

МГУ им. М.В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра астрофизики и звёздной астрономии

Методическое пособие к задаче специального астрономического практикума
для студентов 4 курса физического факультета, обучающихся по программе
«МС_АСТРОНОМИЯ»
(специальность 03.05.01 «Астрономия»)

«Синтез звездных спектров»

Составитель:
Додин Александр Владимирович

Москва, 2017

1 Цель работы

Задача знакомит с принципами расчета синтетических спектров звезд, важными для широкого круга современных исследований: определение параметров звезд, таких как эффективная температура T_{eff} и ускорение силы тяжести на уровне фотосферы g ; химический состав; измерение средней лучевой скорости звезды; распределение скоростей в звездной атмосфере (вращение, упорядоченные и турбулентные движения газа); измерение магнитных полей звезд. Эти сведения о звездах в дальнейшем используются для изучения химической эволюции Галактики, для изучения строения и эволюции звезд. Конечно, мы не сможем в рамках одной задачи практикума охватить методы решения всех перечисленных научных задач, а рассмотрим детально только один вопрос о том, как рассчитать спектральную плотность потока при известной спектральной плотности интенсивности излучения и заданной геометрии изучающего тела. Среди множества научных задач для целей практикума выбраны две постановки одной проблемы. Первый вариант состоит в теоретическом описании фотометрической и спектральной переменности запятанных звезд (типа ВУ Dra, Ар-звезды), изучение которой позволяет восстанавливать карту поверхности звезды методом доплеровской томографии (о методе см. Piskunov et al., 1990). Второй вариант связан с планетными транзитами, которые позволяют изучать свойства экзопланет (например, можно определить размер планеты), а в перспективе – свойства атмосфер этих планет.

2 Теоретическое введение

Перед выполнением задачи следует повторить основные понятия и уравнения теории звездных атмосфер и формирования их спектров:

- Моменты поля излучения: средняя интенсивность, поток.
- Уравнение переноса излучения.
- Локальное термодинамическое равновесие, уравнения и условия применимости.
- Уравнение статистического равновесия и условия его применимости.
- Непрозрачность средняя по Росселанду, условия применения.
- Уравнение гидростатического равновесия. Высота однородной атмосферы.
- Профиль спектральной линии и механизмы его уширения.

2.1 Расчет модели звездной атмосферы и спектра интенсивности

Существуют несколько программ, которые рассчитывают структуру звездной атмосферы и выходящее из нее излучение. Это программы ЛТР расчетов ATLAS9 (Kurucz, 1993; Castelli&Kurucz, 2004), ATLAS12 (Castelli, 2005), MARCS (Gustafsson et al., 1975), MAFAGS-OS (Grupp, 2004) и не-ЛТР: TLUSTY (Hubeny&Lanz, 1995), PHOENIX (Hauschildt et al., 1997). Здесь мы рассмотрим первую из этих программ

– ATLAS9, модели которой до сих пор пользуются большой популярностью и часто являются отправными точками для изучения более сложных задач, например, в исследовании не-ЛТР эффектов.

ATLAS9 рассчитывает модель атмосферы в следующих приближениях:

1. Атмосфера стационарна.
2. Поток энергии постоянен по высоте атмосферы, поскольку в атмосфере отсутствуют источники энергии и нет ее облучения сверху.
3. Атмосфера однородна, за исключением нормального направления.
4. Толщина атмосферы много меньше радиуса звезды.
5. Атмосфера находится в гидростатическом равновесии

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho,$$

где g – ускорение свободного падения, P – полное давление, состоящее из газового, радиационного и конвективного давления, ρ – плотность.

6. Конвекция учитывается в рамках теории длины пути перемешивания.
7. Содержание элементов постоянно по высоте.
8. Локальное термодинамическое равновесие.

