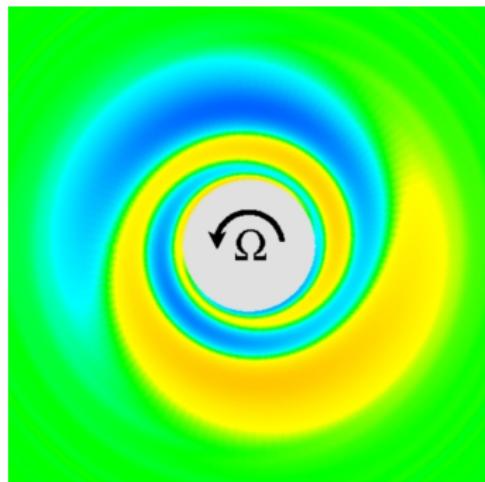


# Транзиентная динамика возмущений в тонких кеплеровских дисках

Д. Раздобурдин & В. Журавлев

Отдел релятивистской астрофизики

15 Апреля 2014



1 Контекст

- Круг вопросов
- Транзиентная динамика в локальном приближении
- Стохастическая динамика кеплеровского потока

2 Цель работы

3 Модели, методы и приближения

- Кеплеровский диск, двумерные возмущения
- Поиск оптимальных возмущений: итерационный метод
- Чем мерить возмущения?
- Сопряженные уравнения. Сходимость метода

4 Результаты и выводы

- Пролог: локальные вихри аналитически
- Оптимальные возмущения - вихри или волны?
- Раствущие быстрее всего
- Глобальные вихри

# Почему происходит акреция?

Edlund & Ji (2014)

- Lesur & Longaretti (2005) — докритическая турбулентность в кеплеровских потоках по-видимому слишком слаба
- Shen & Stone (2006) — Затухание колмогоровской турбулентности в кеплеровском потоке
- Rincon et. al (2007) — отсутствие перехода к турбулентности в антициклоническом потоке ( $rd\Omega/dr < 0$ ), ограниченном стенками
- Lesur & Papaloizou (2010) — слабый отвод углового момента благодаря возбуждению вихрями волн плотности

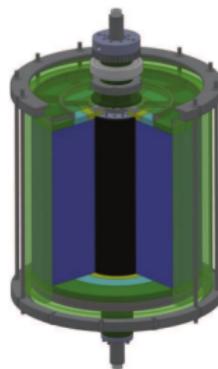


FIG. 1. (color online) Drawing of the HTX device illustrating the segmented axial boundaries: the inner-most element (yellow) is connected to the inner cylinder (black), the -most element (green) is connected to the outer cylinder (green) and the middle components (blue) are rings that can rotate differentially with respect to the cylinders.

## Почему происходит акреция?

- Lesur & Longaretti (2005) — докритическая турбулентность в кеплеровских потоках по-видимому слишком слаба
- Shen & Stone (2006) — Затухание колмогоровской турбулентности в кеплеровском потоке
- Rincon et. al (2007) — отсутствие перехода к турбулентности в антициклоническом потоке ( $rd\Omega/dr < 0$ ), ограниченном стенками
- Lesur & Papaloizou (2010) — слабый отвод углового момента благодаря возбуждению вихрями волн плотности

Edlund & Ji (2014)

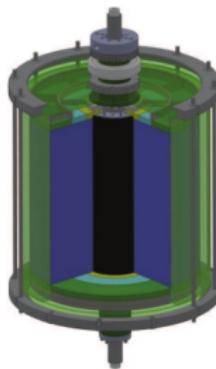
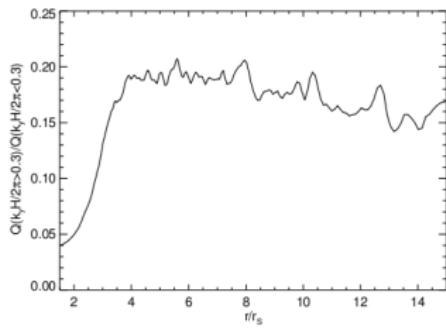


FIG. 1. (color online) Drawing of the HTX device illustrating the segmented axial boundaries: the inner-most element (yellow) is connected to the inner cylinder (black), the -most element (green) is connected to the outer cylinder (green) and the middle components (blue) are rings that can rotate differentially with respect to the cylinders.

Только локальные ГД-симуляции.  
В МГД-симуляциях переход к большим масштабам ставит под вопрос локальность турбулентности в дисках

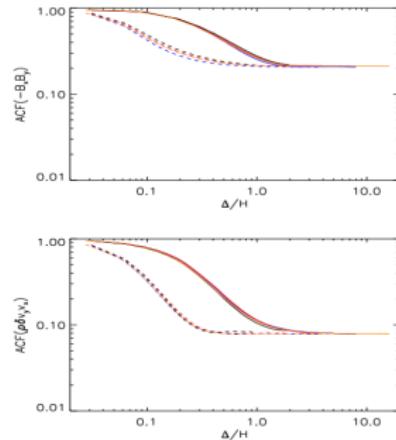
# Почему происходит аккреция?

Beckwith, Armitage & Simon (2011) —  
80%  $W_{r\phi}$  дают возмущения на  
азимутальных масштабах  $\gtrsim 40^\circ$



**Figure 16.** Ratio of power in the total accretion stress,  $\langle \langle W_{r\phi}^t(r) \rangle \rangle$  on small toroidal scales ( $k_y H / 2\pi \leq 0.3$ , corresponding to  $\sim 3H$ ) to power in this same quantity on large toroidal scales ( $k_y H / 2\pi \geq 0.3$ ), calculated as described for the magnetic field strength in Figure 12.

Simon, Beckwith & Armitage (2012) —  
Автокорреляция максвелловского и  
рейнольдсова напряжений на масштабах  
 $\gg H$  диска на уровне  $\sim 20\%$  и  $8\%$ .

