Н.В.Емельянов

ПРАКТИЧЕСКАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Оглавление.

Резюме

Рассматривается этап вычисления астрометрических угловых координат спутников планет по их прямоугольным планетоцентрическим координатам при вычислении эфемерид или при уточнении параметров движения естественных спутников планет из наблюдений. В данном разделе предлагаются точные формулы, следующие из геометрических построений. Рассматриваются процессы отражения света от спутников и регистрации изображения в фотоприемниках телескопов. Отдельно рассматривается определение разности координат двух спутников планеты в случае обработки фотометрических наблюдений взаимных затмений спутников.

Введение

Динамические модели систем естественных спутников планет необходимы для изучения эволюции Солнечной системы, а также для планирования космических полетов к другим планетам. Теории орбитального движения спутников постоянно уточняются на основе наземных наблюдений и траекторных измерений, выполняемых с помощью космических аппаратов. При уточнении модели движения спутника обычно используют сразу все имеющиеся наблюдения. Наиболее многочисленны наземные астрометрические наблюдения, точность которых за последние пятьдесят лет возрасла лишь вдвое и в лучших случаях составляет $0.05''$. Аналитическая теория или численная модель движения спутника планеты позволяет определять его прямоугольные планетоцентрические координаты на любой заданный момент времени. При уточнении орбитальных параметров необходимо вычислять на основе

теории астрометрические координаты спутников на моменты наблюдений. Для этого используются формулы, связывающие астрометрические координаты и координаты спутника, получающиеся из теории его планетоцентрического движения.

В последние годы точность позиционных наблюдений естественных спутников планет существенно улучшилась благодаря применению фотоприемников, основанных на ПЗС-матрицах. Фотометрические наблюдения взаимных покрытий и затмений спутников позволяют получить позиционные данные о спутниках с точностью, которая в десятки раз превышает точность обычных астрометрических наблюдений. Последние международные кампании наблюдений этих редких явлений дали значительный наблюдательный материал для Галилеевых спутников Юпитера и главных спутников Сатурна.

В данном разделе предлагаются точные формулы для вычислений астрометрических координат спутников планет по их прямоугольным планетоцентрически координатам на любой заданный момент времени. Особо рассматривается случай, когда необходимо вычислять разности угловых гелиоцентрических координат двух спутников при обработке фотометрических наблюдений взаимных затмений спутников планет. В этом случае нужно иметь связь разности угловых гелиоцентрических координат двух спутников с их планетоцентрическими прямоугольными координатами.

Теоретические и астрометрические расположения спутников

Выберем прямоугольную систему координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в центре Солнца. Пусть оси этой системы имеют неизменные направления. Выберем их параллельными осям невращающейся геоцентрической геоэкваториальной системы координат некоторой эпохи, например эпохи J2000. Будем называть эту систему координат гелиоцентрической.

Наиболее точные из существующих в настоящее время теорий движения планет позволяют определять их прямоугольные координаты в системе координат с началом в барицентре Солнечной системы. Обычно теория дает также координаты Солнца в этой системе. Поэтому всегда можно сделать преобразование координат и определять гелиоцентрические координаты планет.

Гелиоцентрический радиус-вектор наблюдателя обозначим через T, а гелиоцентрический радиус-вектор планеты – через P. Предположим, что мы располагаем теорией движения планет, приемлемой для реше-

ния задачи. Под теорией движения в нашем случае понимается процедура, позволяющая вычислять гелиоцентрический радиус-вектор планеты $P(t)$ для любого заданного значения аргумента этой теории t. Привлекая подходящую модель вращения Земли и зная координаты обсерватории в системе, связанной с Землей, получим процедуру вычисления гелиоцентрического радиуса-вектора наблюдателя $T(t)$.

На данном этапе рассмотрения задачи мы пренебрегаем эффектами общей теории относительности и считаем, что шкала времени наблюдателя совпадает с аргументом планетной теории t. С другой стороны, полагаем, что перемещение фотона между любыми двумя точками происходит за конечный промежуток времени.

