

МГУ им. М.В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра астрофизики и звездной астрономии
Кафедра экспериментальной астрономии

Методическое пособие к задаче специального астрономического практикума для студентов 4 курса физического факультета МГУ, обучающихся по программе МС_Астрономия (специальность 03.05.01 "Астрономия")

"ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ГАЛАКТИКИ ПО ЛУЧЕВЫМ СКОРОСТЯМ И СОБСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЯМ ЗВЕЗД"

**Составитель:
профессор Расторгуев Алексей Сергеевич**

2019

Цель работы

Определение кинематических характеристик населения дисковых галактик – это классическая задача звездной астрономии. В последние годы она получила новый импульс для своего решения. Причиной тому – гигантский рост как объема, так и качества наблюдательного материала. Впервые появление высокоточных собственных движений (например, полученных в рамках проекта HIPPARCOS в 1997 и 2007 г.) сделало тангенциальные скорости звезд почти такими же точными, как и лучевые, и дало возможность использовать для этих целей пространственные скорости звезд. Появление результатов GAIA DR2 в 2018 г. благодаря беспрецедентно высокоточным собственным движениям, достаточно точным измерениям лучевых скоростей звезд поздних спектральных классов и, наконец, измеренным тригонометрическим параллаксам, позволило вывести задачи изучения кинематики Галактики на новый уровень.

При изучении кинематики звездных населений решаются следующие тесно связанные между собой задачи:

- (1) Строится кривая вращения диска, представляющая собой зависимость линейной скорости вращения диска от галактоцентрического расстояния. Кривая вращения отражает распределение массы в галактике и вклад в неё различных компонентов (диск, балдж, барионное гало, тёмная материя).
- (2) Определяются компоненты пекулярной скорости Солнца относительно локальной выборки исследуемых объектов.
- (3) Оцениваются компоненты дисперсии скоростей исследуемой популяции объектов.

Эти задачи и являются целью данной работы.

Теоретическое введение

Построение кривой вращения галактического диска непосредственно связано со следующими актуальными направлениями исследований кинематики и динамики Галактики и астрофизики вообще:

- (А) Как известно, дифференциальное вращение является основным крупномасштабным движением в диске Галактики. Как показывают исследования, отклонения от него сравнительно невелики (обычно не более 10% от величины круговой скорости в окрестности Солнца). Обычно их объясняют возмущениями со стороны спиральных рукавов (и, вероятно, со стороны массивного бара), и правильное «снятие»

вращения облегчает задачу восстановления картины спирального узора по кинематическим данным и анализ особенностей поля остаточных скоростей.

(Б) Изучение дифференциального вращения различных подсистем диска, различающихся возрастом и пространственным распределением, дает информацию об их происхождении и динамической эволюции.

(В) В радиоастрономии кривая вращения часто является единственным доступным средством оценки расстояния до объекта с известной лучевой скоростью, если других прямых методов локализации источников радиоизлучения (космические мазеры, молекулярные облака и др.) нет.

(Г) Наблюдаемое поле пространственных скоростей весьма чувствительно к принимаемой величине расстояния до центра Галактики. Моделирование кривой вращения часто позволяет оценить и этот важнейший параметр. Сама же кривая вращения плоских подсистем обычно используется как основной критерий адекватности моделей распределения массы в Галактике.

Хорошо известно, что различные подсистемы диска Галактики вращаются с разной скоростью, зависящей от дисперсии остаточных скоростей [1,5]. Это «отставание» центроидов от локального стандарта покоя находит полное объяснение в рамках гидродинамического описания осесимметричной галактики [2]. Наибольшей скоростью вращения обладают самые кинематически «спокойные» подсистемы с наименьшей дисперсией скоростей – газ (нейтральный и молекулярный водород), а из звездных подсистем – наиболее молодые звезды и звездные ассоциации, а также рассеянные скопления с возрастом менее 10^8 лет. Именно к таким объектам относятся и *классические цефеиды*. Эти пульсирующие переменные звезды играют в современной астрономии исключительно важную роль благодаря наличию у них четкой связи периода пульсаций со светимостью (зависимость «период - светимость»). Например, по данным многоцветной BVRIJK-фотометрии 9 цефеид - членов рассеянных скоплений нашей Галактики эта зависимость в лучах В и V имеет вид [3]:

$$\begin{aligned}\langle M_B \rangle_I &= -0.77^m - 2.40^m \cdot \lg P, \\ \langle M_V \rangle_I &= -1.01^m - 2.87^m \cdot \lg P, \end{aligned} \quad (1)$$

