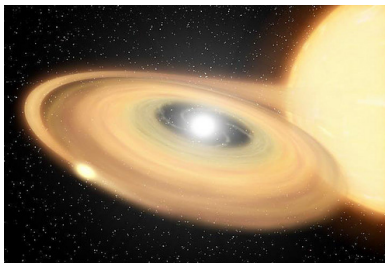


Два вопроса теории дисковой аккреции: релятивистский изгибный диск и транзитный рост возмущений в сдвиговых потоках

В. Журавлев

Отдел релятивистской астрофизики

18 Февраля 2013



- 1 Релятивистский изгибный диск
 - Формирование изгибного аккреционного диска
 - Расчет релятивистского диска. Твистовые уравнения
 - Стационарный изгибный диск: результаты
 - Текущая работа и дальнейшие планы

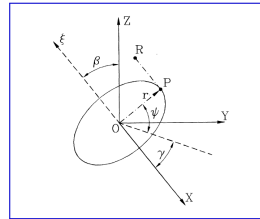
- 2 Транзиентный рост в сдвиговых потоках
 - Суть проблемы
 - Поиск оптимальных возмущений: два метода
 - Оптимизация в кеплеровском диске
 - Текущая работа и дальнейшие планы

Момент гравитомagnetной силы

Если плоский диск (или его кольца) слегка вывести из экваториальной плоскости вращающейся черной дыры, то появится компонента гравитомagnetной силы, направленная перпендикулярно новой плоскости диска:

$$F_{\xi} = \frac{4a\Omega M^2}{r^2} \beta \sin \psi,$$

Стационарный диск должен перестроиться так, чтобы сбалансировать появившийся ненулевой момент силы F_{ξ} .

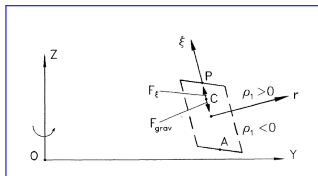
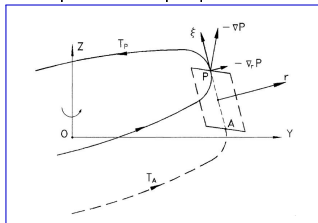


Здесь $|a| < 1$ - параметр Керра, $\Omega = \sqrt{M/r^3}$ - кеплеровская частота, $r \gg r_g$. Тут и ниже принято что $c = G = 1$.

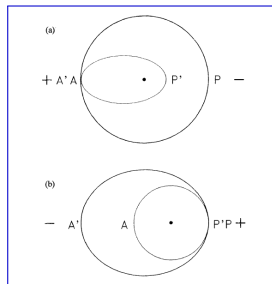
Диск должен изогнуться

Иванов & Илларионов (1997)

Возникновение проекции вертикального градиента давления на плоскость кеплеровского вращения.



Учет вязкости и/или эйнштейновской прецессии дает линии тока в виде эллипсов с $e \sim \xi \beta'$ поэтому $\rho_1 \sim \xi$



$$\int d\xi \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \Sigma F_\xi = 0$$

Здесь $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\xi \Omega^2$, $\Sigma = \int d\xi \rho_0$.

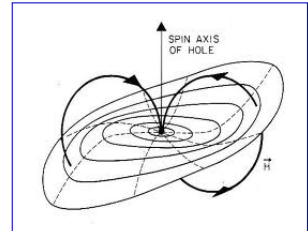
Вязкий и/или тонкий диск

Если $\alpha > h/r$

Тогда стационарный изгибный диск всегда укладывается в экваториальную плоскость черной дыры начиная с расстояния

$$R_1 \sim \alpha^{2/3} a^{2/3} (r/h)^{4/3} R_g$$

Бардин & Петтерсон (1975)



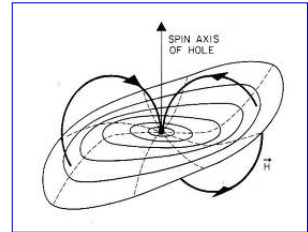
Вязкий и/или тонкий диск

Если $\alpha > h/r$

Тогда стационарный изгибный диск всегда укладывается в экваториальную плоскость черной дыры начиная с расстояния

$$R_1 \sim \alpha^{2/3} a^{2/3} (r/h)^{4/3} R_g$$

Бардин & Петтерсон (1975)