Теории движения спутников планет устроены так, что планетоцентрические координаты спутника можно вычислить на любой момент времени t, являющийся аргументом спутниковой теории. Наиболее точными являются измерения наблюдаемого положения одного спутника относительно другого. Поэтому будем рассматривать два спутника планеты, которые назовем условно спутник 1 и спутник 2. В случаях, когда измеряются координаты одного спутника относительно планеты, в следующих ниже формулах можно отождествлять спутник 2 с планетой и считать его планетоцентрические координаты равными нулю.

Обозначим через $S_p^{(1)}(t)$ планетоцентрический радиус-вектор спутника 1, а через $S_p^{(2)}(t)$ – радиус-вектор спутника 2. Планетоцентрическую систему координат будем считать невращающейся с осями, взаимно параллельными осям гелиоцентрической системы.

Допустим, что в процессе наблюдений в фотоприемнике телескопа в некоторый момент времени t_0 было зафиксировано изображение двух спутников. Изображение спутника 1 было сформировано фотонами, которые стартовали с этого спутника после их рассеяния на поверхности в некоторый момент времени t_1, предшествующий моменту времени t_0. Изображение спутника 2 было сформировано фотонами, стартовавшими с этого спутника в момент времени t_2. Линия в пространстве, по которой фотоны прибыли в фотоприемник, совпадает с направлением вектора, начало которого расположено в фотоприемнике, т. е. в топоцентре, а конец – в точке их старта. Этот вектор назовем астрометрическим радиусом-вектором спутника и обозначим его через $S_T^{(1)}$ для спутника 1 и через $S_T^{(2)}$ – для спутника 2 соответственно.

Имея в распоряжении планетную и спутниковые теории, астромет-

рический радиус-вектор спутника 1 можно определить из уравнений

$$S_T^{(1)} = P(t_1) + S_p^{(1)}(t_1) - T(t_0), \tag{1}$$

$$t_0 - t_1 = \frac{|S_T^{(1)}|}{c}, \tag{2}$$

где c – скорость света. Эти уравнения решаются методом последовательных приближений. В нулевом приближении полагают $t_1 = t_0$.

Астрометрический радиус-вектор спутника 2 определяется из уравнений

$$S_T^{(2)} = P(t_2) + S_p^{(2)}(t_2) - T(t_0), \tag{3}$$

$$t_0 - t_2 = \frac{|S_T^{(2)}|}{c}. \tag{4}$$

Решаются эти уравнения аналогично предыдущим, а в нулевом приближении здесь полагают $t_2 = t_0$.

Вычисление астрометрических угловых координат спутников

При наблюдениях спутников измеряются топоцентрические угловые координаты спутников. Обычно это астрометрические прямое восхождение α и склонение δ. Компоненты вектора $S_T^{(2)}$ обозначим через X, Y, Z, т. е.

$$S_T^{(2)} = \{X, Y, Z\}.$$

Теперь угловые астрометрические координаты спутника 2 определятся по формулам

$$tg\ \alpha_2 = \frac{Y}{X}, \quad tg\ \delta_2 = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

Для вычисления α_2, δ_2 по этим формулам необходимо знать знаки косинусов этих углов. Знак $\cos\alpha_2$ совпадает со знаком X, а $\cos\delta_2$ всегда положителен.

Аналогично можно определить координаты спутника 1, т. е. α_1, δ_1.

Вычисление разностей астрометрических координат спутников.

Если угловые координаты спутника измеряются на фотопластинках или ПЗС-матрицах относительно звезд, то в итоге получаются астрометрические прямое восхождение α и склонение δ. Их можно вычислить по приведенным выше формулам. Однако более точными являются измерения разностей угловых координат двух спутников. Эти разности можно найти по простым формулам

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \Delta\delta = \delta_1 - \delta_2. \tag{5}$$

Однако если разности координат малы, то при вычислениях по формулам (5) происходит вычитание двух близких друг другу чисел, что может привести к некоторой потере точности.