Модель атмосферы строится путем итераций. Начальным предположением является распределение температуры от росселандовой оптической глубины для серой атмосферы в эддингтоновском приближении:

$$T = \left[\frac{3}{4} T_{eff}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \right]^{0.25}, \quad (1)$$

где τ – росселандова оптическая глубина, T_{eff} – эффективная температура звезды. В качестве начального приближения также может быть взята модель атмосферы с параметрами близкими к заданной модели. После того как задано распределение температуры с глубиной, рассчитываются давление, концентрации частиц, непрозрачность в каждой точке. Из этих величин определяется поле излучения и конвективный поток. Сумма радиационного и конвективного потока на каждой глубине должна быть постоянной и определяться эффективной температурой звезды, однако полученный в ходе расчета поток не равен ожидаемому. Программа вычисляет поправку к температуре исходя из отклонения полученного потока на каждой глубине от ожидаемого. Затем весь расчет повторяется с новым распределением температуры.

Непрозрачность учитывается ODF методом (о методе см. книгу Сахибуллина) и разделена на 20 групп:

1. HI: связанно-свободные и свободно-свободные переходы.
2. H₂⁺: связанно-свободные и свободно-свободные.
3. H⁻: связанно-свободные и свободно-свободные.
4. Рэлееское рассеяние на HI.

5. He I: связанно-свободные и свободно-свободные.
6. He II: связанно-свободные и свободно-свободные.
7. He⁻: свободно-свободные, связанного состояния не существует.
8. Рэлеевское рассеяние на He I.
9. Низкотемпературная непрозрачность ($T < 10000$ K): C I+Mg I+Si I+Al I связанно-свободные и свободно-свободные.
10. Непрозрачность для $T = 10000 - 20000$ K: Si II+Mg II+Ca II+N I+O I связанно-свободные и свободно-свободные.
11. Высокотемпературная непрозрачность: C II-IV+N II-V+O II-VI+Ne I-VI связанно-свободные для частот выше Лаймановского предела водорода.
12. Электронное рассеяние.
13. Рэлеевское рассеяние на H₂
14. Линии H I.
15. Функция распределения поглощения в линиях металлов.
16. Функция распределения рассеяния в линиях.

И 4 группы для возможности внесения дополнительных источников непрозрачности. Код программы открыт и может быть модифицирован под более специфические условия задачи. Детальное описание кода программы можно найти в работе Kuguz (1970).

2.2 Вычисление ожидаемого спектрального и фотометрического поведения звезды с неоднородностью.

Выберем в качестве оси Z ось вращения звезды. Введем сферическую систему координат, в которой угол θ отсчитывается от оси вращения. Тогда произвольную точку звездной поверхности можно задать направляющим вектором:

$$\vec{n} = \{ \cos \phi \sin \theta, \quad \sin \phi \sin \theta, \quad \cos \theta \}, \quad (2)$$

Вращение звезды можно описать как $\phi = \omega t$. Вектор скорости связанной с вращением получим дифференцированием:

$$\vec{V} = \omega R_* \{ -\sin \phi \sin \theta, \quad \cos \phi \sin \theta, \quad 0 \}, \quad (3)$$

Здесь $\omega R_* = V_{eq}$ – экваториальная скорость вращения звезды. Звезда наблюдается под углом i , то есть луч зрения можно задать вектором:

$$\vec{I} = \{ \sin i, \quad 0, \quad \cos i \}. \quad (4)$$

Этот вектор соответствует соглашению $i = 0$ при наблюдении звезды с полюса (вдоль оси Z). Лучевую скорость V_r и угол между лучом зрения и нормалью к звездной поверхности μ можно найти как скалярное произведение:

$$V_r = \vec{V} \cdot \vec{I}. \quad (5)$$

$$\mu = \vec{n} \cdot \vec{I}. \quad (6)$$

Видимая часть звезды:

$$\Sigma : \mu(\theta, \phi) > 0 \quad (7)$$

Программы ATLAS и SYNTHЕ предоставляют нам зависимость $I_\nu(\nu, \mu, T, g)$, которую обычно конвертируют в $I_\lambda(\lambda_{loc}, \mu, T, g)$. Здесь λ_{loc} – длина волны в системе отсчета локальной точки звездной поверхности \vec{n} . В системе отсчета наблюдателя.

$$\lambda = \lambda_{loc} \left(1 + \frac{V_r}{c} \right). \quad (8)$$

Наблюдаемой характеристикой является поток:

$$F_\lambda = \frac{R_*^2}{d^2} \int_{\Sigma} I(\lambda, \mu, T, g) \mu \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (9)$$

Интегрирование производится по видимой части звезды Σ . Так как нас интересует изменение потока, то множитель перед интегралом можно опустить.