А нестационарная эволюция является диффузионной с характерным временем

$$t_1 = \alpha (r/h)^2 \Omega^{-1}$$

Папалойзу & Прингл (1983)

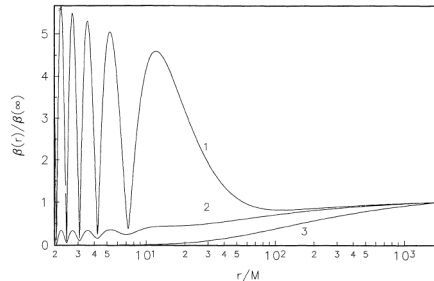
Невязкий и/или толстый диск

Если $\alpha < h/r$

Тогда при $a > 0$ стационарный диск изгибный диск испытывает радиальные осцилляции угла наклона β , а при $a < 0$ - снова укладывается в плоскость черной дыры начиная с расстояний

$$R_2 \sim a^{2/5} (r/h)^{4/5} R_g$$

Иванов & Илларионов (1997)



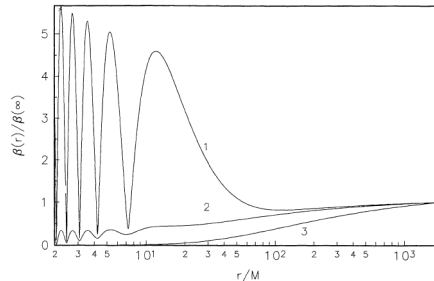
Невязкий и/или толстый диск

Если $\alpha < h/r$

Тогда при $a > 0$ стационарный диск изгибный диск испытывает радиальные осцилляции угла наклона β , а при $a < 0$ - снова укладывается в плоскость черной дыры начиная с расстояний

$$R_2 \sim a^{2/5} (r/h)^{4/5} R_g$$

Иванов & Илларионов (1997)



А нестационарная эволюция становится волновой с характерным временем

$$t_2 \sim (r/h)\Omega^{-1}$$

Папалойзу & Линь (1995)

Релятивистские уравнения газодинамики

Журавлев & Иванов (2011) —
Полное релятивистское рассмотрение задачи

Закон сохранения массы покоя: $(\rho U^i)_{;i} = 0$

Закон сохранения энергии-импульса: $T_{;k}^{ik} = 0$

$$T^{ik} = (\epsilon + p)U^i U^k - p g^{ik} + T_{\nu}^{ik} - U^i q^k - U^k q^i,$$

$$g^{ik} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}, \quad \epsilon = \rho + \epsilon_{th}$$

$$\text{Вклад вязкости } T_{\nu}^{ik} = 2\eta\sigma^{ik}$$

$$\text{Тензор сдвига } \sigma^{ik} = \frac{1}{2}(U_{;j}^i P^{jk} + U_{;j}^k P^{ji}) - \frac{1}{3}U_{;j}^j P^{ik}$$

$$\text{Проекционный тензор } P^{ik} = g^{ik} - U^i U^k$$

q^i - поток лучистой энергии, η - динамическая вязкость

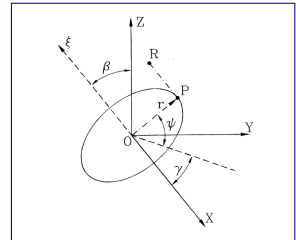
Ковариантная производная вектора и ковариантная дивергенция тензора:

$$A_{;j}^i = e_j(A^i) + \Gamma_{kj}^i A^k, \quad A_{;j}^{ij} = e_j(A^{ij}) + \Gamma_{kj}^i A^{kj} + \Gamma_{kj}^j A^{ik}$$

Твистовые координаты и тетрадный базис

$$\begin{pmatrix} \tau \\ r \cos \psi \\ r \sin \psi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma & \beta \\ 0 & \beta \sin \gamma & -\beta \cos \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$|\beta(\tau, r)| \ll 1$ и $\gamma(\tau, r)$ подлежат определению



