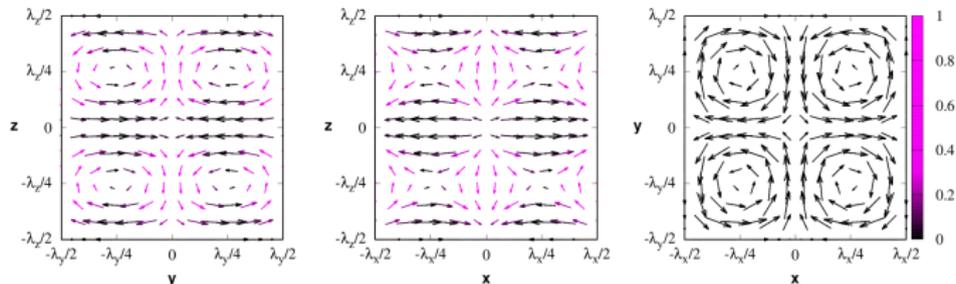


Транзиентные возмущения, ответственные за поддержку докритической турбулентности в линейно-устойчивых сдвиговых вращательных потоках

В. Журавлев & Д. Раздобурдин

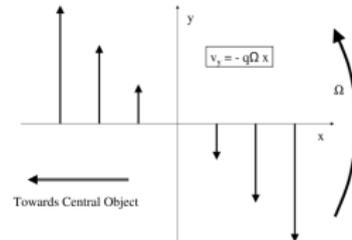
Отдел релятивистской астрофизики

31 октября 2017



- 1) Безграничный однородный сдвиговый вращательный поток.
 - 2) $p = \text{const}, \rho = \text{const}$.
 - 3) y - локальная азимутальная координата.
 - 4) x - локальная радиальная координата.
 - 5) z - локальная координата в направлении оси вращения.
 - 6) $v_y = -q\Omega_0 x$.
- * Рассматривается только вихревая динамика $\nabla v = 0$.

- Антициклонический поток (на рисунке):
 $q > 0$.
 Ω падает наружу.
- Циклонический поток: $q < 0$.
 Ω растет наружу.



Из Mukhopadhyay et al. (2005)

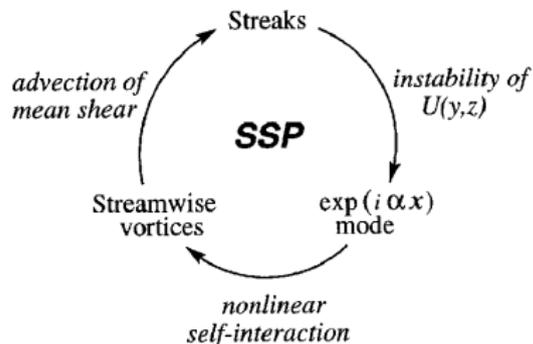
Важные случаи:

- 1) $q = 0$ - твердотельное вращение.
- 2) $q = \pm\infty$ - плоско-параллельный поток.
- 3) $q = 3/2$ - кеплеровское вращение.
- 4) $q = 2$ - изомоментное вращение (линия Рэлея).

- $q = 0$ ($R_\Omega = \pm\infty$) — **нет растущих возмущений**.
- $2 < q < +\infty$ ($-1 < R_\Omega < 0$) — центробежная неустойчивость
⇒ сверхкритическая турбулентность.
- $q = \pm\infty$ ($R_\Omega = 0$) — **эффект подхватывания** (роллы → стрейки)
⇒ докритическая турбулентность по сценарию *SSP*.
- $q = 2$ ($R_\Omega = -1$) — **эффект анти-подхватывания** (стрейки → роллы)
⇒ докритическая турбулентность по сценарию **???**.
- $0 < q < 2$ ($R_\Omega < -1$) — **свинговое усиление сдвиговых вихрей**
⇒ докритическая турбулентность **???** по сценарию **???**.
- $-\infty < q < 0$ ($R_\Omega > 0$) — **свинговое усиление сдвиговых вихрей**
⇒ докритическая турбулентность **???** по сценарию **???**.