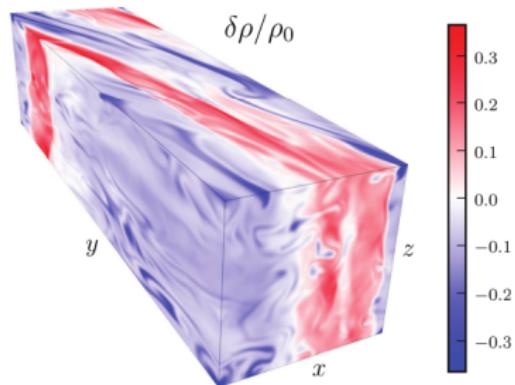


**Figure 14.** As in the top panel of Figure 8 for the ACF of the Maxwell (top panel) and Reynolds (bottom panel) stress. While the ACFs are strongly concentrated within  $\lesssim H$  of the centroid, there is an extended component, correlated at  $\sim 20\%$  for the Maxwell stress and  $\sim 8\%$  for the Reynolds stress, that fills the simulation domain in all cases.

## Генерация волн плотности турбулентностью

- Bodo et al (2005) — генерация вихрем волны плотности на языке сдвиговых гармоник, происходящая при свинге гармоники.
- Papaloizou & Heinemann (2009a) — линейная аналитическая теория, расчет амплитуды и фазы рождающейся волны, максимум при  $\lambda_y \sim H$ .
- Papaloizou & Heinemann (2009a) — МГД-симуляции турбулентности, согласие с аналитикой, перенос углового момента на уровне  $\sim 10\%$  от турбулентного.

Heinemann & Papaloizou (2009b)



**Figure 2.** Pseudo-colour image of mass density on the faces of the computational domain. This snapshot is taken at  $t = 82 \delta T_s$  where we observe the largest peak in the volume-averaged density fluctuations shown in Fig. 1. See Supporting Information for an animated version of this figure.

## Генерация волн плотности турбулентностью

- Bodo et al (2005) — генерация вихрем волны плотности на языке сдвиговых гармоник, происходящая при свинге гармоники.
- Papaloizou & Heinemann (2009a) — линейная аналитическая теория, расчет амплитуды и фазы рождающейся волны, максимум при  $\lambda_y \sim H$ .
- Papaloizou & Heinemann (2009a) — МГД-симуляции турбулентности, согласие с аналитикой, перенос углового момента на уровне  $\sim 10\%$  от турбулентного.
- Перенос углового момента в “мертвых зонах” протопланетных дисков, Gammie (1996).
- Роль в возникновении квази-периодических осцилляций?

Heinemann & Papaloizou (2009b)

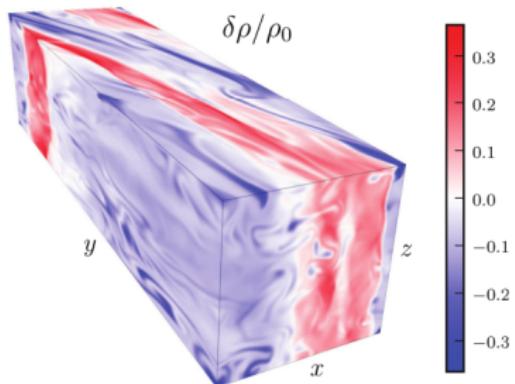
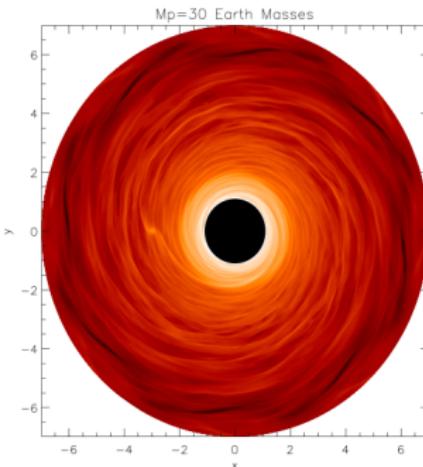


Figure 2. Pseudo-colour image of mass density on the faces of the computational domain. This snapshot is taken at  $t = 82.5 T_s$  where we observe the largest peak in the volume-averaged density fluctuations shown in Fig. 1. See Supporting Information for an animated version of this figure.

# Генерация волн плотности турбулентностью

- Миграция планет в турбулентном диске, Nelson & Papaloizou (2004) .



**Figure 15.** Mid-plane density contours for the run G3. The presence of the protoplanet is clearly detectable, with the perturbations generated by the protoplanet being of similar magnitude to those generated by the turbulence. The protoplanet is located at  $(x_p, y_p) = (-3, 0)$ .

# Транзиентная динамика в локальном приближении

Транзиентная динамика  $\Rightarrow$  отказ от модального подхода  
в линейной теории возмущений.

Методы немодального анализа: поиск наиболее быстро растущих возмущений.

Большинство работ в этом направлении сделано в локальном приближении для возмущений с  $\lambda \ll H$  (несжимаемая жидкость):

- Ломинадзе и др. (1988) — о транзиентном росте двумерных вихревых возмущений в невязкой жидкости
- Yecko (2004), Afshordi et al. (2005), Mukhopadhyay et al. (2005) — аналогичное детальное исследование трехмерных возмущений

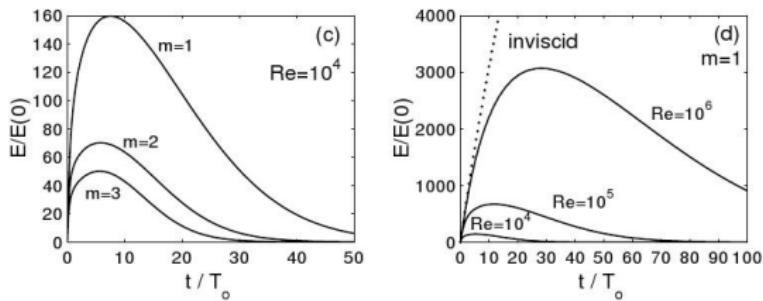
В основе транзиентного роста вихрей - закон сохранения завихренности.