- 1 Метрика Керра берется в предположении медленного вращения черной дыры $a \ll 1$
- 2 Ортонормированный тетрадный базис отслеживает изгиб диска и делится на основную “плоскую” и дополнительную “изгибную” части

Тетрадный базис

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{1}{K_1} \left(\partial_\tau \right)$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{K_2} \left(\partial_r \right)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{K_2} \left(-ar \frac{K_3}{K_1} \partial_\tau + \frac{1}{r} \partial_\varphi \right)$$

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{1}{K_2} \left(\partial_\xi \right)$$

Тетрадный базис

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{1}{K_1} \left(\partial_\tau + \xi U \partial_r + \frac{\xi}{r} \partial_\varphi U \partial_\varphi - r U \partial_\xi \right)$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{K_2} \left(-a \xi \frac{K_3}{K_1} \partial_\varphi Z \partial_\tau + (1 + \xi W) \partial_r + \frac{\xi}{r} \partial_\varphi W \partial_\varphi - r W \partial_\xi \right)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{K_2} \left(-a r \frac{K_3}{K_1} \left(1 - \frac{\xi}{r} Z \right) \partial_\tau - a \xi \frac{K_3}{K_1} r U \partial_r + \left(1 - a r \xi \frac{K_3}{K_1} \partial_\varphi U \right) \frac{1}{r} \partial_\varphi + a r \frac{K_3}{K_1} r U \partial_\xi \right)$$

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{1}{K_2} \left(a r \frac{K_3}{K_1} \partial_\varphi Z \partial_\tau + \partial_\xi \right)$$

Коэффициенты связности

$$\Gamma_{trt} = \frac{K'_1}{K_1 K_2}$$

$$\Gamma_{tr\xi} =$$

$$\Gamma_{t\varphi\xi} = a \frac{K_3}{K_2^2} \left(\frac{\xi}{2} K_4 \right)$$

$$\Gamma_{t\xi r} =$$

$$\Gamma_{r\varphi t} = -\Gamma_{tr\varphi}$$

$$\Gamma_{r\varphi\varphi} = \frac{(rK_2)'}{rK_2^2}$$

$$\Gamma_{r\xi r} = -\frac{\xi}{r} \frac{K'_2}{K_2^2}$$

$$\Gamma_{r\xi\xi} = \frac{K'_2}{K_2^2}$$

$$\Gamma_{\varphi\xi r} =$$

$$\Gamma_{tr\varphi} = a \frac{K_3}{K_2^2} \left(1 - \frac{r}{2} K_4 \right)$$

$$\Gamma_{t\varphi r} = -\Gamma_{tr\varphi}$$

$$\Gamma_{t\xi t} = \frac{\xi}{r} \frac{K'_1}{K_1 K_2}$$

$$\Gamma_{t\xi\varphi} = -\Gamma_{t\varphi\xi}$$

$$\Gamma_{r\varphi r} =$$

$$\Gamma_{r\xi t} =$$

$$\Gamma_{r\xi\varphi} =$$

$$\Gamma_{\varphi\xi t} = -\Gamma_{t\varphi\xi}$$

$$\Gamma_{\varphi\xi\varphi} = -\frac{\xi}{r} \frac{K'_2}{K_2^2}$$

где $K_4 \equiv (K_3/K_1)(K_1/K_3)'$

Коэффициенты связности

$$\Gamma_{\tau\tau\tau} = \frac{K_1'}{K_1 K_2}$$

$$\Gamma_{\tau r \xi} = -a \frac{K_3}{K_2^2} \partial_\varphi Z \left(1 - \frac{1}{2r} (r^2 + \xi^2) K_4\right)$$

$$\Gamma_{\tau\varphi\xi} = a \frac{K_3}{K_2^2} \left(Z + \left(1 - \frac{\xi}{r} Z\right) \frac{\xi}{2} K_4\right)$$

