

Корнилов Матвей Викторович

**Оперативное планирование астрономических
наблюдений на основе информации
астроклиматического монитора
на примере 2.5 м телескопа**

01.03.02 – Астрофизика и звездная астрономия

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

к. ф.-м. н., доцент.

Корнилов В.Г.

Содержание

Введение	4
Глава 1. Исходные данные	18
1.1. Основные сведения об астроклиматическом мониторе КГО ГАИШ МГУ	18
1.2. Принципы устройства прибора MASS/DIMM	19
1.3. Определение параметров оптической турбулентности	20
1.4. Определение яркости ночного неба	27
1.5. Определение коэффициента экстинкции	34
Глава 2. Модели окружения	36
2.1. Модель временной эволюции мощности оптической турбулентности	36
2.2. Пространственная модель яркости ночного неба	58
2.3. Модель ослабления оптического излучения в атмосфере	71
Глава 3. Модели оборудования	78
3.1. Модель астрономического ПЗС-фотометра	78
3.2. Модель монтировки 2.5 м телескопа	88
Глава 4. Планирование как задача оптимизации	90
4.1. Постановка задачи	90
4.2. Задачи оптимизации	92
4.3. Решение дискретных задач оптимизации	101
Заключение	117
Приложение А. Избранные сведения о логнормальном распределении	122
Приложение Б. Статистические свойства C_1	125

Литература	126
----------------------	-----

Введение

Эффективность, как в общем, так и применительно к научному исследованию, — философская категория, поэтому дать точное и единственное определение в принципе нельзя. Даже под эффективностью наземных оптических астрономических наблюдений могут пониматься принципиально разные вещи. В случае автоматизированных небольших обзорных телескопов популярно сведение категории эффективности к величине времени открытого затвора (см. например [1]). При проведении специализированных обзоров требуется как можно быстрее обойти все необходимые площадки, что подразумевает, среди прочего, минимизацию времени перенаведения (см. например [2]). Более классическое определение, данное Боуэном [3], подразумевает связь эффективности телескопа и его проникающей способности в некотором обобщенном смысле. Иначе говоря, подразумевается, что все новые, неисследованные и интересные объекты, лежат в основном в области слабых источников. В некотором смысле данное допущение справедливо и сегодня.

В последние десятилетия на многих астрономических обсерваториях уделяется внимание попыткам автоматизировать процесс планирования астрономических наблюдений с целью повысить эффективность работы телескопа в том или ином смысле [1, 2, 4–12]. Все вышеперечисленные работы различаются как по формулировке задачи, и используемым терминам, так и по применяемым математическим методам используемым для решения задачи.

Пионерской работой в области автоматического планирования наблюдений следует считать работу Джонстона и Адорфа [4], авторы рассматривали планирование наблюдений для космического телескопа HST. Спустя некоторое время идея подхода стала распространяться в область наземных астрономических обсерваторий, приобретая соответствующую специфику. В настоящее время, термин планирование наблюдений подразделяют на долгопериодическое (long-term) планирование — распределение заданий на временных интервалах поряд-

ка года, и оперативное (коротко-периодическое, short-term), когда речь идет об интервалах времени порядка текущей ночи. Долгопериодическое планирование нет необходимости производить в реальном времени (хотя, конечно, желательно учитывать статистические данные о явлениях влияющих на наблюдения), в то время как оперативное планирование требует реакции в реальном времени на изменяющиеся окружающие условия [5]. Далее будет рассматриваться только оперативное планирование.

Предполагается, что оперативное автоматическое планирование наблюдений (распределение задач в течении ближайших нескольких часов) способно решить задачу повышения эффективности как минимум за счет устранения простоев, а как максимум за счет выбора наиболее подходящих в текущих условиях заданий. Чтобы иметь возможность это сделать, гарантируя при этом глобальную оптимальность в формальном смысле, максимизируя или минимизируя некую целевую функцию, необходимо обладать некоторой априорной информацией о результатах будущих астрономических наблюдений. Иначе говоря, заранее охарактеризовать в некотором обобщенном смысле качество данных, которые могут быть получены в данных условиях. Для разных наблюдательных методик и приборов, в роли таких характеристик выступают различные величины. В качестве примера, можно привести например относительную точность астрономических фотометрических измерений, в астрономических кругах также известную как «отношение сигнал-шум». Общим для этих величин является то, что они подчиняются существующим теориям астрономических методик и приборов, рассматривающих оптический телескоп и приемную аппаратуру в качестве физических систем, подчиняющихся теориям из соответствующих разделов физики: например, оптики или теории полупроводников.

Специфика наземных астрономических наблюдений состоит в том, что кроме инструментальных эффектов необходимо учитывать влияние различных физических явлений в атмосфере Земли. К таковым относятся, например, атмосферная оптическая турбулентность (ОТ), или поглощение и рассеяния света в

стационарной атмосфере.

Иначе говоря, получаемая при формализации понятия эффективности работы телескопа абстракция является достаточно высокоуровневой и в свою очередь основывается на большом количестве моделей и величин, многие из которых имеют стохастическую природу и не вполне точно заранее известны. Например, величина требуемого времени экспозиции определяется большим количеством параметров, характеризующих приемную аппаратуру, оптику телескопа, состояние атмосферы, яркость ночного неба и сам наблюдаемый объект. При условии, что все эти параметры известны с той или иной точностью, вычисление требуемой экспозиции в процессе планирования наблюдений на телескопе сводится к довольно простым операциям, дающим ответ с вполне известной точностью.

Качество изображения является одним из важнейших параметров, которые определяют эффективность наземных астрономических наблюдений. Однако, распределение ОТ в атмосфере и её полная интенсивность на луче зрения, определяющая атмосферное качество изображения, являются стохастическими величинами, меняющимися с течением времени относительно некоторого типичного значения случайным образом. В результате, вычисляемые оценки требуемых экспозиций также приобретают стохастический характер.

Значит, в свете оперативного планирования наблюдений, задача прогнозирования мощности ОТ на предстоящую ночь чрезвычайно актуальна. Для этого могут использоваться различные подходы: во-первых, подходы на основе физического моделирования с использованием измеряемых метеопараметров [13–15], которые требуют различных модельных предположений; во-вторых, методы, рассматривающие формальные статистические характеристики измеряемой атмосферной турбулентности [16–18]. Первый подход способен давать прогноз среднего на масштабах нескольких часов и суток. Второй же лучше для ближайшего будущего, до нескольких часов.

Общим для всех этих подходов является требование наличия, во-первых,

достоверных статистически значимых данных о свойствах ОТ в месте установки конкретного оптического телескопа; во-вторых, некоторой характеристики текущих условий, которая используется в качестве данных для вычисления прогноза. Чаще всего, это достигается использованием специализированных экспериментов по мониторингу параметров атмосферной ОТ (см., например, [6]), либо использованием автоматических конвейеров обработки наблюдений в реальном времени, позволяющих быстро апостериорно оценить основные свойства влияющие на астрономические наблюдения (см., например, [2]).

Другими важными факторами после атмосферной ОТ являются с одной стороны группа эффектов традиционно объединяемая под общим названием «яркость ночного неба», с другой стороны ослабление оптического излучения в атмосфере. Напомним, что яркость ночного неба определяет предельную достижимую звездную величину при астрономических наблюдениях. При рассмотрении физических явлений, обуславливающих наличие определенной яркости ночного неба, принято делить яркость на две компоненты: собственная ночная, или безлунная компонента, и рассеянный свет Луны. Эффекты физических процессов рассеяния оптического излучения, отвечающие за величину яркости ночного неба, зависят от конкретного местоположения телескопа в силу различного состава атмосферы. Поэтому в наземной астрономии традиционно уделяется внимание вопросу изучения яркости ночного неба и построению всевозможных моделей, которые используются для ее предсказания [19–27].

Для оперативного планирования в работе был выбран следующий подход. Астроклиматический монитор служит источником достоверных статистически значимых данных о характеристиках окружения: атмосферной ОТ, яркости ночного неба и ослабления излучения в атмосфере. Полученный при кампании начатой с астроклиматическим монитором Кавказской горной обсерватории (КГО) Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга (ГАИШ) Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова (МГУ) в 2007 году объем данных позволяет нам построить модели окруже-

ния, которые служат для вычисления в любой момент времени в будущем функций плотности вероятности величин характеризующих стохастическое окружение. Некоторые из таких функций плотности вероятности — условные, где условие — это соответствующие характеристики измеряемые в реальном времени астроклиматическим монитором. Модели оборудования (для примера в работе рассмотрен ПЗС-фотометр) предназначены для априорного прогнозирования характеристик данных, получаемых в данных условиях. В терминах величин, характеризующих данные, могут быть заданы ограничения, которые, объединенные в наборы, называются наблюдательными задачами. Основная цель — в реальном времени выбрать из заданного множества наблюдательных задач для текущей наблюдательной ночи, определенного на этапе долгосрочного планирования, некоторую последовательность, максимизирующую одну из мер эффективности.

Актуальность работы. Задача автоматического оперативного планирования наземных оптических астрономических наблюдений в последнее время становится популярной и актуальной для многих астрономических обсерваторий [2, 4–12]. Считается, что оперативное планирование — один из методов повышения эффективности использования наземного оптического телескопа. Причины того, что уделяется внимание повышению эффективности телескопов, по-видимому в том, что современный астрономический телескоп даже небольшого размера, скажем, диаметром больше двух метров, с экономической точки зрения достаточно затратный проект. Однако, данная область получила свое развитие только в последние десятилетия, с разработкой методов автоматического получения объективной оценки атмосферных условий и в данный момент находится на стадии роста и развития.

В контексте запуска 2.5 м телескопа новой астрономической обсерватории Московского университета, Кавказской горной обсерватории (КГО), подобные исследования, направленные как непосредственно на повышение эффективности телескопа, так и на развитие астроклиматических исследований, являющихся

ся основой оперативного планирования, становятся еще более актуальными.

Цели и задачи работы. Целью данной работы является исследование вопросов оперативного планирования наземных оптических астрономических наблюдений как средства повышения эффективности наблюдений, а так же создание системы оперативного планирования для 2.5 м телескопа КГО. Для достижения поставленных целей были поставлены следующие задачи:

- Построение стохастической модели временной эволюции мощности атмосферной оптической турбулентности (ОТ) для прогнозирования её значения в течении ближайших нескольких часов на основе измерений прибора Multi-Aperture Scintillation Sensor/Differential Image Motion Monitor (MASS/DIMM) [28], проводимых астроклиматическим монитором в реальном времени.
- Построение многополосной модели яркости ночного неба на основе статистических данных полученных астроклиматическим монитором и численного моделирования распространения лунного света в атмосфере и многополосной модели ослабления оптического излучения в атмосфере для вычисления коэффициентов экстинкции в стандартных фотометрических полосах видимого диапазона на основе измерений прибора MASS.
- Получение выражений для вычисления вероятности успешного выполнения задачи ПЗС-фотометрии при заданных опциональных ограничениях, выражаемых в терминах относительной фотометрической ошибки, времени экспозиции, интенсивности в центре функции рассеяния точки (ФРТ), полной ширины на половине максимума ФРТ, или радиуса круга включающего в себя заданную долю энергии.
- Формальное определение величин вероятности успешного выполнения наблюдательной задачи и последовательности задач, средней полной урожайности последовательности задач. В терминах этих величин должны

быть сформулированы задачи дискретной оптимизации, решение которых рассматривается как процесс оперативного планирования. Реализация алгоритма решения этих задач.

Научная новизна.

- Впервые построена модель временной эволюции мощности оптической турбулентности на основе линейных моделей авторегрессии скользящего среднего при использовании нескольких десятков тысяч измерений полученных комбинированным прибором MASS/DIMM.
- Впервые на основе данных астроклиматического монитора КГО ГАИШ МГУ построены многополосные модели яркости ночного неба и ослабления излучения в атмосфере.
- Предложен и реализован новый метод оперативного планирования наземных оптических астрономических наблюдений на основе явного вероятностного подхода.

Практическая значимость.

- Алгоритмы восстановления вертикального профиля ОТ и разработанное автором программное обеспечение используются при работе с однотипными приборами MASS в различных зарубежных обсерваториях [29–31].
- Построенные модели окружения: эволюции мощности атмосферной ОТ, яркости ночного неба и ослабления излучения в атмосфере могут быть использованы при моделировании не только ПЗС-фотометра, но и другого навесного оборудования и при необходимости легко расширены.
- Разработанный вероятностный подход оперативного планирования наземных оптических астрономических наблюдений и реализованные алгоритмы могут быть использованы и на других обсерваториях, после заме-

ны рассмотренных моделей окружения моделями соответствующими конкретному месту и оборудованию обсерватории.

Положения, выносимые на защиту.