## Транзиентная активность турбулентных дисков

### Оптимальные глобальные возмущения, $\lambda \sim r$

Ioannou & Kakouris (2001) — исследовали двумерный поток вязкой несжимаемой жидкости с кеплеровским профилем вращения, нашли оптимальные начальные возмущения и ...

Оптимальные  
вихревые  
возмущения



# Транзиентная активность турбулентных дисков

...и стационарный отклик течения на внешнее стохастическое возбуждение.

Радиальный профиль  $\sim W_{r\varphi} r^2$

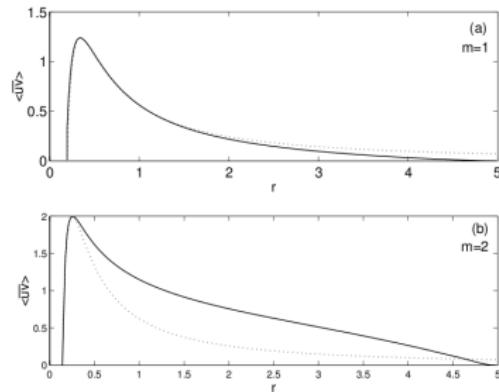


FIG. 8.—(a) Radial distribution of the momentum flux sustained by the dominant  $m = 1$  perturbations in the statistically steady state. The dotted line is the equilibrium theory momentum flux given by eq. [35]. (b) Same as (a), but for  $m = 2$  perturbations. Under the same forcing the fluxes of the  $m = 2$  perturbations are 1 order of magnitude smaller than those of the  $m = 1$  perturbations. The disk is Keplerian and extends from  $r_1 = 0.1r_0$  to  $r_2 = 5r_0$ ; the Reynolds number is  $Re = 10^4$ .

# Транзиентная активность турбулентных дисков

...и стационарный отклик течения на внешнее стохастическое возбуждение.

Радиальный профиль  $\sim W_{r\varphi} r^2$

Но какой результат получим, если рассмотрим кеплеровский гиперзвуковой тонкий диск

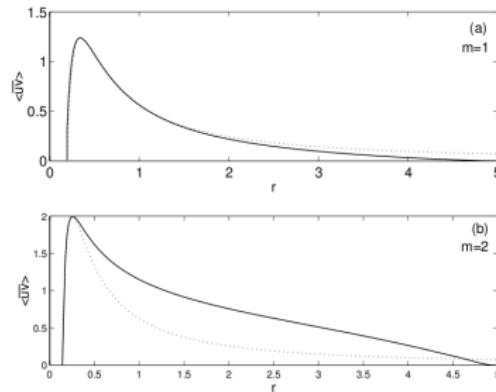


FIG. 8.—(a) Radial distribution of the momentum flux sustained by the dominant  $m = 1$  perturbations in the statistically steady state. The dotted line is the equilibrium theory momentum flux given by eq. [35]. (b) Same as (a), but for  $m = 2$  perturbations. Under the same forcing the fluxes of the  $m = 2$  perturbations are 1 order of magnitude smaller than those of the  $m = 1$  perturbations. The disk is Keplerian and extends from  $r_1 = 0.1r_0$  to  $r_2 = 5r_0$ ; the Reynolds number is  $Re = 10^4$ .

## Транзиентная активность турбулентных дисков : цель работы

...и стационарный отклик течения на внешнее стохастическое возбуждение.

Радиальный профиль  $\sim W_{r\varphi} r^2$

Но какой результат получим, если рассмотрим кеплеровский гиперзвуковой тонкий диск

$(\lambda \gtrsim H, \text{ но } \lambda \sim r \text{ или } \lambda \ll r)$

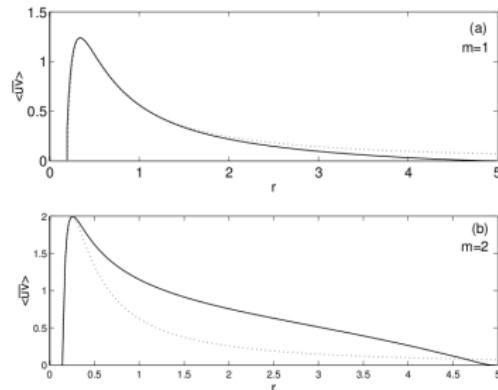


FIG. 8.—(a) Radial distribution of the momentum flux sustained by the dominant  $m = 1$  perturbations in the statistically steady state. The dotted line is the equilibrium theory momentum flux given by eq. [35]. (b) Same as (a), but for  $m = 2$  perturbations. Under the same forcing the fluxes of the  $m = 2$  perturbations are 1 order of magnitude smaller than those of the  $m = 1$  perturbations. The disk is Keplerian and extends from  $r_1 = 0.1r_0$  to  $r_2 = 5r_0$ ; the Reynolds number is  $Re = 10^4$ .

## Модель

- Стационарный тонкий диск с  $\Omega = \Omega_0(r/r_0)^{-3/2}$ , где  $r_0$  - внутренняя граница диска.  $\delta \equiv H/r \ll 1$ .
- В возмущенном потоке сохраняется гидростатическое равновесие.  
 $\rho \Rightarrow \Sigma$ ,  $a \Rightarrow a_*^2 = n a_{eq}^2 / (n + 1/2)$ .

Локальная задача,  $\lambda \ll r$

- $(r, \varphi) \Rightarrow (x, y)$
- $\Sigma = const$ ,  $a_* = const$ ,  $\Omega = const$ ,  
сдвиг  $U_y(x) = -q\Omega x$ ,  $q = 3/2$ .

Глобальная задача,  $\lambda \sim r$

- “Однородный” диск —  
 $\Sigma = const$ ,  $a_{eq} = \delta / \sqrt{2n}$ .
- диск Шакуры-Сюняева —  
 $\Sigma \propto r^{-3/5} (1 - r^{-1/2})^{3/5}$ ,  
 $a_{eq} = (\delta / \sqrt{2n}) \Omega r^{21/20} (1 - r^{-1/2})^{1/5}$ .