Self-sustaining process (SSP)

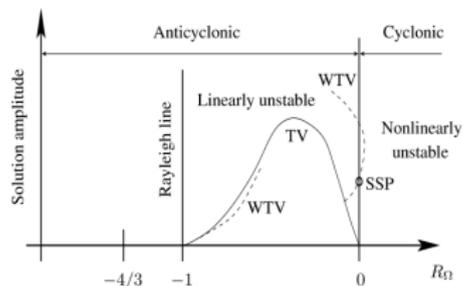
- 1) Роллы вырастают в стрейки большой амплитуды.
- 2) Вторичная линейная неустойчивость относительно неосесимметричных мод (Теорема Рэля о точке перегиба в $v_y(x, z)$).
- 4) Регенерация роллов итоговым существенно $3D$ потоком.
- 5) Впервые показано Hamilton et al. (1995).



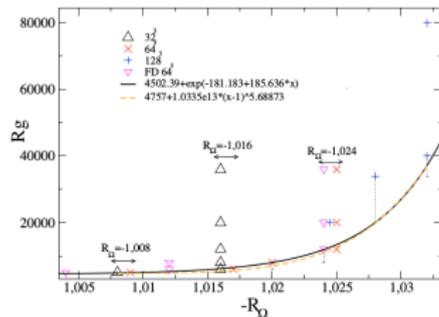
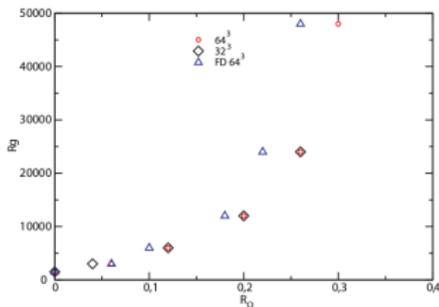
Waleffe (1997)

Non-linear continuation method: Rincon et al. (2007).

- 1) WTV можно продолжить до $R_\Omega = 0$ и далее в $0 < R_\Omega \ll 1$.
- 2) WTV нельзя продолжить до $R_\Omega = -1$.



Direct numerical simulations: Lesur & Longaretti (2005).



u_x, u_y, u_z, p - эйлеровы возмущения скоростей и давления:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y}\right) u_x - 2\Omega_0 u_y &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y}\right) u_y + (2 - q)\Omega_0 u_x &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y}\right) u_z &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0,\end{aligned}$$

Переход к ПФГ в безразмерных сдвиговых координатах:

$$f = \hat{f}(k_x, k_y, k_z, t') \exp(ik_x x' + ik_y y' + ik_z z'),$$

$$x' = x/L, y' = (y + q\Omega_0 x t)/L, z' = z/L, t' = \Omega_0 t,$$

L выбирается таким, чтобы $k_y = 1$.

Выбираются переменные u_x и x -компонента $\hat{\omega} \equiv \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}}$.

$$\underline{k_y = 0} :$$

$$\frac{d^2 \hat{u}_x}{dt^2} + \sigma^2 \hat{u}_x = 0,$$
$$\sigma^2 \equiv \frac{2(2-q)}{1+\alpha^2}, \quad \alpha \equiv k_x/k_z.$$

- Рост роллов (в начальный момент $\hat{u}_y = 0$):

$$g = \frac{2-q}{2} \sin^2 \sigma t + \cos^2 \sigma t.$$

- Рост стрейков (в начальный момент $\hat{u}_y = 1$ и $\hat{u}_x = \hat{u}_z = 0$):

$$g = \frac{2}{2-q} \sin^2 \sigma t + \cos^2 \sigma t.$$

Для роллов $g \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow -\infty$ ($R_\Omega \rightarrow 0$) — в плоскопараллельном потоке.

Для стрейков $g \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow 2$ ($R_\Omega \rightarrow -1$) — на линии Рэлея.