1. Модифицированы алгоритмы восстановления вертикальных распределений ОТ и скорости ветра и определения других параметров ОТ из измерений астроклиматического монитора с инструментом MASS/DIMM с целью получения актуальной информации для оперативного планирования наблюдений на 2.5 м телескопе. Алгоритмы верифицированы при обработке измерений кампании 2007–2013 гг.
2. На основе данных астроклиматического монитора КГО 2009–2013 гг. показано, что временная эволюция интенсивности атмосферной ОТ хорошо описывается стохастическими моделями на основе линейных моделей авторегрессии скользящего среднего. При использовании текущих измерений ОТ эти модели позволяют прогнозировать поведение интенсивности ОТ, качества изображения, и характеристик изображения точечного источника: центральной интенсивности функции рассеяния точки, полной ширины на половине максимума, радиуса концентрации света.
3. С использованием пакета для численных расчетов распространения излучения в атмосфере `libRadtran` [32], построена стохастическая модель для прогноза яркости ночного неба и экстинкции в стандартных фотометрических полосах по текущим измерениям астроклиматического монитора КГО. Модель верифицирована по измерениям яркости неба и атмосферной экстинкции в КГО, осуществляемым астроклиматическим монитором с 2008 и 2009 гг.
4. Для количественного описания процесса эффективности наземных оптических астрономических наблюдений предложены величины урожайности и вероятности успеха. В терминах этих величин сформулированы задачи

дискретной оптимизации для повышения эффективности за счет планирования наблюдений.

5. Предложены вероятностные модели априорной оценки характеристик телескопа и приемной аппаратуры для использования при формулировке задач дискретной оптимизации. На примере ПЗС-фотометра описан процесс построения таких моделей для приемной аппаратуры.
6. Предложен и реализован алгоритм решения поставленных задач дискретной оптимизации на основе алгоритма Parallel Depth-bounded Discrepancy Search (PDDS) [33]. Показано, что при определенном входном размере задачи она может быть решена в реальном времени.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 7 статей в рецензируемых журналах:

1. Kornilov V., Shatsky N., Voziakova O., Safonov B., Potanin S., **Kornilov M.** First results of a site-testing programme at Mount Shatdzhatmaz during 2007–2009 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2010. Vol. 408, no. 2. P. 1233–1248
2. Kornilov V. G., **Kornilov M. V.** The revision of the turbulence profiles restoration from MASS scintillation indices // Experimental Astronomy. 2011. Vol. 29, no. 3. P. 155–176
3. Kornilov V., Safonov B., **Kornilov M.** et al. Study on Atmospheric Optical Turbulence above Mount Shatdzhatmaz in 2007–2013 // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 2014. Vol. 126. P. 482–495
4. **Kornilov M. V.** Forecasting seeing and parameters of long-exposure images by means of ARIMA // Experimental Astronomy. 2016. Vol. 41, no. 1. P. 223–242
5. **Kornilov M. V.** Astronomical observation tasks short-term scheduling using PDDS algorithm // Astronomy and Computing. 2016. Vol. 16. P. 131–139

6. В. Г. Корнилов, **М. В. Корнилов**, Н. И. Шатский и др. Метеорологические условия в Кавказской обсерватории ГАИШ МГУ по результатам кампании 2007–2015 годов // Письма в Астрономический журнал. 2016. Т. 42, № 9. С. 678–693
7. Kornilov V., **Kornilov M.**, Voziakova O. et al. Night-sky brightness and extinction at Mt Shatdzhatmaz // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2016. Vol. 462, no. 4. P. 4464–4472

и 1 статья в сборниках трудов конференций:

1. **Kornilov M. V.** Estimation of vertical profiles of wind from MASS measurements // Proc SPIE. Vol. 8447. 2012. P. 84471B–84471B–10

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих российских и международных конференциях:

1. SPIE симпозиум «Astronomical Telescopes + Instrumentation 2012» (Амстердам, Нидерланды, 2012), конференция «Adaptive Optics Systems III», устный доклад «Estimation of vertical profiles of wind from MASS measurements» (84471B)
2. XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015» (Москва, Россия, 2015), устный доклад «Прогнозирование качества изображения и параметров длинно-экспозиционных изображений с помощью линейных моделей авторегрессии».
3. Конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, Россия, 2014), соавтор доклада «Результаты исследований оптической турбулентности в атмосфере над горой Шатджатмаз в 2007–2013 гг.»

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографии и двух приложений. Общий объем

диссертации 137 страниц, из них 104 страницы текста, включая 40 рисунков. Библиография включает 102 наименования на 12 страницах.

Во **введении** описывается важность исследования, рассматриваются понятия эффективности наземных астрономических наблюдений и автоматического планирования наблюдений. Рассматривается общая структура систем оперативного планирования, подчеркивается важность влияния характеристик физических явлений в атмосфере на проведение наземных оптических астрономических наблюдений. Обсуждаются актуальность диссертационной работы, её цель и новизна, практическая значимость. Также формулируются положения, выносимые на защиту, приводится список работ, в которых опубликованы основные научные результаты диссертации, описывается личный вклад автора в проделанную работу.

Первая глава полностью посвящена астроклиматическому монитору КГО ГАИШ МГУ, включая основные принципы работы комбинированного прибора MASS/DIMM, и принципы обработки измерений.

В главе рассматриваются методы получения характеристик атмосферной оптической турбулентности (ОТ) из измерений прибора MASS/DIMM. Рассматриваются такие интегральные характеристики величины как мощность ОТ J , качество изображения β , постоянная времени τ_0 . Определение вертикальных профилей структурного коэффициента показателя преломления $C_n^2(h)$ и скорости ветра $V(h)$ является плохо обусловленной поставленной задачей. Тем не менее, удастся вычислить и вертикальные профили.

Далее рассмотрены способы получения статистических характеристик яркости ночного неба. Несмотря на то, что изначально астроклиматический монитор не предназначался для данного рода исследований, оказалось возможным получить оценки яркости ночного неба над КГО. Кроме того, рассматривается и метод получения оценок ослабления оптического излучения в атмосфере над обсерваторией.

Во **второй главе** рассматриваются модели характеризующие явления вли-

яющие на проведение наземных оптических астрономических наблюдений. Первый раздел посвящен прогнозированию мощности ОТ с помощью линейных моделей авторегрессии скользящего среднего. Для идентификации модели используются статистические данные полученные астроклиматическим монитором. С помощью модели можно рассчитать многомерную плотность вероятности мощности атмосферной ОТ в будущем (прогноз) на основе измерений текущего значения. Второй раздел посвящен многополосной модели яркости ночного неба на основе статистических данных астроклиматического монитора и численного расчета распространения рассеянного света Луны в атмосфере. В третьем разделе главы моделируется ослабление излучения в атмосфере, показывается, что допустимо использовать измерения коэффициента экстинкции в фотометрической полосе прибора MASS для пересчета в стандартные фотометрические полосы видимого диапазона.

Третья глава посвящена описанию упрощенной модели движения монтировки 2.5 м. телескопа и модели многополосного ПЗС-фотомерта. Для планирования наземных оптических астрономических наблюдений требуется знать время перенаведения между различными площадками, входящее в более широкое понятие «время установки». Во втором разделе главы рассчитывается пропускание оптической системы и определяется распределения относительной точности ПЗС-фотометрии и требуемого времени экспозиции.

В **четвертой главе** рассматриваются меры эффективности наземных оптических астрономических наблюдений. В рассмотрение вводится ряд важных величин: вероятность успешного выполнения наблюдательной задачи p , вероятность успешного выполнения последовательности наблюдательных задач Π , полная средняя урожайность последовательности наблюдательных задач Y . Величины Π и Y рассматриваются как две альтернативные равноправные количественные меры эффективности. В терминах введенных величин формулируются задачи дискретной оптимизации, решение которых рассматриваются как оперативное планирование наблюдений. Заключительный раздел главы посвящен

алгоритму решения поставленных задач. Описывается реализованный на языке программирования C++ алгоритм на основе алгоритма параллельного поиска в глубину Parallel Depth-bounded Discrepancy Search (PDDS) [33]. Рассматриваются различные аспекты производительности алгоритма: эффективность выбора функции верхней границы и эвристики. Рассматриваются избранные свойства поставленных задач: влияние весов и устойчивость решения по отношению к вариации окружающих условий.

Заключение посвящено перечислению основных результатов диссертации и обсуждению перспектив дальнейших исследований. В **приложении А** собраны вместе используемые в нескольких местах работы избранные сведения о логнормальном распределении случайных величин. В **приложении Б** отражаются вспомогательные статистические свойства величины C_1 из раздела 1.4.2.

Личный вклад автора. Автор данной работы участвовал в создании и отладке программного обеспечения автоматизированного астроклиматического монитора КГО, с помощью которого были получены данные об атмосферной ОТ и характеристики других явлений в атмосфере, влияющих на проведение наземных оптических астрономических наблюдений. Автор принимал участие в пересмотре алгоритмов восстановления профиля ОТ из измерений MASS/DIMM, разработал и реализовал алгоритмы для восстановления высотного профиля скорости ветра из измерений MASS/DIMM.

Автором была полностью разработана модель прогнозирования мощности атмосферной ОТ на основе линейных моделей авторегрессии скользящего среднего. Также автор занимался моделированием распространения излучения в атмосфере Земли с помощью пакета `libRadtran`, что позволило автору во-первых построить модель пересчета коэффициента экстинкции между фотометрическими полосами, во-вторых построить адекватную наблюдениям модель яркости ночного неба в присутствии Луны.

Автор предложил способ аппроксимации распределений величин относи-

тельной фотометрической ошибки ϵ и требуемого времени экспозиции τ для измерений ПЗС-фотометра логнормальным распределением и описал способ нахождения параметров таких распределений. Кроме того, автор рассчитал коэффициенты пропускания оптической системы для имеющихся наборов фильтров и ПЗС-детекторов.

Автор ввел понятия урожайности и вероятности успеха, сформулировал задачи дискретной оптимизации в терминах этих величин. После этого автор построил и реализовал алгоритм решения данных задач на основе существующего алгоритма параллельного поиска в глубину и выполнил анализ отдельных аспектов производительности и поведения алгоритма.

Все описанные в работе модели и алгоритмы имеющие отношения к оперативному планированию были реализованы автором в виде библиотеки на языке программирования C++¹.

¹ Исходные коды доступны по адресу <https://bitbucket.org/matwey/chelyabinsk>

Глава 1

Исходные данные

1.1. Основные сведения об астроклиматическом мониторе КГО ГАИШ МГУ

Для получения статистически значимого набора данных о свойствах атмосферной оптической турбулентности на месте установки 2.5 м телескопа КГО ГАИШ МГУ в 2007 г. была начата специализированная программа по её мониторингу [34]. Кавказская горная обсерватория расположена на вершине горы Шатджатмаз (Малокарачаевский район, Карачаево-Черкесская республика, Россия) с координатами $43^{\circ}44'9.7''$ N, $42^{\circ}40'2.5''$ E на высоте 2100 м над уровнем моря. Обсерватория расположена примерно в 30 км к югу от города Кисловодск, примерно в 50 км к югу от самой обсерватории располагается Терскольская обсерватория, а Специальная Астрофизическая обсерватория Российской Академии наук (САО РАН) находится примерно в 100 км на запад.

Для решения задачи используется астроклиматический монитор, который с технической точки зрения представляет из себя достаточно сложную автономную автоматизированную систему. Не вдаваясь в излишние технические подробности, скажем лишь, что типичный астроклиматический монитор [30, 35–41] состоит из небольшого автоматизированного телескопа, диаметром 25–40 см, установленного на высокой колонне, для снижения влияния приземных эффектов. Астроклиматический монитор КГО — не исключение в этом смысле, он расположен в 40 м от места установки 2.5 м телескопа и оснащен телескопом диаметром 30 см. Кроме того, как и все астроклиматические мониторы, он дополнен автоматической метеостанцией.

Астроклиматический монитор может использоваться как для накопления большого объема статистически однородных данных в автоматическом режиме,

так и для предоставления актуальных данных о текущем состоянии атмосферы. Статистические данные незаменимы для разработки приемной аппаратуры, для стратегического и долгосрочного планирования. Актуальные данные (в режиме реального времени) необходимы для оперативного планирования и прогнозирования.

1.2. Принципы устройства прибора MASS/DIMM

Ядром астроклиматического монитора является прибор MASS/DIMM. Конструктивно MASS/DIMM является единой оптико-электронной системой, интегрированной в едином корпусе [42]. MASS/DIMM использует в качестве питающей оптики телескоп диаметром порядка нескольких десятков сантиметров. Логически, схема прибора подразделяется на два канала: MASS и DIMM.

Канал DIMM реализует широко известную одноименную методику определения интенсивности оптической турбулентности [43] и представляет из себя ПЗС камеру, которая установлена в фокальной плоскости, куда проецируются два изображения одной звезды, получаемые в разных входных апертурах телескопа. Искажения, вносимые атмосферной оптической турбулентностью приводят к тому, что линейное расстояние между изображениями звезды в двух разных апертурах также меняется во времени. Различные входные апертуры реализованы путем отбора света из разных областей выходного зрачка классической оптической системы «телескоп + линза Фабри», где линза Фабри является частью прибора MASS/DIMM. С учетом коэффициента увеличения системы, эквивалентный размер апертур DIMM на входном зрачке $D \approx 90$ мм, расстояние между центрами $d \approx 200$ мм.

Наш экземпляр отличается типом ПЗС камеры, установленной в DIMM канале для измерений дифференциального движения изображений звезд. Используется высокоскоростная промышленная камера EC650 компании Prosilica, соединяемая с обрабатывающей машиной интерфейсом IEEE1394 (Firewire). При

экспозиции кадра в 2.5 мс и используемом в режиме измерений рабочем окне около 60×100 пикселей камера обеспечивает ≈ 200 кадров/с, что превосходит возможности большинства других применяемых в DIMM камер.