## Анализ малых возмущений

$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{A} \mathbf{q}$ , вектор состояния  $\mathbf{q} \equiv \{\delta v_r, \delta v_\varphi, \delta h\}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -im\Omega & 2\Omega & -\partial_r \\ -\kappa^2/(2\Omega) & -im\Omega & -im/r \\ -a_*^2 ((r\Sigma)^{-1} \partial_r (r\Sigma) + \partial_r) & -a_*^2 im/r & -im\Omega \end{pmatrix}$$

Эволюции возмущений можно приписать динамический оператор, действующий на начальное возмущение:  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{q}(0)$ .

$$\mathbf{U} \equiv e^{\mathbf{A}t}, \quad \mathbf{U}^\dagger \equiv e^{\mathbf{A}^\dagger t}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U},$$

$$\mathbf{U}\mathbf{q} = e^{i\omega t} \mathbf{q}$$

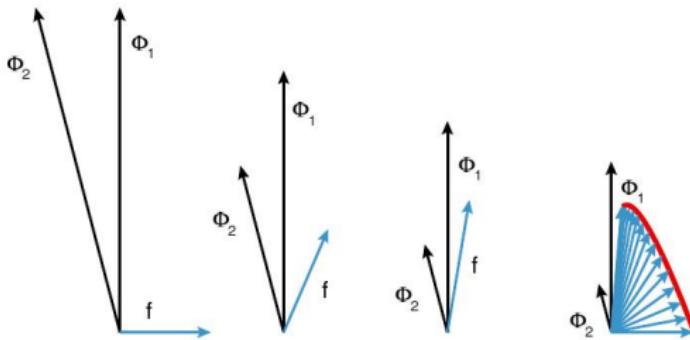
$$\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger \neq \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U},$$

$$\mathbf{U}\mathbf{v} = \sigma \mathbf{u}, \quad \mathbf{U}^\dagger \mathbf{u} = \sigma \mathbf{v}$$

Наличие сдвига скорости в газовом потоке делает динамический оператор ненормальным, его собственные моды становятся неортогональными друг другу, что делает возможным существование специфических транзиентных возмущений

## Анализ малых возмущений

### Простейшая иллюстрация транзиентного роста



Шмид (2007)

## Анализ малых возмущений

Модальный анализ



выстраивает **собственные моды**  
в соответствии с их **собственными**  
**значениями** // интервал времени не важен

Немодальный анализ



выстраивает **сингулярные вектора**  
в соответствии с их **сингулярными**  
**значениями** // для каждого интервала  
времени

## Анализ малых возмущений

Модальный анализ



выстраивает **собственные моды**  
в соответствии с их **собственными**  
значениями // интервал времени не важен

Немодальный анализ



выстраивает **сингулярные вектора**  
в соответствии с их **сингулярными**  
значениями // для каждого интервала  
времени

Система **сингулярных векторов ненормального оператора**  
*ортогональна и полна*  
подобно системе **собственных векторов эрмитова оператора**

*Найти оптимальное возмущение - означает найти наибольшее сингулярное значение и соответствующий **сингулярный вектор.***

## Два метода поиска оптимальных возмущений

### Матричный метод.

Основан на поиске линейной комбинации собственных мод, показывающей наибольший транзиентный рост.

Журавлев & Шакура (2009),  
Раздобурдин & Журавлев (2012)

### Итерационный метод.

Позволяет искать оптимальное возмущение без нахождения собственных мод, решая начально-краевую задачу для прямой и сопряженной системы уравнений на возмущения.

$$q = \sum_{n=1}^N \kappa_n \hat{q}_n, \quad (q, q) = \sum_{i,j=1}^N \kappa_i^* \kappa_j M_{ij},$$

где  $M_{ij} = (\hat{q}_i, \hat{q}_j)$

Тогда  $\mathbf{M} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{F}$  и

$$G(T) = \sigma_1^2 \left( \mathbf{F} e^{\Lambda T} \mathbf{F}^{-1} \right)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}; \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\|\mathbf{q}(T)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} - \int_0^T \left( \tilde{\mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \mathbf{A} \mathbf{q} \right) dt$$

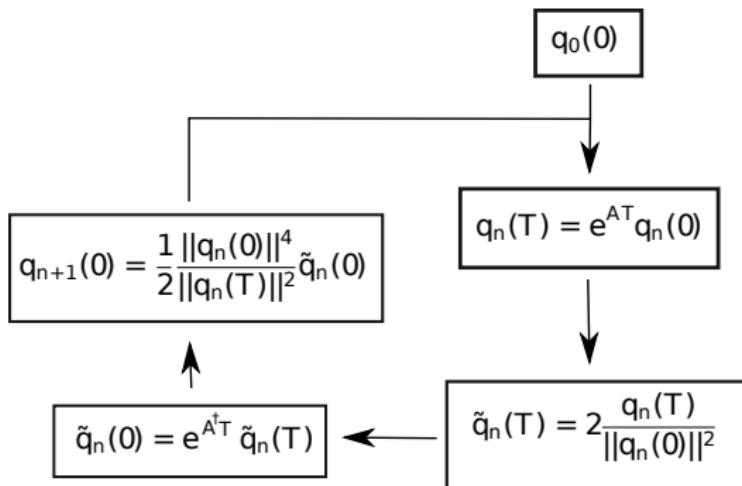
Варьирование  $\mathcal{L}$  дает систему

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \mathbf{q}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\mathbf{A}^\dagger \tilde{\mathbf{q}}$$

