Н.В.Емельянов

ПРАКТИЧЕСКАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Оглавление.

Глава 5. **Построение моделей движения небесных тел на основе наблюдений.**

5.61. Вычисление измеряемых величин и частных производных от измеряемых величин по уточняемым параметрам.

5.61.1. Порядок вычисления измеряемых величин и производных от измеряемых величин по уточняемым параметрам.

В процессе дифференциального уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений требуется вычислять значения измеряемых величин и частных производных от измеряемых величин по уточняемым парамематрам на моменты наблюдений. Эти вычисления делаются на основе принятого закона движения небесных тел. Закон движения описывается в какой-либо системе координат. Чаще всего это прямоугольные координаты x, y, z. Таким образом, в методе дифференциального уточнения параметров движения измеряемая величина ξ, как функция уточняемых параметров $p_1, p_2, ..., p_n$, является сложной функцией. Она представляется первоначально как функция от прямоугольных координат небесного тела, которые в свою очередь в силу закона движения являются функциями времени t и параметров движения. Зависимость $\xi(x, y, z)$ не связана с законом движения небесного тела, однако она может включать в себя время t и некоторые параметры, которые также могут рассматриваться как уточняемые. В отличие от параметров движения небесного тела назовем их параметрами условий наблюдений. Функция $\xi(x, y, z)$ определяется только выбором измеряемой величины. В астрономической практике используется большое множество величин, измеряемых в процессе наблюдений. В следующем параграфе рассматриваются некоторые из них, и даются явные выражения для функции $\xi(x, y, z)$.

Вычисление координат небесного тела x, y, z делается либо по формулам построенной заранее аналитической теории движения, либо на основе численного интегрирования уравнений движения.

Частные производные от измеряемых величин по уточняемым параметрам на моменты наблюдений вычисляются на основе рассмотренных выше зависимостей. Так как промежуточными величинами являются координаты небесного тела x, y, z, то для искомых производных можно записать следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial p_1} \\ \frac{\partial\xi}{\partial p_2} \\ \ldots \\ \frac{\partial\xi}{\partial p_n} \end{pmatrix} = K \cdot B, \quad K = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p_1} & \frac{\partial y}{\partial p_1} & \frac{\partial z}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x}{\partial p_2} & \frac{\partial y}{\partial p_2} & \frac{\partial z}{\partial p_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x}{\partial p_n} & \frac{\partial y}{\partial p_n} & \frac{\partial z}{\partial p_n} \end{pmatrix}. \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} \\ \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\xi}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Как видно из этих соотношений, вычислительная задача разделяется на две независимые части. В первой из них находятся значения частных прозводных от прямоугольных координат по параметрам движения небесного тела. Во второй – производные от измеряемой величины по прямоугольным координатам небесного тела. В соответствие с этим назовем матрицу K матрицей параметров, так как она зависит только от выбора уточняемых параметров $p_1, p_2, ..., p_n$. Вектор-столбец B назовем вектором функции, он определяется выбором измеряемой функции $\xi(x, y, z)$.

Вектор функции B вычисляется по формулам, получаемым дифференцированием явного выражения для $\xi(x, y, z)$. Вычисление матрицы параметров K может выполняться для каждого момента наблюдений как по формулам, следующим из теории движения, так и в процессе численного интегрирования дифференциальных уравнений, специально построенных для частных производных от координат по параметрам движения. В последнем случае элементы матрицы K называют изохронными производными, а дифференциальные уравнения для них интегрируют совместно с уравнениями движения.

Формулы для вычисления матрицы K в случаях использования формул аналитической теории движения и дифференциальные уравнения для изохронных производных в конкретных задачах рассматриваются в следующих параграфах.

5.61.2. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в некоторых конкретных случаях.

5.61.2.1. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче трех тел. Уточнение параметров движения возмущаемого тела.

Рассмотрим процедуру дифференциального уточнения параметров движения в случае задачи трех тел. Поскольку точного аналитического решения задачи трех тел до сих пор не найдено, уравнения движения в этой задаче решаются методами численного интегрирования. В качестве параметров движения в этом случае чаще всего рассматривают начальные условия, то есть значения координат на некоторый начальный момент времени t_0.

В рассматриваемой задаче определяются параметры движения второго тела относительно первого из наблюдений второго тела. Движение происходит под возмущающим действием третьего тела, движение которого задано координатами, как функциями времени.

В общем случае могут определяться из наблюдений параметры движения второго и третьего тела в едином процессе дифференциального уточнения. Тогда уравнения движения и изохронные производные второго и третьего тел интегрируются совместно.

Тела будем считать материальными точками. Начало системы невращающихся прямоугольных координат поместим в первое из тел. Координаты второго тела, движение которого изучается, обозначим через x_1, x_2, x_3. Координаты третьего, возмущающего тела обозначим через x_1', x_2', x_3' .