Канал MASS реализует одноименную методику [44, 45] и представляет из себя многоканальный фотометр на основе фотоэлектронных умножителей. Для каждого из четырех каналов в выходном зрачке отбирается свет из своей апертуры. Каждая из четырех concentрических апертур в форме колец имеет различный размер. Оказывается, что, при данных характерных размерах входных апертур порядка десяти сантиметров, флуктуации регистрируемого сигнала, вносимые оптической турбулентностью, существенным образом зависят от геометрии входной апертуры. Измерения светового потока выполняются с временным разрешением около 1 мс для вычисления выборочных дисперсий потока, называемых индексами мерцаний. Более подробно этот вопрос рассматривается далее в разделе 1.3.2.

Преимущества такого комбинированного решения очевидны: нужен только один питающий телескоп, информация с камеры DIMM канала может использоваться для центрирования и гидирования звезды, лучи зрения DIMM и MASS каналов пересекают один и тот объем турбулентной атмосферы, что минимизирует эффекты нестационарности и дает возможность использовать совместные данные для определения распределения атмосферной оптической турбулентности. Именно такие приборы применяются как на многих обсерваториях [29–31, 39], так и во всех масштабных кампаниях исследования OT последнего десятилетия [35, 46].

1.3. Определение параметров оптической турбулентности

1.3.1. Теория оптической турбулентности

Современный подход к описанию влияния земной атмосферы при астрономических наблюдениях основан на теории распространения световых волн в

неоднородной оптической среде. Оптическая турбулентность (ОТ) — это, вызываемые флуктуациями температуры, пространственные флуктуации показателя преломления, для характеристики которых обычно используется Колмогоровская модель, единственным параметром которой является структурный коэффициент показателя преломления C_n^2 , а структурная функция полагается $D(r) = C_n^2 r^{\frac{2}{3}}$. Размерность C_n^2 — $\text{м}^{-\frac{2}{3}}$. В некоторых случаях, когда речь идет о телескопах с апертурой более 10 м, используется модель турбулентности фон Кармана, использующая еще один параметр, называемый внешним масштабом [47, 48]. В типичных условиях астрономических наблюдений достаточно, как правило, линейной теории слабых возмущений, когда производимый турбулентным слоем эффект не зависит от турбулентности в предыдущих слоях [47, 49]. В таком случае структурный коэффициент показателя преломления принято рассматривать как функцию высоты над поверхностью $C_n^2(h)$.

При изучении интегрального влияния ОТ используются различные величины. Все они являются производными от интенсивности турбулентности J (ее размерность $\text{м}^{\frac{1}{3}}$), определяемой как

$$J = \int C_n^2(z) dz, \quad (1.1)$$

где интегрирование ведется вдоль луча зрения. В отличие от других интегральных параметров, интенсивность J не зависит от длины волны излучения λ и линейно аддитивна, поэтому ее удобно использовать при изучении распределения турбулентности вдоль луча зрения.

При анализе фазовых возмущений световой волны часто используется такой параметр как радиус Фрида r_0 (радиус атмосферной когерентности). Параметр Фрида связан с интенсивностью ОТ следующим соотношением [50]:

$$r_0 = 0.185 \lambda^{\frac{6}{5}} J^{-\frac{3}{5}}. \quad (1.2)$$

Самой известной для большинства астрономов характеристикой является

качество изображения¹ β [49]:

$$\beta = 0.98 \frac{\lambda}{r_0} = 5.307 \cdot \lambda^{-\frac{1}{5}} J^{\frac{3}{5}}, \quad (1.3)$$

где λ — длина волны, r_0 — параметр Фрида, J — интенсивность турбулентности. Величина β определяется из теории распространения света в турбулентной оптической среде как полная ширина на половине максимума длинноэкспозиционной атмосферной функции рассеяния точки.

Конечно, длинноэкспозиционная атмосферная функция рассеяния точки не полностью соответствует функции рассеяния точки получаемой на телескопе. Однако, во-первых, влияние так называемой подкупольной ОТ принципиально может быть сделано малым (или устранено полностью), в отличие от атмосферной ОТ; во-вторых, размер функции рассеяния точки оптики 2.5 м телескопа КГО ГАИШ МГУ по критерию диаметра круга концентрирующего 80% энергии составляет порядка 0.3'', а полная ширина на половине максимума порядка 0.2'' [51], что меньше характерного размера атмосферной функции рассеяния точки; в-третьих эффекты вызываемые возможным отличием турбулентности от Колмогоровской не рассматриваются в данной работе в первую очередь из-за предполагаемой малости и отсутствия достоверных значимых данных о величине эффекта. Наконец, отдельные аспекты различий величин β и полной ширины на половине максимума освещены в разделе 2.1.4.

Параметр β очень слабо зависит от длины волны λ известным простым степенным образом, поэтому в рамках исследования ОТ обычно по соглашению принимается, что если длина волны не оговорена, то она считается равной $\lambda = 500$ нм [52]. Далее мы следуем этому удобному соглашению.

Согласно гипотезе Тейлора, оптические неоднородности считаются замороженными в сплошную среду, поэтому переносятся вместе со своим объемом воздуха как единое целое. Атмосферная постоянная времени (атмосферное время когерентности) характеризует скорость изменения фазовых возмущений свето-

¹ В англоязычной литературе используется термин «seeing».

вой волны под влиянием ветрового переноса. Ее формальное определение можно записать в виде:

$$\tau_0 = 0.314 \cdot r_0 \left(\int C_n^2(z) w(z)^{\frac{5}{3}} dz \right)^{-1}, \quad (1.4)$$

где r_0 — параметр Фрида, $w(h)$ — скорость ветра на высоте h , интегрирование ведется по лучу зрения [49].

Параметр τ_0 , например, в значительной степени определяет эффективность систем адаптивной оптики (АО) или систем типа спекл-интерферометрии, определяя условие быстрогодействия.

Профили мощности ОТ $C_n^2(z)$, скорости ветра $w(h)$, величины β и τ могут быть получены из измерений проводимых с прибором MASS/DIMM следующим образом.

1.3.2. Восстановление высотного профиля ОТ

Измеряемыми величинами канала MASS являются так называемые индексы мерцаний s_{ij}^2 , где нумерующие входные апертуры прибора разного размера индексы $i, j = A, B, C, D$. Индексы мерцаний s_{ij}^2 — это выборочные ковариации (или дисперсии) относительных флуктуаций потока света между разными апертурами [44, 45]. При четырех входных апертурах прибора можно построить четыре диагональных индекса (дисперсии) и шесть внедиагональных (ковариации). Согласно определению, матрица s_{ij}^2 всегда является симметричной и положительно определенной.

В используемом приближении линейных слабых возмущений величина индекса мерцаний s_{ij}^2 определяется распределением ОТ по высоте следующим образом:

$$s_{ij}^2 = \int C_n^2(z) Q_{ij}(z) dz, \quad (1.5)$$

где $Q_{ij}(h)$ — известные весовые функции, зависящие от размера приемной апертуры, углового размера источника, спектральной полосы излучения и принятой модели пространственного спектра возмущений [45, 53].

Таким образом, выражение (1.5) по сути представляет систему линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Для физически реализуемого набора функций $Q_{ij}(z)$ задача является плохо обусловленной, поэтому метод ее решения является важной частью обработки. Тем не менее, решив в обобщенном смысле систему уравнений с известными весовыми функциями и измеренными индексами s_{ij}^2 , можно получить дискретное распределение ОТ на заданной высотной сетке [28, 45]. Хотя высотное разрешение MASS существенно хуже, чем у метода SCIDAR [54], инструмент идеально подходит для длительного мониторинга в полевых условиях.

Существенным ограничением является принципиальная нечувствительность MASS к приземной ОТ, так как все $Q_{ij}(0) = 0$. Это ограничение может быть преодолено, при выполнении совместной обработки данных получаемых каналом MASS и каналом DIMM. Выполнение такой обработки позволяет по настоящему называть прибор комбинированным.

Для измеряемых прибором DIMM дисперсий дрожания изображений могут быть записаны аналогичные соотношения:

$$\sigma_{l,\tau}^2 = \int C_n^2(z) P_{l,\tau}(z) dz, \quad (1.6)$$

где $P_{l,\tau}(z)$ — известные весовые функции для прибора DIMM². В отличие от $Q_{ij}(0)$, функции $P_{l,\tau}(z)$ равны в нуле некоторым константам. Добавление двух уравнений (1.6) в систему (1.5) позволяет решить систему на высотной сетке, включающей узел $h = 0$, так называемый приземный слой.

Описанный алгоритм восстановления профиля ОТ реализован в программном пакете `atmos 3.0`³ [28], который в настоящее время является стандартом де-факто при обработке измерений прибора MASS/DIMM в различных зарубежных обсерваториях [29–31].

Итак, результатом обработки измерений MASS/DIMM является временной

² http://curl.sai.msu.ru/mass/download/doc/dimm_spec.pdf

³ Исходные коды и краткое техническое описание доступны по ссылке <http://curl.sai.msu.ru/~matwey/atmos>

ряд профилей ОТ, а так же интегральных характеристик типа β и J . Данные величины доступны на неравномерной временной сетке с интервалами близкими к 1 минуте. Неравномерность сетки обусловлена с одной стороны перерывами в наблюдениях в течении ночи (например, из-за плохой погоды), с другой стороны особенностями программы наблюдений (например, перерывами для измерения фона неба).

Особо стоит отметить, что алгоритм обработки измерений спроектирован и реализован так, чтобы сделать доступной обработку измерений в реальном времени. Для этого, во-первых, требуется избежать необходимости нескольких проходов по массиву данных. Во-вторых, обеспечить приемлемую производительность: на обработку единицы времени измерений должно уходить существенно меньше машинного времени. С программной точки зрения, программа контролирующая работу прибора и используемая для получения сырых данных, и программа для обработки данных и восстановления профилей атмосферной оптической турбулентности, находятся на разных компьютерах в нашей конфигурации. Поэтому в общем случае требуется дополнительно обеспечить передачу данных и синхронизацию.

Определение β из измерений DIMM

Теория работы прибора DIMM подробно рассмотрена во многих работах, см. например, [43, 55, 56], где показано, что дисперсия дифференциальных дрожаний линейно связана с интенсивностью J , а значит и величинами r_0 и β :

$$\sigma_{l,\tau}^2 = 16.7 K_{l,\tau} \frac{J}{D^{1/3}}, \quad (1.7)$$

где $K_{l,\tau}$ — некоторые константы, определяемые только геометрией прибора — диаметром апертур D и расстоянием d между ними [43].

При всей простоте и надежности метода, следует иметь ввиду, что DIMM недооценивает турбулентность на верхних слоях атмосферы, для которой не в полной мере выполняется приближение ближней зоны [42, 52]. Также, конеч-

ная экспозиция регистрирующей изображения камеры приводит к сглаживанию дрожаний и занижает их дисперсию [55–57]. Существуют и другие аппаратные эффекты, требующие их изучения и учета [52]. Тем не менее, DIMM позволяет достаточно точно определять полную интенсивность ОТ на пути от верхней границы атмосферы до прибора.

В случаях, когда требуется знать лишь интегральную характеристику β , а измерения MASS недоступны, описанный способ является отличным выходом. Стоит напомнить, что канал MASS представляет фотометр на базе ФЭУ, поэтому его использования при ярком фоновом сигнале (например, в начале сумерок) недопустимо по техническим причинам.

1.3.3. Восстановление высотного профиля ветра

Для определения временных параметров ОТ таких как постоянная времени τ_0 и высотный профиль ветра $w(h)$ тоже могут быть использованы измерения выполненные прибором MASS [58]. Дело в том, что с формальной точки зрения, в уравнениях (1.5) слева стоит выборочная дисперсия определенная из большого набора последовательных единичных измерений потока света при малой экспозиции τ , справа же стоит теоретическое выражение для дисперсии, без учета длительности экспозиции (иными словами $\tau \rightarrow 0$).

Можно уточнить влияние конечной экспозиции τ в (1.5) [59, 60]. Уравнения станут выглядеть следующим образом:

$$s_{ij}^2(\tau) = \int C_n^2(z) Q'_{ij}(z, w(z)\tau) dz, \quad (1.8)$$

где Q'_{ij} — модифицированные весовые функции, $w(z)$ — высотный профиль скорости ветра, τ — время единичной экспозиции. К сожалению, Q'_{ij} зависят от переменной $w(z)\tau$ сложным нелинейным образом.

Тем не менее, была решена задача восстановления высотного профиля ветра $w(h)$ одновременно с профилем ОТ $C_n^2(h)$ путем решения нелинейной системы уравнений (1.8) с помощью изоэцранных методов нелинейной опти-

мизаций. Алгоритм решения реализован в тестовой версии программы `atmos`, упоминавшейся ранее [58].

Используя определение (1.4), можно получить значение величины τ_0 для каждого найденного профиля. Кроме того, профиль скорости ветра входит в определение величины S_3 характеризующей фотометрический шум мерцаний на телескопах большого размера [60, 61]. Стоит отметить, что быстроедействие определения профиля ветра так же позволяет производить его в режиме реального времени.