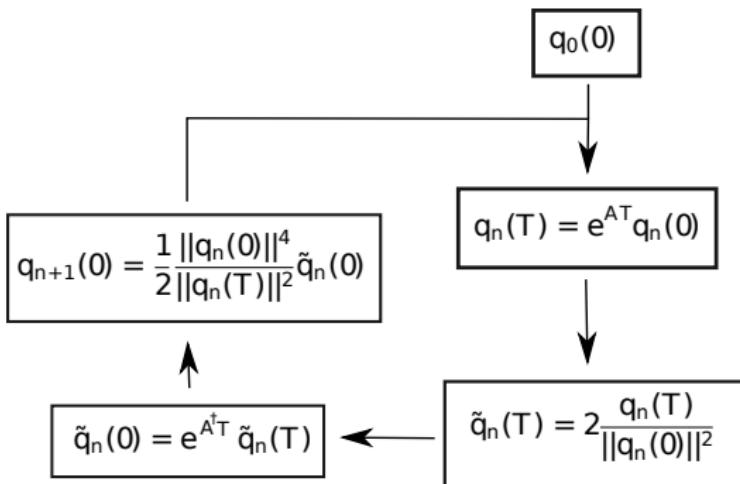
## Итерационный метод

Совместная система на прямой и сопряженный вектор решается методом прямых итераций



## Итерационный метод

Совместная система на прямой и сопряженный вектор решается методом прямых итераций



Данная схема эквивалентна итерации  $q_{n+1} = U^\dagger U \cdot q_n$ ,  
где  $U^\dagger U = e^{(A^\dagger + A)t}$  есть неотрицательный эрмитор оператор.

## Чем мерить возмущения?

- Полная акустическая энергия

$$\|\mathbf{q}\|_1^2 = \pi \int \Sigma \left( |\delta v_r|^2 + |\delta v_\varphi|^2 + \frac{|\delta h|^2}{a_*^2} \right) r dr \quad (1)$$

(1) не исключает осцилляции осесимметричных возмущений.

При  $m = 0$  вид  $\mathbf{A}$  дает интеграл движения:

$$E_c = \pi \int \Sigma \left( |\delta v_r|^2 + \frac{4\Omega^2}{\kappa^2} |\delta v_\varphi|^2 + \frac{|\delta h|^2}{a_*^2} \right) r dr,$$

который есть не что иное, как

$$\begin{aligned} E_c(\xi) = \frac{1}{2} \int & \left[ \rho |\dot{\xi}|^2 - \rho |v \cdot \nabla \xi|^2 + \gamma p |\nabla \cdot \xi|^2 + \xi^* \cdot \nabla p \nabla \cdot \xi + \xi \cdot \nabla p \nabla \cdot \xi^* \right. \\ & \left. + \xi^* \xi' (\nabla_i \nabla_j p + \rho \nabla_i \nabla_j \Phi) - \frac{1}{4\pi G} |\nabla \delta \Phi|^2 \right] dV. \end{aligned}$$

т.е. каноническая энергия возмущений, Friedman & Schutz (1978)

- 

$$\|\mathbf{q}\|_2^2 = E_c \quad (2)$$

# Сопряженная система уравнений

- Для возмущений, измеряемых нормой (1):

$$\mathbf{A}^\dagger = \begin{pmatrix} im\Omega & -\kappa^2/(2\Omega) & \partial_r \\ 2\Omega & im\Omega & im/r \\ a_*^2 ((r\Sigma)^{-1}\partial_r(r\Sigma) + \partial_r) & a_*^2 im/r & im\Omega \end{pmatrix}$$

- Для возмущений, измеряемых нормой (2):

$$\mathbf{A}^\dagger = \begin{pmatrix} im\Omega & -2\Omega & \partial_r \\ \kappa^2/(2\Omega) & im\Omega & \frac{im}{r} \frac{\kappa^2}{4\Omega^2} \\ a_*^2 ((r\Sigma)^{-1}\partial_r(r\Sigma) + \partial_r) & a_*^2 \frac{im}{r} \frac{4\Omega^2}{\kappa^2} & im\Omega \end{pmatrix}$$

## Сходимость итераций

Превращение двух разных произвольных начальных возмущений в единственное оптимальное начальное возмущение, соответствующее заданному промежутку времени

### Слева

Мгновенные профили  
возмущения энталпии  
в момент времени  
 $T = 0.$

### Справа

Мгновенные значения  
фактора роста

## Пролог: локальные вихри аналитически

- При  $\lambda \ll r$  возмущения существуют в виде сдвиговых гармоник:  
 $f = \hat{f}(k_x, k_y, t) \exp(i k_x(t)x + i k_y y)$ , где  $k_x(t) = k_x(0) + k_y q\Omega t$ .
- Уравнение для азимутальной компоненты возмущения скорости:

$$\frac{d^2 \hat{u}_y}{dt^2} + \omega^2 \hat{u}_y = k_x(t) a_*^2 l, \quad (3)$$

где  $\omega^2 \equiv \kappa^2 + a_*^2 k_x(t)^2$ ,

$I\Omega^{-1} \equiv k_x(t)\hat{u}_y - k_y \hat{u}_x + i(2 - q)\hat{W} = \text{const}$  — гармоника возмущения потенциальной завихренности ( Bodo et. al 2005 ).

- Полное решение есть:  $\hat{u}_y = \hat{u}_y^{(\text{vortex})} + \hat{u}_y^{(\text{wave})}$ .
- $\hat{u}_y^{(\text{vortex})}$  с  $k_x(0) < 0$  (лидирующая спираль) порождает волну плотности с  $l \neq 0$  в момент свинга ( $k_x(t) = 0$ ), при условии  $\lambda_y \sim H$  ( Heinemann & Papaloizou 2009a ).
- Вне эпохи свинга, когда  $\lambda_x(t)q/H \ll 1$  (дозвуковой поток),  $\hat{u}_y^{(\text{vortex})}$  представляет из себя вихрь.

