Н.В.Емельянов

ПРАКТИЧЕСКАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Оглавление.

3.5.2. Возмущающая функция, обусловленная несферичностью планеты.

Одной из основных механических моделей небесной механики является спутниковая задача. Она формулируется как частный случай задачи о движении трех и более материальных точек. Однако в практических задачах о движении существующих естественных и искусственных спутников планет центральное тело, т. е. планета, не может рассматриваться как материальная точка, поскольку влияние ее несферичности оказывается существенным.

Та часть силовой функции спутниковой задачи, которая обусловлена притяжением планеты, рассматривается как силовая функция притяжения несферичного тела конечных размеров.

Движение спутника планеты рассматривают в системе прямоугольных координат O, x, y, z с началом в центре масс планеты. Оси направляют параллельно осям некоторой абсолютной (невращающейся) системы координат. Обычно ось z направляют по направлению оси вращения планеты. Направление оси x выбирают специально в разных практических задачах. Чаще всего выбирают линию пересечения плоскости экватора и плоскости орбиты планеты. Поскольку в реальных условиях обе плоскости медленно поворачиваются, то оси системы координат связывают с положениями плоскостей экватора и орбиты в некоторый фиксированный момент времени. При более точном рассмотрении орбитальное движение планеты не является плоским. Тогда в качестве плоскости орбиты берут некоторую условную плоскость, вблизи которой движется планета. Более подробно о выборе системы координат написано в параграфе 2.52.

Для приближенной теории движения спутника и в качестве основы точной теории рассматривают следующую модель системы координат. Ось равномерного вращения планеты считается неподвижной, и ось z направляют по этой оси.

Гравитационное поле притяжения планеты создается каждой ее частицей. Распределение плотности вещества планеты чаще всего неизвестно. Поэтому силовую функцию притяжения несферичной планеты разлагают в ряд по линейному множеству ортогональных функций, а коэффициенты разложения находят из наблюдений движения спутников, гравитационных измерений на поверхности планеты и данных о форме планеты.

Воспользуемся разложением силовой функции притяжения несферичной планеты, приведенным в параграфе 2.52. Это разложение описывается формулой

$$U = \frac{fm}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\varphi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)(C_{nk}\cos k\overline{\lambda} + S_{nk}\sin k\overline{\lambda})\right],$$

где $P_n(\sin\varphi)$ – полиномы Лежандра, $P_n^{(k)}(\sin\varphi)$ – присоединенные функции Лежандра, аргументами которых является $\sin\varphi$. Постоянные коэффициенты J_n, C_{nk}, S_{nk} как раз и задают гравитационное поле планеты. Здесь используются сферические координаты – центральное расстояние r, широта φ, долгота λ, соответствующие выбранной невращающейся системой координат O, x, y, z. Величина $\overline{\lambda}$ определяется соотношением

$$\overline{\lambda} = \lambda - S, \tag{1}$$

где S – угол поворота начального меридиана планеты относительно оси x. В случае Земли S является звездным временем. Приближенно можно считать

$$S = \dot{S}(t - t_0) + S_0\ ,$$

где $\dot{S}$, t_0, S_0 – известные постоянные, а t – время.

Для решения задачи согласно теории возмущений нужно разложить силовую функцию на два слагаемых

$$U = V + R,$$

где V – основная часть, а R – возмущающая функция. При этом должно быть известно общее аналитическое решение уравнений движения, в которых оставлена только основная часть V. В самом простейшем случае принимают

$$V = \frac{fm}{r},$$

Тогда общее решение уравнений невозмущенного движения описывается формулами кеплеровского движения, а возмущающая функция R, обусловленная нецентральностью гравитационного поля планеты, имеет вид

$$R = \frac{fm}{r}\left[-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)(C_{nk}\cos k\overline{\lambda} + S_{nk}\sin k\overline{\lambda})\right].$$

Согласно методам теории возмущений точные уравнения движения в координатах заменяются на уравнения возмущенного движения относительно новых переменных – элементов промежуточной орбиты. Связь новых переменных и координат описывается формулами общего решения уравнений невозмущенного движения (с силовой функцией V), в которых новые переменные играют роль произвольных постоянных – элементов промежуточной орбиты. Для решения уравнений движения относительно элементов промежуточной орбиты возмущающая функция должна быть выражена через эти элементы. Такой процесс называется разложением возмущающей функции, поскольку фактически производятся новые разложения по степеням новых малых параметров.