1.4. Определение яркости ночного неба

1.4.1. Общие сведения

Как уже говорилось, MASS представляет из себя звездный фотометр на базе ФЭУ, одновременно измеряющей световой поток в четырех входных апертурах разного размера с временным разрешением порядка миллисекунды [42]. При измерениях оптической турбулентности с инструментом MASS измерялся световой поток проходящий от неба, необходимый для последующей редукации измерений. За всю кампанию измерений ОТ было выполнено свыше 30 000 таких единичных измерений. В процессе наблюдений для программных звезд были получены заатмосферные звездные величины в фотометрической системе прибора MASS [62]. Это дает нам возможность попытаться применить классическую схему редукации и определить значения звездой величины яркости ночного неба в моменты измерений.

Напомним, что в эпоху активного использования фотоэлектрических фотометров [21–23] основная проблема при измерениях яркости ночного неба была связана с вкладом света слабых звезд, поскольку для получения статистически достоверного результата приходилось выбирать большие диафрагмы поля ($1'$ и более). Минимизировать этот эффект удавалось только в индивидуальном порядке, выбирая на небе место, свободное от звезд.

Угловой размер диафрагмы поля прибора MASS — $4'$ (площадь составляет 39 800 квадратных угловых секунд), и поскольку задача исследования яркости ночного неба первоначально не ставилась, то место измерения фона выбиралось случайным образом недалеко от программной звезды, используемой для измерения индексов мерцаний s_{ij}^2 . При данном размере диафрагмы, ожидаемый уровень яркости ночного неба около 22^m с квадратной секунды будет соответствовать сигналу от звезды примерно 10^m . Статистические оценки на основе данных о средней плотности звезд [63] показывают, что суммарный блеск попавших в диафрагму звезд с вероятностью 0.5 ярче 12^m . Средний суммарный блеск звезд в диафрагме прибора соответствует 11.4^m , что приводит к завышению измеренной яркости неба на 0.4^m .

Другой причиной, увеличивающей измеренную яркость, является рассеянный в телескопе и приборе свет от ярких программных звезд, блеск которых превышает уровень яркости ночного неба в $\sim 10^4$ раз. При измерении фона программа-супервизор смещает телескоп на $5'$ в случайную сторону. Действительно, анализ измерений показывает статистическую зависимость величины потока яркости неба от блеска рядом расположенной программной звезды. Недавно выполненные специальные измерения показывают, что рассеянный свет от звезды 0^m остается заметен на расстояниях вплоть до $20'$.

1.4.2. Статистическая коррекция вклада света звезд в измеряемый поток яркости неба

Среди данных, полученных с использованием прибора MASS, доступны не только непосредственные измерения потока света F_i в разных аперурах и индексы мерцания s_{ij}^2 , но и выборочные автокорреляции числа фотособытий по времени с лагом 1 мс. Напомним, что поток света, приходящий непосредственно от неба, подчиняется пуассоновской статистике, поэтому его автокорреляция с лагом 1 мс должна равняться нулю в отличие от света приходящего от звезды, для которого значение автокорреляции определяется ветровым сносом турбу-

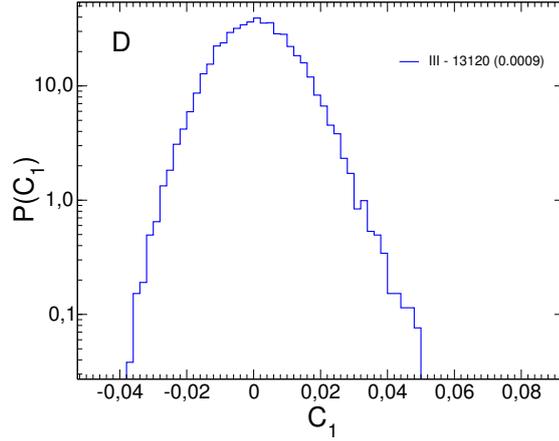


Рис. 1.1. Распределения статистики C_1 для канала D.

лентности перпендикулярно лучу зрения [59].

Далее будем рассматривать только апертуру D , так как она имеет наибольшую площадь, и, следовательно, наибольший сигнал от ночного неба. Введем величину:

$$C_1 \equiv \frac{c_1}{F}, \quad (1.9)$$

где c_1 — автокорреляция светового потока, F — среднее светового потока. Подробнее свойства C_1 обсуждаются в приложении Б. Для пуассоновского потока, величина C_1 равна нулю. Если поток состоит из непуассоновской звездной компоненты и пуассоновской компоненты яркости ночного неба, то среднее величины C_1 определяется формулой (Б.4). Заметим, что временная автокорреляция света программной звезды рассеянного в приборе и телескопе также отлична от нуля. Используя этот факт мы сможем исправить измерения яркости ночного неба в статистическом смысле.

На Рис. 1.1 приведено распределение величины C_1 для наших измерений в апертуре D, самой крупной апертуре прибора. Видно, что в целом значения лежат внутри доверительного интервала в 3σ для выборочной оценки C_1 , что в нашем случае составляет $\frac{3}{\sqrt{1000}} \approx 0.09$, как следует из формулы (Б.3). Доля точек, вылетающих за 3σ составляет около 0.2%, это случаи соответствующие ярким звездам попавшим в апертуру. Однако, видно, что положение максимума

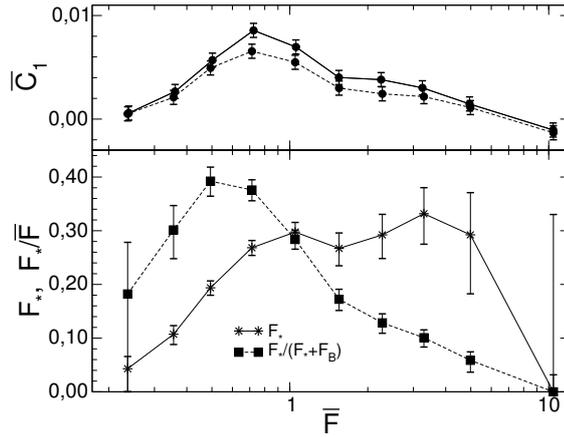


Рис. 1.2. Вверху: медианы C_1 10-ти последовательных подвыборок из всего набора в 17 162 измерений (черные точки) и после отбрасывания вылетающих за границы измерений (пунктирная линия). Указаны ошибки выборочных медиан для второго случая. Внизу: поток звездной компоненты F_* в отсчетах (черные звездочки) и вклад этой компоненты в суммарное среднее $F = F_* + F_B$ (пунктирная линия).

симметричного распределения C_1 на Рис. 1.1 отлично от нуля.

На Рис. 1.2 приведены медианы распределения величины C_1 в зависимости от среднего измеренного потока F . Используя эту зависимость, медианы дисперсии потока от звезд и формулу (Б.4), можно построить зависимость медианного вклада звездного потока F_* в зависимости от среднего измеренного F . Зависимость приводится на нижней половине Рис. 1.2, и может быть аппроксимирована формулой:

$$F_* = 0.3 \cdot (1 - \exp(-4F^2)), \quad (1.10)$$

где F — полный измеряемый поток, выраженный в инструментальных единицах импульсах в миллисекунду, F_* — средний измеряемый паразитный поток от звезды, выраженный в таких же инструментальных единицах.

Чтобы скорректировать вклад паразитного света звезд, мы вычли из всех измерений коррекцию (1.10). Заметим еще раз, применение такой коррекции означает, что только выборочное среднее всех измерений свободно от вклада света звезд, а не каждое измерение в отдельности.

1.4.3. Калибровка и пересчет в звездные величины

Часть яркости неба формируется вне атмосферы Земли, часть — в атмосфере, поэтому принято не выносить звездные величины за атмосферу. Это предполагает наличие данных об атмосферной экстинкции в момент измерения. Для расчета стандартных звездных величин яркости неба обычно используется следующие формулы:[21, 24, 25]

$$R = m_* + \alpha M(z) + 1.086 \ln F_*(z), \quad (1.11)$$

$$m(z) = R - 1.086 \ln F_B(z), \quad (1.12)$$

где R — инструментальная константа, α — коэффициент экстинкции в данной фотометрической полосе, $M(z)$ воздушная масса находящейся на зенитном расстоянии z площадки измерения яркости и близкой к ней звезды сравнения, m_* — её заатмосферная звездная величина, $m(z)$ — звездная величина яркости неба в данной точке неба, а $F_*(z)$ и $F_B(z)$ — инструментальные измеряемые потоки звезды сравнения и яркости неба соответственно.

Инструментальная константа R связывает регистрируемый сигнал F_* с освещенностью на входном зрачке и обычно определяется чувствительностью детекторов и пропусканием оптической системы. Ее вариации со временем связаны в основном с изменениями режимов работы ФЭУ и загрязнением коррекционной пластины. В нашем случае имеется еще один фактор: положение входного зрачка MASS на коррекционной пластине зависит от текущей юстировки телескопа. К сожалению, при фокусировке телескопа Meade RCX400 постепенно нарушается юстировка из-за наклона коррекционной пластины и вторичного зеркала из-за не синхронной работы фокусируемых моторов.

Задача построения зависимости R от момента измерения была решена следующим статистическим способом. Исходя из формулы (1.11) вычислим величину:

$$\tilde{R} = m_* + \tilde{\alpha}M + 1.086 \ln F_*, \quad (1.13)$$

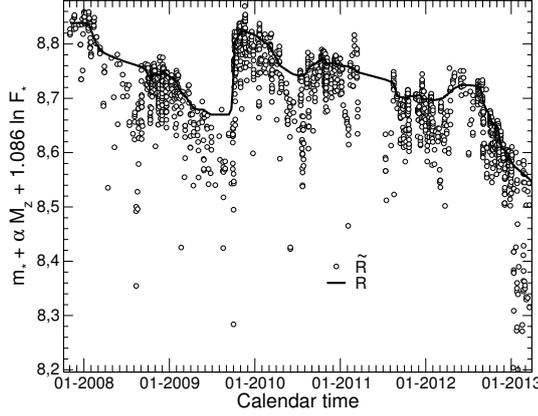


Рис. 1.3. Эволюция инструментальной константы R за период измерений ОТ. Кружки — медианы непрерывных 1863 сегментов измерений программных звезд, выполненных при фотометрическом качестве неба. Черная линия — сглаженная зависимость представляющая инструментальную константу R .

где $\tilde{\alpha}$ — первый квартиль распределения экстинкции [62]. Рассмотрим следующую разность:

$$\Delta R = R - \tilde{R} = (\alpha - \tilde{\alpha}) M, \quad (1.14)$$

так как $M \approx 1$ (все измерения выполнялись вблизи зенитной области, на воздушных массах не более 1.3), то из формулы видно, что статистические свойства ΔR определяются статистическими свойствами α .

Все измерения были разделены на отдельные непрерывные сегменты, в каждом из сегментов измерялась какая-то одна программная звезда. Короткие сегменты (менее 25 мин) не рассматривались, длинные (более 120 мин) разделялись пополам на два сегмента. Среди всех сегментов отобраны такие, что полный размах ΔR внутри сегмента меньше 0.05^m , это считалось критерием стабильной прозрачности. Таких сегментов оказалось 1863, включающих около 214 тысяч минутных измерений потоков. Медианы \tilde{R} построенные по i -ому сегменту показаны на Рис. 1.3.

Сравнительно медленные вариации \tilde{R} вызваны изменением инструментальной константы, быстрые случайные обязаны вариациям экстинкции. При фиксированном значении $\tilde{\alpha}$, измерения, выполненные с лучшей прозрачностью (25 %

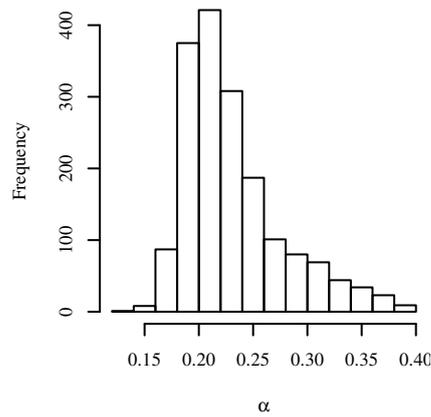


Рис. 1.4. Гистограмма коэффициента экстинкции α по измерениям астроклиматического монитора 2009–2013 гг.

точек), должны находиться выше кривой инструментальной константы R , а измерения при худшей прозрачности (75 % точек) — ниже этой кривой, поэтому в качестве оценки R мы приняли бегущий первый квартиль \tilde{R} в окне 39 точек, дополнительно скорректированный в районе резкого скачка в октябре 2009, вызванного первой чисткой коррекционной пластины и юстировкой телескопа.

Периодические провалы \tilde{R} по отношению к R объясняются тем, что в летние периоды прозрачность систематически хуже. Число измерений летом невелико, так что даже большая неопределенность (заведомо меньшая 0.05^m) в инструментальной константе не повлияет на конечный результат. Определив инструментальную константу, мы можем получить оценки коэффициента экстинкции. Сравнение распределений этих оценок с распределением α из [62] и с распределением на Рис. 1.4 показывает их близость.