## Пролог: локальные вихри аналитически

- Решение для вихря — уравнение (3) с  $d^2\hat{u}_y/dt^2$  дает:

$$\hat{u}_y^{(\text{vortex})} = \frac{k_x(t)}{k_y^2 + k_x(t)^2 + \kappa^2/\Omega^2} I. \quad (4)$$

- Зная норму возмущения, оцениваем оптимальный (максимально возможный) рост вихрей (обозначим как  $G^{(\text{vortex})}(t)$ ), как фактор роста вихря ( $g(t) \equiv \|\mathbf{q}(t)\|^2/\|\mathbf{q}(0)\|^2$ ), свингующего в момент времени  $t$ .
- В пределе малых длин волн, т.е.  $\lambda_y \ll H$ , это дает:

$G \approx 1 + (q\Omega t)^2$  см. Afshordi et. al (2005), несжимаемая жидкость

- В пределе больших длин волн, т.е.  $\lambda_y \gg H$ , и больших времен ( $t\Omega \gg \lambda_y/H$ ) это дает:

$$G \approx \frac{4\Omega^6}{\kappa^4} (qHk_y t)^2 \quad (5)$$

## Пролог: локальные вихри аналитически

**Влияние вязкости на оценку (5):** Большие времена свинга вихря означают, что при  $t = 0$  его спираль сильно закручена, т.е.  $\lambda_x(0) \ll \lambda_y$ .

Время вязкой диссипации начального вихря,  $\Delta t_\nu \sim \lambda_x(0)^2/\nu$ , должно быть больше, чем время транзиентного роста,  $\Delta t_{TG} = -k_x/(q\Omega k_y)$ .

В предельном случае:  $\Delta t_\nu = \Delta t_{TG}$ , откуда

$$\max(\Delta t_{tg}) \gtrsim \Omega^{-1}(\alpha)^{-1/3}(qH|k_y|)^{-2/3}, \quad (6)$$

где принято, что  $\nu = \alpha a_* H$ .

Подставляя (6) в выражение (5), получаем оценку максимально достижимого роста крупномасштабного вихря ( $r \gg \lambda_y \gg H$ ) вязком диске:

$$G_{max} \approx \frac{4\Omega_0^4}{\kappa^4} \left( \frac{qH|k_y|}{\alpha} \right)^{2/3}. \quad (7)$$

Из (7) видно, что при  $\alpha \sim \delta$   $G_{max} \gtrsim 1$  формально даже для  $\lambda_y \sim r$ .

## Локальные оптимальные возмущения

Используем итерационную схему интегрирования прямых и сопряженных уравнений для **сдвиговых гармоник** — решение  $2 \times 3$  линейных ОДУ по времени.

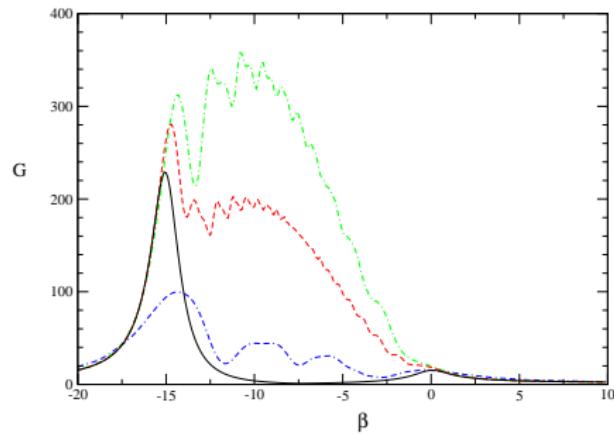
Оптимальный рост  $G(k_x(0)/k_y)$   
для  $t_{opt} = 10\Omega^{-1}$ ,  $q = 3/2$ .

Норма - акустическая энергия.

Сплошная, штриховая,  
штрих-пунктирная и  
штрих-штрих-пунктирная линии  
соответствуют

$R = 0.1, 0.5, 1.0, 4.0$ , где

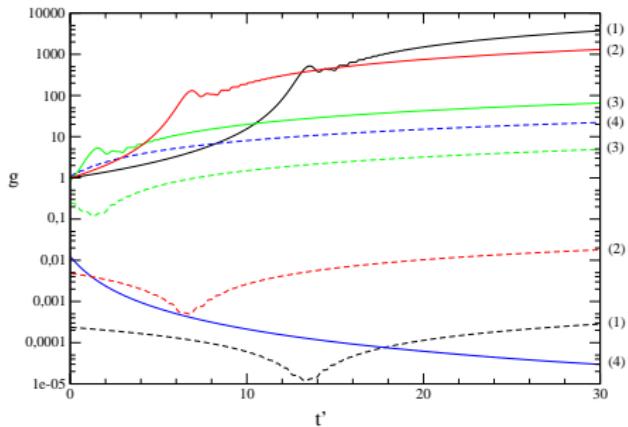
$R \equiv q/(H|k_y|)$



# Оптимальные возмущения - вихри или волны?

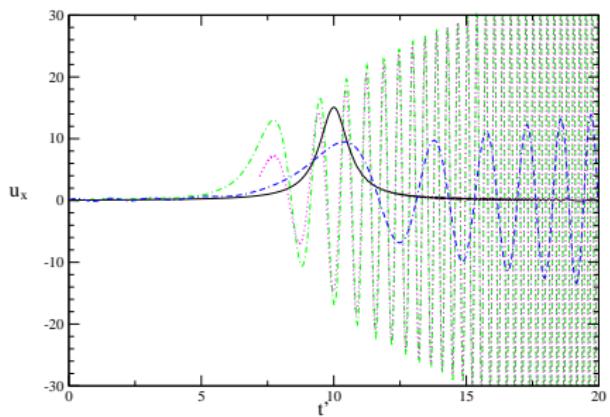
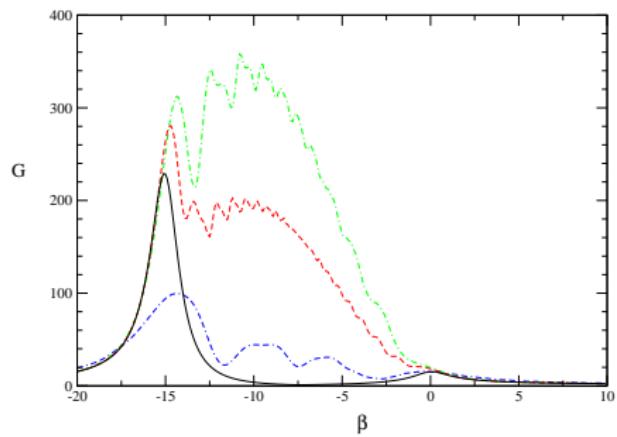
Выделим из начального оптимального возмущения **вихрь** (алгоритм из Bodo et al 2005), определяемый полученным по факту значением  $I$ .  
Оставшаяся часть — **безвихревая волна плотности**.

