МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА АСТРОФИЗИКИ И ЗВЕЗДНОЙ АСТРОНОМИИ
КАФЕДРА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ АСТРОНОМИИ

А.С. РАСТОРГУЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КИНЕМАТИКИ ГАЛАКТИЧЕСКИХ ПОДСИСТЕМ

Учебное пособие по курсу «Галактическая астрономия» для студентов 2-3 курса

Москва, ГАИШ МГУ, 2002

Оглавление

1 Введение 4

2 Расстояния до объектов 5

3 Системы координат 9

4 Кинематическая модель 11

5 Основные формулы 13

6 Тензор ковариации 16

7 Остаточные скорости 17

7.1 Выбор значения R_0 19

8 Чисто круговые движения 20

9 Двумерное поле скоростей 21

10 Лучевые скорости 22

11 Вычисление ошибок параметров 23

12 Метод решения 24

1 Введение

Исследование кинематики галактических подсистем до сих пор остается одной из важнейших задач звездной астрономии. По-видимому, М.Ковальский в 1859 г. первым высказал мысль о вращении Галактики и разработал математическую теорию определения параметров вращения из анализа собственных движений звезд. Однако точность имевшихся в то время собственных движений была недостаточна, и вращение Галактики обнаружено не было. Эту идею реализовал Л.Струве в 1887 г. Считая вращение Галактики твердотельным, он получил удивительно правдоподобную оценку угловой скорости вращения (0.0041"/год по сравнению с современным значением 0.0058"/год), хотя и с ошибкой порядка 100%. Дальнейшее развитие представлений о вращении Галактики связано с работами Г.Стремберга 1920-х г. Анализируя распределение величин и направлений векторов скоростей звезд в окрестности Солнца, разделенных на несколько групп по спектральным классам, он обнаружил, что по мере увеличения средней скорости группы увеличивается и дисперсия скоростей, причем более быстрые звезды движутся относительно Солнца преимущественно в направлении галактической долготы $l = 270°$.

Для объяснения этих результатов Г.Стремберг, Я.Оорт, Б.Линдблад и К.Боттлингер разработали концепцию дифференциального вращения Галактики, существенным пунктом которой стало положение о том, что различные подсистемы вращаются в Галактике с разной скоростью. В последующие годы огромное количество исследований было посвящено определению основных кинематических параметров, характеризующих закон вращения Галактики и движение Солнца относительно различных подсистем звезд. В основном для этих целей использовались лучевые скорости звезд, поскольку высокоточных собственных движений далеких звезд (а именно далекие окрестности наиболее интересны для исследования) явно недоставало. (Тем не менее, сразу же отметим, что сама величина угловой скорости вращения Галактики, ω_0, может быть оценена только по собственным движениям.) В большинстве кинематические параметры вычислялись с помощью простых модификаций метода наименьших квадратов, поскольку вопрос о случайных (и тем более систематических!) ошибках лучевых скоростей, собственных движений и расстояний оставался за рамками исследований.

К концу XX века накоплены богатейшие данные по параллаксам (как тригонометрическим, так и фотометрическим) звезд, звездных скоплений и звездных ассоциаций.

Благодаря появлению корреляционных методов с высокой точностью измерены лучевые скорости десятков тысяч звезд (хотя, к сожалению, ситуация со звездами ранних спектральных классов O-B-A все еще далека от желаемой из-за специфических трудностей, возникающих при измерении их лучевых скоростей). Радиоастрономическими методами в 1970-е и 1980-е годы измерены лучевые скорости сотен молекулярных облаков (и, следовательно, связанных с ними облаков ионизованного водорода HII). Главным же достижением 1990-х годов стало появление массовых высокоточных каталогов собственных движений звезд – HIPPARCOS [7], TRC [9], TYCHO-2 [10] – в которых как случайные, так и систематические ошибки невелики.

Все эти выдающиеся достижения наблюдательной астрономии стимулировали разработку современных методов анализа, опирающихся на строгий учет ошибок наблюдений и адекватные кинематические модели. В данной статье приводится подробное описание методики получения максимально-правдоподобных оценок кинематических параметров галактических подсистем на основе анализа одномерного (только по лучевым скоростям), двумерного (по собственным движениям) и трехмерного (по пространственным скоростям) поля скоростей объектов. В последнем случае помимо определения кинематических параметров может быть поставлена важная задача уточнения используемой шкалы расстояний *методом статистических параллаксов*. Вплоть до последнего времени применение метода статистических параллаксов ограничивалось классами быстро движущихся объектов (что, разумеется, было связано с малой точностью собственных движений). Действительно, только для объектов с большой дисперсией пространственных скоростей и быстрым движением относительно Солнца (например, RR-Лирид) даже собственные движения невысокой точности несут информацию об их кинематике и шкале расстояний. В настоящее время метод статистических параллаксов с успехом может быть применен и к подсистемам галактического диска, характеризующимся малой дисперсией скоростей.

2 Расстояния до объектов

Для вычисления кинематических параметров необходимо знать расстояния до объектов. Обычно приблизительная, предварительная оценка расстояния известна. Однако используемое в расчетах расстояние может сильно отличаться от истинного, поскольку оно чаще всего определяется косвенными методами, опирающимися на некоторые предположения или *калибровочные соотношения*, которые могут оказаться не вполне точными. В 1980-х – 1990-х г. астрономы ожидали, что космический проект HIPPARCOS благодаря высокой точности тригонометрических параллаксов далеких звезд принесет окончательное решение проблемы калибровок шкалы расстояний для многих классов звезд. Но опубликованный в 1997 г. каталог [7], и тем более многочисленные последующие публикации, несколько охладили оптимизм исследователей и все еще допускают неоднозначное толкование результатов проекта [8], что и делает задачу уточнения шкалы расстояний по-прежнему актуальной.

В большинстве случаев исследователи структуры и кинематики Галактики используют *фотометрическое расстояние*, вычисляемое по хорошо известной формуле для *модуля расстояния*:

$$(m - M) = 5 \cdot \lg r_{phe}(\text{пк}) - 5 + A,$$

где m и M – видимая и абсолютная звездные величины соответственно (взятые для одной и той же цветовой полосы), A – межзвездное поглощение, r_{phe} – выраженное в парсеках фотометрическое расстояние до объекта. Для звезд постоянного блеска абсолютная величина M оценивается, как правило, по спектральному классу и классу светимости – для этой цели имеются соответствующие калибровочные зависимости, выведенные по таким же звездам с хорошо известными тригонометрическими расстояниями (см., например обзор [6]). У некоторых классов переменных звезд (долгопериодических (Мирид) и полуправильных переменных, классических цефеид) имеется зависимость между периодом пульсаций и средней по периоду абсолютной величиной. Приведем, например, широко используемую зависимость «период – светимость» для классических цефеид [2]:

$$\langle M_V \rangle_I = -1.01^m - 2.87^m \cdot \lg P_{pls},$$

где P_{pls} – период фундаментального тона пульсаций, M_V – абсолютная величина в лучах V, а нижний индекс I обозначает абсолютную величину, соответствующую потоку излучения, усредненному по периоду пульсаций (цефеиды, пульсирующие в первом обертоне, при той же светимости имеют более короткие периоды пульсаций с $\Delta \lg P_{pls} \approx -0.15$). Поглощение света вычисляется стандартным способом, исходя из наблюдаемого цвета цефеид $(B - V)$ и нормального цвета, оцениваемого по полуэмпирической зависимости «период – нормальный цвет» [2]