Яркость неба определялась по формуле (1.12) и была скорректирована с учетом размера диафрагмы поля прибора.

Дополнительно, для контроля, перевод потоков в звездные был выполнен по конкретным R , определенным в разделе 1.5. Оба способа показали совпадение в пределах 0.03^m .

Таблица 1.1. Квартили распределений яркости ночного неба в спектральной полосе MASS в звездных величинах с квадратной секунды.

Выборка	25%	50%	75%
Без коррекции	21.20	20.37	19.20
С учетом вклада звезд	21.69	20.78	19.33
Луна над горизонтом	20.59	19.62	18.89
Луна под горизонтом	21.95	21.74	21.44

1.5. Определение коэффициента экстинкции

В январе 2009 в программу наблюдений ОТ с прибором MASS были включены специальные измерения избранных программных звезд с целью определения атмосферного пропускания классическим методом пар. Первые результаты этих измерений приведены в работе [62]. К концу наблюдательной кампании в 2013 году полное число наблюдений экстинкционных звезд на воздушных массах $M(z)$ в пределах от 1.35 до 2.0 составляло ≈ 2500 , список звезд с известными заатмосферными звездными величинами в системе прибора состоит из 33 звезд.

Метод пар исходит из того, что инструментальная константа R , определяемая в (1.11) одинакова при измерении обеих звезд пары с разностью воздушных масс ΔM . Кроме того, предполагается, что коэффициент экстинкции не зависит от направления на небе и одинаков в направлениях обеих звезд пары.

К ошибкам в α могут привести погрешности в принятых заатмосферных величинах m_* , заведомо не превышающие $0^m.01$ [62], и, в принципе, эффекты ширины спектральной полосы прибора. Последними можно пренебречь, так как для определения экстинкции выбирались программные звезды ранних спектральных классов. Все эти ошибки, также как и ошибки измерений потока $F_*(z)$, при вычислении α увеличиваются примерно в $1/\Delta M$ раз. Поэтому, минимальную разность ΔM , статистически пригодную для определения коэффи-

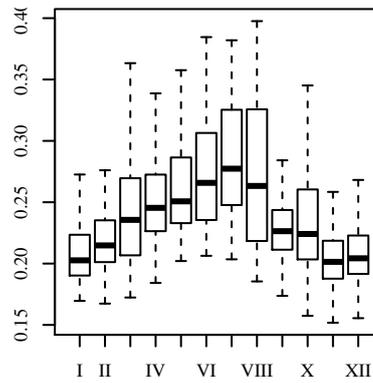


Рис. 1.5. Распределение коэффициентов экстинкции α по измерениям астроклиматического монитора 2009–2013 гг в зависимости от месяца измерений.

циентов экстинкции, мы находили, сравнивая получающиеся распределения α при изменении этого порога. Начиная с $\Delta M = 0.2$, форма распределений стабилизируется. Окончательно было принято условие $\Delta M > 0.25$, при котором получается 1786 оценок экстинкции.

На Рис. 1.4 приводится гистограмма коэффициента экстинкции α в инструментальной полосе MASS по результатам измерений 2008–2013 гг. На Рис. 1.5 приводится зависимость распределений коэффициента экстинкции от месяца, видна сезонная зависимость. Так, например, медиана для января — 0.20, а медиана для июля — 0.27.

Глава 2

Модели окружения

2.1. Модель временной эволюции мощности оптической турбулентности**2.1.1. Основные понятия и предварительный анализ**

Атмосферная оптическая турбулентность является одним из ключевых факторов влияющих на наземные оптические астрономические наблюдения. Распределение оптической турбулентности в атмосфере и её полная интенсивность на луче зрения, определяющая атмосферное качество изображения, являются стохастическими величинами, случайным образом меняющимися с течением времени относительно некоторого типичного значения. С точки зрения оперативного планирования наблюдений необходимо иметь процедуру прогнозирования характеристик оптической турбулентности на ближайшие несколько часов.

В разделе 1.3.1 излагалось, что современные представления об оптической турбулентности в атмосфере оперируют такими понятиями как структурный коэффициент показателя преломления C_n^2 и мощность оптической турбулентности на луче зрения J . В выражении (1.3) определяется величина β , называемая качеством изображения, она имеет смысл полной ширины на половине максимума атмосферной функции рассеяния точки и является функцией J . В разделе 1.3.2 описана процедура обработки измерений прибора MASS/DIMM для определения величины мощности оптической турбулентности J .

С помощью астроклиматического монитора КГО (см раздел 1.1), в течении наблюдательной кампании с ноября 2007 по июнь 2013 всего было получено около трехсот тысяч минутных значений $J(t_i)$. Данные измерения доступны на неравномерной временной сетке t_i с интервалами близкими к 1 минуте. Нерав-

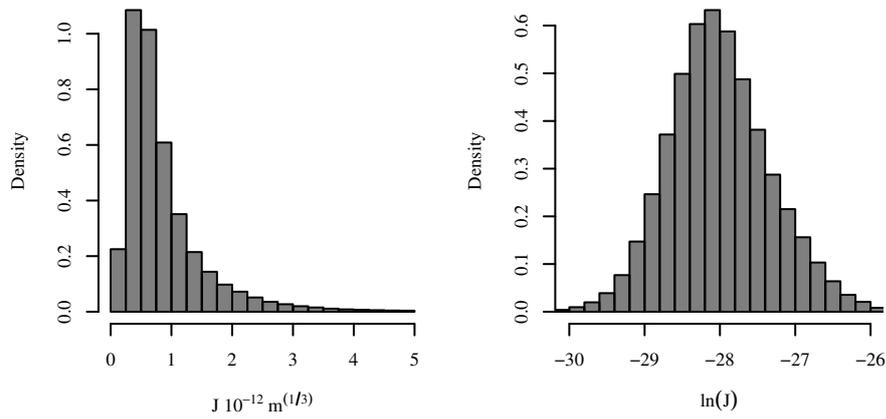


Рис. 2.1. Слева: гистограмма мощности оптической турбулентности J , по данным полученным из наблюдений астроклиматического монитора КГО. Медиана — $6.6 \cdot 10^{-13} \text{ м}^{1/3}$. Справа: гистограмма $\ln J$. Среднее — -28.01 , стандартное отклонение — 0.673 , медиана — -28.05 .

номерность сетки обусловлена с одной стороны перерывами в наблюдениях в течении ночи (например, из-за плохой погоды), с другой стороны особенностями программы наблюдений (например, перерывами для измерения фона неба).

С точки зрения анализа и прогнозирования более удобно работать на строго равномерной сетке. Поэтому исходные «сырые» данные $J(t_i)$ подвергались линейной интерполяции на равномерную сетку с шагом 1 минута. При такой интерполяции спектр мощности исходного случайного ряда уменьшается на высоких частотах [64]. Однако, во-первых, с точки зрения прогноза нам интересна область низких частот. Во-вторых, при прогнозировании, данные о текущем состоянии атмосферы, получаемые с MASS/DIMM в реальном времени, тоже будут подвергнуты интерполяции.

Таким образом, мы работаем со случайной последовательностью, полученной после интерполяции на равномерную сетку, а не с исходным «сырым» рядом значений.

Преобразование одно-точечной функции плотности вероятности

Важной характеристикой описывающей случайный процесс или последовательность является одно-точечная функция плотности вероятности. Используя

выборку имеющихся в распоряжении данных, построим гистограммы величины J в качестве оценки одно-точечной функции плотности вероятности. Заметим, что в случае когда истинная плотность вероятности имеет зависимость от времени, гистограмма представляет оценку усредненной по времени плотности вероятности. Данный вопрос рассматривается в разделе 2.1.2. Отметим, что сезонное поведение исследуемых ниже данных уже скорректировано предложенным в указанном разделе способом.

Гистограмма величины J приведена слева на Рис. 2.1. Видно, что распределение величины обладает несимметричностью. На Рис. 2.1 справа приведена гистограмма $\ln J$, распределение на нем визуально соответствует нормальному.

С точки зрения методики применяемой в разделе 2.1.3 требуется, чтобы рассматриваемые случайные величины были распределены нормально. Поэтому необходимо выбрать такое функциональное преобразование f наших величин J , чтобы полученные величины $f(J)$ были распределены нормально. Заметим, что, в силу этого обстоятельства, выбор функции f сразу же определяет модельное распределение самой величины J , а в разделе 2.1.4 величины J войдут в состав более сложных выражений и переменных, и было бы желательно, чтобы существовало простое аналитическое представление моментов величин J .

Для решения этой задачи применяется известный класс преобразований Бокса-Кокса: [65]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln(x) & \lambda = 0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

частным случаем которого, является логарифмическое преобразование. Это единственный частный случай позволяющий вычислять моменты в виде элементарных функций, а не в виде рядов [66]. Оптимальным с точки зрения процедуры Бокса-Кокса является преобразование с показателем степени $\lambda = -0.085$, несмотря на кажущуюся близость к логарифмическому, различие статистически значимо.

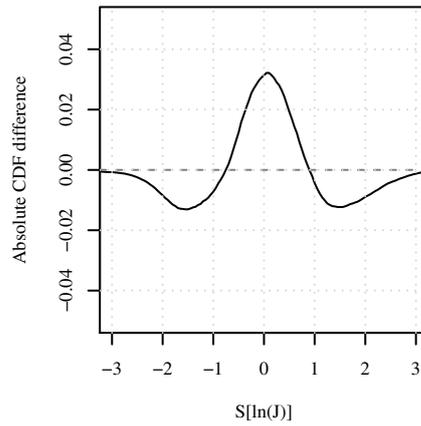


Рис. 2.2. Разность кумулятивных распределений величины $\frac{x-E[x]}{\sqrt{D[x]}}$ и нормальной случайной величины с нулевым средним и единичной дисперсией. $E[\cdot]$ и $D[\cdot]$ обозначают, соответственно, операторы среднего и дисперсии.

В дальнейшем мы выбрали простое логарифмическое преобразование

$$x(t_i) = \ln J(t_i). \quad (2.2)$$

На Рис. 2.2 представлена разность кумулятивных распределений эмпирического распределения величины x и теоретического нормального распределения. Видно, что ошибка аппроксимации не превышает 0.03. Тот факт, что распределение качества изображения похоже на логнормальное уже неоднократно отмечался, например, Расином [16].

Возникает вопрос, достаточно ли хороша выбранная аппроксимация распределения. Ошибка аппроксимации распределения могла бы привести, например, к неприемлемому смещению в получаемых оценках и недооценке дисперсии. Ответ на этот вопрос будет получен в разделе 2.1.5, где будет проведена кросс-валидация всей процедуры прогнозирования.

2.1.2. О детерминированной зависимости от времени

Важным является вопрос о характере временной зависимости исследуемых величин. Можно ли выделить из ряда данных аддитивный компонент, явно зависящий от времени, таким образом, чтобы плотность вероятности остатка от времени не зависела.

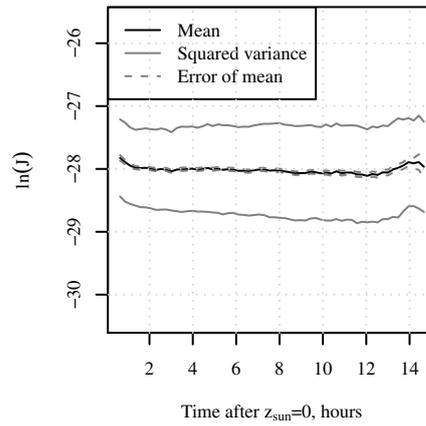


Рис. 2.3. Среднее и стандартное отклонение данных в зависимости от времени с момента пересечения Солнцем горизонта.

Есть два типа ожидаемого детерминированного поведения мощности оптической турбулентности: суточное поведение, связанное с заходом Солнца и физическими процессами в атмосфере Земли, и годовое поведение, связанное со сменой сезонов.

На Рис. 2.3 представлена зависимость среднего и стандартного отклонения $\ln J(\tau)$ от времени τ , прошедшего с момента захода Солнца. Виден некий начальный тренд в первый час после захода. В месте расположения КГО Солнцу требуется всегда более 1.5 ч чтобы опуститься с 0° до -18° , поэтому указанное время с формальной точки зрения не является астрономической ночью. Таким образом, мы можем утверждать отсутствие зависимости среднего и дисперсии распределения от времени в течении наблюдательной ночи. Поведение после 12 часов обусловлено малым числом столь длинных ночей, доступных лишь в зимний период. Это особенности отмечались в работе [67].