Факторы роста,  $g(t)$ ,  
вихревой (сплошные линии) и  
волновой (штрихованные линии) частей  
оптимальных возмущений для  
 $t_{opt} = 10\Omega^{-1}$ ,  $q = 3/2$ ,  $R = 0.5$ .  
Норма - акустическая энергия.  
Пары (1), (2), (3) и (4) соотв.  
 $k_x(0)/k_y = -20, -10, -2, 2$ .



## Генерация волны плотности вихрем

Видим, что при  $R \sim \lambda_y/H \sim 1$  оптимальные вихри порождают волны.  
Амплитуда волны определяется значениями  $R$  и  $I$  для оптимального вихря,  
Heinemann & Papaloizou (2009).

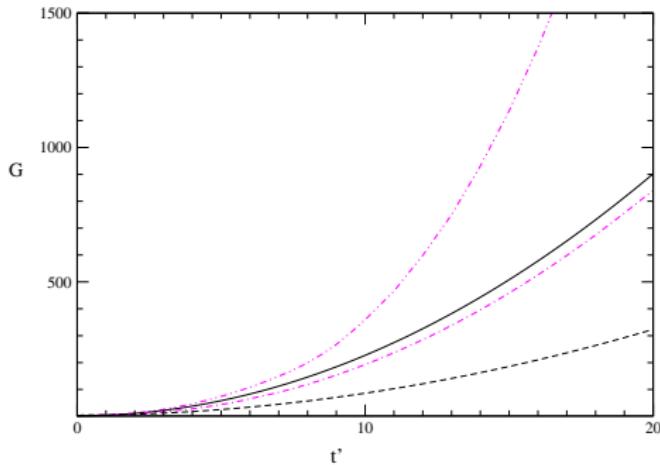


## Растущие быстрее всего

Из всех сдвиговых гармоник быстрее всего растут вихри с  $R \sim 1$  (т.е.  $\lambda_y \sim H$ ), и это происходит за счет генерации ими волн плотности.

Момент свинга сдвигается на более раннее время, чем момент оптимизации.

Сравнение наибольших факторов транзиентного роста с  $G(t)$  в пределе  $\lambda_y \ll H$ .



## Крупномасштабные оптимальные возмущения: $\lambda_y \gg H$ .

- Генерация волн плотности вихрями экспоненциально подавлена  $\sim 1/\exp(\lambda_y/H)$ .
- Сравнение локального оптимального возмущения,  $\lambda_y \ll r$ , с аналитикой по вихрям  $\Rightarrow G \approx \frac{4\Omega^6}{\kappa^4} (qHk_y t)^2$
- Сравнение локального оптимального возмущения,  $\lambda_y \ll r$ , с глобальным оптимальным возмущением,  $\lambda_y \sim r$ .

# Крупномасштабные оптимальные возмущения: $\lambda_y \gg H$ .

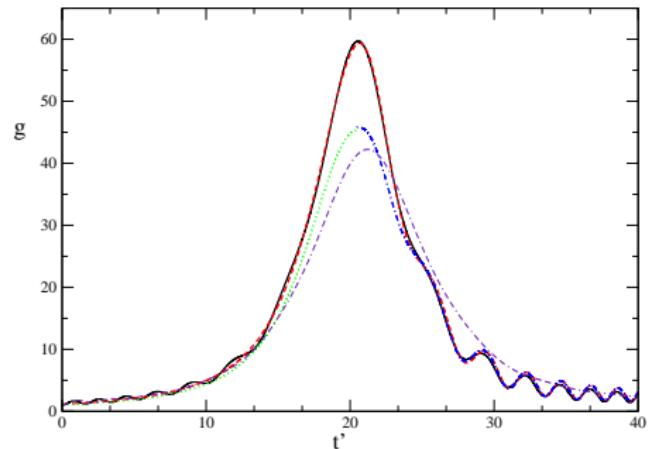
Факторы роста,  $g(t)$ . Норма -  
акустическая энергия.

Сплошная линия: локальное  
оптимальное возмущение, полученное  
для  $R = 12$ ,  $t_{opt} = 20\Omega^{-1}$ ,  $q = 3/2$ .

Штриховая линия: вихрь, выделенный  
из оптимального возмущения при  $t = 0$   
по его значению  $I$ .

Пунктирная и штрих-пунктирная линии:  
аналитическое решение по Heinemann &  
Papaloizou (2009а).

Штрих-штрих-пунктирная линия:  
глобальное оптимальное возмущение  
для  $m = 5$ ,  $R = 12$ , в "однородном"  
кеплеровском диске.



# Крупномасштабные оптимальные возмущения: $\lambda_y \gg H$ .

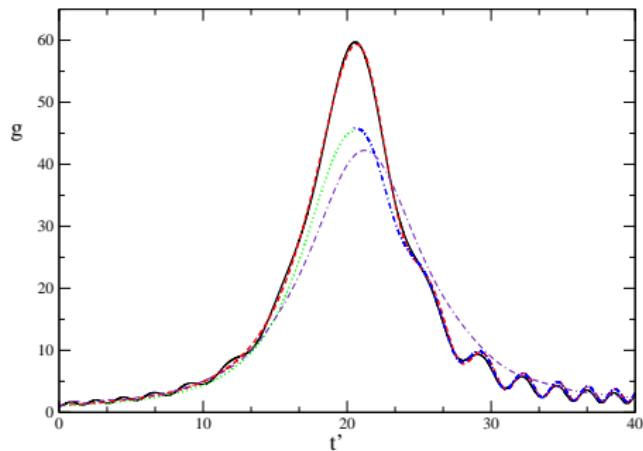
Факторы роста,  $g(t)$ . Норма -  
акустическая энергия.