Для $|q| \sim 1$ & $q < 2 \Rightarrow g \sim 1!$

$$\underline{k_y = 1, k_z = 0:}$$

$$\frac{d\hat{u}_x}{dt} = -2q \frac{\tilde{k}_x}{k^2} \hat{u}_x,$$
$$\tilde{k}_x = k_x + qt, \quad k^2 = 1 + \tilde{k}_x^2.$$

- Решение при $k_x \gg 1$:

$$\hat{u}_x = \frac{k_x}{k^2} \quad \text{дает} \quad g = (\hat{u}_x^2 + \hat{u}_y^2)|_{\tilde{k}_x=0} = k_x^2.$$

- Действие вязкости:

$$t_v \simeq t_{tg} \quad \Rightarrow \quad k_{x, \max} = -\text{sgn}(q)(R|q|)^{1/3}, \quad R \equiv \frac{\Omega L^2}{\nu}.$$

- Отсюда максимальное свинговое усиление:

$$G = (R|q|)^{2/3}.$$

В нормировке Lesur & Longaretti (2005) $R \rightarrow R/q \Rightarrow G$ не зависит от q !

$$\underline{k_y = 1, k_z \ll 1:}$$

Полная система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}_x}{dt} &= -2 \frac{k_z}{k^2 + k_z^2} \hat{\omega}_x - 2q \frac{\tilde{k}_x}{k^2 + k_z^2} \hat{u}_x, \\ \frac{d\hat{\omega}_x}{dt} &= (2 - q) k_z \hat{u}_x\end{aligned}$$

разделяется.

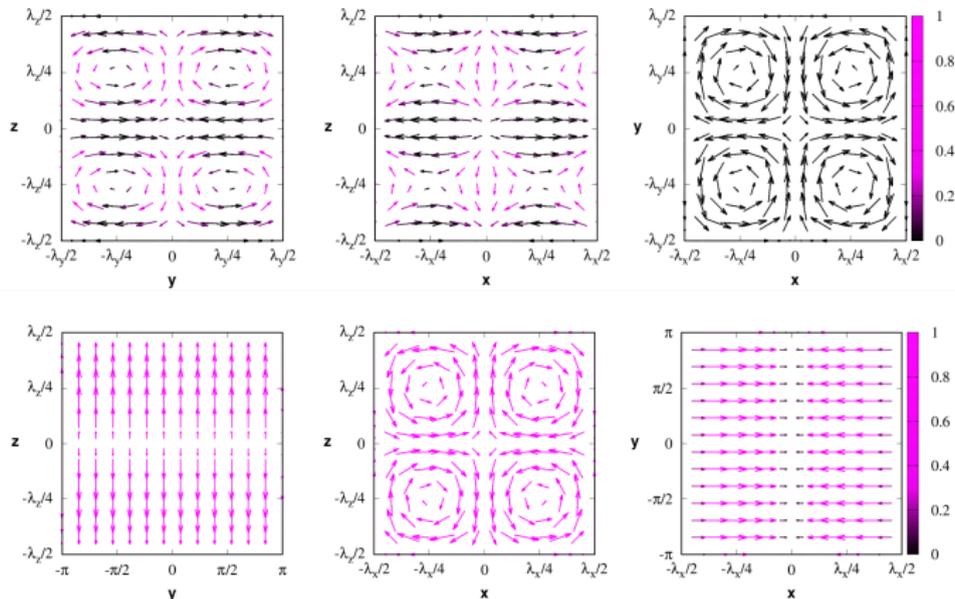
Ускорение жидкости в направлении z
модулируется динамикой свингового усиления.

Аналитическое решение при $t \rightarrow \infty$:

$$\hat{u}_z \rightarrow \text{sgn}(q) \pi k_z |k_x| \frac{2 - q}{q}. \quad (\hat{u}_x, \hat{u}_y \rightarrow 0)$$

Кросс-роллы: поле скоростей в разрезе

На верхних панелях - кросс-роллы, на нижних панелях - роллы.



Оценка числа Рейнольдса перехода к докритической турбулентности при $-\infty < q < 2$.