На Рис. 2.4 представлено, рассчитанное методом `stl` [68] стандартного пакета `stats` системы R [69], разложение на сезонный, тренд и иррегулярный компоненты средне-месячных значений $\ln J$. Заметно внутри-годовое сезонное поведение, отмеченное, например, в работе [70]. Однако, данный эффект не столь значителен, если принять во внимание, что амплитуда сезонных изменений достигает 0.6, а величина стандартного отклонения иррегулярной компоненты — 0.2. Вывод о том, что наибольший разброс значений наблюдается

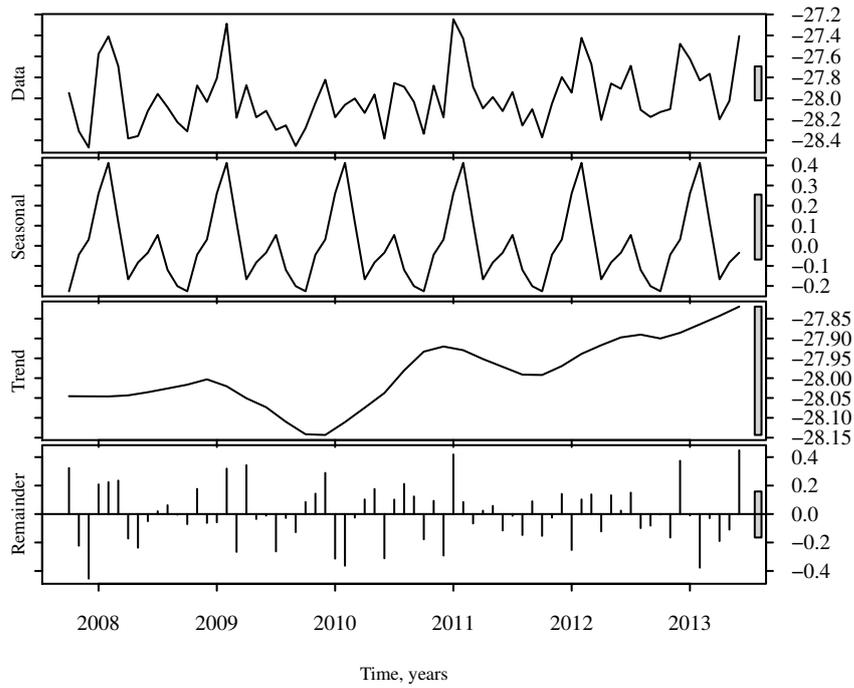


Рис. 2.4. Разложение среднемесячного логарифма интенсивности оптической турбулентности на сезонный, тренд и иррегулярный компоненты.

между ночами, а не между месяцами, подтверждается в работе [34]. Данная сезонная зависимость легко учитывается путем аддитивной коррекции исходных данных.

Таким образом, детерминированное поведение не будет рассматриваться далее, так как доминирует стохастическое поведение. Однако, используемый в данной работе подход к прогнозированию не исключает возможности учета аддитивных детерминированных особенностей. В случае с внутри-годовой зависимостью такие особенности были учтены: из первоначальных данных были вычтены отклонения среднемесячного значения от среднего.

2.1.3. Прогноз мощности оптической турбулентности

Случайная линейная последовательность авторегрессии скользящего среднего x_i задается разностными рекуррентными уравнениями:¹

$$x_i - \sum_{j=1}^p x_{i-j} \phi_j = a_i + \sum_{j=1}^q \theta_j a_{i-j}, \quad (2.3)$$

¹ В силу линейности, без ограничения общности, в данном разделе $E[x_i] = 0$.

где a_i — независимые нормально распределенные величины с нулевым средним и конечной дисперсией, ϕ_j и θ_k — соответственно p и q действительных параметров, характеризующих модель, обозначаемую ARIMA $(p, 0, q)$ ². Исчерпывающее изложение теории авторегрессии находится в монографии Бокса и Дженкинса [71]. Напомним некоторые значимые детали.

Под прогнозирование будем понимать вычисление многоточечной условной функции плотности вероятности (или её параметров) $p(x_l, \dots, x_{l+N} | \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_r)$, где \hat{x}_i — реализовавшиеся значения исследуемого процесса, которые мы наблюдали в i -ый момент времени в прошлом, x_l — прогнозируемые случайных величин. Считается, что a_i (а значит и x_i) распределены нормально, следовательно, функция плотности вероятности полностью характеризуются средними и матрицей ковариаций.

Для определения параметров модели использовался стандартный пакет **stats** системы R [69]. Параметры модели ϕ_j и θ_k , при заданных наперед их количествах p и q , вычисляются исходя из представленной реализации исследуемого случайного процесса, максимизируя функцию правдоподобия.

Для идентификации модели (определения значений и количества параметров ϕ_j и θ_k) использовались проинтерполированные на равномерную сетку данные наблюдений за 2009 год, состоящие из почти 45 тысяч минутных профилей оптической турбулентности. Данные за весь период наблюдений обладают некоторой степенью однородности, поэтому для идентификации модели было взято подмножество за один год разумного с вычислительной точки зрения размера. Отсутствующие значения (значения соответствующие перерывам в наблюдениях более 90 секунд и более) заменялись служебными метками NA системы R, стандартный пакет **stats** в состоянии правильно интерпретировать пропущенные значения при подгонке параметров.

Важными критериями для идентификации модели являются информаци-

² Autoregressive integrated moving average

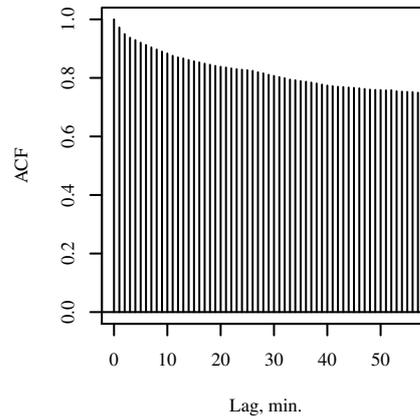


Рис. 2.5. Автокорреляционная функция данных за 2009 год, линейно проинтерполированных на равномерную сетку с шагом 1 минута.

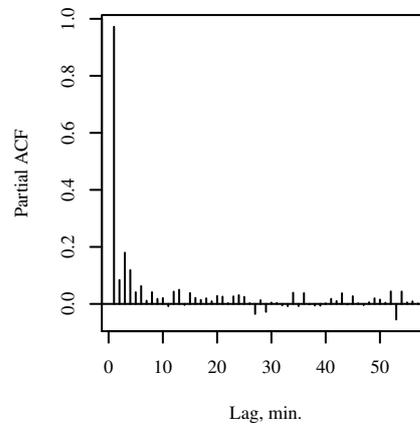


Рис. 2.6. Частная автокорреляционная функция данных за 2009 год, линейно проинтерполированных на равномерную сетку с шагом 1 минута.

онный критерий AIC³ [72], автокорреляционные функции невязок, принцип наименьшего количества параметров модели.

На Рис. 2.5 приведена автокорреляционная функция анализируемых данных, которую вполне можно принять за автокорреляционную функцию нестационарного процесса, требующего взятие первой разности, или разностей более высокого порядка. На Рис. 2.6 приведена частная автокорреляционная функция. Основываясь на представлениях об исследуемом процессе следует потребовать ограниченность дисперсии величины прогноза на временной бесконечности. Данное требование налагается исходя из того, что выборочное (среднее по времени) распределение величин имеет конечную дисперсию, что должно

³ По своей сути — значение правдоподобия, скорректированное за количество параметров модели.

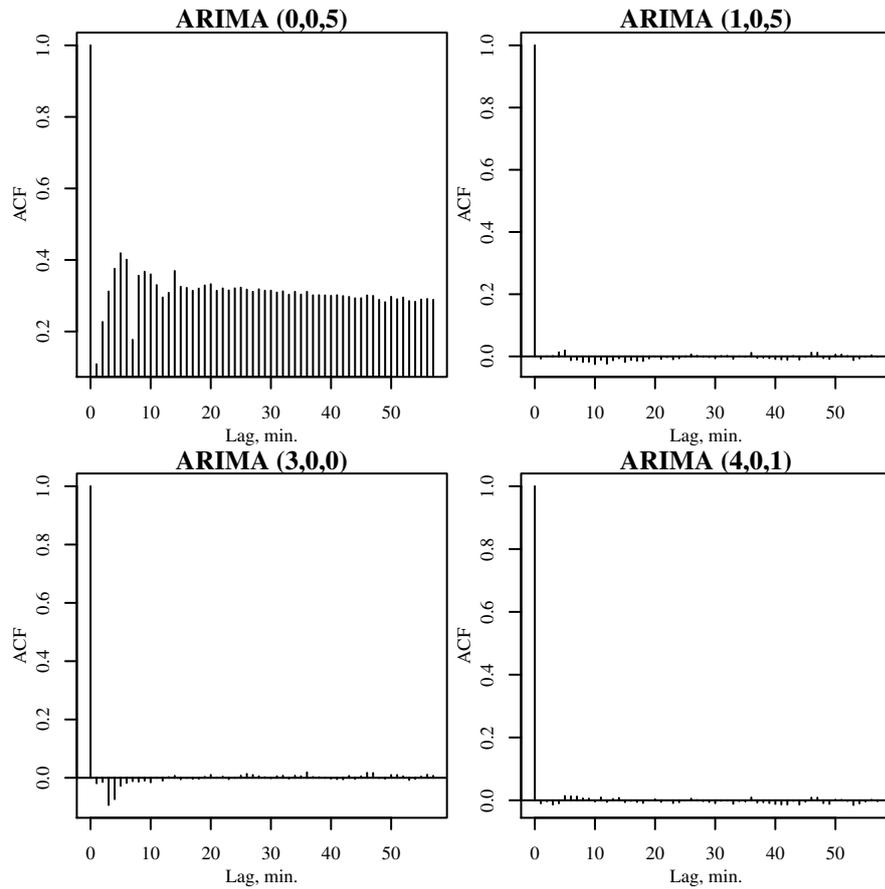


Рис. 2.7. Автокорреляционные функции невязок некоторых моделей. Пунктирной линией отмечен 95% доверительный интервал определения выборочного коэффициента корреляции. Видно, что не все модели хорошо описывают корреляционные свойства данных, в левой колонке изображены функции моделей со значительными остаточными корреляциями.

ограничивать дисперсию прогноза на бесконечности. Это требование влечет требование отсутствия единичного корня в авторегрессионной части модели. С точки зрения идентификации моделей это требование позволяет отказаться от использования моделей с разностью (авторегрессии проинтегрированного среднего). Формально, такому требованию удовлетворяют еще и так называемые дробно-разностные модели [73]. К сожалению, попытки использовать дробно-разностные модели привели к менее впечатляющим результатам, чем излагаемые здесь, и, в целях экономии, вопрос дробно-разностных моделей далее не обсуждается.

Были определены параметры моделей с количеством параметров $p \leq 5$ и

Таблица 2.1. Характеристики некоторых моделей. Функции автокорреляции невязок представлены на Рис. 2.7. В таблице приводятся AIC — информационный критерий [72]; ϕ_i и θ_j — параметры в соответствии с выражением (2.3); σ_a^2 — дисперсия a_i из (2.3); величины ρ и T предоставляет собой константы из асимптотического поведения прогнозирующей функции, т.е. условного среднего $E[x_l|\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_r] \approx A\rho^l + m = A \exp(-\frac{l}{T}) + m$; r — число членов ряда $|\pi_k| > 3 \cdot 10^{-3}$.

Модель	ARIMA (3, 0, 4)	ARIMA (1, 0, 5)	ARIMA (4, 0, 1)
AIC	-50751.49	-50555.73	-50744.43
ϕ_i	$\phi_1 = 0.84 \pm 0.01$ $\phi_2 = 0.9980 \pm 0.0003$ $\phi_3 = -0.84 \pm 0.01$	$\phi_1 = 0.9956 \pm 0.0003$	$\phi_1 = 1.806 \pm 0.008$ $\phi_2 = -0.940 \pm 0.012$ $\phi_3 = 0.232 \pm 0.010$ $\phi_4 = -0.098 \pm 0.006$
θ_j	$\theta_1 = 0.04 \pm 0.01$ $\theta_2 = -1.08 \pm 0.01$ $\theta_3 = 0.009 \pm 0.007$ $\theta_4 = 0.138 \pm 0.007$	$\theta_1 = 0.106 \pm 0.005$ $\theta_2 = 0.221 \pm 0.005$ $\theta_3 = 0.078 \pm 0.005$ $\theta_4 = 0.054 \pm 0.005$ $\theta_5 = 0.038 \pm 0.005$	$\theta_1 = 0.916 \pm 0.007$
ρ	0.997	0.996	0.998
T	≈ 425	≈ 230	≈ 490
σ_a^2	0.018	0.018	0.018
r	15	12	16

$q \leq 5$. Кроме того, благодаря тому, что в случае чистой авторегрессии ($q = 0$) задача сводится к поиску минимума квадратичной функции и требует меньше вычислительных ресурсов, были определены параметры для значительного числа чисто авторегрессионных моделей — $q = 0, p \leq 20$. Все модели можно условно поделить на два неравных класса: модели, приводящие к некоррелированным невязкам⁴, модели, невязки которых имеют существенные остаточные корреляции. Модели первого класса демонстрируют схожее поведение прогнозирующей функции и дисперсии для больших l ($l > 10$): среднее прогноза экспоненциально стремится к среднему процесса, дисперсия прогноза стремится к одно-точечной безусловной дисперсии процесса. В Таблице 2.1 и на Рис. 2.7 для примера приведены параметры нескольких моделей.

С практической точки зрения расчетов прогнозов разных величин не важен конкретный вид модели, так как все выражения для вычисления среднего, дисперсий и ковариаций прогноза одинаковы для всех линейных моделей авторегрессии скользящего среднего. Далее для демонстрации и моделирования мы будем использовать модель ARIMA (4, 0, 1), см. Рис. 2.7.