$$\Gamma_{\tau\xi r} = -\Gamma_{\tau r \xi}$$

$$\Gamma_{r\varphi\tau} = \frac{\xi}{r} \frac{1}{K_1} \partial_\varphi U - \Gamma_{\tau r \varphi}$$

$$\Gamma_{r\varphi\varphi} = \frac{(rK_2)'}{rK_2^2} - a\xi \frac{K_3}{K_1 K_2} \partial_\varphi U$$

$$\Gamma_{r\xi r} = \frac{W}{K_2} - \frac{\xi}{r} \frac{K_2'}{K_2^2}$$

$$\Gamma_{r\xi\xi} = \frac{K_2'}{K_2^2}$$

$$\Gamma_{\varphi\xi r} = \frac{1}{K_2} \partial_\varphi W$$

$$\Gamma_{\tau r \varphi} = a \frac{K_3}{K_2^2} \left(1 - \left(1 - \frac{\xi}{r} Z\right) \frac{r}{2} K_4\right)$$

$$\Gamma_{\tau\varphi r} = -\Gamma_{\tau r \varphi}$$

$$\Gamma_{\tau\xi\tau} = \frac{\xi}{r} \frac{K_1'}{K_1 K_2}$$

$$\Gamma_{\tau\xi\varphi} = -\Gamma_{\tau\varphi\xi}$$

$$\Gamma_{r\varphi r} = \frac{\xi}{r} \frac{1}{K_2} \partial_\varphi W$$

$$\Gamma_{r\xi\tau} = \frac{U}{K_1} - \Gamma_{\tau r \xi}$$

$$\Gamma_{r\xi\varphi} = -ar \frac{K_3}{K_1 K_2} U$$

$$\Gamma_{\varphi\xi\tau} = \frac{1}{K_1} \partial_\varphi U - \Gamma_{\tau\varphi\xi}$$

$$\Gamma_{\varphi\xi\varphi} = -\frac{\xi}{r} \frac{K_2'}{K_2^2} - ar \frac{K_3}{K_1 K_2} \partial_\varphi U$$

где $K_4 \equiv (K_3/K_1)(K_1/K_3)'$

Вывод твистовых уравнений

$$T_{;k}^{ik} = (T_0^{ik})_{;k}^0 + (T_1^{ik})_{;k}^0 + (T_0^{ik})_{;k}^1$$

• Плоский диск

$$(T_0^{ik})_{;k}^0 = 0$$

• Динамика изгиба

$$(T_1^{ik})_{;k}^0 + (T_0^{ik})_{;k}^1 = 0$$

$$T^{ik} = T_0^{ik} + T_1^{ik} \quad \Longleftarrow \quad U^i = U_0^i + v^i, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1, \quad p = p_0 + p_1, \dots$$

Главное предположение что $h/r \ll 1$ дает

- $t_{tw} \gg t_d$ (также поскольку $t_{LT} \gg t_d$)
- “горизонтальная” часть твистовых уравнений (τ, r, φ) содержит только члены $\propto h/r$
- а их “вертикальная” часть (ξ) содержит члены $\propto (h/r)^2$ и...
гравитомагнитный член $\propto a(h/r)^0 \quad \Longleftarrow \quad$ В модели плоского диска можно положить $a = 0$
- ~~$\epsilon_{th}, \quad q^i = q_0^i + q_1^i, \quad \eta_1, \quad p_1$~~