Уравнения движения второго тела в принятых обозначениях запишутся в виде

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -fm\frac{x_i}{r^3} - fm'\left(\frac{x_i - x_i'}{\Delta^3} + \frac{x_i'}{{r'}^3}\right) = F_i \quad (i = 1, 2, 3)\ , \qquad (2)$$

где f – гравитационная постоянная, m – масса первого тела, m' – масса возмущающего тела. Кроме того, мы используем следующие обозначения:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad r' = \sqrt{{x_1'}^2 + {x_2'}^2 + {x_3'}^2},$$

$$\Delta = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')}.$$

Уравнения движения третьего тела могут быть записаны аналогично.

Заметим, что приводимые ниже формулы будут пригодны и для более общего случая, когда координаты возмущающего тела вычисляются на основе более сложной модели, учитывающей влияние других тел.

Параметрами изучаемого движения второго тела будут начальные условия, то есть координаты и компоненты скорости

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ \dot{x}_1^{(0)},\ \dot{x}_2^{(0)},\ \dot{x}_3^{(0)},$$

заданные на момент времени t_0.

Искомые частные производные, необходимые для дифференциального уточнения параметров, образуют матрицу

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_1^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_1^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_3^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \dot{x}_1^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial \dot{x}_1^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial \dot{x}_1^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \dot{x}_2^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial \dot{x}_2^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial \dot{x}_2^{(0)}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \dot{x}_3^{(0)}} & \frac{\partial x_2}{\partial \dot{x}_3^{(0)}} & \frac{\partial x_3}{\partial \dot{x}_3^{(0)}} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Для элементов этой матрицы можно составить дифференциальные уравнения путем дифференцирования левых и правых частей уравнений (2) по параметру. Выполняя последовательно эту операцию для каждого из параметров, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^{(0)}}\right) = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_j^{(0)}}\ , \tag{4}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_j^{(0)}}\right) = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \dot{x}_j^{(0)}}\ , \tag{5}$$

$$(i, j = 1, 2, 3),$$

где

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_n} = fm\frac{1}{r^3}\left(\frac{3}{r^2}x_i x_n - \delta_{in}\right) + fm'\frac{1}{\Delta^3}\left[\frac{3}{\Delta^2}(x_i - x'_i)(x_n - x'_n) - \delta_{in}\right]\ ,$$

$$\delta_{in} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = n \\ 0 \text{ при } i \neq n \end{cases}$$

При этом численное интегрирование уравнений (4) и (5) следует выполнять совместно с уравнениями (2). Начальные условия для уравнений (4) и (5) определятся матрицами

$$K_0 = K|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

$$\dot{K}_0 = \dot{K}|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

5.61.2.2. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче трех тел. Уточнение массы возмущающего тела.

Рассмотрим движение второго из трех тел под действием притяжения первого тела и возмущающим влиянием третьего тела. Из наблюдений движения второго тела можно определять параметры его движения. Кроме того совместно с начальными условиями второго тела можно определять массу возмущающего тела. Такое определение следует делать обязательноо совместно, поскольку при коррекции массы возмущающего тела параметры движения второго тела будут уже другими.

В такой задаче уточняемыми параметрами будут начальные условия, то есть координаты и компоненты скорости

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ \dot{x}_1^{(0)},\ \dot{x}_2^{(0)},\ \dot{x}_3^{(0)},$$

заданные на момент времени t_0 для второго тела и масса m' возмущающего тела. В этом случае к матрице (3) нужно добавить еще одну строку

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial m'} & \frac{\partial x_2}{\partial m'} & \frac{\partial x_3}{\partial m'} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Для элементов этой строки можно составить следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial m'}\right) = -\left(\frac{x_i - x_i'}{\Delta^3} + \frac{x_i'}{r'^3}\right) + \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial m'}\,, \tag{9}$$

Тогда нужно интегрировать совместно уравнения движения (2), уравнения (4), (5) и (9). Начальными условиями для переменных (8) будут

$$\begin{gathered} \frac{\partial x_1}{\partial m'} = 0,\ \frac{\partial x_2}{\partial m'} = 0,\ \frac{\partial x_3}{\partial m'} = 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_1}{\partial m'}\right) = 0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_2}{\partial m'}\right) = 0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_3}{\partial m'}\right) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

5.51.2.3. Дифференциальные уравнения для изохронных производных в задаче о движении спутника сжатой планеты.

Рассмотрим процедуру дифференциального уточнения параметров движения спутника в случае учета возмущений от несферичности планеты. В этой задаче возмущения элементов промежуточной орбиты спутника могут определяться методами теории возмущений в аналитическом виде. Однако уравнения движения спутника могут также решаться численным интегрированием. В таком случае в качестве параметров движения рассматривают начальные условия, то есть значения координат на некоторый начальный момент времени t_0.