Рассмотрим здесь, как это делается в случае кеплеровской промежуточной орбиты спутника. Будем предполагать, что элементами промежуточной орбиты являются:
a - большая полуось орбиты,
e - эксцентриситет,
i - наклон,
M - средняя аномалия,
ω - угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты,
Ω - длогота узла,
причем элементы i, ω, Ω отсчитываются в системе координат O, x, y, z.

Начнем с того, что объединим обозначения коэффициентов разложения J_n и C_{nk}, S_{nk} путем доопределения C_{nk}, S_{nk} и функций $P_n^{(k)}$ для $k = 0$ следующим образом:

$$C_{n0} = -J_n, \quad S_{n0} = 0 \quad P_n^{(0)} = P_n.$$

Тогда, учитывая еще соотношение (1), возмущающую функцию выразим в виде

$$R = \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi) \left[C_{nk} \cos k(\lambda - S) + S_{nk} \sin k(\lambda - S)\right].$$

Теперь введем в рассмотрение величины J_{nk}, λ_{nk}, связанные с коэффициентами C_{nk}, S_{nk} соотношениями

$$C_{nk} = J_{nk} \cos k\lambda_{nk}, \quad S_{nk} = J_{nk} \sin k\lambda_{nk}.$$

В этом случае для возмущающей функции имеем

$$R = \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} J_{nk} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi) \cos k(\lambda - S - \lambda_{nk}).$$

Далее удобно воспользоваться комплексным представлением функции

$$R = fm \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} J_{nk} Re\{R_{nk}\},$$

где

$$R_{nk} = \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n^{(k)}(\sin\varphi) \exp\sqrt{-1}k(\lambda - S - \lambda_{nk}).$$

Запишем очевидное соотношение

$$\lambda - S - \lambda_{nk} = (\lambda - \Omega) + \Omega - S - \lambda_{nk}.$$

Тогда

$$R_{nk} = \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Q_{nk} \exp\sqrt{-1}k\Omega \exp\sqrt{-1}k(-S - \lambda_{nk}),$$

где

$$Q_{nk} = P_n^{(k)}(\sin\varphi) \exp\sqrt{-1}k(\lambda - \Omega).$$

Теперь отметим, что направление радиуса-вектора спутника однозначно определяется его широтой φ и долготой, отсчитываемой от восходящего узла орбиты, т. е. $\lambda - \Omega$. Направление радиуса-вектора спутника также однозначно определяется наклоном орбиты i и аргументом широты u (угол между радиусом-вектором и направлением на восходящий узел). Между этими парами углов справедливы соотношения

$$\sin\varphi = \sin i \sin u,$$

$$\cos\varphi\cos(\lambda-\Omega)=\cos u,$$

$$\cos\varphi\sin(\lambda-\Omega)=\cos i\sin u.$$

Используя эти соотношения можно выразить Q_{nk} через i и u. В работах по решению этой задачи чаще всего приводится следующий результат:

$$Q_{nk}=\left(\sqrt{-1}\right)^{k-n+2E(\frac{n-k}{2})}\sum_{p=0}^{n}F_{nkp}(i)\exp\sqrt{-1}(n-2p)u, \qquad (2)$$

где $F_{nkp}(i)$ – специальные функции небесной механики, называемые функциями наклона.

Вывод последнего соотношения и формулы, определяющие функции наклона, можно найти в работах [1, 2, 3]. Методы вычисления функций наклона кратко изложены в Приложении П.1.02.

В дальнейших выкладках учтем, что

$$u=v+\omega,$$

где v – истинная аномалия. Теперь формула (2) позволяет записать выражение для R_{nk} в следующем виде:

$$R_{nk}=\frac{r_0^n}{r^{n+1}}\left(\sqrt{-1}\right)^{k-n+2E(\frac{n-k}{2})}\sum_{p=0}^{n}F_{nkp}(i)\exp\sqrt{-1}(n-2p)v\times$$

$$\times\ \exp\sqrt{-1}(n-2p)\omega\exp\sqrt{-1}k\Omega\exp\sqrt{-1}k(-S-\lambda_{nk}).$$

Перепишем последнее соотношение в форме

$$R_{nk}=\frac{r_0^n}{a^{n+1}}\left(\sqrt{-1}\right)^{k-n+2E(\frac{n-k}{2})}\sum_{p=0}^{n}F_{nkp}(i)X_{-n-1,n-2p}\times$$

$$\times\ \exp\sqrt{-1}(n-2p)\omega\exp\sqrt{-1}k(\Omega-S)\exp\sqrt{-1}k(-\lambda_{nk}),$$