Для моделирования фотометрических характеристик достаточно использовать спектр низкого разрешения. Преобразованием (8) можно пренебречь. Поток у Земли в некотором фильтре X равен:

$$F_X = \int_0^\infty F_\lambda a_\lambda f_X(\lambda) d\lambda \quad (10)$$

где $f_X(\lambda)$ – кривая пропускания фильтра, a_λ – закон поглощения среды между источником и регистрирующим прибором, мы будем полагать, что $a_\lambda = 1$. Кривые пропускания фильтров для различных систем можно взять на сайте

<http://ulisse.pd.astro.it/Astro/ADPS/Systems/index.html>

Звездная величина определяется формулой Погсона, в которой поток от звезды нулевой величины можно взять за 1, поскольку нас будет интересовать изменение блеска и цвета, а не их абсолютные значения.

2.2.1 Запятненная звезда

Пусть общая мощность излучения с единицы площади не является постоянной величиной на видимой поверхности звезды, то есть существует некоторое распределение эффективной температуры по поверхности. Типичным примером такой ситуации являются холодные пятна. Пусть область Π – область звездной поверхности занимаемая пятном с эффективной температурой T_2 , в то время как эффективная температура остальной части звезды равна T_1 . В этом случае

$$I(\lambda_{loc}, \theta, \phi) = \begin{cases} I(\lambda_{loc}, \mu, T_1, g), & \text{при } \mu \geq 0, \vec{n} \notin \Pi \\ I(\lambda_{loc}, \mu, T_2, g), & \text{при } \mu \geq 0, \vec{n} \in \Pi \\ 0, & \text{при } \mu < 0 \end{cases} \quad (11)$$

Если область Π занимает малую часть поверхности звезды, то для ускорения процесса интегрирования, следует интеграл (9) разбить на сумму

$$\int_{\Sigma} I(\lambda, \mu, T, g) \mu \sin(\theta) d\phi d\theta = \int_{\Sigma} I(\lambda, \mu, T_1, g) \mu \sin(\theta) d\phi d\theta + \int_{\Pi} (I(\lambda, \mu, T_2, g) - I(\lambda, \mu, T_1, g)) \mu \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (12)$$

Тогда второй интеграл нужно рассчитывать для каждой фазы, а первый всего один раз. Так как область Π меньше Σ , такое разделение ускоряет процедуру вычислений.

Для круглого пятна область Π можно задать с помощью направляющего вектора \vec{n}_0 :

$$\vec{n}_0 = \{ \cos \phi_0 \sin \theta_0, \quad \sin \phi_0 \sin \theta_0, \quad \cos \theta_0 \}, \quad (13)$$

который указывает на центр круга, и максимального угла α между \vec{n}_0 и \vec{n} .

$$\Pi : \quad \vec{n}_0 \cdot \vec{n} > \cos \alpha \quad (14)$$

Для круглого пятна занимающего долю f общей поверхности звезды:

$$\cos \alpha = 1 - 2f \quad (15)$$

2.2.2 Прохождение планеты по диску звезды

Помещаем начало координат, как и прежде, в центр звезды. Планета радиуса r находится в точке \vec{R} , все расстояния, как и прежде, мы измеряем в R_* . Наша задача найти все точки поверхности звезды, которые закрываются планетой. Построим вектор \vec{s} который является проекцией \vec{n} на картинную плоскость:

$$\vec{s} = \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{I}) \vec{I} \quad (16)$$

Аналогично построим проекцию \vec{R} на ту же плоскость.

$$\vec{c} = \vec{R} - (\vec{R} \cdot \vec{I}) \vec{I} \quad (17)$$

Так как планета – шар радиуса r , то ее проекция – круг радиуса r . Если вектор \vec{s} попадает в этот круг

$$|\vec{s} - \vec{c}| < r \quad (18)$$

то соответствующая ему точка \vec{n} закрывается планетой. Теперь можно найти интеграл (9), используя разложение (12), в котором для закрытых планетой точек звезды следует положить $I(\lambda, \mu, T_2, g) = 0$.