где P – период фундаментального тона пульсаций, а нижний индекс I обозначает абсолютную величину, соответствующую потоку излучения, усредненному по периоду пульсаций. Для определения

фотометрических расстояний цефеид необходимо знать поглощение света, определяемое через избыток цвета. Их определение – отдельная задача, но в первом приближении для этой цели можно использовать базу данных [4], благодаря чему удаётся определить достаточно надежные в случайном смысле гелиоцентрические расстояния цефеид.

Примечание: Чтобы излишне не усложнять работу, файл данных уже содержит фотометрические расстояния цефеид первого приближения, определённые в соответствии с (1).

Второй выборкой объектов, по которым можно изучить вращение галактического диска, являются мазерные источники в областях звездообразования, связанные с крайне молодыми звёздами. Их параллаксы, собственные движения и лучевые скорости измерены средствами РСДБ и также достаточно точны для цели данной работы.

Рассмотрим основные приемы, с помощью которых определяется кривая вращения объектов галактического диска по данным о лучевых скоростях, собственных движениях и, следовательно, их пространственных скоростях.

Выполнение работы

1. Кинематическая модель и основные обозначения

Картина движений в диске Галактики усложнена влиянием возмущений от спирального узора и другими потоковыми движениями. Однако дифференциальное вращение выделяется очень легко (см. рис. 1, на котором показана зависимость собственного движения по галактической долготе и лучевой скорости от галактической долготы для классических цефеид по данным GAIA DR2; на нём явно видны классические «двойные волны» по галактической долготе.) Поэтому мы рассмотрим простейшую модель *чисто кругового движения центроидов*. Кроме того, будем считать, что вектор вращательной скорости параллелен плоскости симметрии Галактики, а угловая скорость вращения *не зависит от z-координаты*. В рамках принятой модели влияние дифференциального вращения Галактики на лучевые скорости и собственные движения звезд описывается *формулами Ботлингера* [1]. Введем некоторые обозначения. Пусть V_r - лучевая скорость, μ_α

и μ_δ - компоненты собственного движения по прямому восхождению и склонению (перед началом вычислений следует убедиться, что Вы используете *локальные собственные движения* $\mu_\alpha = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \cos \delta$), μ_l и μ_b - компоненты собственного движения по галактической долготе и широте соответственно; $\omega(R)$ и $\omega_0 = \omega(R_0)$ - угловая скорость исследуемого центроида на расстоянии R и на расстоянии Солнца соответственно; r - гелиоцентрическое расстояние объекта; (u_0, v_0, w_0) - компоненты скорости Солнца относительно апекса в галактической прямоугольной системе координат (ось x которой направлена в центр Галактики, ось y - в направлении галактического вращения, z - к северному полюсу Галактики). Будем выражать собственные движения в мсд/год, линейные (в том числе лучевые) скорости в км/с, расстояния в кпк, а угловые скорости в единицах км/с/кпк. Для удобства введем коэффициент $k = 4.741 \text{ км с}^{-1} \text{ кпк}^{-1} (\text{мсд/год})^{-1}$, переводящий расстояния и собственные движения в линейные скорости и входящий в формулу $V_t = k \cdot \mu \cdot r$, где V_t - компонент тангенциальной скорости (по галактической долготе или широте).