где

$$X_{l,j}=\left(\frac{r}{a}\right)^{l}\exp\sqrt{-1}jv.$$

Функции $X_{l,j}$ в кеплеровском движении зависят от времени посредством r и v, которые в свою очередь связаны с эксцентриситетом e и средней аномалией M цепочкой соотношений

$$\frac{r}{a}=\frac{1-e^2}{1+e\cos v},$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$
$$E - e\sin E = M.$$

Выразить $X_{l,j}$ через e и M в конечном виде не представляется возможным, однако при достаточно малых значениях эксцентриситета e можно воспользоваться разложением в ряд

$$X_{l,j} = \left(\frac{r}{a}\right)^l \exp\sqrt{-1}jv = \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_q^{l,j}(e)\exp\sqrt{-1}qM, \tag{3}$$

где $X_q^{l,j}(e)$ – специальные функции небесной механики, называемые коэффициентами Ганзена. Вывод такого разложения и формулы, определяющие коэффициенты Ганзена, можно найти в работах [1, 2, 3]. Заметим, что записанный выше ряд по кратным средней аномалии сходится при всех значениях эксцентриситета, меньших единицы.

Методы вычисления этих функций кратко описаны в Приложении П.1.02. Здесь только отметим некоторые их свойства. При значении индекса $q = 0$ коэффициенты Ганзена выражаются в конечном виде как функции от эксцентриситета. Кроме того для всех допустимых значений индексов можно записать разложение

$$X_q^{l,j}(e) = e^{|q-j|}\sum_{s=0}^{\infty} X_{q,s}^{l,j} e^{2s},$$

где $X_{q,s}^{l,j}$ – некоторые числа, а ряд сходится при всех $e < 1$. При вычислении некоторых возмущений оказывается важным следующее свойство:

$$X_0^{-3,2}(e) = X_0^{-3,-2}(e) = 0$$

при всех $e < 1$.

Итак, воспользовавшись соотношением (3), для R_{nk} запишем

$$R_{nk} = \frac{r_0^n}{a^{n+1}}\left(\sqrt{-1}\right)^{k-n+2E(\frac{n-k}{2})}\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{nkp}(i)\, X_q^{-n-1,n-2p}(e)\,\times$$
$$\times\,\exp\sqrt{-1}[qM + (n-2p)\omega + k(\Omega - S) - k\lambda_{nk}].$$

Чтобы определить действительную часть от R_{nk} , заметим, что

$$Re\{\left(\sqrt{-1}\right)^{k-n+2E(\frac{n-k}{2})}\exp\sqrt{-1}\alpha\} = \begin{cases}\cos\alpha & \text{при } n-k \text{ – чет}\\ \sin\alpha & \text{при } n-k \text{ – нечет}\end{cases}.$$

Учитывая это, выражение для R запишем сначала так:

$$R = fm \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{r_0^n}{a^{n+1}} F_{nkp}(i)\; X_q^{-n-1,n-2p}(e)\; J_{nk} \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \cos(D_{nkpq} - k\lambda_{nk}) \;\text{ при }\; n-k \;\text{ – чет} \\ \sin(D_{nkpq} - k\lambda_{nk}) \;\text{ при }\; n-k \;\text{ – нечет} \end{array} \right. ,$$

где

$$D_{nkpq} = qM + (n-2p)\omega + k(\Omega - S).$$

Возвращаясь к коэффициентам C_{nk}, S_{nk} , окончательно получим

$$R = fm \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \tfrac{r_0^n}{a^{n+1}} F_{nkp}(i)\; X_q^{-n-1,n-2p}(e) \times$$

$$\times \left(\left\{ \begin{array}{c} C_{nk} \;\text{ при }\; n-k \;\text{ – чет} \\ -S_{nk} \;\text{ при }\; n-k \;\text{ – нечет} \end{array} \right\} \cos D_{nkpq} + \right. \tag{4}$$

$$\left. + \left\{ \begin{array}{c} S_{nk} \;\text{ при }\; n-k \;\text{ – чет} \\ C_{nk} \;\text{ при }\; n-k \;\text{ – нечет} \end{array} \right\} \sin D_{nkpq} \right) ,$$

Поставленная задача решена, и объявленное в названии параграфа разложение возмущающей функции, обусловленной нецентральностью гравитационного поля планеты, дается последней формулой. В таком виде возмущающая функция может использоваться при решении дифференциальных уравнений движения спутника относительно кеплеровских элементов промежуточной орбиты, перечисленных в начале этого параграфа. Дифференциальные уравнения и порядок их решения описаны в параграфах 3.12, 3.13.

Относительно рассматриваемого разложения сделаем несколько замечаний.