$$\langle B_0 - V_0 \rangle_I = 0.24^m + 0.47^m \cdot \lg P_{pls}.$$

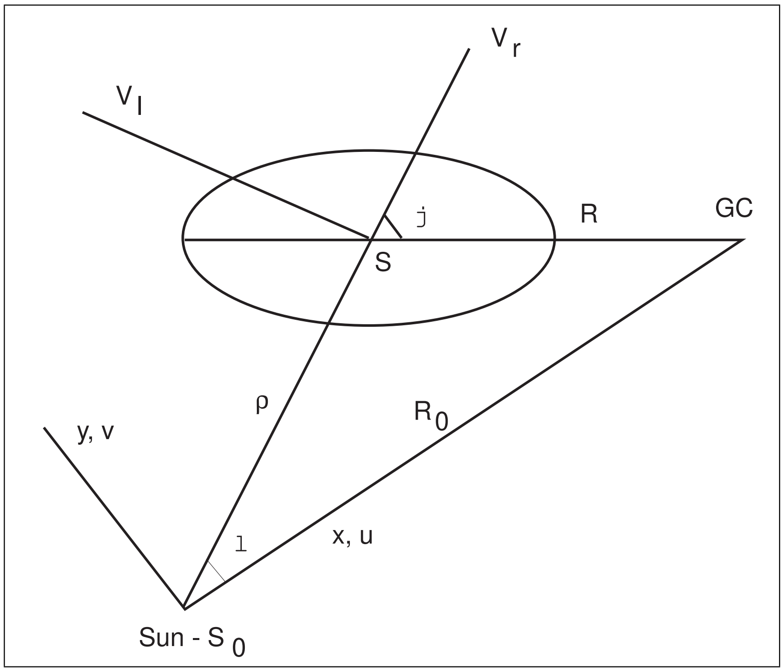
Расстояния до переменных звезд типа RR Лиры в течение многих лет вычислялись в предположении, что их средняя абсолютная величина одинакова и равна $\langle M_V \rangle_I = +0.60^m$ [3]; позднее по данным независимых расчетов радиусов методом Весселинка-Бааде выяснилось, что абсолютная величина в лучах V зависит от показателя металличности $[Fe/H]$ ([4], [11]) (а в инфракрасной области спектра у них существует и зависимость «период – светимость»). Шкала расстояний до шаровых скоплений также опирается на RR-Лириды – обычно светимость звезд горизонтальной ветви шаровых скоплений отождествляется со светимостью RR-Лирид. Поглощение до этих объектов неплохо оценивается по картам распределения межзвездного поглощения [13]. Что касается рассеянных звездных скоплений, то самый надежный способ определения их фотометрических расстояний заключается в подборе теоретической изохроны, наилучшим образом (после учета межзвездного поглощения) воспроизводящей нижнюю огибающую наблюдаемой главной последовательности скопления на диаграмме Герцшпрунга-Рессела («цвет – величина») [5]. По известному поглощению и разности абсолютных и видимых звездных величин, относящихся соответственно к изохроне и скоплению, вычисляется расстояние. Становится ясно, что шкала расстояний непосредственно связана со шкалой используемых абсолютных величин.

Как известно, фотометрические расстояния определяются с некоторой ошибкой. Основные источники ошибок – неточности в определении величины межзвездного поглощения (особенно для классических цефеид) и абсолютной величины звезды. Как уже было упомянуто, абсолютные величины определяются из калибровочных соотношений, выведенных по звездам с известными тригонометрическими расстояниями. Ошибки калибровок, конечно же, переносятся и на абсолютные величины. Например, в ближайшей окрестности Солнца (где сравнительно точно измерены тригонометрические параллаксы) практически нет звезд высокой светимости (спектральных классов O и B), поэтому шкала абсолютных величин таких звезд весьма неточна. Все сказанное выше относится и к изохронам, т.к. они исходно рассчитываются не в показателях цвета и звездных величинах, а в переменных $\lg T_{eff} - L_{bol}$ (эффективная температура – болометрическая светимость). Перевод этих единиц в показатели цвета и абсолютные звездные величины также осуществляется с помощью эмпирических калибровочных соотношений между эффективной температурой и показателем цвета, спектральным классом (или показателем цвета) и болометрической поправкой. В результате фотометрические расстояния аккумулируют как случайные, так и систематические ошибки, величина которых заранее не известна. Исправление систематических ошибок является основной задачей *уточнения шкалы расстояний*, тогда как случайные ошибки характеризуют точность определения расстояний отдельных объектов. Поскольку шкала внутригалактических расстояний экстраполируется в конечном счете на всю видимую Вселенную, уточнение шкалы важно не только лишь с точки зрения изучения строения и кинематики нашей Галактики — оно затрагивает весьма широкий круг важнейших астрофизических и космологических проблем, в том числе проблему соответствия возрастов наиболее старых населений галактик (в частности, шаровых заездных скоплений) и всей Вселенной [16].

Таким образом, нашей конечной задачей является не только определение кинематических параметров подсистем (в том числе кривой вращения), но и уточнение используемой шкалы расстояний. Поэтому условимся сразу же четко разграничивать разные «виды» расстояний, которые будут использоваться в дальнейшем изложении. Пусть r_e – принятое расстояние до звезды. Оно определяется по принятому среднему значению ее абсолютной величины (см. выше). $\bar{r}$ – уточненное (или среднее) расстояние, соответствующее уточненной средней абсолютной величине. Истинная абсолютная величина звезды нам не известна и может отличаться от своего среднего значения на величину $\delta\bar{M}$, которую можно трактовать как случайную ошибку. Наконец, r_t – истинное расстояние (ему соответствует истинное значение абсолютной величины звезды). Разность $\delta r = r_t - \bar{r}$ представляет собой случайную ошибку определения расстояния и непосредственно связана с «космическим» (т.е. объективно существующим) рассеянием абсолютных величин звезд относительно некоторого среднего значения. Это рассеяние объясняется главным образом неизбежными различиями в возрасте (или в эволюционном статусе) и химическом составе звезд одного и того же спектрального класса и класса светимости, и учесть его практически невозможно. Легко понять, что $\delta r/\bar{r} \approx -\delta\bar{M}/2.17$.

Введем также поправку к шкале расстояний $p = r_e/\bar{r}$ и ее ошибку δp по формуле $r_e = (p+\delta p)\cdot r_t$. Рассеяние поправки δp связано с рассеянием r_t относительно $\bar{r}$, т.е. в конечном счете с $\delta\bar{M}$. Несложно вывести соотношения $\delta p/p = -\delta r/r_t \approx -\delta r/\bar{r} \approx \delta\bar{M}/2.17$. Предположим, что величина $\delta\bar{M}$ распределена по нормальному закону с нулевым средним значением и среднеквадратичным отклонением $\sigma_{\bar{M}}$ (другими словами, ошибкой калибровки шкалы абсолютных величин исследуемых объектов или точностью определения абсолютных величин). Чаще всего эта величина известна. Ее можно легко связать со среднеквадратичным рассеянием поправки шкалы расстояний: $\sigma_p^2 \approx 0.21\cdot p^2\cdot\sigma_{\bar{M}}^2$. Эти формулы будут использованы далее. Если ставится задача вычисления только лишь кинематических параметров подсистемы без уточнения шкалы расстояний, **коэффициент шкалы p следует положить равным 1**.