Схема вычисления прогноза сводится к вычислению параметров условной многоточечной плотности вероятности.

- Условные средние $E[x_l | \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_r]$ вычисляются исходя из параметров модели и начальных условий, используя выражение (2.3), которое можно разрешить относительно x_i :

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k x_{i-k}, \quad (2.4)$$

где π_k — веса, выражаемые через ϕ_j и θ_k ⁵. Количество необходимых начальных значений r определяется исходя из значений весов π_k . Для чисто авторегрессионной модели ($q = 0$) всегда только первые p весов π_k отличны от нуля [71].

⁴ Что является одним из критериев адекватности идентификации модели [71].

⁵ См. формулы (5.2.3) и (A5.2.1) из [71]

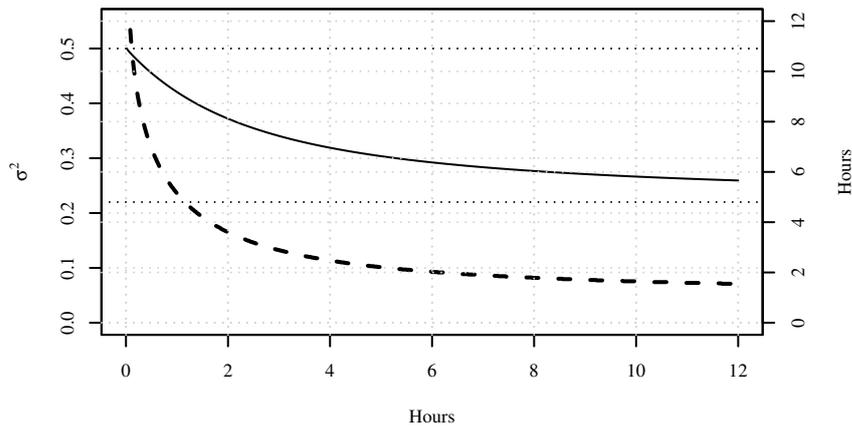


Рис. 2.8. Зависимость предельной дисперсии $\check{\sigma}_{x,\infty}^2$ прогноза модели с постоянным средним за ночь от количества измерений, использованного для оценки среднего за ночь. Пунктирная кривая и правая ось — время, через которое модифицированная модель дает лучший прогноз чем оригинальная, в зависимости от количества измерений, использованных для оценки среднего за ночь.

- Матрица ковариации полностью определяется параметрами модели ϕ_j и θ_k , и не зависит от начальных условий⁶.

В разделе 2.1.4 мы проиллюстрируем как работает модель: сначала построим более практичные для астрономии величины и после этого проведем валидацию модели. А сейчас остановимся на простой очевидной модификации модели, которая восходит к работе [16].

О среднем за ночь: модифицированная модель

Очевидным желанием является улучшение модели прогноза в смысле уменьшения дисперсии прогнозируемых величин. Обычно разброс мощности оптической турбулентности внутри одной ночи меньше, чем разброс среднего для разных ночей. Поэтому кажется естественным рассмотреть следующую модифицированную модель поведения прогнозируемой величины:

$$x_i = z_i + m_{j(i)}, \quad (2.5)$$

⁶ См. формулы (5.2.3) и (A5.1.1) из [71]

где x_i — как и прежде, интересующие нас величины, $m_{j(i)}$ — случайная величина среднего уровня за ночь, z_i — отклонения от среднего, $E[z_i] = 0$. Данная модель подразумевает, что для каждого измерения i , принадлежащего ночи j , существует величина среднего уровня $m_{j(i)}$, которая остается постоянной на протяжении всей ночи, но меняется от ночи к ночи. Так как нас не интересует прогноз далее чем на одну ночь, мы далее опустим индекс $j(i)$.

В данной модели наблюдаемыми величинами по прежнему остаются x_i , но апостериорно можно вычислить величины z_i и построить для них модель авторегрессии скользящего среднего, аналогично предыдущим разделам. Действительно, безусловная (предельная) дисперсия z_i оказывается почти в половину меньше, чем таковая для x_i . Однако, при построении прогноза в реальном времени невозможно точно узнать величину реализации m , а можно использовать лишь оценку. Эту оценку необходимо будет использовать с выражением (2.5) для пересчета от \hat{x}_i к \hat{z}_i и обратного пересчета прогноза от z_l к x_l . Можно показать, что результирующая дисперсия прогноза будет:

$$\check{\sigma}_{x,l}^2 = \sigma_{z,l}^2 + \sigma_m^2 \left(1 - \sum_{j=1}^r \psi_{r+l-j} \left(1 - \sum_{k=1}^{j-1} \pi_{j-k} \right) \right)^2. \quad (2.6)$$

Причем, максимально возможная безусловная дисперсия $\check{\sigma}_{x,\infty}^2$ должна совпадать с безусловной дисперсией немодифицированной модели σ_∞^2 . Анализ наших данных за 2009 г. показывает, что величина безусловной дисперсии $\sigma_{x,\infty}^2 \approx 0.5$, а $\sigma_{z,\infty}^2 \approx 0.22$. Таким образом, безусловная дисперсия $\sigma_m^2 \approx 0.28$.

Есть два естественных пути построения оценки величины m . Первый состоит в использовании средних значений за предыдущие ночи. Однако, данные показывают, что ряд m_j , составленный из средних значений за ночь, представляет собой процесс авторегрессии первого порядка с коэффициентом $\phi_1 \approx 0.5$. Таким образом, условная дисперсия величины m_{j+1} при известном \hat{m}_j составляет лишь 75% от величины безусловной дисперсии.

Второй путь потенциально более эффективен и состоит в использовании

среднего измеренных величин за текущую ночь в качестве оценки m_j . По мере того, как получено все больше и больше измерений величины \hat{x}_i , дисперсия такой величины будет уменьшаться, следующим образом:

$$\sigma_m^2 \sim \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \frac{\rho}{1-\rho} \left(N - \frac{1-\rho^N}{1-\rho} \right), \quad (2.7)$$

где ρ — коэффициент корреляции между двумя последующими величинами x_i , N — число измерений использованных для оценки m . Благодаря тому, что в реальности $\rho \rightarrow 1$, σ_m^2 падает почти линейно с ростом N .

На Рисунке 2.8 приведена зависимость предельной дисперсии $\check{\sigma}_{x,\infty}^2$ от величины N , с учетом формул (2.6) и (2.7). Сравним зависимость величин дисперсии прогноза модифицированной модели $\check{\sigma}_l^2$ и не модифицированной модели σ_l^2 от момента прогнозирования l . При всех значениях σ_m^2 , дисперсия прогноза модифицированной модели $\check{\sigma}_l^2$ при маленьких l растет с увеличением l быстрее, чем σ_l^2 . Но, в зависимости от σ_m^2 , ограничена сверху величиной от 0.5 до 0.22.

Таким образом, для любого σ_m^2 (который, напомним, в свою очередь зависит от N) существует момент l^* , в котором $\check{\sigma}_{x,l^*}^2 = \sigma_{x,l^*}^2$. При $l < l^*$, $\check{\sigma}_{x,l}^2 > \sigma_{x,l}^2$.

Для данных за 2009 г. зависимость l^* от величины N представлена на Рисунке 2.8 пунктирной линией. При всех практических значениях N , величина l^* ограничена снизу двумя часами. Ниша применения модифицированной модели достаточно ограничена случаями середины и конца непрерывных ночей. Кроме того, всегда приходится жертвовать качеством прогноза при $l < l^*$.

Здесь остается открытым вопрос какой интервал времени наиболее важен. Подходить к этому вопросу с точки зрения сравнения дисперсий более нельзя, нужно привлекать дополнительные критерии. Например, очевидно, что при больших l вероятность наступления плохой погоды выше, а значит выше вероятность что прогноз нам вообще не понадобится.

Далее мы будем пользоваться традиционной моделью из раздела 2.1.3.

2.1.4. Прогноз параметров изображения точечного источника

В реальных астрономических задачах связанных с получением изображений имеет значение не величина мгновенного качества изображения сама по себе, а проинтегрированные по времени экспозиции характеристики изображения. Таким образом, нам бы хотелось получить статистические характеристики случайных величин производных от нашего прогноза. Далее мы рассмотрим три разных параметра, характеризующих длинно экспозиционное изображение.

- Центральная интенсивность изображения единичного потока при заданной экспозиции в фокальной плоскости идеального телескопа с диаметром $D \gg \lambda/\beta$ (где λ — характерная длина волны принимаемого излучения). Аналог числа Штреля.
- Полная ширина на половине максимума изображения, для случаев требующих углового разрешения.
- Угловой размер функции рассеяния точки, содержащий в себе долю ϵ энергии, для задач, требующих достижения контраста.

Для начала установим функциональные зависимости, связывающие интересующие нас величины и мгновенные минутные значения качества изображения. Будем считать, что единичные минутные ФРТ описываются двумерной функцией Гаусса, где текущее качество изображения — параметр её полной ширины на половине максимума [49]. Считая приемник изображения идеально линейным, получим выражения для интенсивности в центре ФРТ γ_1 :

$$\gamma_1 = \frac{4 \ln 2}{\pi N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta_i^2}, \quad (2.8)$$

где N — число минут в экспозиции, β_i — соответствующие минутные случайные величины качества изображения. Статистические характеристики β_i задаются нашей моделью прогноза. Величина γ_1 измеряется в обратных секундах дуги в квадрате.

Связь качества изображения, выраженного в угловых секундах, с полной интенсивностью оптической турбулентности на луче зрения дается формулой (1.3), где $\ln J_i = x_i$. Так как x_i распределены нормально, J_i и β_i в свою очередь распределены логнормально. Обозначая средние и ковариации совместного распределения x_i соответственно μ_i и σ_{ij} , можно установить следующую связь:

$$E[\ln \beta_i] \equiv \hat{\mu}_i = \frac{3}{5}\mu_i + 7 \ln 10 + \ln 2, \quad (2.9)$$

$$D[\ln \beta_i, \ln \beta_j] \equiv \hat{\sigma}_{ij} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \sigma_{ij}, \quad (2.10)$$

где $E[\cdot]$ обозначает операцию усреднения, $D[\cdot]$ обозначает либо операцию дисперсии случайной величины по распределению, либо ковариацию двух случайных величин. Средние и ковариации β_i выражаются через таковые для $\ln \beta_i$ по формулам вычисления моментов логнормального распределения (А.14) и (А.15), которые приводятся в приложении.

Полная ширина на половине максимума для проинтегрированной по времени функция рассеяния точки, представленной двумерной функцией Гаусса, с изменяющимися во времени параметрами, не имеет простого аналитического выражения. Вместо этого, эта величина γ_2 задается следующим алгебраическим уравнением:

$$F_2(\gamma_2, \beta_1, \dots, \beta_N) \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta_i^2} \left(\exp\left(-\frac{\gamma_2^2 \ln 2}{\beta_i^2}\right) - \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Аналогичным образом определяется размер (радиус) круга с заданным уровнем концентрацией энергии $\gamma_3(e)$:

$$F_3(\gamma_3(e), \beta_1, \dots, \beta_N) \equiv 1 - e - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp\left(-\frac{4\gamma_3^2(e) \ln 2}{\beta_i^2}\right) = 0 \quad (2.12)$$

Обозначения в выражениях (2.12) и (2.11) соответствуют обозначениям из выражения (2.8). Далее γ_3 без аргумента для удобства обозначает $\gamma_3(0.8)$.

Интересно, что вид зависимости величин γ_i таков, что уменьшение мгновенного качества изображения β_j сильнее улучшает результат, чем равное по

величине увеличение ухудшает. Таким образом, характерное значение полной ширины на половине максимума изображения, полученного с экспозицией в несколько минут, чуть меньше чем характерное значение качества изображения.

Обратим внимание, что длина волны излучения λ входит в определяющую величину β формулу (1.3) мультипликативно. Легко видеть, что тоже самое справедливо и для всех трех величин γ_i . Это означает, что получить прогноз величин γ_i во всех интересующих нас стандартных фотометрических полосах можно тривиальным образом пересчитав его из прогноза для базовой длины волны. Зависимость от длины волны излучения достаточно слабая, поэтому для характеристики каждой фотометрической полосы достаточно использовать её центральную длину волны.

Построение прогноза

Наиболее желательным было бы получить удобные аналитические выражения для плотности распределения величин γ_j , однако, скорее всего, это невозможно. Поэтому найдем аппроксимацию этих распределений методом, предложенным Фентоном [74]. Им был предложен простой метод аппроксимации распределения суммы логнормальных величин логнормальным распределением. Следует сделать важное замечание: в работе [74] суммируемые величины некоррелированы, у нас — скоррелированы, кроме того, выражения для (2.12) и (2.11) имеют структуру суммы логнормально распределенных величин, только при разложении в ряд Тейлора следующим образом:

$$\gamma_j(\varrho_1, \dots, \varrho_N) \approx \gamma_j(\mathbb{E}[\varrho_1], \dots, \mathbb{E}[\varrho_N]) + \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial \gamma_j}{\partial \varrho_i} \right|_{\varrho_k = \mathbb{E}[\varrho_k]} (\varrho_i - \mathbb{E}[\varrho_i]), \quad (2.13)$$

где для краткости введено используемое далее обозначение $\varrho_i \equiv \frac{1}{\beta_i^2}$.