Сплошная линия: локальное  
оптимальное возмущение, полученное  
для  $R = 12$ ,  $t_{opt} = 20\Omega^{-1}$ ,  $q = 3/2$ .

Штриховая линия: вихрь, выделенный  
из оптимального возмущения при  $t = 0$   
по его значению  $I$ .

Пунктирная и штрих-пунктирная линии:  
аналитическое решение по Heinemann &  
Papaloizou (2009a).

Штрих-штрих-пунктирная линия:  
глобальное оптимальное возмущение  
для  $m = 5$ ,  $R = 12$ , в "однородном"  
кеплеровском диске.



Транзиентный рост крупномасштабных вихрей,  $\lambda_y \gg H$ , не падает существенно  
при переходе от  $\lambda_y \ll r$  к  $\lambda \sim r$ .

# Крупномасштабные оптимальные возмущения: $\lambda_y \gg H$ .

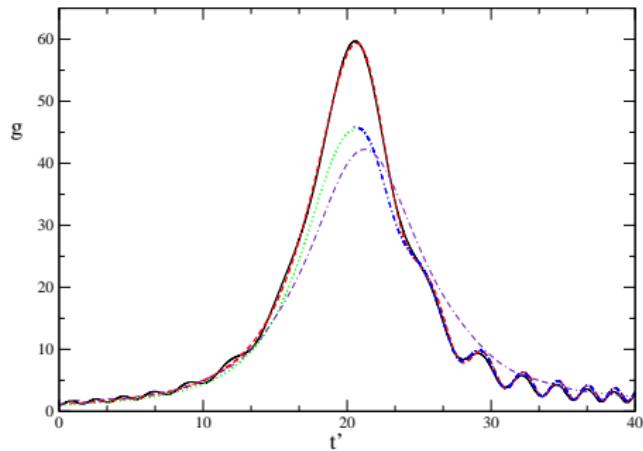
Факторы роста,  $g(t)$ . Норма -  
акустическая энергия.

Сплошная линия: локальное  
оптимальное возмущение, полученное  
для  $R = 12$ ,  $t_{opt} = 20\Omega^{-1}$ ,  $q = 3/2$ .

Штриховая линия: вихрь, выделенный  
из оптимального возмущения при  $t = 0$   
по его значению  $I$ .

Пунктирная и штрих-пунктирная линии:  
аналитическое решение по Heinemann &  
Papaloizou (2009a).

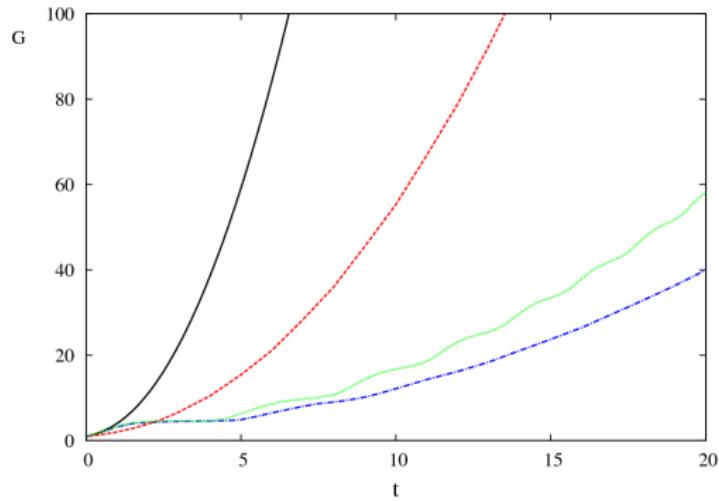
Штрих-штрих-пунктирная линия:  
глобальное оптимальное возмущение  
для  $m = 5$ ,  $R = 12$ , в "однородном"  
кеплеровском диске.



Транзиентный рост крупномасштабных вихрей,  $\lambda_y \gg H$ , не падает существенно  
при переходе от  $\lambda_y \ll r$  к  $\lambda \sim r$ .

Иная ситуация с уже исследованным случаем  $\lambda_y \ll H$ ,  
Ioannou & Kakouris (2001).

# Крупномасштабные оптимальные возмущения: $\lambda_y \gg H$ .



## $Re$ часть возмущения энталпии в плоскости $r - \varphi$

Диск Шакуры-Сюняева,  $t_{opt} = 20$ ,  $m = 5$ ,  $\delta = 0.05$

## Выводы

- Транзиентный рост линейных возмущений в кеплеровском диске был исследован во всем диапазоне азимутальных длин волн:  $\lambda_y$  vs.  $\sim H$  и  $\lambda_y$  vs.  $\sim r$ .
- Оптимальное возмущение практически идентично вихрю в виде изначально лидирующей спирали.
- Наиболее быстро растут возмущения с  $\lambda_y \sim H$ . Это происходит за счет генерации начальным вихрем волны плотности в момент свинга. Результат может быть важен в связи с проблемой QPO и миграции планет.
- Получены аналитические оценки транзиентного роста крупномасштабных (но локальных) вихрей,  $r \gg \lambda_y \gg H$ . Оценено влияние вязкости:  $G > 1$  для вихрей с  $H/\alpha > \lambda_y > H$ .
- Рост крупномасштабных вихрей не падает существенно при переходе к глобальному масштабу,  $\lambda_y \sim r$ , в отличие от уже исследовавшегося случая мелкомасштабных вихрей,  $\lambda_y \ll H$ . В кеплеровских дисках с затравочной турбулентностью такие (нелокальные) вихри могут привести к усилению отвода углового момента из диска.
- Впервые в теории астрофизических дисков для получения оптимальных возмущений был использован вариационный метод.