3 Задание

Первый вариант:

В первом варианте изучается влияние пятенной активности звезд на их фотометрическое и спектральное поведение. Задается модель пятна: форма и расположение на звезде, эффективная температура, наличие или отсутствие конвекции. По аналогии с расчетом для звездной атмосферы проводится расчет вертикальной структуры и

поля излучения для пятна. Предполагая, что звезда твердотельно вращается с заданной скоростью на экваторе V_{eq} , угол наклона оси вращения к лучу зрения задан и равен i , нужно рассчитать профили любой спектральной линии из заданного диапазона длин волн и фотометрическое поведение звезды для набора фаз ϕ от 0 до 2π с шагом не меньше чем $\pi/12$.

В качестве результата представить фазовые кривые блеска в фильтре V и цвета U-B, B-V, V-R, R-I в системе Джонсона-Кузинса и набор профилей любой линии на различных фазах.

Второй вариант:

Во-втором варианте рассматривается прохождение планеты по диску звезды. Изучается соответствующий фотометрический и спектроскопический эффекты. Задаются параметры: радиус планеты в радиусах звезды, орбита – круговая с известным радиусом, наклон орбиты к экватору, наклон оси вращения звезды к лучу зрения, экваториальная скорость твердотельного вращения звезды.

В качестве результата представить фазовые кривые блеска в фильтре V и цвета U-B, B-V, V-R, R-I в системе Джонсона-Кузинса и набор профилей произвольной линии на различных фазах прохождения планеты по диску звезды.

4 Ход работы

В задачу практикума входит:

- Расчет структуры звездной фотосферы с заданными параметрами:
 - Эффективная температура
 - Ускорение свободного падения
 - Характерная скорость микротурбулентности
 - Солнечный химический состав
- Расчет интенсивности излучения в локальной точке звездного диска с высоким и низким спектральным разрешением для заданного спектрального диапазона.
- Расчет фотометрической и спектральной переменности звезды с холодным пятном или звезды во время транзита экзопланеты.

4.1 Удаленные расчеты

Расчеты моделей звездных атмосфер и их спектров выполняются на удаленной машине. Для расчета моделей необходимо по ssh зайти на `stud@deneb.sai.msu.ru`. Для этого в эмуляторе терминала (Unix) или в эмуляторе терминала программы Putty (Windows) необходимо набрать:

```
ssh stud@deneb.sai.msu.ru
```

Пароль будет выдан при допуске к задаче.

При выполнении задания необходимо скопировать директорию 4kurs из домашней директории пользователя stud в директорию, в которой будет проводиться расчет, например так: `cp -r 4kurs ivanov`

Для копирования файлов с сервера или на сервер используется команда `scp` (выполняется на компьютере пользователя)

С сервера:

```
scp stud@deneb.sai.msu.ru:"путь откуда" "путь куда"
```

На сервер:

```
scp "путь откуда" stud@deneb.sai.msu.ru:"путь куда"
```

Для копирования директорий используется `scp -r ...` Для выхода из ssh-сессии – `exit` В системе Windows вместо `scp` используется программа `pscp.exe`, запускаемая из командного окна Windows (`cmd.exe`), например для копирования директории:

```
pscp -r stud@deneb.sai.msu.ru:"путь откуда" "путь куда"
```

Для редактирования файлов на сервере можно использовать редактор `joe` – `joe filename`, для выхода из `joe` нужно нажать `ctrl-k x`, для выхода без сохранения – `ctrl-c`. Для просмотра содержимого файла в терминале можно использовать `cat`, `tail -n` – показать `n` строк с конца, `head -n` – показать `n` строк с начала.

4.2 Расчет модели звездной атмосферы

Сперва нужно отредактировать скрипт `atm_model.sh`, который передаст программе все необходимые параметры. Для целей практикума нужно будет изменять только эффективную температуру звезды и ускорение силы тяжести на уровне фотосферы.

В начале этого скрипта задаются файлы содержащие данные с непрозрачностью. `*.ros` – таблицы росселандовой непрозрачности. `p00` означает солнечное содержание элементов. `*.bdf` – функция распределения непрозрачности (ODF).

```
#Opacity and ODF file calls
```

```
ln -s /usr/local/kurucz/ODF/NEW/kapp00.ros fort.1
```

```
ln -s /usr/local/kurucz/ODF/NEW/p00big2.bdf fort.9
```

```
ln -s /usr/local/kurucz/lines/molecules.dat fort.2
```

Далее задается стартовая модель атмосферы (например, `ap00t4750g45k2odfnew.dat`).