- Оценка максимальной амплитуды кросс-роллов, рожденных рожденными свинговым усилением сдвиговых вихрей:

$$g_{\text{pl max}} \approx \pi^2 k_z^2 \text{max}(q) k_x^2 \text{max}(q, R) \left(\frac{2-q}{q} \right)^2.$$

- Прохождение линии твердотельного вращения:

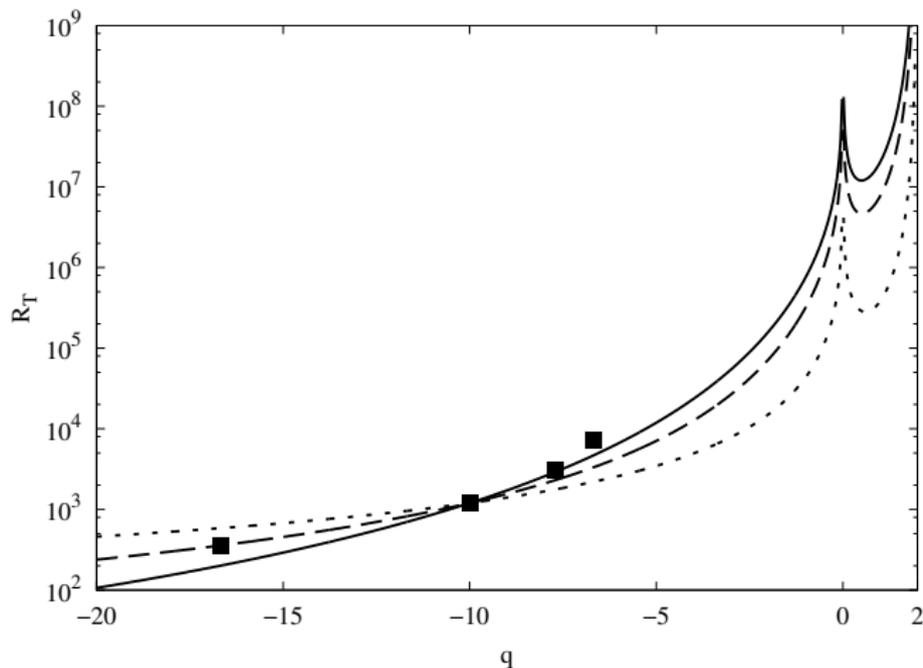
$$k_z \text{max} \sim |q|$$

Гипотеза о том, что именно кросс-роллы ответственны за регенерацию растущих сдвиговых вихрей позволяет предположить, что

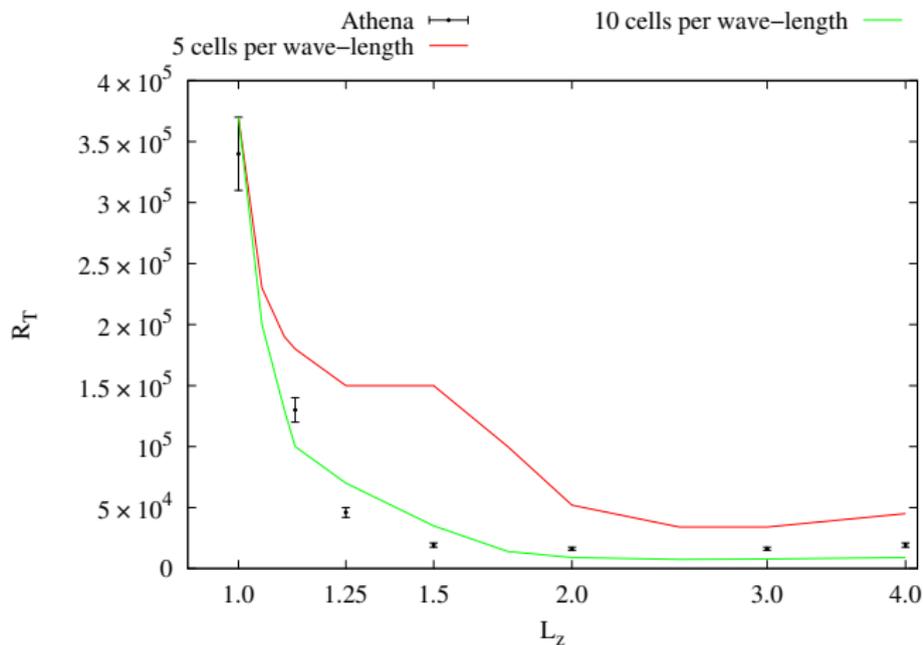
$$g_{\text{pl max}}(q, R_T) \simeq \text{const} \Rightarrow R_T(q).$$