выбор калибровки $d\xi/d\tau = 0$

Твистовые уравнения

$$a \ll 1 \text{ \& } h/r \ll 1$$

$$\begin{aligned} \frac{K_2}{K_1} \dot{v}^\varphi + \frac{1}{r} \frac{U^\varphi}{U^\tau} \partial_\varphi v^\varphi + \left(\frac{\partial_r U^\varphi}{U^\tau} + \frac{K'_1}{K_1} \frac{U^\tau}{U^\varphi} \right) v^r + \frac{1}{\rho U^\tau} (\partial_\xi T_\nu^{\varphi\xi} - rW \partial_\xi T_\nu^{r\varphi}) &= 0, \\ \frac{K_2}{K_1} U^\tau \dot{v}^r + \frac{U^\varphi}{r} \partial_\varphi v^r - 2 \frac{K'_1}{K_1 U^\varphi} v^\varphi + \frac{1}{\rho} \partial_\xi T_\nu^{r\xi} &= W r \frac{\partial_\xi p}{\rho}, \\ \Sigma U^\tau U^\varphi \left\{ \partial_\varphi U - a \frac{K_1 K_3}{K_2^2} Z \right\} + \partial_\varphi W \frac{K_1}{K_2} \{ \Sigma U^\varphi U^r + \bar{T}_\nu^{r\varphi} \} &= \\ - \frac{1}{2r^2 K_2^4} \int d\xi \partial_r (\xi r K_1 K_2^3 U^\varphi \rho \partial_\varphi v^r + r^2 K_1 K_2^3 T_\nu^{r\xi}). \end{aligned}$$

Σ - поверхностная плотность

“Надчеркивание” означает проинтегрированную по ξ величину

$$T_\nu^{r\xi} = -\frac{\eta}{K_2} (\partial_\xi v^r + U^\varphi \partial_\varphi W), \quad T_\nu^{\varphi\xi} = -\frac{\eta}{K_2} \partial_\xi v^\varphi, \quad T_\nu^{r\varphi} = -\eta r \left(\frac{U^\varphi}{r K_2} \right)'$$

Стационарный изгибный диск

Для стационарного диска с α -параметризацией вязкости получаем

$$\frac{K_1}{R^{1/2}D} \frac{d}{dR} \left(\frac{R^{3/2}D}{K_1 U^\tau} f^*(\alpha, R) \frac{dW}{dR} \right) - 3\alpha U^\tau (1 - D^{-1}) \frac{dW}{dR} + \frac{4ia}{\delta^2 K_1^3 R^3 U^\varphi} W = 0$$

где * означает комплексное сопряжение,

$$f(\alpha, R) = (1 + \alpha^2 - 3i\alpha K_1^2) \frac{R(i - \alpha)}{\alpha R(\alpha + 2i) - 6} + \alpha, \quad W = \beta e^{i\gamma}$$

$U^\tau(R), U^\varphi(R)$ - кеплеровская скорость в метрике Шварцшильда,

$D(R)$ - релятивистская поправка Новикова-Торна (Рифферт & Хэрольд 1995),

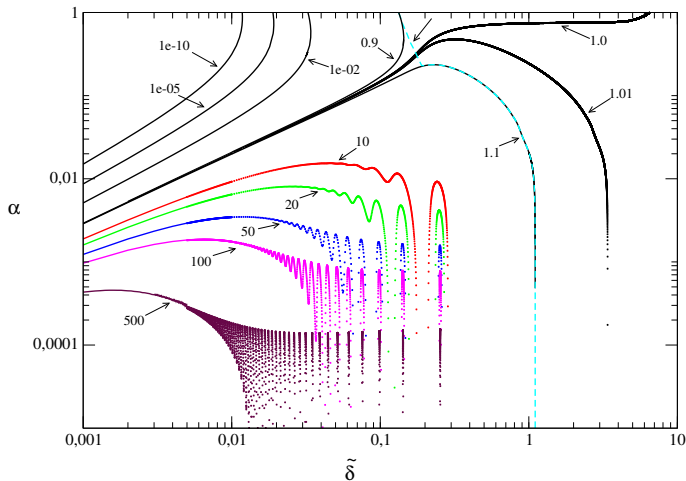
$\delta = h(R)/R$ - профиль полутолщины диска