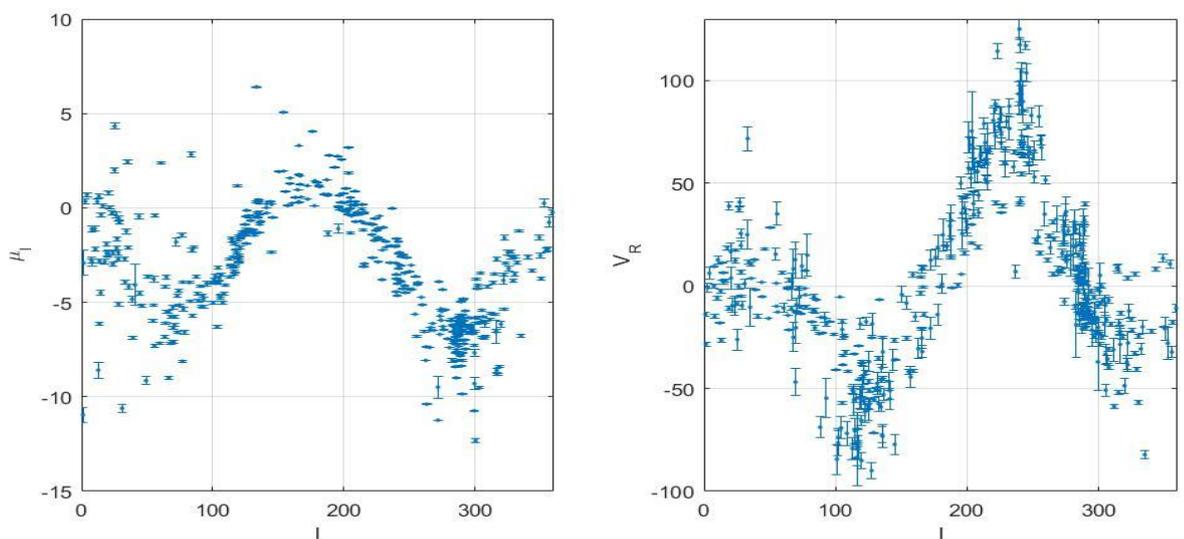


Рис.1 “Двойные волны” в собственных движениях по галактической долготе и в лучевых скоростях для выборки 530 цефеид Галактики по данным GAIA DR2.

2. Учет пекулярного движения Солнца

Мы будем считать компоненты скорости Солнца по отношению к используемой выборке объектов в локальной окрестности (U_0, V_0, W_0) неизвестными параметрами задачи.

3. Преобразование координат и собственных движений

Прежде всего, следует вычислить галактические координаты и соответствующие им компоненты собственного движения используемых объектов. Пусть в экваториальных координатах, отнесенных к равноденствию 2000 г., задан единичный радиус-вектор – столбец, направленный на звезду $\vec{r}_{eq} = (\cos\delta \cdot \cos\alpha \quad \cos\delta \cdot \sin\alpha \quad \sin\delta)^T$ (символ T означает транспонирование). Тогда переход от экваториальных координат к галактическим может быть произведен с помощью матрицы поворота

$$G_{eg} = \begin{pmatrix} -0.06699 & -0.87276 & -0.48354 \\ 0.49273 & -0.45035 & 0.74458 \\ -0.86760 & -0.18837 & 0.46020 \end{pmatrix};$$

где тот же единичный вектор в галактических координатах будет равен $\vec{r}_g = G_{eg} \cdot \vec{r}_{eq} = (x \quad y \quad z)^T$; а $b = \arcsin(z)$ - галактическая широта, $l = \arctg(y/x)$ – галактическая долгота.

Примечание: необходимо принять во внимание, что этот угол с учетом знаков аргументов может принимать значения от 0 до 360°, и для его определения следует использовать функцию $ATAN2(y/x)$ двух аргументов, имеющуюся практически во всех языках высокого уровня и вычислительных средах.

Галактические компоненты собственного движения можно рассчитать с использованием следующего приема: вначале зададим вспомогательные углы (экваториальные координаты Северного полюса Галактики) $A = 192.85948^\circ, D = 27.12825^\circ$, затем последовательно вычислим для каждого объекта:

$$s_1 = \sin\delta \cdot \sin D + \cos\delta \cdot \cos D \cdot \cos(\alpha - A)$$

$$s_2 = \sqrt{1 - s_1^2}$$

$$s_x = \cos D \cdot \sin(\alpha - A) / s_2$$

$$c_x = (\sin D \cdot \cos\delta - \cos D \cdot \sin\delta \cdot \cos(\alpha - A)) / s_2$$

$$\mu_l = \mu_\alpha \cdot c_x + \mu_\delta \cdot s_x$$

$$\mu_b = -\mu_\alpha \cdot s_x + \mu_\delta \cdot c_x$$

Примечание: для этой цели лучше использовать простую программу **equ2gal.m**, написанную автором данного описания на языке MatLab и легко адаптируемую для других вычислительных сред, доступную по адресу <http://lnfm1.sai.msu.ru/~milkyway/Software/equ2gal.m>

