между осью x и линией узлов), рад.;
- t_0 — начальный момент времени — эпоха элементов;
- t — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

Наряду со средним движением n в качестве параметра орбиты будем рассматривать также большую полуось орбиты a, связанную с n законом

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\ .$$

Замену переменных в уравнениях (1) делают с помощью формул кеплерова движения. Эти формулы описаны в предыдущих разделах. Поскольку функция R в явном виде пока не задана, частные производные от нее по координатам выражаются через частные производные по кеплеровым элементам. Процедура такой замены подробно описана в книге [1]. Она называется "основной операцией".

Применения теории возмущений оказываются проще, если в качестве новых искомых функций взять величины $a, e, i, M, \omega, \Omega$. Вместо средней аномалии в эпоху M_0 взята средняя аномалия M , которая в кеплеровом движении является известной линейной функцией времени

$$M = M_0 + n(t - t_0) \ .$$

Для краткости записи уравнений для элементов промежуточной орбиты сделаем простые переобозначения:

$$\alpha_1 = a, \ \ \alpha_2 = e, \ \ \alpha_3 = i, \ \ \beta_1 = M, \ \ \beta_2 = \omega, \ \ \beta_3 = \Omega. \tag{6}$$

В результате замены переменных уравнения возмущенного движения небесного тела можно записать в следующем общем виде:

$$\begin{gathered}\frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j} \ \ , \\ \frac{d\beta_i}{dt} = n_i - \sum_{j=1}^{3} a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \\ (i = 1, 2, 3) \ .\end{gathered} \tag{7}$$

В этих уравнениях n_i, a_{ij} – функции, зависящие только от от элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и постоянной μ. В случае кеплеровской промежуточной орбиты n_1, n_2 , а также некоторые из девяти функций a_{ij} , равны нулю. Однако это обстоятельство не упрощает решение уравнений. Запись уравнений (7) в таком общем виде позволяет применять их также для некоторых некеплеровых промежуточных орбит. Методы решения этих уравнений рассмотрены в следующих разделах.

Заметим, что в уравнениях (7) возмущающая функция R обозначена той же буквой, что и в уравнениях (1). Однако здесь она является функцией от элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ и времени t.

Рассмотрим теперь явный вид уравнений для элементов промежуточной орбиты в случае элементов (6)

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \ \frac{\partial R}{\partial M} \ , \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1 - e^2}{ena^2} \ \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{ena^2} \ \frac{\partial R}{\partial \omega} \ , \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1 - e^2}\sin i} \ \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1 - e^2}\sin i} \ \frac{\partial R}{\partial \Omega} \ , \end{aligned} \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na}\ \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2}\ \frac{\partial R}{\partial e}\ , \\
&\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\ \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\ \frac{\partial R}{\partial i}\ , \\
&\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\ \frac{\partial R}{\partial i}\ .
\end{aligned} \tag{9}
$$

Множители в правых частях уравнений можно заменить согласно соотношениям

$$
\frac{1}{na^2} = \frac{na}{\mu}\ ,\ \ \frac{1}{na} = \frac{na^2}{\mu}\ . \tag{10}
$$

В практической небесной механике применяются и другие варианты элементов кеплеровой промежуточной орбиты. Особого внимания заслуживают два из них. Орбиты множества естественных спутников планет являются почти круговыми и лежат вблизи плоскости экватора планеты. В таких случаях положение спутника на орбите в первую очередь определяется средней долготой λ, а ориентация орбиты – долготой перицентра π. Эти величины связаны с M, ω, Ω соотношениями

$$
\lambda = M + \omega + \Omega\ , \quad \pi = \omega + \Omega\ . \tag{11}
$$

Уравнения составляются относительно функций λ, π и Ω. Элементами промежуточной орбиты считаются π, Ω и λ_0 – средняя долгота в эпоху t_0 . В этом случае вместо уравнений (8), (9) нужно решать уравнения

$$
\begin{aligned}
&\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\ \frac{\partial R}{\partial \lambda}\ , \\
&\frac{de}{dt} = -\frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\ \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\ \frac{\partial R}{\partial \pi}\ , \\
&\frac{di}{dt} = -\frac{\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\ \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda}\right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\ \frac{\partial R}{\partial \Omega}\ ,
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\lambda}{dt} = n - \frac{2}{na}\ \frac{\partial R}{\partial a} + e\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\ \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\ \frac{\partial R}{\partial i}\ , \\
&\frac{d\pi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\ \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\ \frac{\partial R}{\partial i}\ , \\
&\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\ \frac{\partial R}{\partial i}\ .
\end{aligned} \tag{13}
$$

Правые части уравнения для i и Ω имеют особенности при $i = 0$, а правые части уравнений для e и ω имеют особенности при $e = 0$. Эти обстоятельства требуют особого внимания при решении уравнений.

Заметим, что в публикациях на английском языке часто вместо π для обозначения долготы перицентра используется буква ϖ .

Теперь рассмотрим вариант элементов промежуточной орбиты, при которых уравнения не имеют особенностей при эксцентриситете и наклоне орбиты равных нулю. Такие элементы придумал Лагранж для изучения вековых возмущений планет. Они теперь так и называются – элементы Лагранжа. Уравнения для a и λ не имеют особенностей, а остальные элементы нужно заменить. Обычно элементы Лагранжа обозначаются в литературе через h, k, p, q . С рассмотренными выше элементами они связаны соотношениями

$$h = e \sin \pi, \quad k = e \cos \pi \ , \tag{14}$$

$$p = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega \ . \tag{15}$$

После замены переменных уравнения для элементов Лагранжа будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \left(\frac{\partial R}{\partial k} - \frac{h}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) + \frac{k \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \ , \\ \frac{dk}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \left(-\frac{\partial R}{\partial h} - \frac{k}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) - \frac{h \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \ , \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p}{2na^2 \sqrt{1-e^2} \cos i \cos^2 \frac{i}{2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) \ , \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial p} - \frac{q}{2na^2 \sqrt{1-e^2} \cos i \cos^2 \frac{i}{2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) \ . \end{aligned} \tag{17}$$

Для полного состава к ним нужно добавить приведенные уже выше уравнения

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \ , \\ \frac{d\lambda}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + e \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \ . \end{aligned} \tag{18}$$

В правых частях уравнений (16), (17), (18) содержатся частные производные от возмущающей функции по величинам, которые не являются искомыми функциями в этих уравнениях. Это нормально. Так следует оставить. Дело в том, что возмущающая функция получается сначала, как функция от переменных $a, e, i, \lambda, \pi, \Omega$. Поэтому лучше сначала ее продифференцировать по этим элементам, а потом переходить к переменным h, k, p, q уже в полученных производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Учебник для студентов университетов, обучающихся по специальности "Астрономия". Издание 3-е, дополненное. М: Наука, 1975. 800 с.