Два независимых параметра задачи

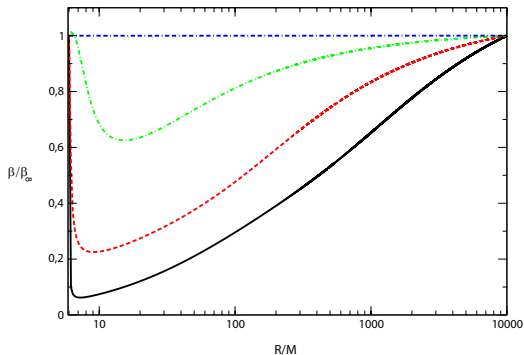
$$\alpha \rightarrow [0, 1]$$

$$\tilde{\delta} = \delta_*/\sqrt{|a|} \rightarrow (0, \infty)$$

Результаты расчетов



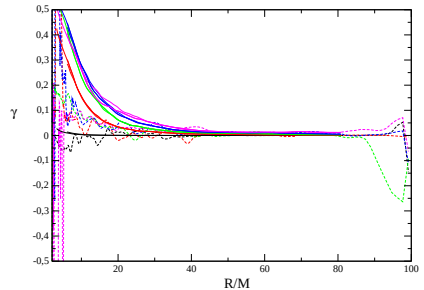
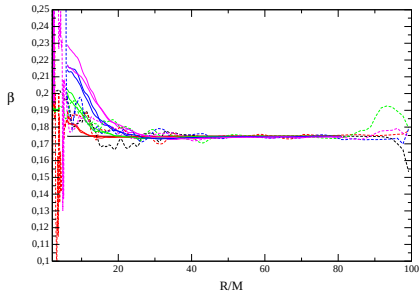
Результаты расчетов



$$\tilde{\delta} = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1.0$$

Текущая работа и дальнейшие планы

Сравнение расчетов динамики нестационарного релятивистского изгибного диска с результатами симуляций —
к примеру, Декстер & Фрагиль (2012)



Текущая работа и дальнейшие планы

- Исследование режимов эволюции релятивистских аккрецирующих торов. (Написан код для решения начально-краевой задачи с твистовыми уравнениями и нестационарным бэкграундом)
- Аналитическое и численное решение спектральной задачи на изгибные возмущения в релятивистском диске. Поиск и анализ захваченных изгибных мод.
- Расчет наблюдательных проявлений релятивистских изгибных дисков с использованием кода, симулирующего изображение и спектр окрестностей вращающейся черной дыры для удаленного наблюдателя

Анализ малых возмущений

Линейная теория гидродинамических возмущений — устойчивость и перенос углового момента, волны и осцилляции в дисках, а также нестационарные транзиентные явления в них

Эволюции возмущений можно приписать динамический оператор, воздействующий на начальное возмущение: $\mathbf{q}(t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{q}(0)$.

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U},$$

$$\mathbf{U} \mathbf{q} = e^{i\omega t} \mathbf{q}$$

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger \neq \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U},$$

$$\mathbf{U} \mathbf{v} = \sigma \mathbf{u}, \quad \mathbf{U}^\dagger \mathbf{u} = \sigma \mathbf{v}$$

Наличие сдвига скорости в газовом потоке делает динамический оператор ненормальным, его собственные моды становятся неортогональными друг другу, что делает возможным существование специфических транзиентных возмущений

Шмид (2007)

Анализ малых возмущений

Модальный анализ



выстраивает **собственные моды**
в соответствии с их **собственными**
значениями // интервал времени не важен

Немодальный анализ



выстраивает **сингулярные вектора**
в соответствии с их **сингулярными**
значениями // для каждого интервала
времени

Анализ малых возмущений

Модальный анализ $\Rightarrow$ выстраивает **собственные моды**
в соответствии с их **собственными**
значениями // интервал времени не важен

Немодальный анализ $\Rightarrow$ выстраивает **сингулярные вектора**
в соответствии с их **сингулярными**
значениями // для каждого интервала
времени

Система **сингулярных векторов** **ненормального** оператора
ортогональна и полна
подобно системе **собственных векторов эрмитова** оператора

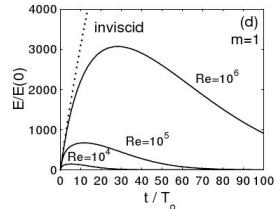
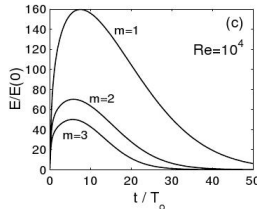
*Найти оптимальные возмущения - означает найти наибольшее
сингулярное значение и соответствующий сингулярный вектор.*

Транзиентная активность турбулентных дисков

Оптимальные глобальные возмущения

Ioannou & Kakouris (2001) — исследовали двумерный поток вязкой несжимаемой жидкости с кеплеровским профилем вращения, нашли оптимальные начальные возмущения и стационарный отклик течения на внешнее стохастическое возбуждение.