3 Системы координат



На рисунке схематически показан треугольник «Солнце (центроид S_0) – центр Галактики (GC) – исследуемый центроид S», спроектированный на плоскость симметрии Галактики, а также связанный с центроидом эллипсоид скоростей. Будем считать, что в пространстве его малая ось параллельна оси вращения Галактики, а большая ось параллельная плоскости симметрии и направлена на ось вращения Галактики (в проекции – на ее центр). Галактическая долгота l равна углу $\angle(GC - S_0 - S)$. Показаны также положительные направления лучевой скорости и тангенциальной скорости по галактической долготе. Мы будем использовать три системы координат: галактическую прямоугольную систему координат, оси которой параллельны основным галактическим направлениям; так наз. локальную систему координат, связанную с направлением на исследуемый объект (центроид); а также систему координат, связанную с главными осями эллипсоида скоростей текущего центроида S (см. рис.). Орты галактической прямоугольной системы координат $(x,\ y,\ z)$ и соответствующие им компоненты скорости $(u,\ v,\ w)$ направлены на центр Галактики ($l = 0°, b = 0°$), в сторону галактического вращения ($l = 90°, b = 0°$) и к северному полюсу Галактики ($b = 90°$) и образуют правую тройку. Орты локальной системы координат (в которой мы будем записывать выражения для наблюдаемых компонентов скоростей объекта) направлены соответственно на объект, в сторону увеличения галактических долгот (параллельно плоскости симметрии Галактики) и в сторону увеличения галактических широт, и также образуют правую тройку. Пусть $\vec{e}_{gal}$ – единичный вектор-столбец в прямоугольной галактической системе координат, а $\vec{e}_{loc}$ – тот же вектор в локальной системе координат. Они связаны преобразованием поворота $\vec{e}_{loc} = G_0 \times \vec{e}_{gal}$, где матрица G_0 равна

$$G_0 = \begin{pmatrix} \cos b \cos l & \cos b \sin l & \sin b \\ -\sin l & \cos l & 0 \\ -\sin b \cos l & -\sin b \sin l & \cos b \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Ее легко получить дифференцированием по времени радиус-вектора, записанного в прямоугольной галактической системе координат

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos b \cos l \\ r \cos b \sin l \\ r \sin b \end{pmatrix},$$

выразив затем компоненты вектора скорости в локальной системе координат (V_r, V_l, V_b) через компоненты скорости, взятые в галактической прямоугольной системе координат $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Аналогичным образом матрица

$$G_S = \begin{pmatrix} \cos b \cos \varphi & \cos b \sin \varphi & \sin b \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\sin b \cos \varphi & -\sin b \sin \varphi & \cos b \end{pmatrix} \quad (2)$$

выполняет преобразование поворота из системы координат, связанной с осями эллипсоида скоростей S, в локальную систему координат (см. рис.). При этом вспомогательный угол φ, определяющий ориентацию эллипсоида скоростей в области центроида S (равный углу между проекцией луча зрения на галактическую плоскость и большой осью эллипсоида скоростей) и играющий роль галактической долготы в (1), вычисляется по формуле

$$\mathrm{tg}\ \varphi = \frac{R_0 \cdot \sin l}{R_0 \cdot \cos l - \bar{r} \cdot \cos b}.$$

с учетом того, что угол φ меняется в интервале $(0, 360^\circ)$. Здесь и далее R_0 – расстояние от Солнца до центра Галактики, а в качестве гелиоцентрического расстояния объекта взято уточненное расстояние $\bar{r}$.

Практическое замечание: для вычисления правильного значения угла φ по его тангенсу с учетом квадранта следует использовать функцию $ATAN2$, имеющуюся в стандартном наборе элементарных математических функций во многих языках программирования высокого уровня.

4 Кинематическая модель: движение Солнца, дифференциальное вращение и «космическая» дисперсия

Рассмотрим простейшую кинематическую модель подсистемы, включающую три компонента: локальное движение выборки относительно Солнца, глобальное систематическое движение в форме дифференциального вращения и случайное движение, описываемое трехосным эллипсоидальным распределением остаточных скоростей (Шварцшильдовским). Рассеяние остаточных скоростей относительно центроида часто называют «космической» дисперсией, подчеркивая их отличие от влияния ошибок наблюдений (см. далее). Для простоты будем считать дифференциальное вращение баротропным, т.е. не зависящим от z - координаты (хотя в принципе модель легко обобщается на случай зависимости угловой скорости не только от R, но и от z). Такая модель хорошо представляет кинематику большинства плоских галактических подсистем. Она может быть усложнена путем введения некруговых движений, вызванных, например, возмущающим влиянием спиральных рукавов [12]. Оно особенно существенно для подсистем с малой дисперсией скоростей, т.е. молодых объектов – классических цефеид, рассеянных скоплений, OB-ассоциаций и OB-звезд. Так, наблюдения газовых дисков других спиральных галактиках показывают, что величина возмущений скорости может достигать 20 – 30 км/с, что заметно больше «космической» дисперсии скоростей газа. Модель некруговых движений сложна, она зависит от способа описания волны плотности, и требует отдельного обсуждения. Что касается эллипсоида скоростей, условимся для простоты считать его форму и размеры его осей одинаковыми во всей изучаемой области Галактики, хотя, как показывают внегалактические наблюдения, дисперсии скоростей в дисках спиральных галактик убывают по мере удаления от центра галактик и уменьшения поверхностной плотности диска.

На рисунке $\rho = \bar{r} \cdot \cos b$ – спроектированное на плоскость Галактики среднее (т.е. уточненное) расстояние до центроида S, V_r и V_l – соответственно лучевая скорость и тангенциальная скорость по галактической долготе (вектор тангенциальной скорости по галактической широте, разумеется, не показан). Будем выражать собственные движения в "/год, линейные (в том числе лучевые) скорости в км/с, расстояния в кпк, а угловые скорости в единицах км/с/кпк. Для удобства введем коэффициент $k = 4738 \cdot$ (км/с/кпк)("/год)$^{-1}$, переводящий расстояния и собственные движения в линейные скорости, например, в формуле $V_t = k \cdot \mu \cdot r_e$, где V_t – компонент тангенциальной скорости (по галактической долготе или широте).

Обозначим местный (околосолнечный) центроид объектов как S_0. Пусть при этом скорость местной выборки относительно Солнца равна

$$\vec{V}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix},$$

где компоненты скорости записаны в галактической прямоугольной системе координат (ось x которой направлена в центр Галактики, ось y – в сторону галактического вращения, z – к северному полюсу Галактики). Рассматривая треугольник и применив к расстояниям теорему косинусов, легко вычислим расстояние центроида от оси вращения Галактики R по гелиоцентрическому расстоянию $\bar{r}$ и его галактическим координатам по формуле

$$R^2 = R_0^2 + \bar{r}^2 \cdot \cos^2 b - 2 \cdot \bar{r} \cdot R_0 \cdot \cos b \cdot \cos l. \tag{3}$$

Проще всего рассматривать распределение скоростей объектов в локальной системе координат, привязанной к направлению на объект и галактическим координатам (l, b); в этой системе координат компоненты скорости нам либо известны из измерений (лучевая скорость), либо могут быть легко вычислены по расстоянию и компонентам собственного движения (тангенциальные скорости по галактической долготе и широте). Поскольку тангенциальные скорости вычисляются через принятое расстояние r_e, вектор наблюдаемой скорости в этой системе координат можно записать в виде

$$\vec{V}_{loc}(r_e) = \begin{pmatrix} V_r \\ V_l \\ V_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_r \\ kr_e \cdot \mu_l \\ kr_e \cdot \mu_b \end{pmatrix}$$

Легко показать, что вклад дифференциального вращения Галактики в наблюдаемую скорость описывается формулами Боттлингера [1], которые могут быть переписаны с использованием среднего расстояния $\bar{r}$ в локальной системе координат в векторном виде

$$\vec{V}_{rot}(\bar{r}) = \begin{pmatrix} R_0 \cdot (\omega - \omega_0) \cdot \sin l \cdot \cos b \\ (R_0 \cdot \cos l - \bar{r} \cdot \cos b) \cdot (\omega - \omega_0) - \bar{r} \cdot \omega_0 \cdot \cos b \\ -R_0 \cdot (\omega - \omega_0) \cdot \sin l \cdot \sin b \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\omega(R)$ и $\omega_0 = \omega(R_0)$ - угловые скорости исследуемого центроида на расстоянии R и на расстоянии Солнца R_0 соответственно. Для решения обычно разлагают разность угловых скоростей в ряд Тейлора

$$(\omega - \omega_0) \approx \omega_0' \cdot (R - R_0) + \frac{1}{2!} \cdot \omega_0'' \cdot (R - R_0)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \omega_0''' \cdot (R - R_0)^3 + ..., \qquad (5)$$

ограничиваясь, как правило, вторым или третьим порядком. Такое разложение дает хорошие результаты даже для расстояний 5 – 6 кпк от Солнца. Наконец, обозначим через $\vec{\eta}$ истинную остаточную скорость звезды относительно центроида S, обусловленную «космической» дисперсией.