Для широкого диапазона параметров такие предрассчитанные модели можно найти и выбрать наиболее близкую к требуемой на сайте

<http://wwwuser.oats.inaf.it/castelli/grids/gridp00k2odfnew/ap00k2tab.html>

ATLAS9 может рассчитывать модели звездных атмосфер и без начальной модели, однако это может потребовать больше расчетного времени. В случае если нужно рассчитать модель без начального приближения, то нужно удалить следующую строку и команду `READ PUNCH`.

```
#Starting model assignation
```

```
ln -s ap00t4750g45k2odfnew.dat fort.3
```

```
#Atlas is called and fed with his input control cards
```

Здесь запускаем программу:

```
/usr/local/kurucz/bin/atlas9.exe <<EOF
```

Читаем непрозрачность, читаем начальную модель, учитываем молекулы, читаем молекулярные данные.

```
READ KAPPA
```

```
READ PUNCH
```

```
MOLECULES ON
READ MOLECULES
```

Задаем число точек по частоте: 337 точек с 1 по 337. Есть всего две возможности 337 точек – BIG или 1212 – LITTLE. Здесь мы будем использовать только BIG. Далее определяем скорость микротурбулентности в см/с, она должна соответствовать bdf-файлу, заданному выше.

```
FREQUENCIES 337 1 337 BIG
VTURB 2.0E+5
```

Определяем параметры конвекции: параметр теории пути перемешивания $\alpha = 1.25$, далее следует число 1 (учитываем овершутинг) или 0 (без овершутинга). Рекомендуется всегда использовать 0. CONVECTION OFF – конвекция не учитывается. Далее задаем название модели: любые символы.

```
CONVECTION OVER 1.25 0
TITLE [0.0] VTURB=2 L/H=1.25 NOVER NEW ODF
```

Далее определяем сетку по росселандовой оптической глубине. 72 – число узлов сетки, максимум 72. Далее начальная глубина и шаг по глубине. Нас будут интересовать только последние два параметра – эффективная температура и логарифм ускорения сила тяжести, эти параметры нужно изменить на заданные в задаче.

```
SCALE 72 -6.725 0.125 4750. 4.50
```

Определяем число итераций, максимум – 15. Далее выбираем какие итерации печатать на экран: 0 – не печатать ничего. PUNCH – печатает результат итерации в файл.

```
ITERATIONS 15 PRINT 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
PUNCH 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
```

```
BEGIN ITERATION 15 COMPLETED
```

Программа записывает результат в файл с именем fort.7, поэтому можно переименовать его и удалить лишние файлы:

```
#The exit model is renamed
mv fort.7 nt4750g45k2.dat
#Some garbage is removed
rm -f fort.*
```

Для запуска программы, нужно запустить этот скрипт в терминале (. atm_model.sh)

4.3 Расчет распределения энергии в спектре

Для расчета необходимо отредактировать скрипт surfint.sh, то есть изменить название модели, для которой будет рассчитываться спектр и задать название файла, в который этот спектр будет записан:

```
.....
ln -s nt4750g45k2.dat fort.3
.....
mv fort.7 t4750g45.dat
.....
```

Запускаем этот скрипт в терминале, как и в предыдущем случае. Здесь спектр будет записан в файл t4750g45.dat.

4.4 Расчет фотометрического поведения

В полученном файле (t4750g45.dat) содержатся интенсивности в широком спектральном диапазоне для 17 углов, косинусы которых равны 1.0, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.125, 0.1, 0.075, 0.05, 0.025, 0.01. Путем интегрирования этих интенсивностей по видимой поверхности звезды необходимо рассчитать спектральную плотность потока. Путем интегрирования потока с кривыми пропускания фильтров (файл с кривыми находится в рабочей директории), необходимо получить цвета звезды на различных фазах осевого вращения звезды (в случае холодного пятна) или при различных положениях планеты на диске звезды.