Оптимальные
вихревые
возмущения

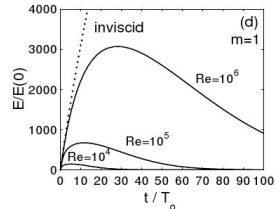
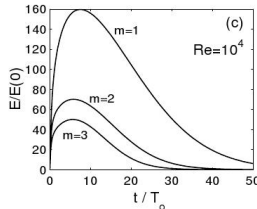


Транзиентная активность турбулентных дисков

Оптимальные глобальные возмущения

Ioannou & Kakouris (2001) — исследовали двумерный поток вязкой несжимаемой жидкости с кеплеровским профилем вращения, нашли оптимальные начальные возмущения и стационарный отклик течения на внешнее стохастическое возбуждение.

Оптимальные
вихревые
возмущения



Но какие оптимальные возмущения получим, если рассмотрим кеплеровский гиперзвуковой тонкий диск?

Два метода поиска оптимальных возмущений

Матричный метод.

Основан на поиске линейной комбинации собственных мод, показывающей наибольший транзиентный рост.

Журавлев & Шакура (2009),
Раздобурдин & Журавлев (2012)

$$q = \sum_{n=1}^N \kappa_n \tilde{q}_n, \quad (q, q) = \sum_{i,j=1}^N \kappa_i^* \kappa_j M_{ij},$$

где $M_{ij} = (\tilde{q}_i, \tilde{q}_j)$

Тогда $\mathbf{M} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{F}$ и

$$G(T) = \sigma_1^2 \left(\mathbf{F} e^{\mathbf{A} T} \mathbf{F}^{-1} \right)$$

Итерационный метод.

Позволяет искать оптимальное возмущение без нахождения собственных мод, решая начально-краевую задачу для прямой и сопряженной системы уравнений на возмущения.

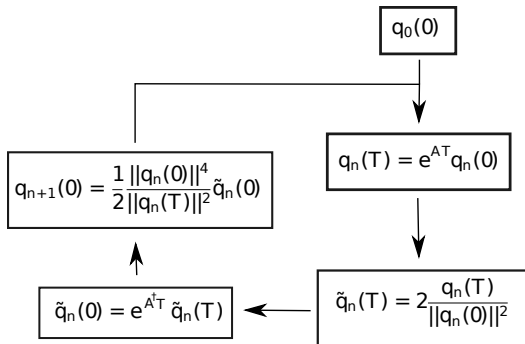
$$\mathcal{L}(\mathbf{q}; \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\|\mathbf{q}(T)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} - \int_0^T \left(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \mathbf{A} \mathbf{q} \right) dt$$

Варьирование $\mathcal{L}$ дает систему

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{A} \mathbf{q} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} &= -\mathbf{A}^\dagger \tilde{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

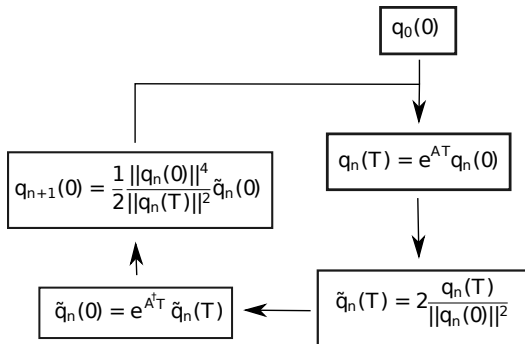
Итерационный метод

Совместная система на прямой и сопряженный вектор решается методом прямых итераций



Итерационный метод

Совместная система на прямой и сопряженный вектор решается методом прямых итераций



Данная схема эквивалентна итерации $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} \cdot \mathbf{q}_n$,
где $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = e^{(\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A})t}$ есть неотрицательный эрмитов оператор.