5 Основные формулы метода

Следуя Маррею [14], рассмотрим вначале поле пространственных скоростей объектов. Именно пространственные скорости дают возможность уточнить шкалу расстояний методом статистических параллаксов. Метод опирается на простую идею: qтребование согласованности остаточных тангенциальных и лучевых скоростей совокупности объектов, расстояния до которых вычисляются по известному модулю расстояния, (т.е., как отмечено выше, на основании определенной гипотезы относительно их светимости). Так как тангенциальная скорость вычисляется по собственному движению и расстоянию, то она, в отличие от лучевой скорости, непосредственно зависит от принятого расстояния до объектов. Если расстояния до объектов систематически завышены, то их тангенциальные скорости будут систематически больше лучевых и наоборот. При правильном выборе шкалы расстояний компоненты остаточной скорости будут удовлетворять трехосному эллипсоидальному распределению во всей области, занимаемой выборкой.

Разность между наблюдаемой пространственной скоростью и скоростью движения, которую должна иметь звезда в рамках выбранной кинематической модели, имеет случайный характер. Обычно полагают, что вектор разности скоростей распределен по трехмерному нормальному закону [14]. Мерой его рассеяния является *тензор ковариации*, включающий как ошибки наблюдений, так и «космическую» дисперсию. Зная аналитический вид распределения, мы можем записать явное выражение для функции правдоподобия исследуемой выборки и, найдя ее максимум, определить неизвестные кинематические параметры.

Введем вначале вспомогательные матрицы

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

и матрицу поправки к шкале расстояний

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} = \tilde{R} + p \cdot \tilde{M},$$

которая, как легко понять, переводит компоненты скорости, вычисленные для среднего расстояния $\bar{r}$ в локальной системе координат, в вычисленные для принятого расстояния r_e по формуле

$$\vec{V}_{loc}(r_e) = \tilde{P} \times \vec{V}_{loc}(\bar{r}). \tag{7}$$

Первый диагональный элемент матрицы $\tilde{P}$ равен 1, т.к. лучевая скорость от расстояния не зависит. Представим наблюдаемые (или измеренные) лучевую скорость и компоненты собственного движения в виде

$$V_r = V_{r,\,t} + \delta V_r,\ \mu_l = \mu_{l,\,t} + \delta\mu_l,\ \mu_b = \mu_{b,\,t} + \delta\mu_b,$$

где индексом t помечены неизвестные нам истинные значения величин, а δV_r, $\delta\mu_l$ и $\delta\mu_b$ – их известные ошибки измерения. Очевидно, что значения $V_{r,\,t},\ \mu_{l,\,t},\ \mu_{b,\,t}$ могли бы быть вычислены через *полную истинную* скорость звезды, если бы она была нам известна:

$$\begin{pmatrix} V_{r,\,t} \\ kr_t \cdot \mu_{l,\,t} \\ kr_t \cdot \mu_{b,\,t} \end{pmatrix} = \vec{V}_{loc}(r_t) = G_0 \times \vec{V}_0 + \vec{V}_{sys}(r_t) + \vec{\eta}, \tag{8}$$

где $\vec{V}_{sys}(r_t)$ включает все модельные систематические движения – дифференциальное вращение и, если требуется, некруговые движения. Для того чтобы явным образом отделить не зависящую от расстояния лучевую скорость от тангенциальной, с учетом (6) запишем тождественное соотношение

$$\vec{V}_{loc}(r_t) = \tilde{R} \times \vec{V}_{loc}(r_t) + \tilde{M} \times \vec{V}_{loc}(r_t).$$

Вспомнив, что в п. 2 мы положили $r_e/r_t = (p + \delta p)$, после несложных преобразований представим вектор наблюдаемой скорости $\vec{V}_{loc}(r_e)$ в виде суммы

$$\vec{V}_{loc}(r_e) = \begin{pmatrix} \delta V_r \\ kr_e \cdot \delta\mu_l \\ kr_e \cdot \delta\mu_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{r,t} \\ kr_e \cdot \mu_{l,t} \\ kr_e \cdot \mu_{b,t} \end{pmatrix} = \delta\vec{V}_{loc}(r_e) + \tilde{R} \times \vec{V}_{loc}(r_t) + (p+\delta p) \cdot \tilde{M} \times \vec{V}_{loc}(r_t), \tag{9}$$

с вектором ошибок

$$\delta\vec{V}_{loc}(r_e) = \begin{pmatrix} \delta V_r \\ kr_e \cdot \delta\mu_l \\ kr_e \cdot \delta\mu_b \end{pmatrix}.$$

Поскольку истинное расстояние и скорость нам не известны, рассмотрим модельную систематическую скорость (не включающую, в отличие от (8), «космической» дисперсии!), соответствующую уточненному расстоянию $\bar{r}$:

$$\vec{V}_{loc,mod}(\bar{r}) = G_0 \times \vec{V}_0 + \vec{V}_{sys}(\bar{r}). \tag{10}$$

В принятой шкале расстояний r_e эта скорость, по аналогии с (7), была бы равна

$$\vec{V}_{loc,\,mod}(r_e) = \tilde{R} \times \vec{V}_{loc,mod}(\bar{r}) + p \cdot \tilde{M} \times \vec{V}_{loc,\,mod}(\bar{r}) = \tilde{P} \times \vec{V}_{loc,\,mod}(\bar{r}). \tag{11}$$

Разность

$$\Delta\vec{V}_{loc}(r_e) = \vec{V}_{loc}(r_e) - \vec{V}_{loc,\,mod}(r_e) \tag{12}$$

включает, как уже говорилось, ошибки наблюдений и остаточную скорость и распределена по трехмерному нормальному закону. Чтобы найти для нее тензор ковариации, подробно раскроем (12) с использованием выражений (8) – (11), ограничиваясь линейными (вследствие их малости) членами по δr и δp:

