Н.В.Емельянов

ПРАКТИЧЕСКАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Оглавление.

Глава 3. **Модели движения небесных тел. Аналитические методы решения уравнений движения.**

3.1.3. Решение уравнений для элементов промежуточной орбиты. Метод малого параметра.

Применение теории возмущений для решения уравнений движения небесного тела состоит из нескольких этапов. В исходных уравнениях движения, записанных в прямоугольных координатах, силовую функцию U разлагают на два слагаемых $U = V + R$ так, чтобы можно было найти общее аналитическое решение уравнений движения при $R = 0$. Формулы, представляющие полученное общее решение как функции времени, содержат призвольные постоянные. Далее эти формулы используются для замены переменных в исходных уравнениях движения. Роль новых зависимых переменных играют входящие в формулы произвольные постоянные. Решение уравнений движения при $R = 0$ называется промежуточной орбитой. Новые зависимые переменные называются элементами промежуточной орбиты. Таким образом составляются уравнения движения относительно элементов промежуточной орбиты. Они содержат только возмущающую функцию R . Преимущества этих уравнений над исходными состит в том, что при $R = 0$ их решение становится тривиальным, а при R малой по сравнению с V уравнения можно решать методом малого параметра. Рассмотрим теперь, как это делается на практике.

Возьмем в качестве функции V силовую функцию задачи двух тел. Это не единственно возможный вариант. В практической небесной механике используются и другие случаи промежуточного движения. Однако решение задачи двух тел чаще всего применяется на практике как основа для построения решения любых уравнений движения небесных тел.

Таким образом в данном рассмотрении мы имеем

$$V = \frac{\mu}{r}, \tag{1}$$

где μ – постоянная, а r – расстояние между двумя телами. Чаще всего начало координат помещают в одно из тел, которому присвоим номер "0". Тогда $\mu = G(m_0 + m_1)$, где G – универсальная гравитационная постоянная, а $m_0 + m_1$ – сумма масс тел. В случае, когда начало координат располагается в барицентре двух тел, имеем $\mu = G\,\frac{m_0^3}{(m_0+m_1)^2}$

Поскольку мы рассматриваем движение тел Солнечной системы, имеющее определенную иерархию, ограничимся эллиптическим типом промежуточного движения, которое в данном случае называется кеплеровым. В соответствии с кеплеровым движением выбирают и произвольные постоянные, которые называются кеплеровыми элементами. Их смысл подробно объяснен в специальном параграфе. Перечислим здесь кеплеровы элементы, а также связанные с ними моменты времени.

- n — среднее движение, размерность радиан/ед.времени;
- e — эксцентриситет, безразмерный;
- i — наклон (двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью Oxy), рад.;
- M_0 — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии M в начальный момент времении — эпоху), рад.;
- ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;
- Ω — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости Oxy между осью x и линией узлов), рад.;
- t_0 — начальный момент времени — эпоха элементов;
- t — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

Наряду со средним движением n в качестве параметра орбиты будем рассматривать также большую полуось орбиты a, связанную с n законом

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\ .$$

Применения теории возмущений оказываются проще, если в качестве новых искомых функций взять величины $a, e, i, M, \omega, \Omega$. Вместо средней аномалии в эпоху M_0 взята средняя аномалия M , которая в кеплеровом движении является известной линейной функцией времени

$$M = M_0 + n(t - t_0)\ .$$

Для краткости записи уравнений для элементов промежуточной орбиты сделаем простые переобозначения:

$$\alpha_1 = a, \;\; \alpha_2 = e, \;\; \alpha_3 = i, \;\; \beta_1 = M, \;\; \beta_2 = \omega, \;\; \beta_3 = \Omega. \qquad (2)$$

В результате замены переменных уравнения возмущенного движения небесного тела можно записать в следующем общем виде:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j} \;\; ,$$

$$\frac{d\beta_i}{dt} = n_i - \sum_{j=1}^{3} a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \qquad (3)$$

$$(i = 1, 2, 3) \; .$$

В этих уравнениях n_i, a_{ij} – функции, зависящие только от от элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и постоянной μ. В случае кеплеровской промежуточной орбиты n_1, n_2 , а также некоторые из девяти функций a_{ij} , равны нулю. Однако это обстоятельство не упрощает решение уравнений. Запись уравнений (3) в таком общем виде позволяет применять их также для некоторых некеплеровых промежуточных орбит. Явный вид этих уравнений рассмотрен в предыдущем разделе. Там же можно найти уравнения для других вариантов элементов кеплеровской промежуточной орбиты.