Сходимость итераций

Превращение двух разных произвольных начальных возмущений в единственное оптимальное возмущение, соответствующее заданному промежутку времени

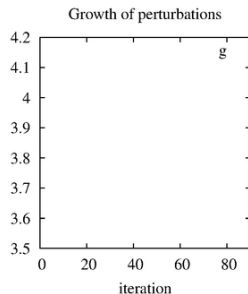
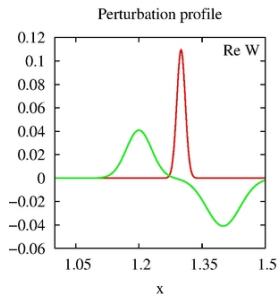
Слева

Мгновенные профили
возмущения энтальпии
в момент времени
 $T = 0$.

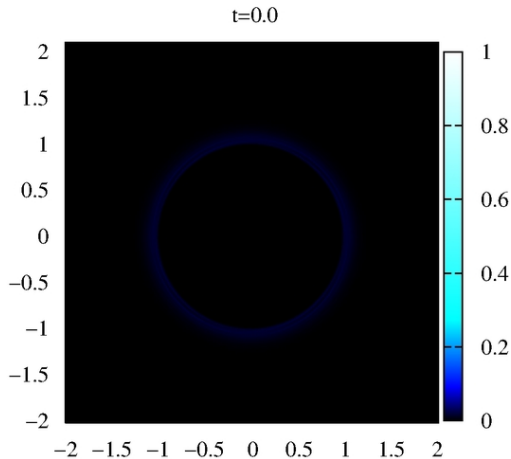
Справа

Мгновенные значения
фактора роста

$m=2$ $\delta=0.1$ $n=1.6$ $T_{\text{opt}}=5$

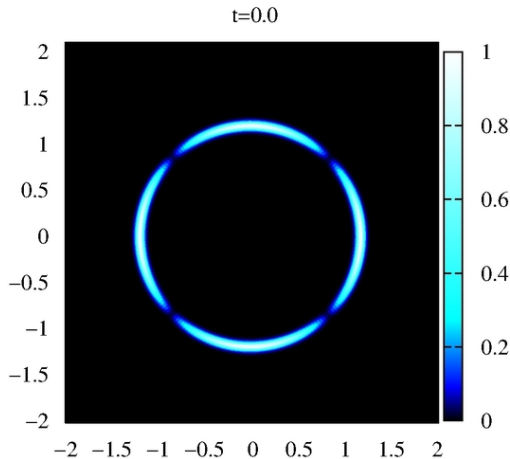


Модуль возмущения энthalпии в плоскости $r - \varphi$



Оптимальное возмущение с $T_{opt} = 50$.

Модуль возмущения энтальпии в плоскости $r - \varphi$



Возмущение, выбранное произвольным образом.

Текущая работа и дальнейшие планы

- Аналитическое исследование транзиентного роста осесимметричных локальных инерционно-звуковых возмущений. (Выполнено)
- Использование итерационного метода для анализа транзиентной динамики реального аккреционного диска. Нормой возмущения ($\|q\|^2$) может служить наблюдаемая величина - вариация светимости диска. В качестве невозмущенного потока - α -диск Шакуры-Сюняева. Здесь же как продолжение - проблема отклика аккреционного диска на стохастическое воздействие.
- Учет вертикальных движений в диске - решение двумерной начально-краевой задачи по (r, z) и соответствующей итерационной задачи. Рассмотрение как инерционно-звуковых, как и вихревых (т.е. низкочастотных) возмущений.

Текущая работа и дальнейшие планы

- Постановка задачи по транзиентной динамике возмущений в нестационарных потоках
- Вопрос с использованием разработанных кодов по решению линейной начально-краевой задачи на возмущения в дисках в других целях (например, поиск спектральных неустойчивостей в сложных бароклиных потоках)
- Нелинейная транзиентная динамика и поиск нелинейных оптимальных возмущений, соответствующая итерационная задача.