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{V}_{loc}(r_e) &= \delta\vec{V}_{loc}(r_e) + \tilde{P} \times [\vec{V}_{loc}(r_t) - \vec{V}_{loc,\,mod}(\bar{r})] + \delta p \cdot \tilde{M} \times \vec{V}_{loc}(r_t) \\
&= \delta\vec{V}_{loc}(r_e) + \tilde{P} \times [\vec{V}_{sys}(r_t) - \vec{V}_{sys}(\bar{r}) + \vec{\eta}] + \delta p \cdot \tilde{M} \times \vec{V}_{loc}(r_t) \\
&\approx \delta\vec{V}_{loc}(r_e) + \tilde{P} \times [\delta r \cdot \partial\vec{V}_{sys}(\bar{r})/\partial\bar{r} + \vec{\eta}] + \delta p \cdot \tilde{M} \times [G_0 \times \vec{V}_0 + \vec{V}_{sys}(r_t) + \vec{\eta}] \\
&\approx \delta\vec{V}_{loc}(r_e) + \delta r \cdot \tilde{P} \times \partial\vec{V}_{sys}(\bar{r})/\partial\bar{r} + (\tilde{P} + \delta p \cdot \tilde{M}) \times \vec{\eta} + \delta p \cdot \tilde{M} \times [G_0 \times \vec{V}_0 + \vec{V}_{sys}(\bar{r})] \\
&\approx \delta\vec{V}_{loc}(r_e) - \bar{r} \cdot \delta p/p \cdot \tilde{P} \times \partial\vec{V}_{sys}(\bar{r})/\partial\bar{r} + \tilde{P} \times \vec{\eta} + \delta p \cdot \tilde{M} \times \vec{\eta} + \delta p \cdot \tilde{M} \times \vec{V}_{loc,\,mod}(\bar{r}) \\
&\approx \delta\vec{V}_{loc}(r_e) + \tilde{P} \times \vec{\eta} + \delta p \cdot \tilde{M} \times \vec{\eta} + \delta p \cdot [\tilde{M} \times \vec{V}_{loc,\,mod}(\bar{r}) - \bar{r}/p \cdot \tilde{P} \times \partial\vec{V}_{sys}(\bar{r})/\partial\bar{r}] \\
&\approx \delta\vec{V}_{loc}(r_e) + \tilde{P} \times \vec{\eta} + \delta p \cdot \tilde{M} \times \vec{\eta} + \delta p \cdot \vec{\Upsilon},
\end{aligned} \tag{13}$$

где введенный для упрощения вектор $\vec{\Upsilon}$

$$\begin{aligned}
\vec{\Upsilon} &= \tilde{M} \times \vec{V}_{loc,mod}(\bar{r}) - \bar{r}/p \cdot \tilde{P} \times \partial\vec{V}_{sys}(\bar{r})/\partial\bar{r} \\
&= \tilde{M} \times [G_0 \times \vec{V}_0 + \vec{V}sys(\bar{r})] - \bar{r}/p \cdot \tilde{P} \times \partial\vec{V}_{sys}(\bar{r})/\partial\bar{r}
\end{aligned} \tag{14}$$

не содержит вариаций переменных и истинной остаточной скорости $\vec{\eta}$.

6 Наблюдаемый тензор ковариации

Теперь найдем явное выражение для тензора ковариации распределения остаточной скорости звезды $\Delta\vec{V}_{loc}(r_e)$. При этом будем считать, что случайные ошибки лучевых скоростей δV_r и собственных движений $\delta\mu_l$, $\delta\mu_b$ не коррелируют со случайной ошибкой в расстоянии δr (и, следовательно, с δp) и с компонентами истинной остаточной скорости $\vec{\eta}$, допуская при этом возможность корреляции ошибок $\delta\mu_l$ и $\delta\mu_b$ (так, в каталоге HIPPARCOS [7] приведен соответствующий коэффициент корреляции), и случайные ошибки лучевых скоростей не зависят от случайных ошибок собственных движений.

Известно, что тензор ковариации вектора-столбца $\vec{Y}$ определяется как матрица

$$L(\vec{Y}) = \langle \vec{Y} \cdot \vec{Y}^T \rangle,$$

где T – символ транспонирования, а треугольные скобки обозначают усреднение по всем допустимым значениям вектора $\vec{Y}$. Если $\vec{Y} = \tilde{A} \times \vec{X}$, где $\tilde{A}$ – матрица преобразования, то, как легко показать, тензор ковариации преобразуется следующим образом:

$$L(\vec{Y}) = \langle (\tilde{A} \times \vec{X}) \cdot (\tilde{A} \times \vec{X})^T \rangle = \langle (\tilde{A} \times \vec{X}) \cdot (\vec{X}^T \times \tilde{A}^T) \rangle = \tilde{A} \cdot \langle \vec{X} \cdot \vec{X}^T \rangle \cdot \tilde{A}^T = \tilde{A} \times L(\vec{X}) \times \tilde{A}^T.$$

В частности, по этому правилу тензор ковариации преобразуется при переходе от одной системы координат к другой. Воспользовавшись этим соотношением, найдем тензор ковариации для истинной остаточной («космической») скорости звезды относительно центроида $L(\vec{\eta})$. Пусть в системе координат, связанной с главными осями эллипсоида скоростей, тензор ковариации равен

$$L_0 = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_w^2 \end{pmatrix},$$

где σ_u, σ_v, σ_w – величины главных осей. Поскольку переход от главных осей к локальной системе координат задается матрицей G_S (2), то

$$L_{loc}(\vec{\eta}) = G_S \times L_0 \times G_S^T.$$

При вычислении наблюдаемого тензора ковариации $L_{obs}(r_e) = \langle \Delta\vec{V}_{loc}(r_e) \cdot \Delta\vec{V}_{loc}^T(r_e) \rangle$ усреднение всех перекрестных произведений четырех членов последней строки выражения (13) приводит, как легко понять, к нулевому результату, поскольку хотя бы одна из трех величин: вариация δp, случайный вектор $\vec{\eta}$ или компоненты вектора ошибок скорости $\delta\vec{V}_{loc}(r_e)$ войдут в эти произведения линейно, а их математические ожидания равны нулю. Поэтому наблюдаемый тензор ковариации можно записать в виде суммы трех тензоров

$$L_{obs}(r_e) = L_{err}(r_e) + L_{resid}(r_e) + \delta L(r_e), \tag{15}$$

где тензор ошибок скорости равен

$$L_{err}(r_e) = \langle \delta\vec{V}_{loc}(r_e) \cdot \delta\vec{V}^T_{loc}(r_e) \rangle = \begin{pmatrix} \sigma^2_{V_r} & 0 & 0 \\ 0 & k^2 r_e^2 \cdot \sigma^2_{\mu_l} & k^2 r_e^2 \cdot \rho^{\mu_b}_{\mu_l} \sigma_{\mu_l} \sigma_{\mu_b} \\ 0 & k^2 r_e^2 \cdot \rho^{\mu_b}_{\mu_l} \sigma_{\mu_l} \sigma_{\mu_b} & k^2 r_e^2 \cdot \sigma^2_{\mu_b} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$\rho^{\mu_b}_{\mu_l}$ – коэффициент корреляции ошибок компонентов собственных движений, а σ_{V_r}, σ_{μ_l} и σ_{μ_b} – среднеквадратичные ошибки лучевой скорости и собственных движений. Второй член суммы (15) включает тензор «космической» дисперсии и равен

$$L_{resid}(r_e) = \tilde{P} \times L_{loc}(\vec{\eta}) \times \tilde{P}^T = \tilde{P} \times G_S \times L_0 \times G_S^T \times \tilde{P}^T. \tag{17}$$

И, наконец, вносящий наименьший вклад третий член суммы (15) пропорционален квадрату ошибки шкалы расстояний; он включает систематическую скорость и ее производную и тензор «космической» дисперсии (см. также п. 2):

$$\begin{aligned} \delta L(r_e) &\approx \sigma_p^2 \cdot [\tilde{M} \times\ G_S \times L_0 \times G_S^T \times \tilde{M} + \vec{\Upsilon} \cdot \vec{\Upsilon}^T] \\ &= 0.21 p^2 \cdot \sigma^2_{\bar{M}} \cdot [\tilde{M} \times\ G_S \times L_0 \times G_S^T \times \tilde{M} + \vec{\Upsilon} \cdot \vec{\Upsilon}^T]. \end{aligned} \tag{18}$$

При вычислении компонентов тензора ковариации (16)–(18) для конкретной звезды следует помнить, что входящее в эти выражения исправленное расстояние $\bar{r}$ связано с принятым (т.е. известным нам) расстоянием r_e и поправкой шкалы p соотношением $\bar{r} = r_e/p$, поэтому в конечном счете тензор ковариации (15) будет зависеть только от r_e. Параметр точности шкалы абсолютных величин $\sigma_{\bar{M}}$ должен быть задан дополнительно. К счастью, из-за малости вклада (18) в наблюдаемый тензор ковариаций (15) точное знание $\sigma_{\bar{M}}$ необязательно.