Оценка числа Рейнольдса перехода к докритической турбулентности при $-\infty < q < 2$.



Переход к докритической турбулентности при $q = -4$: численные расчеты в вытянутом ящике



Lithwick (2009).

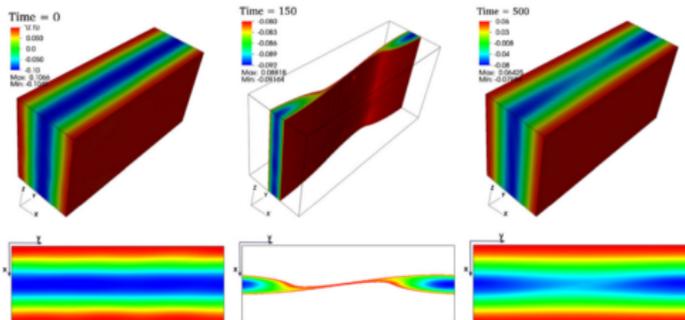


Figure 1. Vortex formation and survival in a short box. Color depicts ω_2 . The initial state is unstable to vertically symmetric ($k_z = 0$) perturbations, and forms into a vortex. But it is stable to three-dimensional ($k_z \neq 0$) perturbations, and the evolution remains two dimensional. The bottom panels show horizontal slices through the boxes in the upper panels, midway through the boxes. At time = 150, the vortex has already formed. Only fluid with $\omega_2 < -0.08$ is shown in the middle panels to highlight the vortex, and to illustrate that surfaces of constant ω_2 remain purely vertical. At time = 500, the vortex still survives. Its amplitude slowly decays by viscosity, which acts on timescale = 1130. We set $\Omega = 1$ and $q = 3/2$. The number of modes in the simulation is $n_x \times n_y \times n_z = 64 \times 64 \times 32$, and the size of the simulation box is $(L_x, L_y, L_z) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$. In this figure, L_z is to scale relative to L_y , but L_x has been expanded by a factor of 5 for clarity. (A color version of this figure is available in the online journal.)

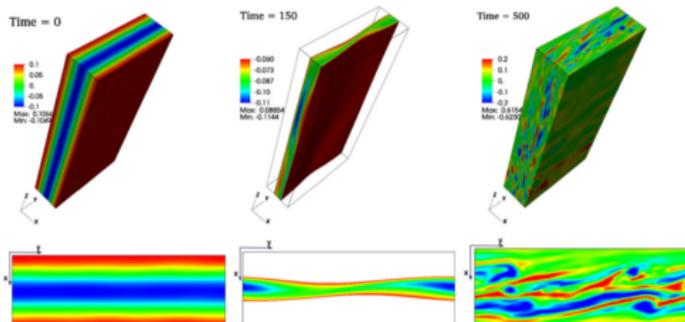


Figure 2. Vortex destruction in a tall box. The setup is identical to the short-box simulation of Figure 1, except that the height L_z has been increased by a factor of 4, so that it now exceeds L_y . The resulting evolution is dramatically different. The initial state is now unstable not only to two-dimensional perturbations, but to three-dimensional ones as well. In the middle panels, surfaces of constant ω_2 are warped, and the evolution is no longer vertically symmetric. In the right panels, the flow looks turbulent.

Спасибо за внимание