4. Поле пространственных скоростей и формулы Ботлингера

Общее выражение для поля пространственных скоростей, отражающих как дифференциальное вращение диска, так и движение Солнца по отношению к выборке объектов, можно записать в векторном виде [1,5]:

$$\begin{pmatrix} V_r \\ kr \mu_l \\ kr \mu_b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_0(\omega - \omega_0) \sin l \cos b \\ (R_0 \cos l - r \cos b)(\omega - \omega_0) - \omega_0 r \cos b \\ -R_0(\omega - \omega_0) \sin l \sin b \end{pmatrix} + G^T \times \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix} = \vec{V}_{pec}^{loc}$$

Здесь G^T – матрица поворота, переводящая вектор скорости Солнца из локальной прямоугольной галактической системы координат в систему координат, связанную с направлением на звезду (т.е. задающая вклад скорости Солнца относительно выборки в наблюдаемую пространственную скорость звезды):

$$G^T = \begin{pmatrix} \cos l \cos b & \sin l \cos b & \sin b \\ -\sin l & \cos l & 0 \\ -\cos l \sin b & -\sin l \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

\vec{V}_{pec}^{loc} – случайный вектор остаточной скорости, рассматриваемый как 3-мерная невязка модельного поля скоростей при решении задачи определения кинематических параметров. Для определения всех кинематических параметров с помощью метода максимального правдоподобия необходимо найти явное выражение для матрицы ковариации этого случайного вектора.

5. Матрица ковариации случайного вектора-невязки

Очевидно, что вектор-невязка отражает наличие пекулярных скоростей звёзд (которую часто называют «космической дисперсией» и ошибки наблюдательных данных [5]. Предположим для простоты, что:

- (А) форма и размеры эллипсоида скоростей, т.е. значения дисперсий пекулярных скоростей $(\sigma_u \sigma_v \sigma_w)$ не зависят от координат исследуемого центроида (в том числе и от z-координаты);
- (Б) малая ось эллипсоида скоростей параллельна оси вращения Галактики;
- (В) большая ось эллипсоида параллельна плоскости симметрии и направлена к оси вращения Галактики.

Эти предположения выполняются в реальной Галактике с хорошей точностью для многих плоских подсистем. Для решения задачи с применением метода максимального правдоподобия необходимо найти явное выражение для матрицы ковариации случайного вектора \vec{V}_{pec}^{loc} . Направление на объект в самом общем случае не совпадает с главными осями эллипсоида скоростей.

Рассмотрим треугольник «Солнце – центроид S – центр Галактики (GC)» в проекции на галактическую плоскость схематически изображен на рис. 2:

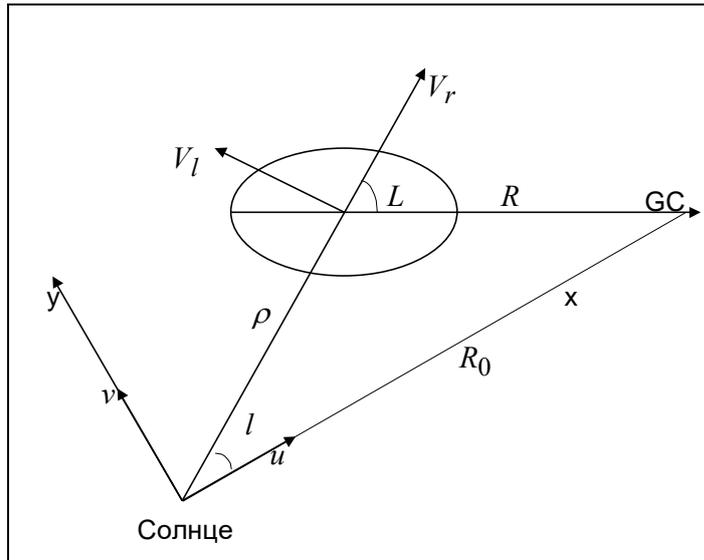


Рис. 2. Проекция эллипсоида скоростей на галактическую плоскость и вывод выражения для угла L между проекцией луча зрения и главной осью эллипсоида.