7 Распределение остаточных скоростей и функция правдоподобия

Напомним, что под остаточной скоростью отдельной звезды мы понимаем разность между наблюдаемой и модельной скоростью. Трехмерная функция распределения остаточной скорости звезды $\Delta\vec{V}_{loc}(r_e)$, вычисляемой по формулам (10)–(12), может быть записана в общем виде [14]

$$f(\Delta\vec{V}_{loc}(i)) = (2\pi)^{-3/2} \cdot |L_{obs}(i)|^{-1/2} \cdot \exp\{-\frac{1}{2} \cdot \Delta\vec{V}^T_{loc}(i) \times L^{-1}_{obs}(i) \times \Delta\vec{V}_{loc}(i)\}, \tag{19}$$

где мы убрали явное упоминание о том, что используется принятая шкала расстояний, а $|L_{obs}|$ и L^{-1}_{obs} – соответственно определитель и обратная матрица наблюдаемого тензора ковариации L_{obs} (15). Функция распределения имеет смысл плотности вероятности определенного значения остаточной скорости конкретной звезды.

Поскольку объекты распределены в пространстве скоростей независимо друг от друга, их N-частичная (полная) функция распределения равна произведению функций (19) для всех звезд выборки (по теореме о вероятности произведения независимых событий):

$$F(\Delta\vec{V}_{loc}(1), \cdots, \Delta\vec{V}_{loc}(N)) = \prod_{i=1}^{N} f(\Delta\vec{V}_{loc}(i)), \tag{20}$$

где N – число объектов. Суть принципа максимального правдоподобия заключается в том, что мы считаем реальное (т.е. осуществившееся) распределение объектов нашей выборки наиболее вероятным из всех возможных распределений. Следовательно, все параметры (описывающие модельное поле скоростей, а также p – поправка шкалы расстояний), от которых зависит плотность вероятности распределения остаточных скоростей (19), должны быть подобраны так, чтобы вероятность F на реальной выборке объектов достигала своего *максимально возможного значения*. Обычно решают задачу, минимизируя взятый с обратным знаком логарифм N-частичной плотности вероятности (20), т.е. строят так наз. *функцию правдоподобия*

$$LF = -\ln F(\Delta\vec{V}_{loc}(1), \cdots, \Delta\vec{V}_{loc}(N)) = -\sum_{i=1}^{N} \ln f(\Delta\vec{V}_{loc}(i)) \tag{21}$$

и сводят задачу к стандартному поиску *минимума функции правдоподобия* LF с использованием какого-либо эффективного алгоритма *многомерной оптимизации*. Подставив в (21) аналитическое выражение для функции (19), перепишем (21) в явном виде:

$$LF = \frac{3}{2}N \cdot \ln 2\pi + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \{\ln|L_{obs}(i)| + \Delta\vec{V}^T_{loc}(i) \times L_{obs}(i)^{-1} \times \Delta\vec{V}_{loc}(i)\}, \tag{22}$$

где суммирование ведется по индексу i, относящемуся к текущему объекту выборки.

Практическое замечание: остаточная скорость $\Delta\vec{V}_{loc}(i)$ и тензор ковариации $L_{obs}(i)$ для каждой звезды и, следовательно, значение функции правдоподобия LF, выражаются через известные из наблюдений величины и текущие значения подбираемых кинематических параметров выборки. Любая используемая для оптимизации программа ищет решение, обеспечивающее минимум функции (22), методом итераций, т.е. путем перебора возможных значений неизвестных параметров (даже при использовании градиентных методов). Это замечание относится в равной степени к двумерному и одномерному случаям.

LF является функцией большого числа неизвестных параметров и, решив задачу оптимизации, мы обычно находим следующие параметры дифференциально вращающейся подсистемы:

• $(u_0,\ v_0,\ w_0)$ – компоненты скорости локальной выборки звезд относительно Солнца;

• $(\sigma_u,\ \sigma_v,\ \sigma_w)$ – главные оси эллипсоида скоростей для выборки звезд (напомним, что они считаются одинаковыми для всей исследуемой области);

• $(\omega_0,\ \omega_0^{'},\ \omega_0^{''}, \cdots)$ – угловая скорость вращения подсистемы на расстоянии Солнца и ее производные;

• p – искомая поправка к шкале расстояний;

• Другие параметры поля скоростей, например, описывающие некруговые движения центроидов.

Если поставлена задача оценки кинематических параметров без уточнения шкалы расстояний, поправку шкалы p во всех формулах следует положить равной 1, тогда принятые расстояния будут тождественны уточняемым.

7.1 Выбор значения R_0

Несколько слов следует сказать о выборе значения галактоцентрического расстояния Солнца R_0. Эта проблема имеет свою длительную и не лишенную драматизма историю. В современной литературе приводятся оценки этого важнейшего структурного параметра Галактики, заключающиеся в интервале от 7 до 9 кпк [18]. Несмотря на то, что в 1985 г. Международным астрономическим союзом было предложено паллиативное решение – принять значение $R_0 = 8.5$ кпк, для оценки этого расстояния в последующие годы использовалось множество методов, в основном использующих пространственное распределение объектов или их кинематику. Было бы излишним оптимизмом полагать, что к настоящему времени эта проблема окончательно решена. Большинство методов определения R_0, опирающихся на пространственное распределение объектов, концентрирующихся к галактическому центру или находящихся неподалеку от него, сталкиваются с большими трудностями, связанными с учетом эффектов наблюдательной селекции и межзвездного поглощения. Кинематические методы (как и метод статистических параллаксов), в свою очередь, сильно зависят от использованных моделей поля скоростей.

По-видимому, большие перспективы принадлежат радиоинтерферометрическим методам определения расстояний до мазерных источников (молодых звезд с оболочками), обнаруженных в непосредственной близости от сверхмассивной черной дыры в центре Галактики. Скорости этих объектов достигают многих сотен км/с, в результате даже за небольшой период времени удается измерить не только их лучевые скорости, но и собственные движения. В таком случае для определения R_0 может использоваться метод, по сути аналогичный методу статистических параллаксов. Отметим, что радиоинтерферометрические измерения положений и скоростей радиоисточников в центре Галактики приводят к малым значениям R_0 ($<$ 8 кпк).

Проблема расстояния до центра Галактики (как и расстояния до Большого Магелланового Облака) является одной из граней более общей проблемы выбора шкалы расстояний во Вселенной, и значение R_0 почти линейно связано с принимаемой шкалой расстояний исследуемых объектов. Попытки вычисления R_0 как одного из неизвестных параметров задачи (22) неоднократно предпринимались, но не приводили к надежным результатам. Более того, из-за корреляции R_0 с параметром шкалы расстояний одновременное уточнение шкалы и вычисление R_0 является не вполне корректным.

К счастью, вычисляемые кинематические параметры, в том числе и параметр шкалы расстояний p, сравнительно слабо чувствительны к небольшим вариациям принимаемого значения R_0. Во многих работах последних лет выводятся средневзвешенные значения $< R_0 >\approx 7.5 - 8.0(\pm 0.5)$ кпк. Они более соответствуют *короткой шкале расстояний*. Рекомендуется использовать такие значения R_0 как компромиссные.