Чтобы избежать вычитания двух близких чисел, мы вывели формулы для вычисления $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ в ином виде. Обозначим компоненты вектора $S_T^{(1)}$ следующим образом:

$$S_T^{(1)} = \{X + \Delta_x, Y + \Delta_y, Z + \Delta_z\}.$$

Слагаемые $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ можно определить как компоненты разности векторов $S_T^{(1)}$ и $S_T^{(2)}$:

$$S_T^{(1)} - S_T^{(2)} = \{\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z\} = P(t_1) - P(t_2) + S_p^{(1)}(t_1) - S_p^{(2)}(t_2). \tag{6}$$

Далее величины $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ мы предлагаем вычислять по формулам

$$\begin{gathered}
R^2 = X^2 + Y^2, \\
tg\ \Delta\alpha = \tfrac{-Y\Delta_x + X\Delta_y}{R^2 + X\Delta_x + Y\Delta_y}, \\
A = 2R^2 Z\Delta_z - 2Z^2(X\Delta_x + Y\Delta_y) + R^2\Delta_z^2 - Z^2(\Delta_x^2 + \Delta_y^2), \\
B = R\sqrt{(X + \Delta_x)^2 + (Y + \Delta_y)^2} + Z(Z + \Delta_z), \\
C = R(Z + \Delta_z) + Z\sqrt{(X + \Delta_x)^2 + (Y + \Delta_y)^2}, \\
tg\ \Delta\delta = \tfrac{A}{BC}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Вычисление углового расстояния между спутниками.

В процессе уточнения орбит естественных спутников планет помимо разностей угловых координат в качестве измеряемой величины используется также угловое расстояние между спутниками.

Особый случай представляют фотометрические наблюдения взаимных покрытий спутников. Измеряется суммарная яркость спутников, участвующих в процессе покрытия. Яркость уменьшается, когда изображения спутников перекрываются. При этом один спутник заслоняет часть поверхности другого. Уменьшение суммарной яркости зависит от углового расстояния между спутниками.

Мы предлагаем для вычисления углового расстояния между спутниками s следующую формулу:

$$tg\ s = \frac{\sqrt{(Y\Delta_z - Z\Delta_y)^2 + (Z\Delta_x - X\Delta_z)^2 + (X\Delta_y - Y\Delta_x)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2 + X\Delta_x + Y\Delta_y + Z\Delta_z}.$$

Разности угловых координат двух спутников $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ и их угловое расстояние s называют дифференциальными координатами.

Время распространения света в пределах систем спутников планет весьма мало. Поэтому разность $P(t_1) - P(t_2)$ также мала. Алгоритмы планетной теории таковы, что при малых значениях разности $t_1 - t_2$ выражение $P(t_1) - P(t_2)$ в формуле (6) вычисляется со значительно более высокой точностью, чем сами вектора $P(t_1)$ и $P(t_2)$ по отдельности. Это происходит потому, что систематические ошибки теории мало отличаются для близких моментов времени, и в разности $P(t_1) - P(t_2)$ эти ошибки взаимно уничтожаются.

На остальных этапах вычислений по предлагаемым формулам не происходит потери точности из-за вычитания двух близких чисел.

Тангенциальные координаты спутников.

Заметим, что в практике обработки астрометрических наблюдений естественных спутников планет кроме дифференциальных угловых координат используют также так называемые тангенциальные координаты небесных тел. Это линейные координаты в плоскости изображения. Начало координат совпадает с оптическим центром поля зрения, одна из осей, X_t , направлена по касательной к изображению небесной параллели в сторону востока, а другая, Y_t , – перпендикулярно первой оси к северу. Линейной единицей измерений является фокусное расстояние телескопа. Приближенно разности тангенциальных координат

двух спутников совпадают с их дифференциальными угловыми координатами, однако точные формулы для вычисления разностей тангенциальных координат отличаются от формул для дифференциальных угловых координат.