Здесь $\rho = r \cdot \cos b$ – расстояние до центроида S в проекции на плоскость Галактики; R_0 – расстояние от Солнца до центра Галактики и R – расстояние от оси вращения до исследуемого центроида. Оси (x, y) направлены соответственно на центр Галактики и параллельно вектору линейной скорости ее вращения; вместе с осью z они образуют правую тройку; (u, v) – компоненты скорости в галактической прямоугольной системе координат; (V_r, V_l) – лучевая и долготная тангенциальная компоненты скорости; l – галактическая долгота. Очевидно, что луч зрения наклонён по отношению к плоскости, в которой лежат большая и средняя оси эллипсоида скоростей, под углом b , равным галактической широте объекта. Вспомогательный угол L между лучом зрения и большой осью эллипсоида скоростей, определяющий ориентацию эллипсоида относительно луча зрения, вычисляется по очевидной формуле

$$\operatorname{tg} L = \frac{R_0 \cdot \sin l}{R_0 \cdot \cos l - r \cdot \cos b},$$

где r – гелиоцентрическое расстояние центроида S . Расстояние центроида S от оси Галактики вычисляется по формуле

$$R^2 = R_0^2 + r^2 \cdot \cos^2 b - 2rR_0 \cdot \cos b \cdot \cos l \quad (2)$$

Итак, найдем функцию распределения невязок пространственных скоростей в локальной системе координат, где компоненты скорости нам либо известны из измерений (лучевая скорость), либо могут быть легко вычислены по расстоянию и компонентам собственного движения (тангенциальные скорости по галактической долготе и широте). Наблюдаемый вектор скорости в этой (локальной, т.е. связанной с направлением на объект) системе отсчета можно записать в виде

$$\vec{V}_{loc} = \begin{pmatrix} V_r \\ V_l \\ V_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_r \\ kr \cdot \mu_l \\ kr \cdot \mu_b \end{pmatrix}.$$

Он включает как систематическое движение (связанное с дифференциальным вращением), так и остаточную (случайную) скорость, распределенную по эллипсоидальному закону Шварцшильда. Его три компонента также образуют правую тройку, ориентация которой относительно главных осей эллипсоида скоростей задается парой углов (b, L) (см. рис. 2).

Пусть \vec{e}_S – единичный вектор-столбец в системе координат, связанной с главными осями эллипсоида S, а \vec{e}_{loc} – тот же единичный вектор в локальной системе координат. Компоненты этих векторов связаны между собой преобразованием поворота от главных осей эллипсоида к локальным осям, осуществляющимся с помощью матрицы

$$G_S = \begin{pmatrix} \cos b \cos L & \cos b \sin L & \sin b \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ -\sin b \cos L & -\sin b \sin L & \cos b \end{pmatrix},$$

так что

$$\vec{e}_{loc} = G_S \times \vec{e}_S.$$

Пусть также форма и размеры эллипсоида скоростей задаются матрицей дисперсий (в нашем случае, неизвестных параметров задачи)

$$L_S = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_w^2 \end{pmatrix}$$

с постоянными коэффициентами, имеющей в главных осях диагональный вид. Тогда тензор дисперсий (или матрицу ковариации)

в локальной системе координат, связанной с направлением на объект, как легко понять, можно вычислить с помощью преобразования

$$L_{loc} = G_S \times L_S \times G_S^T,$$

где G_S^T – транспонированная матрица поворота. Наличие ошибок наблюдательных данных приводит к тому, что распределение невязок скоростей в локальных координатах описывается модифицированной матрицей ковариации

$$L_{obs} = L_{loc} + L_{err}, \quad (3)$$

причём матрицу ошибок скоростей в простейшем случае можно записать в виде

$$L_{err} = \begin{pmatrix} \sigma_{Vr}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 r^2 \sigma_{\mu l}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 r^2 \sigma_{\mu b}^2 \end{pmatrix},$$

где $(\sigma_{Vr}, \sigma_{\mu l}, \sigma_{\mu b})$ – ошибки лучевой скорости и собственных движений. При этом мы для простоты пренебрегли систематическими и случайными ошибками расстояний и взаимными корреляциями ошибок компонентов собственных движений.