8 Частный случай: чисто круговые движения центроидов

Выше мы привели универсальный алгоритм вычисления тензора ковариации (в формулах (8, 10) скорость $\vec{V}_{sys}(r)$ включает как круговые, так и некруговые движения). Для чисто круговых движений центроидов, когда $\vec{V}_{sys}(\bar{r}) \equiv \vec{V}_{rot}(\bar{r})$, выражение для вектора

$\vec{\Upsilon}$ (14, 18) можно записать в явном виде, опираясь на формулы Боттлингера (4).

Итак, как легко вывести из (4),

$$\frac{\partial \vec{V}_{rot}(\bar{r})}{\partial \bar{r}} = \begin{pmatrix} R_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\omega - \omega_0) \cdot \sin l \cdot \cos b \\ (R_0 \cdot \cos l - \bar{r} \cdot \cos b) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\omega - \omega_0) - \omega \cdot \cos b \\ -R_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\omega - \omega_0) \cdot \sin l \cdot \sin b \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где производная от разности угловых скоростей с точностью до членов второго порядка по $(R - R_0)$ (см. (3) и (5)) равна

$$\frac{\partial(\omega - \omega_0)}{\partial \bar{r}} \approx \frac{1}{R} \cdot (\bar{r} \cos b - R_0 \cos l) \cdot [\omega_0^{'} + \omega_0^{''} \cdot (R - R_0) + 1/2! \cdot \omega_0^{'''} \cdot (R - R_0)^2 + \cdots] \cdot \cos b.$$

9 Двумерное поле скоростей

Приведенный выше алгоритм вычисления кинематических параметров в самом общем виде был выведен для поля пространственных скоростей звезд. Однако в некоторых случаях возникает необходимость анализа двумерного поля скоростей, т.е. собственных движений. Пожалуй, впервые эта задача была поставлена и решена в работе [17] для выборки звезд главной последовательности с надежными определениями тригонометрических параллаксов и собственных движений из каталога HIPPARCOS. Часто такой подход позволяет значительно расширить исследуемую выборку, т.к. точные лучевые скорости измерены лишь для сравнительно небольшой доли звезд. Кроме того, выборка звезд из массового каталога собственных движений (в отличие от выборки по лучевым скоростям) является *кинематически несмещенной*. Дело в том, что обычно в массовые каталоги собственных движений включаются все звезды до определенной предельной звездной величины, тогда как лучевые скорости измеряются у звезд, отобранных по какому-то признаку (спектральному классу, химическому составу и т.п.). Ясно, что такая выборка не является *представительной*. Это может привести к смещению оценок кинематических параметров (например, дисперсия скоростей звезд поздних спектральных классов заведомо больше, чем ранних; кинематика звезд с пониженной металличностью радикально отличается от кинематики нормальных звезд и т.п.).

Есть и еще одна важная особенность метода, опирающегося только на собственные движения. Хорошо известно, что первая производная от угловой скорости вращения $\omega^{'}$, полученная по собственным движениям, зависит от принятой шкалы расстояний гораздо слабее, чем та же величина, выведенная из лучевых скоростей. Это обстоятельство позволяет независимым методом уточнить шкалу расстояний, подобрав ее так, чтобы обе производные были близкими. По сути дела, такой способ является модификацией описанного выше более строгого метода статистических параллаксов, применяемого для анализа поля пространственных скоростей.

При исследовании кинематики только по собственным движениям задача уточнения шкалы расстояний, разумеется, не ставится, поэтому следует везде положить $p \equiv 1$, $\bar{r} \equiv r_e$. Тем не менее, случайные ошибки в расстояниях $\sigma_r \approx 0.46 \cdot r \cdot \sigma_{\bar{M}}$ следует обязательно учитывать. Проще всего адаптировать изложенный выше метод для двумерного случая следующим образом: положить для всех звезд $V_r \equiv 0$, $\delta V_r \equiv 0$, затем, пользуясь формулой (13) для остаточной скорости звезды, образовать новый двумерный вектор-столбец, взяв в качестве его компонентов два последних компонента исходного вектора. Трехмерную матрицу ковариации (15) следует преобразовать в двумерную, убрав из исходной матрицы первую строку и первый столбец. Функция распределения остаточной скорости (19) перепишется в несколько измененном виде:

$$f(\Delta\vec{V}_{loc}) = (2\pi)^{-1} \cdot |L_{obs}|^{-1/2} \cdot \exp\{-\frac{1}{2} \cdot \Delta\vec{V}_{loc}^T \times L_{obs}^{-1} \times \Delta\vec{V}_{loc}\},$$

где $\Delta\vec{V}_{loc}, L_{obs}$ – соответственно двумерный вектор наблюдаемой остаточной скорости и двумерный тензор ковариации. Последующие шаги алгоритма можно оставить неизменными.

10 Поле лучевых скоростей

Очень часто (особенно в тех случаях, когда отсутствуют высокоточные собственные движения) приходится исследовать кинематику подсистемы только по лучевым скоростям звезд. Очевидно, что в этом случае, как и для двумерного поля скоростей, задача уточнений шкалы расстояний не ставится. Выведем соответствующие соотношения для поля лучевых скоростей. Пусть r, r_t и σ_r – принятое и истинное расстояние до звезды и соответствующая среднеквадратичная ошибка; V_r и σ_{V_r} – лучевая скорость и ее ошибка. По аналогии с (10), модельное значение лучевой скорости равно

$$V_{r,\,mod} = \vec{U}^T \cdot (G_0 \times \vec{V}_0) + V_{r,\,rot}(r),$$

где вектор

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

проецирует пространственную скорость на луч зрения, а $V_{r,\,rot}(r)$ – первый элемент вектора скорости дифференциального вращения (4). Наблюдаемая лучевая скорость может быть записана в виде $V_{r,\,obs} = V_{r,\,t} + \delta V_r$, где истинная лучевая скорость звезды равна

$$V_{r,\,t} = \vec{U}^T \cdot [G_0 \times \vec{V}_0 + \vec{\eta}] + V_{r,\,rot}(r_t), \tag{24}$$

$\vec{\eta}$ – истинная случайная скорость звезды относительно центроида (проявление космической дисперсии), распределенная по эллипсоидальному закону. Подставив в (24)

$$V_{r,\,rot}(r_t) \approx V_{r,\,rot}(r) + \delta r \cdot \partial V_{r,\,rot}(r)/\partial r,$$

получим явное выражение для остаточной скорости звезды, где производная $\partial V_{r,\,rot}(r)/\partial r$ равна первому компоненту вектора (23):

$$\Delta V_{r,\,obs} = V_{r,\,obs} - V_{r,\,mod} \approx \delta V_r + \delta r \cdot \partial V_{r,\,rot}(r)/\partial r + \vec{U}^T \cdot \vec{\eta}. \tag{25}$$

Учитывая, что случайные ошибки $\delta V_r,\ \delta r$ и компоненты случайного вектора $\vec{\eta}$ взаимно не коррелируют, из (25) легко получаем выражение для полной дисперсии лучевой скорости звезды (т.е. фактически для одномерного «тензора ковариации»):

$$L_{obs} = \sigma_{V_r}^2 + \sigma_r^2 \cdot (\partial V_{r,\,rot}(r)/\partial r)^2 + \vec{U}^T \cdot (G_L \times L_0 \times G_L^T) \cdot \vec{U}.$$

Скаляр L_{obs} здесь играет роль веса отдельного измерения лучевой скорости, используемого в стандартном неравноточном методе наименьших квадратов. Если расстояния до звезд выборки определялись фотометрическими методами, σ_r можно выразить через дисперсию абсолютных величин $\sigma_{\bar{M}}$, как и в общем случае (см. п. 5).