Рассмотрим метод решения уравнений (3). Это наиболе часто применяемые уравнения. В случаях других вариантов элементов решение строится аналочично.

Метод решения основан на малости возмущающей функции R по сравнению с функцией V, поэтому он называется методом малого параметра. В литературе этот метод называется методом малого параметра А. Пуанкаре.

Для изложения метода малого параметра нужно ввести понятие порядка малости. Введение порядка малости неоднозначно. Дело в том, что на практике возмущающая функция R, выраженная через элементы промежуточной орбиты, содержит множество членов – слагаемых разных по величине. Для выражения возмущающей функции применяют разложения по степеням различных малых параметров. Присвоение каждому слагаемому того или иного порядка малости является иногда условным. При построении решения многократно перемножаются величины разных порядков малости. Чаще всего заранее полагается максимальный учитываемый порядок малости. В каждой конкретной теории движения имеются свои особенности.

Для общего изложения метода мы примем, что малость возмущающей функции обеспечивается некоторым малым параметром, содержащимся в ней как общий множитель. Будем считать этот параметр первого порядка малости. На практике возмущающая функция оказывается разложенной по степеням этого и других малых малых параметров. Таким образом ее разложение начнется с члена первого порядка малости.

Для краткости изложения не будем выписывать явно сами малые параметры. Однако каждой величине будет присвоен определенный порядок малости. Этот порядок будем записывать с помощью верхнего индекса величины в круглых скобках. Таким образом разложение возмущающей функции будет иметь вид

$$R = R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)} + \dots \, . \tag{4}$$

Введем еще обозначения

$$A_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j} \ ,$$
$$B_i = -\sum_{j=1}^{3} a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \tag{5}$$
$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Теперь уравнения для элементов промежуточной орбиты запишем в виде

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = A_i^{(1)} + A_i^{(2)} \ + \dots \, ,$$
$$\frac{d\beta_i}{dt} = n_i^{(0)} + n_i^{(1)} + \dots + B_i^{(1)} + B_i^{(2)} \ + \dots \, , \tag{6}$$
$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Заметим, что в частном случае кеплеровской промежуточной орбиты $n_2 = n_3 = 0$ и $n_1^{(s)} = 0$ при $s > 1$. В последних уравнениях правые части зависят от искомых функций $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и явно от времени.

Каждое из слагаемых $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}$ $(i = 1,2,3, j = 1,2,...)$ зависит от всех шести элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Слагаемые $n_i^{(0)} + n_i^{(1)} + ...$ зависят только от $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Будем искать решение уравнений (6) в виде рядов по степеням малых параметров, т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i^{(0)} + \alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} + ... \ , \\ \beta_i &= \beta_i^{(0)} + \beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)} + ... \ , \\ & \qquad\qquad (i = 1,2,3) \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь мы рассматриваем построение формального решения. Доказательства существования такого решения и сходимости построенных радов можно найти в учебниках [1].

Итак, подставим ряды (7) в уравнения (6). Затем приравняем в левой и правой частях уравнений члены одинакового порядка малости. Каждое из слагаемых в правых частях этих уравнений придется разложить в ряды Тейлора по степеням малого параметра. Разложение делается по схеме

$$f(a+\varepsilon) = f(x)|_{x=a} + \frac{1}{1!}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}\varepsilon + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x=a}\varepsilon^2 + ...,$$

где a - значение аргумента функции $f(x)$, относительно которого отсчитывается малое приращение ε. Таким образом, в аргументах функций $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, n_i^{(j)}$ $(i = 1,2,3, j = 1,2,...)$ приращениями будут бесконечные суммы $\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} + ...$, $\beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)} + ...$

Для членов нулевого порядка малости получим

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i^{(0)}}{dt} &= 0 \ , \\ \frac{d\beta_i^{(0)}}{dt} &= (n_i^{(0)})_0 \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь и далее символы $(...)_0$ обзначают значения функций при $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$.

Решение уравнений (8) тривиально:

$$\alpha_i^{(0)} = \alpha_{i0}^{(0)}, \quad \beta_i^{(0)} = (n_i^{(0)})_0 (t - t_0) + \beta_{i0}^{(0)} \ , \tag{9}$$

Здесь $\alpha_{i0}^{(0)}$, $\beta_{i0}^{(0)}$ $(i = 1, 2, 3)$ - произвольные постоянные. При этом постоянные $(n_i^{(0)})_0$ зависят от $\alpha_{i0}^{(0)}$. Решение (9) описывает промежуточное невозмущенное движение.