6. Параметры поля пространственных скоростей

Для решения определения кинематических параметров Галактики обычно разлагают разность угловых скоростей в ряд Тейлора

$$(\omega - \omega_0) \approx \omega_0' (R - R_0) + \frac{1}{2!} \omega_0'' (R - R_0)^2 + \dots,$$

ограничиваясь, как правило, вторым–третьим порядком. Такое разложение дает хорошие результаты даже для расстояний порядка 5–6 кпк от Солнца. Рассматривая треугольник «Солнце – центр Галактики – центроид S» и применив к расстояниям теорему косинусов, легко вычислим R по известным гелиоцентрическим расстояниям объектов r и их галактическим координатам по формуле (2).

В итоге мы сформулировали задачу вычисления набора кинематических параметров

$$(U_0 V_0 W_0) (\sigma_u \sigma_v \sigma_w) (\omega_0 \omega'_0 \omega''_0 \dots) \quad (4)$$

Величину расстояния до центра Галактики проще всего считать известной. Хорошим выбором будет значение $R_0 = 8.2$ *кпк*, что в пределах ошибок отлично согласуется с данными, полученными в последние годы (в первую очередь, по движению звёзд вблизи центральной сверхмассивной чёрной дыры).

7. Принцип максимального правдоподобия

С учетом всего сказанного выше функция распределения остаточной скорости объекта относительно центроида \mathbf{S} с координатами (r, l, b) в локальной системе координат может быть записана в общем трёхмерном виде для нормального трёхосного распределения

$$f(\Delta\vec{V}) = (2\pi)^{-3/2} \cdot |L_{obs}|^{-1/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \Delta\vec{V}^T \times L_{obs}^{-1} \times \Delta\vec{V}\right\},$$

где разность между наблюдаемой (вычисленной) скоростью и модельной скоростью $\Delta\vec{V} = \vec{V}_{pec}^{loc}$, $|L_{obs}|$ и L_{obs}^{-1} – соответственно *определитель* и *обратная матрица* наблюдаемой матрицы ковариации (3) L_{obs} , а символ T обозначает операцию транспонирования.

Поскольку объекты распределены в пространстве скоростей независимо друг от друга, их N -частичная (полная или совместная) функция распределения равна произведению функций для всех объектов выборки:

$$F(\Delta\vec{V}_1, \dots, \Delta\vec{V}_N) = \prod_{i=1}^N f(\Delta\vec{V}_i), \quad (5)$$

где M – число объектов. Очевидно, что M -мерная совместная функция распределения остаточных скоростей (5) после подстановки значений $\Delta\vec{V} = \vec{V}_{pec}^{loc}$ будет зависеть только от набора кинематических параметров (4). Согласно *принципу максимального правдоподобия*, для реальной выборки совместное наблюдаемое распределение остаточных скоростей должно быть *наивероятнейшим* из всех возможных. Следовательно, входящие в выражение (5) кинематические параметры задачи (4) должны быть подобраны так,

чтобы значение плотности вероятности F на реальной выборке объектов было *максимальным из всех возможных*. Обычно для упрощения вычислений строят *функцию правдоподобия*

$$LF = -\ln F(\Delta\vec{V}_1, \dots, \Delta\vec{V}_N) = -\sum_{i=1}^N \ln f(\Delta\vec{V}_i)$$

и сводят задачу к *поиску минимума функции правдоподобия* LF с использованием одного из многочисленных алгоритмов оптимизации, имеющихся в современных вычислительных средах и языках программирования. Отметим метод Левенберга–Маркардта [9, стр. 523] и метод деформируемых многогранников Нелдера – Мида [9, стр. 289] (или симплекс-алгоритм). Первый из них обеспечивает быструю сходимость к решению, но требует явного (аналитического) задания производных от целевой функции по неизвестным параметрам, тогда как второй значительно медленнее, но не требует вычисления производных. В хорошо известной интегрированной среде MATLAB имеются алгоритмы минимизации, где производные вычисляются численно.

Легко видеть, что

$$LF = \frac{3}{2} N \cdot \ln 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\ln |L_{obs}(i)| + (\Delta\vec{V}_i' \times L_{obs}^{-1} \times \Delta\vec{V}_i)], \quad (6)$$

где индекс i относится к текущему объекту выборки.