Функция распределения остаточной скорости $\Delta V_{r,\,obs}$ может быть записана в виде одномерного нормального распределения

$$f(\Delta V_{r,\,obs}) = (2\pi)^{-1/2} \cdot L_{obs}^{-1/2} \cdot \exp\{-\frac{1}{2} \cdot (\Delta V_{r,\,obs})^2 \cdot L_{obs}^{-1}\}.$$

11 Вычисление ошибок параметров

Функция правдоподобия LF является сложной нелинейной функцией неизвестных кинематических параметров и коэффициента шкалы расстояний. В окрестности глобального минимума она может быть неплохо аппроксимирована многомерной квадратичной параболой по всем переменным (на таком представлении целевой функции вблизи экстремума основываются многие методы оптимизации). Строго говоря, доверительные интервалы для отыскиваемых кинематических параметров (т.е. их среднеквадратические ошибки) могут быть найдены путем проекции сечения профиля функции правдоподобия гиперповерхностью $LF(\vec{\alpha}) = LF_0 + 1$ (здесь LF_0 – минимальное значение функции правдоподобия, достигнутое в процессе решения) на оси параметров $\vec{\alpha}$ [19] (стр. 532). Однако построение гиперповерхности при большой размерности задачи (числе неизвестных) может оказаться сложной задачей.

Рекомендуется вычислять среднеквадратические ошибки параметров следующим более простым, но вполне корректным способом [15]. Пусть α_i^0 – какой-либо из найденных параметров задачи. Изменим значение этого параметра и зафиксируем его: $\alpha_i = \alpha_i^0 + \Delta\alpha_i$, где величина $\Delta\alpha_i$ мала (в пределах нескольких процентов от α_i^0). Теперь при фиксированном значении α_i снова найдем минимальное значение функции правдоподобия, равное LF_i, варьируя остальные параметры (при этом число неизвестных параметров стало на единицу меньше). Тогда среднеквадратичную ошибку параметра α_i вычислим по формуле

$$\sigma_i^2 \approx \frac{\Delta\alpha_i^2}{LF_i - LF_0}$$

Ясно, что $LF_i > LF_0$, поскольку последнее значение соответствует глобальному минимуму по всем неизвестным. Нетрудно понять, что такой способ логически вытекает из описанного выше строгого метода.

12 Метод решения

Максимально-правдоподобное решение для неизвестных параметров задачи (20 – 22) сравнительно слабо чувствительно к большим случайным ошибкам наблюдений отдельных звезд, которые автоматически учитываются с помощью тензора ковариации (15), играющего роль «веса». Тем не менее, оно также требует внимательного отношения к объектам, которые при малых случайных ошибках наблюдений сильно уклоняются от общего решения. Такие объекты, имеющие относительно большой «вес», могут привести к смещению оценок кинематических параметров.

Исходя из принципа практической невозможности маловероятных событий (что эквивалентно использованию критерия 3σ для остаточных скоростей звезд), их следует выявить в процессе предварительного решения и не рекомендуется использовать для окончательного вычисления функции правдоподобия. Другой (не статистической) причиной наличия подобных объектов в выборке может быть неправильная классификация объектов. Так, например, выборка объектов диска может быть «засорена» случайным включением субкарликов – объектов гало или толстого диска, обладающих совершенно иной кинематикой и пространственным распределением. Неверная классификация объектов приводит как к грубым ошибкам в расстояниях (и, следовательно, в вычисленных модельных скоростях), так и к включению в выборку объектов с пространственными скоростями, совершенно не характерными для изучаемой выборки.

Для минимизации нелинейной функции (22) существует целый ряд эффективных алгоритмов, не требующих линеаризации целевой функции и опубликованных, в частности, в известной монографии [19]. Это алгоритм координатного спуска (Пауэлла) (стр. 294) или метод сопряженных градиентов (Флетчера – Ривза, Поллака – Рибьера) (стр. 301), алгоритмы переменной метрики (называемые также методами квази-Ньютона) (DFP – Давидона, Флетчера, Пауэлла; BFGS – Бройдена, Флетчера, Гольдфарба, Шанно) (стр. 307), нелинейный метод наименьших квадратом Левенберга – Маркардта (стр. 523), и метод деформируемых многогранников Нелдера – Мида (так наз. симплекс-алгоритм, стр. 289), более медленный, но не нуждающийся в вычислении производных от целевой функции. На их базе созданы готовые эффективные алгоритмы оптимизации, написанные на языках FORTRAN, Pascal, C [19], а также частично включенные в популярные универсальные математические пакеты MATLAB, MATHEMATICA и IDL.

Литература

[1] Куликовский П.Г. Звездная астрономия. М.: «Наука». 1985.

[2] Бердников Л.Н., Возякова О.В., Дамбис А.К. Зависимость период – светимость для классических цефеид Галактики в полосах BVRIJHK. Письма в астрон. журн. Т.22. N.12. С.936-944. 1996.

[3] Павловская Е.Д. Определение средней абсолютной величины и исследование кинематики короткопериодических цефеид. Переменные звезды. Т.9. N.6. С.349-370. 1953.

[4] Carney B.V., Storm J., Jones R.V. The Baade-Wesselink method and the distances to RR Lyrae Stars. VIII - Comparisons with other techniques and implications for globular cluster distances and ages. Astrophys. J. V.386. P.663. 1992.

[5] Холопов П.Н. Звездные скопления. М.: «Наука». 1982.

[6] Страйжис В. Многоцветная фотометрия звезд. Вильнюс: «Мокслас». 1977.

[7] The HIPPARCOS catalogue. ESA SP-1200. 1997.

[8] Proceedings of the ESA Symposium 'Hipparcos - Venice '97', 13-16 May, Venice, Italy, ESA SP-402 (July 1997).

[9] Hog E., Kuzmin A., Bastian U., Fabricius C., Kuimov K., Lindegren L., Makarov V.V., Roeser S. The Tycho Reference Catalogue. Astron. Astrophys. V.335. P.L65-68. 1998.

[10] Hog E. et al. The TYCHO-2 catalogue of 2.5 million brightest stars. Astron. Astrophys. V.355. P.L27. 2000.

[11] Дамбис А.К., Расторгуев А.С. Абсолютные величины и кинематические параметры подсистемы переменных звезд типа RR Лиры. Письма в астрон. журнал. Т.27. N.2. С.132-143. 2001.

[12] Рольфс К. Лекции по теории волн плотности. М.: «Мир». 1982.

[13] Burstein D., Heiles K. Reddenings derived from HI and galaxy counts: accuracy and maps. Astron. Journ. V.87. N.8. P.1165-1189. 1982.

[14] Маррей К.Э. Векторная астрометрия. Киев: «Наукова думка». 1986.

[15] Hawley S.L., Jeffreys W.H., Barnes T.G. III, Wan Lai. Absolute magnitudes and kinematic properties of RR Lyrae stars. Astrophys. Journ. V.302. P.626-631. 1986.

[16] Дамбис А.К., Расторгуев А.С. Шкала расстояний во Вселенной. «Земля и Вселенная». Т.35. N.1. С.37. 2000.

[17] Dehnen W., Binney J. Local stellar kinematics from HIPPARCOS data. Mon. Not. Roy. Astron. Soc. V.298. P.387-394. 1998.

[18] Reid M.J. The distance to the center of the Galaxy. Annual Rev. Astron. Astrophys. V.31. P.345-372. 1993.

[19] Press W.H., Flannery B.P., Teukolski S.A., Vetterling W.T. Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. Cambridge: Cambridge University Press. 1987.