Теперь выделим и приравняем в правых и левых частях уравнений (6) члены первого порядка малости с учетом (7). Получим

$$\frac{d\alpha_i^{(1)}}{dt} = (A_i^{(1)})_0 \ ,$$

$$\frac{d\beta_i^{(1)}}{dt} = (B_i^{(1)})_0 + (n_i^{(1)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \tag{10}$$

$$(i = 1, 2, 3) \ . \ .$$

Здесь $(A_i^{(1)})_0$, $(B_i^{(1)})_0$ являются известными функциями времени в силу подстановок $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$ и равенств (9). Заметим, что произвольные постоянные $\alpha_i^{(0)}, \beta_{i0}^{(0)}$ входят сюда буквенно, их значения пока неопределены.

Решение первых трех из шести уравнений (10) имеет вид

$$\alpha_i^{(1)} = \int (A_i^{(1)})_0 dt + \alpha_{i0}^{(1)} \tag{11}$$

$$(i = 1, 2, 3) \ ,$$

где $\alpha_{i0}^{(1)}$ - новые произвольные постоянные. Можно оставить эти постоянные в решении присутствовать буквенно и распорядиться их значениями позже. Однако их можно сразу положить равными нулю. Именно так мы и поступим для дальнейших построений решения.

Чтобы построить решение, нужно взять неопределенный интеграл в правой части соотношения (11). Для этого в конкретных случаях разрабатываются специальные методы разложения возмущающей функции. Допустим, что это удалось. Тогда $\alpha_i^{(1)}$ и правые части остальных трех уравнений (10) становятся известными функциями времени. Теперь решение для $\beta_i^{(1)}$ выражается через неопределенный интеграл

$$\beta_i^{(1)} = \int \left[(B_i^{(1)})_0 + (n_i^{(1)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \right] dt + \beta_{i0}^{(1)} \tag{12}$$

$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Здесь произвольные постоянные $\beta_{i0}^{(1)}$ можно положить равными нулю.

Аналогично строится решение для членов второго порядка малости. Сначала находим

$$\alpha_i^{(2)} = \int \left[(A_i^{(2)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} \right] dt + \\ + \alpha_{i0}^{(2)} \quad (13)$$

$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Произвольные постоянные $\alpha_{i0}^{(2)}$ полагаем равными нулю. Подинтегральное выражение в (13) оказывается известной функцией времени. Допустим, что эту функцию удалось проинтегрировать. Тогда решение для $\beta_i^{(2)}$ выражается в виде

$$\beta_i^{(2)} = \int \left[(B_i^{(2)})_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \alpha_k^{(1)} \right] dt + \beta_{i0}^{(2)} \quad (14)$$

$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

Произвольные постоянные $\beta_{i0}^{(2)}$ также полагаем равными нулю.

Таким образом последовательно находится решение для членов следующих порядков малости. Всякий раз нужно интегрировать новую известную функцию времени, а новые произвольные постоянные полагать равными нулю. Так как при получении подинтегральных выражений в правых частях уравнений делались подстановки $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$, то с учетом (9) все слагаемые рядов (7) оказываются зависимыми от произвольных постоянных $\alpha_{i0}^{(0)}$, $\beta_{i0}^{(0)}$ $(i = 1, 2, 3)$. В результате мы получаем решение уравнений возмущенного движения как функции времени и шести независимых произвольных постоянных

$$\alpha_i = \alpha_i(\alpha_{10}^{(0)}, \alpha_{20}^{(0)}, \alpha_{30}^{(0)}, \beta_{10}^{(0)}, \beta_{20}^{(0)}, \beta_{30}^{(0)}) \ , \\ \beta_i = \beta_i(\alpha_{10}^{(0)}, \alpha_{20}^{(0)}, \alpha_{30}^{(0)}, \beta_{10}^{(0)}, \beta_{20}^{(0)}, \beta_{30}^{(0)}) \quad (15)$$

$$(i = 1, 2, 3) \ .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Учебник для студентов университетов, обучающихся по специальности "Астрономия". Издание 3-е, дополненное. М: Наука, 1975. 800 с.

Емельянов Н.В. Порядок интегрирования уравнений для элементов промежуточной орбиты спутника. Астрономический журнал. 1985. Т. 62. N. 3. С. 590-597.