1. На практике бесконечную сумму вычислить нельзя, поэтому ограничиваются отрезком ряда. Малость отбрасываемых членов обусловлена убыванием значений коэффициентов C_{nk}, S_{nk} с ростом индекса n и убыванием значений коэффициентов Ганзена с ростом $|q-n+2p|$.

2. Обычно оперируют с нормированными значениями коэффициентов C_{nk}, S_{nk} так, как это описано в параграфе 2.5.2 . При этом одновременно работают с нормированными функциями наклона, используя тот же нормировочный коэффициент, что и для полиномов и присоединенных функций Лежандра, как описано в параграфах 2.5.2 и XXX.

3. При построении аналитической теории движения спутника планеты необходимо определять частные производные от возмущающей функции по ее аргументам – элементам кеплеровской промежуточной орбиты. Производные по элементам a, M, ω, Ω определяются элементарно, при этом не изменяется вид фнкции. Дли определения частных производных по элементам e, i нужно заменять коэффициенты Ганзена и функции наклона на их производные по своим аргументам. На практике вычисляют одновременно значения этих специальных функций и их производных.

4. В ряде задач удобно или даже необходимо использовать иные элементы кеплеровской промежуточной орбиты спутника нежели указанные выше. Чтобы получить выражение возмущающей функции в новых элементах можно сделать замену переменных в уже полученном разложении. Однако иногда приходится выполнять разложение заново, проходя по аналогичному пути, как описано выше.

5. При использовании промежуточной орбиты спутника, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров (см. параграф 2.34), приведенное выше разложение может использоваться как приближенное выражение возмущающей функции. В ряде случаев этого выражения бывает достаточно и при некеплеровской промежуточной орбите.

6. Время входит явно в возмущающую функцию только посредством величины S – угла поворота планеты в невращающейся системе координат (звездное время в случае спутника Земли). Однако если планета осесимметричная, то все коэффициенты C_{nk}, S_{nk} при $k \neq 0$ равны нулю, и возмущающая функция не зависит явно от времени.

Далее рассмотрим одну модификацию разложения возмущающей функции, обусловленной нецентральностью гравитационного поля планеты, имеющую преимущества на практике и при анализе возмущений в движении спутника.

Учитывая замечание 1, заменим бесконечные суммы на отрезки рядов. Для этого зададим некоторые числа N и K , и в сумме учтем только члены при $n \leq N$ и $-K \leq q - n + 2p \leq K$. Это означает, что мы пренебрегаем членами с коэффициентами C_{nk}, S_{nk}, у которых $n > N$, и членами, пропорциональными e^q при $q > K$. Изменим порядок суммирования в фомуле (4) так, чтобы выделить члены с одинаковыми коэффициентами при $M, \omega, (\Omega - S)$. Получим

$$R = \sum_{q=q'}^{q''} \sum_{j=j'}^{j''} \sum_{k=0}^{N} (A_{qjk} \cos D_{qjk} + B_{qjk} \sin D_{qjk}), \tag{5}$$

где

$$D_{qjk} = qM + j\omega + k(\Omega - S),$$

$$A_{qjk} = \sum_{p=p'}^{p''} fm \frac{r_0^n}{a^{n+1}} F_{nkp}(i)\ X_q^{-n-1,j}(e) C'_{nk},$$

$$B_{qjk} = \sum_{p=p'}^{p''} fm \frac{r_0^n}{a^{n+1}} F_{nkp}(i)\ X_q^{-n-1,j}(e) S'_{nk},$$

$$C'_{nk} = \begin{cases} C_{nk} \text{ при } n-k \text{ – чет} \\ -S_{nk} \text{ при } n-k \text{ – нечет} \end{cases},$$

$$S'_{nk} = \begin{cases} S_{nk} \text{ при } n-k \text{ – чет} \\ C_{nk} \text{ при } n-k \text{ – нечет} \end{cases},$$

$$n = j + 2p.$$

Пределы суммирования $q', q'', j', j'', p', p''$ определяются из соотношений

$$q' = -K - N, \;\; q'' = K + N,$$

$$j' = \max\{q - K, -N\}, \;\; j'' = \min\{q + K, N\},$$

$$p' = -E\left(-\frac{1}{2}\max\{0, -2j, 2-j, k-j\}\right), \;\; p'' = E\left(\frac{N-j}{2}\right).$$

Здесь функция $E(...)$ означает целую часть числа, то есть ближайшее целое, не превышающее заданное.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. М.: Наука, 1986.

2. Брумберг В.А. Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. – Бюлл. ин-та теорю астрон. АН СССР, 1967, N 11, с. 73.

3. Каула У. Спутниковая геодезия. М.: Мир, 1970.