Обычно задаются тангенциальные координаты одного небесного тела относительно другого. Тогда считают, что изображение этого другого тела находится точно на оптической оси, а плоскость изображения перпендикулярна этой оси. Допустим, что нужно вычислить гангенциальные координаты спутника 1 относительно спутника 2. Пусть, как и выше, топоцентрический радиус вектор первого спутника

$$S_T^{(1)} = \{X + \Delta_x, Y + \Delta_y, Z + \Delta_z\},$$

а топоцентрический радиус вектор второго спутника

$$S_T^{(2)} = \{X, Y, Z\}.$$

Тогда тангециальные координаты можно определить по следующим формулам:

$$X_t = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}(-\Delta_x Y + \Delta_y X)}{\sqrt{X^2 + Y^2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + \Delta_x X + \Delta_y Y + \Delta_z Z)},$$

$$Y_t = \frac{-\Delta_x XZ - \Delta_y YZ + \Delta_z(X^2 + Y^2)}{\sqrt{X^2 + Y^2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + \Delta_x X + \Delta_y Y + \Delta_z Z)}.$$

Отметим, что вектор $S_T^{(1)}$ вычисляется на момент времени t_1 , а вектор $S_T^{(2)}$ – на момент времени t_2 , где моменты t_1 , t_2 связаны с моментом наблюдения t_0 соотношениями

Определение разности координат двух спутников планеты в случае обработки фотометрических наблюдений взаимных затмений спутников

Фотометрические наблюдения взаимных затмений двух спутников планеты позволяют с высокой точностью определять взаимные расположения спутников. Рассматриваемое явление состоит в том, что один из спутников частично или полностью попадает в тень, отбрасываемую другим спутником. При этом его яркость во время наблюдений с Земли уменьшается. Уменьшение яркости затмеваемого спутника можно

измерить с помощью фотометра или ПЗС-матрицы. Яркость затмеваемого спутника в первую очередь зависит от гелиоцентрического углового расстояния двух спутников. Она зависит также от угла между направлениями с затмеваемого спутника на Солнце и на Землю, т. е. от угла фазы спутника, который в данном случае может быть вычислен достаточно приближенно. Что касается гелиоцентрического углового расстояния двух спутников, то именно эта величина определяет изменения яркости затмеваемого спутника во времени, т. е. кривую яркости спутника. При обработке рассматриваемых фотометрических наблюдений необходимо точно моделировать процесс распространения света, учитывая конечность скорости его распространения. Эффекты общей теории относительности влияют значительно меньше, и мы ими пренебрегаем.

Модель рассматриваемого явления поясняет рис. 1. В некоторый момент времени t_2 фотоны, излученные Солнцем, двигаясь прямолинейно, достигли спутника 2. Часть из них попала на поверхность этого спутника. Другие, двигаясь по близким к нему траекториям, проследовали далее. Гелиоцентрический радиус-вектор спутника 2 в момент времени t_2 обозначим через $S^{(2)}(t_2)$. Используя планетную и спутниковую теории, его можно вычислить по формуле

$$S^{(2)}(t_2) = P(t_2) + S_p^{(2)}(t_2). \tag{8}$$

Рассматриваемая группа фотонов достигла спутника 1 в некоторый момент t_1, была рассеяна его поверхностью и проследовала далее в сторону наземного наблюдателя. В момент времени t_0 они достигли Земли и сформировали изображение затмеваемого спутника в фотоприемнике телескопа. История других фотонов, излучаемых Солнцем, аналогична, но все события происходят в другие моменты времени.

Гелиоцентрический радиус-вектор спутника 1 в момент времени t_1 мы обозначим через $S^{(1)}(t_1)$. Его можно вычислить по формуле

$$S^{(1)}(t_1) = P(t_1) + S_p^{(1)}(t_1). \tag{9}$$

Разность моментов t_1 и t_2 задается соотношением

$$t_1 - t_2 = \frac{|S^{(1)}(t_1) - S^{(2)}(t_2)|}{c}. \tag{10}$$

Для определения векторов $S^{(2)}(t_2)$ и $S^{(1)}(t_1)$ необходимо знать моменты времени t_1 и t_2. Связь моментов t_0 и t_1 дается соотношениями