4.5 Расчет спектра высокого разрешения

Сначала редактируем файл (здесь это nt4750g45k2.dat) с моделью атмосферы посчитанной нами в ATLAS9. В начало файла нужно скопировать текст:

```
SURFACE INTENSI 17 1.,.9,.8,.7,.6,.5,.4,.3,.25,.2,.15,.125,.1,.075,.05,.025,.01
ITERATIONS 1 PRINT 2 PUNCH 2
```

```
CORRECTION OFF
```

```
PRESSURE OFF
```

```
READ MOLECULES
```

```
MOLECULES ON
```

Затем редактируем файл synmod.tcsh, в котором необходимо задать модель атмосферы:

```
set model = nt4750g45k2.dat
```

```
set teff = t4750
```

```
set glog = g450
```

Задать начальную, конечную длину волны (в нм) и спектральное разрешение, турбулентную скорость. Остальные параметры оставить как есть.

```
AIR          588.0    590.0    600000.    1.67    0    30    .0001    1    0
AIRorVAC    WLBEQ      WLEND      RESOLU     TURBV   IFNLTE  LINOUT  CUTOFF      NREAD
EOF
```

Запускаем скрипт командой tcsh -b synmod.tcsh

4.6 Расчет переменнойности профилей линий

В результате запуска synmod.tcsh должен получиться файл с интенсивностями для узкого спектрального диапазона, но при высоком разрешении (в примере $\Delta\lambda = 20 \text{ \AA}$ при разрешении 600000.) Используя эти данные, необходимо рассчитать как изменяются профили спектральных линий на различных фазах.

5 Итоги работы

1. Представить график зависимости температуры газа в звездной атмосфере от $\lg \tau_{Ross}$ для модели серой атмосферы и для модели ATLAS с одной и той же T_{eff} .
2. Представить фазовые кривые блеска в фильтре V и цвета U-B, B-V, V-R, R-I в системе Джонсона-Кузинса от фазы вращения звезды в случае звезды с пятном или от фазы прохождения планеты по диску звезды.

3. Представить набор профилей какой-либо спектральной линии для различных фаз вращения звезды в случае звезды с пятном или для различных фаз прохождения планеты по диску звезды.

6 Контрольные вопросы

1. Что такое ЛТР и какие уравнения при этом выполняются?
2. Что такое эквивалентная ширина линии и почему у разных линий она разная?
3. Что такое интенсивность, средняя интенсивность, поток излучения?
4. Что такое закон потемнения к краю?
5. На какой оптической глубине τ_{Ross} физическая температура газа равна эффективной температуре звезды?
6. Что такое высота однородной атмосферы?
7. Как изменится цвет звезды, если пятно (планета) находится в центре (на краю) звездного диска?
8. Как изменится профиль линии, если пятно (планета) находится в центре (на краю) звездного диска?
9. *Как на звездном диске выглядят линии равных лучевых скоростей?

Рекомендуемая литература

Методы моделирования в астрофизике. Сахибуллин Н. А., ФЭН. 1997. Том 1. Глава 2, 4 и стр. 66-68.

Курс теоретической астрофизики. Соболев В. В. Наука. 1985. Глава 1.

Цитируемая литература

- Абубекеров М. К., Гостев Н. Ю., Черепашук А. М., 2010, АЖ, 87, 1199
Castelli, F., Kurucz, R. L., 2004, ArXiv Astrophysics e-prints, astro-ph/0405087
Castelli, F., 2005, MSAIS, 8, 25
Grupp F., 2004 A&A, 420, 289
Gustafsson B., Bell R. A., Eriksson K., Nordlund A., 1975, A&A, 42, 407
Hauschildt P. H., Baron E., Allard F., 1997, ApJ, 483, 390
Hubeny I., Lanz T., 1995, ApJ, 439, 875
Kuerster M., Hatzes A. P., Cochran W. D., et al., 1994, Msngr, 76, 51
Kurucz, R. L., 1970, SAOSR, 309
Kurucz, R. 1993, ATLAS9 Stellar Atmosphere Programs and 2 km/s grid. CD-ROM No. 13. Cambridge, Mass.: Smithsonian Astrophysical Observatory, 1993., 13
Pickles A. J., 1998, PASP, 110, 863
Piskunov N. E., Tuominen I., Vilhu O., 1990, A&A, 230, 363
Sbordone, L., Bonifacio, P., Castelli, F., Kurucz, R. L., 2004, MSAIS, 5, 93