Силовую функцию притяжения несферичной планеты используют в форме разложения в ряд по шаровым функциям. Это разложение подробно рассмотрено в параграфе 2.52 . Поскольку разложение силовой функции в этом случае записывается в системе координат, связанной с осью симметрии сжатого тела, то мы должны выбрать плоскость (x_1, x_2) параллельной плоскости экватора планеты. Возьмем в разложении только главный член, описывающий динамическое сжатие планеты, а именно вторую зональную гармонику. Для других членов разложения уравнения для изохронных производных могут быть выведены аналогично.

Прямоугольные планетоцентрические координаты спутника обозначим через x_1, x_2, x_3. Уравнения движения с учетом второй зональной гармоники разложения силовой функции притяжения планеты запишем в следующей форме:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -fm\frac{x_i}{r^3} + \frac{3}{2} fmJ_2 \frac{r_0^2}{r^5} x_i \left(5\frac{x_3^2}{r^2} - e_i\right) = F_i \quad (i = 1, 2, 3) \ , \tag{11}$$

где f – гравитационная постоянная, m – масса планеты, J_2 – коэффициент при второй зональной гармонике разложения силовой функции притяжения планеты, r_0 – средний экваториальный радиус планеты. Кроме того, мы используем следующие обозначения:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = 3.$$

Параметрами изучаемого движения спутника будут начальные условия, то есть координаты и компоненты скорости

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ \dot{x}_1^{(0)},\ \dot{x}_2^{(0)},\ \dot{x}_3^{(0)},$$

заданные на момент времени t_0.

Искомые частные производные, необходимые для дифференциального уточнения параметров, образуют матрицу вида (3). Для элементов этой матрицы можно составить дифференциальные уравнения путем дифференцирования левых и правых частей уравнений (11) по параметру. Выполняя последовательно эту операцию для каждого из параметров, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^{(0)}}\right) = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_j^{(0)}} \ , \tag{12}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_j^{(0)}}\right) = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \dot{x}_j^{(0)}} \ , \tag{13}$$

$$(i, j = 1, 2, 3),$$

В данном случае имеем

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_n} = fm\frac{1}{r^3}\left(\frac{3}{r^2} x_i x_n - \delta_{in}\right) +$$

$$+\frac{3}{2}fmJ_2\frac{r_0^2}{r^5}\left[\left(5\frac{x_3^2}{r^2}-e_i\right)\delta_{in}-35\frac{x_3^2}{r^4}x_ix_n+10\frac{x_3x_i}{r^2}f_n+5\frac{x_ix_n}{r^2}e_i\right], \quad (14)$$

где введено обозначение

$$f_1=0, \quad f_2=0, \quad f_3=1\ .$$

Начальными условиями при интегрировании уравнений (12) и (13) следует взять (6), (7).

Заметим, что в случае, когда одновременно учитывается возмущающее влияние третьего тела и сжатия планеты, системы координат для переменных в уравнениях (2) и (11) могут быть различными. Это различие нужно учитывать также в уравнениях для изохронных производных.

Частные производные от правых частей уравнений движения при учете возмущений от четвертой зональной гармоники разложения силовой функции притяжения несферичной планеты

В обозначениях, принятых выше, правые части уравнений имеют вид

$$F_i=A\left(a_i\frac{x_i}{r^7}+b_i\frac{x_3^2x_i}{r^9}+c\frac{x_3^4x_i}{r^{11}}\right)\ ,$$

где

$$A=\frac{5}{8}Gmr_0^4J_4\ ,$$

$$a_1=3, \quad ,a_2=3, \quad ,a_3=15, \quad ,$$

$$b_1=-42, \quad ,b_2=-42, \quad ,b_3=-70, \quad ,$$

$$c=63,$$

Частные производные по координатам найдутся в виде

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_n}=A\left(a_iF_{in}^{(1)}+b_iF_{in}^{(2)}+cF_{in}^{(3)}\right)\ ,$$

где

$$F_{in}^{(1)}=\frac{\delta_{in}}{r^7}-\frac{7x_ix_n}{r^9}$$

$$F_{in}^{(2)}=\frac{x_3^2\delta_{in}}{r^9}-\frac{9x_3^2x_ix_n}{r^{11}}+f_n\frac{2x_3x_i}{r^9}$$

$$F_{in}^{(3)}=\frac{x_3^4\delta_{in}}{r^{11}}-\frac{11x_3^4x_ix_n}{r^{13}}+f_n\frac{4x_3^3x_i}{r^{11}}\ .$$

Литература

1. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. – М.: Наука, 1976.
2. Щиголев Б.М. Математическая обработка наблюдений. – 3-е изд.– М.: Наука, 1969.
3. Емельянов Н.В. Методы составления алгоритмов и программ в задачах небесной механики. – М.: Наука, 1983.