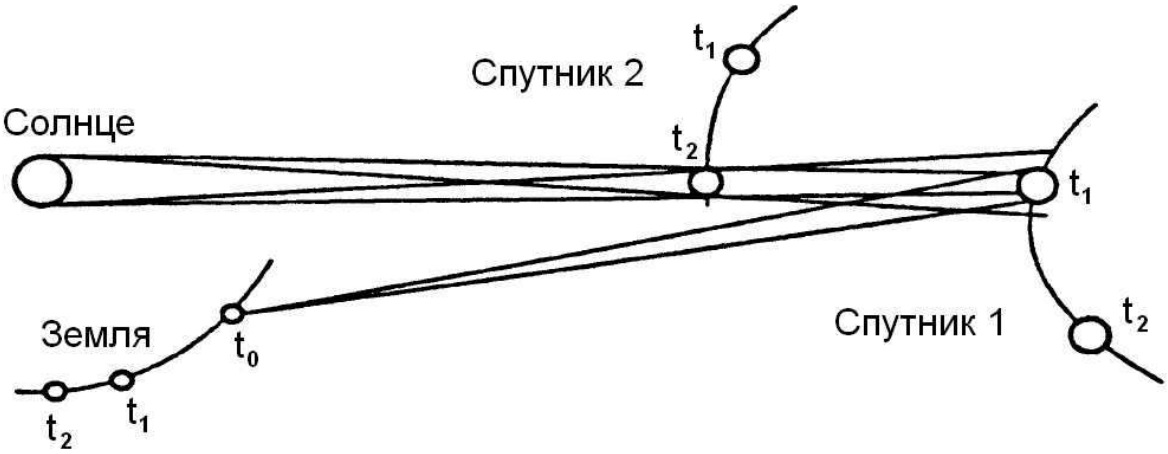

Рис. 1: Схема распространения света при наблюдениях взаимных затмений спутников планет.

(1), (2). Для заданного момента наблюдения t_0 моменты t_1 и t_2 можно вычислить путем совместного решения итерациями уравнений (1), (2), (9), (10). В нулевом приближении полагаем $t_2 = t_1 = t_0$.

Очевидно, что степень затененности спутника 1 зависит от угла между векторами $S^{(2)}(t_2)$ и $S^{(1)}(t_1)$, который мы назовем эффективным гелиоцентрическим угловым расстоянием двух спутников и обозначим его через s^*. Компоненты векторов $S^{(2)}(t_2)$ и $S^{(1)}(t_1)$ обозначим следующим образом:

$$S^{(1)}(t_1) = \{\xi, \eta, \zeta\}, \quad S^{(2)}(t_2) = \{\xi + \Delta_\xi, \eta + \Delta_\eta, \zeta + \Delta_\zeta\}.$$

Тогда s^* определится формулой

$$tg\ s^* = \frac{\sqrt{(\eta\Delta_\zeta - \zeta\Delta_\eta)^2 + (\zeta\Delta_\xi - \xi\Delta_\zeta)^2 + (\xi\Delta_\eta - \eta\Delta_\xi)^2}}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \xi\Delta_\xi + \eta\Delta_\eta + \zeta\Delta_\zeta},$$

где малые приращения $\Delta_\xi, \Delta_\eta, \Delta_\zeta$ следует определять по формуле

$$\{\Delta_\xi, \Delta_\eta, \Delta_\zeta\} = S^{(2)}(t_2) - S^{(1)}(t_1) = P(t_2) - P(t_1) + S_p^{(2)}(t_2) - S_p^{(1)}(t_1).$$

Заметим, что при вычислениях s^* по приведенным выше формулам не происходит потери точности из-за вычитания двух близких чисел.

Если, кроме углового гелиоцентрического расстояния, необходимо вычислять разности угловых гелиоцентрических координат двух спутников, можно воспользоваться формулами, аналогичными формулам (7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Емельянов Н. В. Связь астрометрических и теоретических координат спутников планет. Астрон. вестн. 1999. Т. 33. N. 2. С.154-158.