8. Вычисление ошибок кинематических параметров.

Функция правдоподобия LF является сложной *нелинейной* функцией неизвестных кинематических параметров (4), описывающих выборку объектов. Строго говоря, ошибки параметров следует вычислять с учётом профиля функции правдоподобия вблизи глобального минимума, но это весьма сложная задача для многомерной оптимизации. Поэтому вычисление ошибок параметров проще всего производить следующим нестандартным (не связанным с линеаризацией минимизируемой функции) способом [7]. Пусть α_i^0 – какой-либо из найденных параметров задачи, LF_0 – минимальное значение функции правдоподобия, достигнутое в процессе решения. Зафиксируем измененное значение параметра $\alpha_i = \alpha_i^0 + \Delta\alpha_i$, где величина $\Delta\alpha_i$ мала (обычно в пределах нескольких процентов от α_i^0). Теперь при фиксированном значении этого параметра,

варьируя остальные, снова найдем минимальное значение функции правдоподобия, равное LF_i . Тогда среднеквадратичная ошибка параметра α_i вычисляется по формуле

$$\sigma_i^2 = \frac{\Delta\alpha_i^2}{2(LF_i - LF_0)}.$$

Очевидно, что $LF_i > LF_0$.

9. Наблюдательный материал и проведение вычислений.

Для выполнения работы предоставляется каталог цефеид, содержащий координаты звезд, их гелиоцентрические расстояния в кпк, вычисленные либо по зависимости «период - светимость» [3], либо по тригонометрическим параллаксам, лучевые скорости V_r и их ошибки, взятые из компилятивной сводки в работе [6], и компоненты собственных движений μ_α и μ_δ с их ошибками из каталога GAIA DR2 [8], или же аналогичный файл с данными для мазерных источников из работы [10].

Задача минимизации функции (6) существенно нелинейна по отношению к отыскиваемым параметрам (4). Влияние наблюдательных данных, обремененных большими случайными ошибками лучевых скоростей или собственных движений автоматически учитывается малым вкладом этих объектов в функцию правдоподобия (6), однако особое внимание следует обратить на те объекты, которые имеют сравнительно точные данные наблюдений, но сильно уклоняются от общего решения. Поэтому рекомендуется производить предварительные вычисления и выявлять объекты с большими отклонениями от общего решения.

10. Представление результатов

(А) Привести значения кинематических параметров с их вычисленными ошибками

(Б) Привести кривую вращения, т.е. график зависимости линейной скорости вращения от галактоцентрического расстояния

11. Литература

1. Расторгуев А.С. «Галактическая астрономия». Курс лекций. Лекции 18-21. <http://Infm1.sai.msu.ru/~milkyway/GA.HTM>
2. Binney J., Tremain S. «Galactic Dynamics». P.198. Princeton: Princeton University Press. 1987.
3. Бердников Л.Н., Возякова О.В., Дамбис А.К. «Зависимость период – светимость для классических цефеид Галактики в полосах BVRIJK.» Письма в астрон. журн. Т.22. N.12. С.936-944. 1996.
4. https://www.astro.utoronto.ca/DDO/research/cepheids/table_colourexcss.html
5. Расторгуев А.С. «Применение метода максимального правдоподобия для исследования кинематики галактических подсистем». Пособие для студентов. <http://www.astronet.ru:8101/db/msg/1172553>
6. Melnik A.M. et al. AN. V.336. P.70. 2015. (CDS VizieR J/AN/336/70/table1).
7. Hawley S.L., Jeffreys W.H., Barnes T.G., III, Wan Lai. Absolute magnitudes and kinematic properties of RR Lyrae stars. Astrophys.J. V.302. P.626-631. 1986.
8. GAIA DR2: CDS VizieR I/345/gaia2 (<https://www.cosmos.esa.int/web/gaia>)
9. Press W.H., Flannery B.P., Teukolski S.A., Vetterling W.T. «Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing». Cambridge: Cambridge University Press. 1987.
10. Расторгуев А.С., Уткин Н.Д., Заболотских М.В., Байкова А.Т., Бобылев В.В. «Галактические мазеры: кинематика, спиральная структура и динамическое состояние диска». Астрофизический Бюллетень. Т.72. №2. 2017