Можно было бы усомниться в применимости предложенного метода аппроксимации. Однако, как в работе [74], так и у нас в конечном счете сравнивается аппроксимация и распределение, полученного некоторым моделированием

типа Монте-Карло (см. раздел 2.1.5). Поэтому не будем далее обосновывать применимость метода для скоррелированных и не совсем изначально логнормальных величин, а просто найдем среднее и дисперсию величин γ_j в линейном приближении (для γ_1 линейное приближения является абсолютно точным).

$$E[\gamma_j(\varrho_1, \dots, \varrho_N)] \approx \gamma_j(E[\varrho_1], \dots, E[\varrho_N]), \quad (2.14)$$

$$D[\gamma_j(\varrho_1, \dots, \varrho_N)] \approx \sum_{i,k=1}^N \left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \varrho_i} \frac{\partial \gamma_j}{\partial \varrho_k} \right) \Big|_{\varrho_m=E[\varrho_m]} D[\varrho_i, \varrho_k]. \quad (2.15)$$

Частные производные $\gamma_{2,3}$ вычисляются в соответствии с теоремой о неявной функции с использованием выражений (2.11)–(2.12).

Заметим, что среднее и ковариация логнормально-распределенных величин ϱ_i даются точно, выражениями (A.14)–(A.15).

Остается только найти параметры логнормального распределения, которое имело бы заданное среднее (2.14) и заданную дисперсию (2.15), как это описано в работе [74]. Таким образом, аппроксимирующее распределение величин γ_i будет полностью задано.

На Рис. 2.9 приведены условные стандартные отклонения для рассматриваемых величин γ_j , усредненные по начальным условиям. Данные графики демонстрируют информационное содержание прогноза, видно что на временных упреждениях порядка 3-х часов процесс еще недостаточно «забывает» свое начальное состояние, хотя величина стандартного отклонения качества изображения стремится к безусловному.

Подводя итоги, напомним порядок построения распределений величин β_i и γ_j :

- исходя из параметров ϕ_i и θ_j вычисляются параметры условной матрицы ковариации σ_{ij} величин x_l ;
- исходя из начальных условий \hat{x}_i и параметров ϕ_i и θ_j вычисляются условные средние μ_i ;

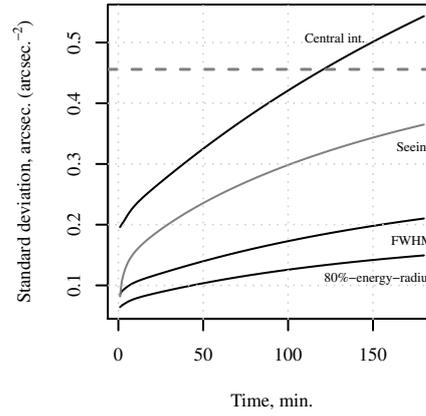


Рис. 2.9. Средние (усредненные по начальным условиям) условные стандартные отклонения для центральной интенсивности ФРТ (γ_1), полной ширины на половине максимума ФРТ (γ_2), радиуса, содержащего 80% энергии, (γ_3), минутных значений качества изображения (β), в зависимости от $t = N \cdot 1$ мин. Все величины выражены в секундах дуги, кроме центральной интенсивности, выраженной в обратных секундах дуги в квадрате. Штриховой линией обозначено безусловное стандартное отклонение качества изображения 0.46 arcsec.

- в соответствии с (2.9)–(2.10) и (A.14)–(A.15) вычисляются параметры совместного распределения β_i ;
- для заданного N из (2.14)–(2.15) вычисляются средние и дисперсии γ_j (которые можно пересчитать в параметры логнормального распределения с помощью (A.14)–(A.15)).

2.1.5. Валидация модели

Метод Монте-Карло

Чтобы проверить соответствие реальных и модельных распределений величин γ_j мы воспользуемся методом Монте-Карло. Возьмем данные наблюдений за 2010 год (на которых наша модель не обучалась), аналогичные по своим характеристикам и количеству рассмотренным данным за 2009 год.

Случайно выберем некий момент времени, построим прогноз величин, и рассчитаем данные величины исходя из известной реализации. Так как распределение γ_j считается близким к логнормальному (см. раздел (2.1.4)), бу-

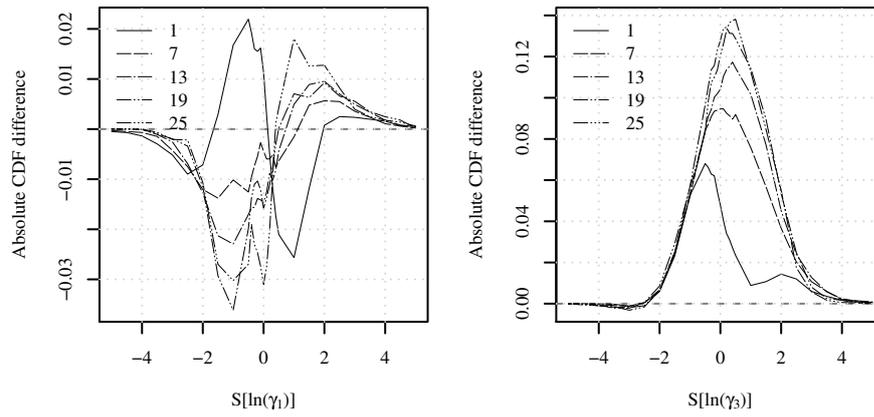


Рис. 2.10. Слева: кумулятивное распределение прогноза логарифма центральной интенсивности ФРТ $F(\ln \gamma_1)$ (прерывистые линии, для нескольких времен интегрирования), теоретическое кумулятивное распределение нормального распределения с нулевым средним и единичной дисперсией (непрерывная линия). Справа: кумулятивное распределение прогноза логарифма радиуса, содержащего 80% энергии.

дем далее сравнивать величины $\ln \gamma_j$, распределение которых должно в таком случае оказаться близким к нормальному. Предполагая, что для одного и того же упреждения во всех случаях кумулятивная функция распределения $F(\ln \gamma_j) \equiv \Phi\left(\frac{\ln \gamma_j - \mu}{\sigma}\right)$, кумулятивная функция распределения Φ может быть восстановлена из выборки нашего эксперимента, так как $\mu \equiv E[\ln \gamma_j]$ и $\sigma^2 \equiv D[\ln \gamma_j]$ определяются во время прогнозирования.

На Рис. 2.10 и 2.11 изображены кумулятивные распределения Φ прогноза для нескольких упреждений (времени интегрирования), жирной сплошной линией изображено теоретическое нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией. Расчет был выполнен для модели ARIMA (4, 0, 1), для каждого N было использовано 10000 элементов выборки. Были смоделированы времена (N) от 1–25 минут.

На рисунке видно, что максимальная разница между кумулятивными распределениями независимо от времени упреждения не превышает 0.03 для $\ln \gamma_1$, 0.06 для $\ln \gamma_2$, и 0.10 для $\ln \gamma_3$. Кроме того, для $\ln \gamma_3$ присутствует явное незначительное смещение среднего по величине до 0.3σ , что может быть учтено либо эмпирически, либо добавлением членов разложения в выражения (2.14)–(2.15).

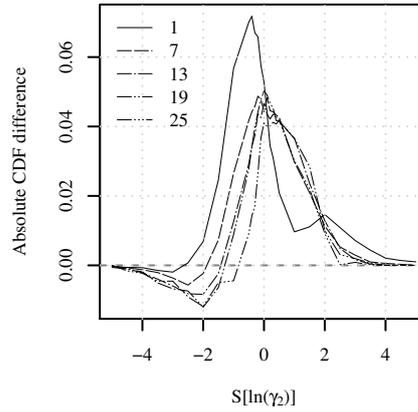


Рис. 2.11. То же, что на Рис. 2.10, но для прогноза полной ширины на половине максимума ФРТ.

При проведении аналогичного эксперимента с использованием данных за 2009 год, $\ln \gamma_3$ демонстрирует схожее поведение, таким образом смещение следует относить к смещению, вносимому вычислением среднего величины γ_3 через ряд Тейлора.

Исследование условных моментов

В этом разделе исследуются первый условный момент $E[x_k - x_0 | x_0]$ и второй условный момент $D[x_k - x_0 | x_0]$, где x_0 — начальный элемент последовательности, x_k — k -ый элемент последовательности. Форму зависимости данных моментов от начального x_0 можно найти рассматривая разностные уравнения, которым подчиняется случайная последовательность, а именно уравнения (2.3). С другой стороны, моменты можно оценить используя имеющиеся наблюдательные данные. Несоответствие теоретической и экспериментальных зависимостей могло бы свидетельствовать о том, что исследуемый процесс не описывается линейными разностными уравнениями.

Принимая во внимание линейную форму (2.3), x_k может быть выражен как следующая линейная комбинация:

$$x_k = \sum_{j=1}^p x_{j-1} \alpha_{j-1}^{(k)} + \nu_k, \quad (2.16)$$

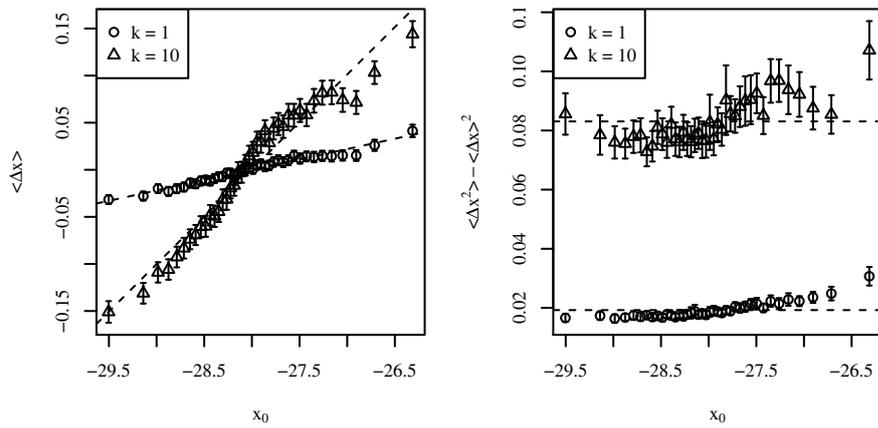


Рис. 2.12. Слева: выборочные условные моменты $E[x_k - x_0|x_0]$ для двух значений $k = 1$ и $k = 10$. Справа: выборочные условные дисперсии $D[x_k - x_0|x_0]$ для двух значений $k = 1$ и $k = 10$.

где $\alpha_{j-1}^{(k)}$ действительные коэффициенты, ν_k линейная комбинация генерирующей последовательности a_i . Применяя операцию условного среднего к обоим частям (2.16), принимая во внимание, что $E[\nu] = 0$, получим линейную зависимость:

$$E[x_k - x_0|x_0] = C_1 + C_2 x_0, \quad (2.17)$$

где C_1 и C_2 — действительные коэффициенты. Кроме того, форма зависимости не зависит от конкретных значений параметров линейной модели.

Известно, что в линейном случае условная дисперсия x_k не зависит от начальных условий, а лишь от коэффициентов модели [65]. Таким образом, $D[x_k - x_0|x_0] = C_3$, где C_3 действительная константа.

На Рис. 2.12 показаны зависимости $E[x_k - x_0|x_0]$ и $D[x_k - x_0|x_0]$, построенные для $k = 1$ и $k = 10$. Из графиков видно, что вычисленные условные моменты в целом достаточно хорошо описываются моделью. Вероятно, дальнейшее улучшение модели скорее всего связано с введением в рассмотрение новых величин, таких как постоянная времени атмосферы, а не с введением нелинейностей.

2.2. Пространственная модель яркости ночного неба

2.2.1. Постановка задачи

Яркость ночного неба одна из нескольких важных величин, входящих в формулу Боуэна, определяющую эффективность классических наземных астрономических оптических наблюдений [3]. Поток фотонов, приходящих в данном направлении, но не связанный с собственным излучением наблюдаемого источника, обладает собственной дисперсией, привносимой в измерения. Так как поток подчиняется распределению Пуассона⁷, то его дисперсия пропорциональна среднему. Широко известна следующая формула, выражающая относительную точность фотометрических измерений с помощью ПЗС: [75].

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{n\tau}{\sqrt{n\tau + N_{pix}(n_s\tau + d\tau + r^2)}}, \quad (2.18)$$

где ϵ — относительная ошибка, n — суммарное количество фотоэлектронов изображения, τ — время экспозиции, N_{pix} — размер изображения в пикселях, n_s — количество фотособытий, производимых ночным небом, d — темп термогенерации в фотоячейке, r — шум считывания ПЗС. Для линейного приемника число фотособытий пропорционально числу фотонов. В отличие от пуассоновского шума объекта и ночного неба, темновой шум и шум считывания можно уменьшить техническими мерами.

Уже упоминалось, что при рассмотрении физических явлений, обуславливающих наличие определенной яркости ночного неба, принято делить яркость неба на ночную и лунную компоненты. Первая компонента является суммарным результатом воздействия сразу нескольких факторов. К таковым, как правило, относят: свет неразрешенных протяженных астрономических объектов, собственное излучение атмосферы Земли в соответствующих эмиссионных линиях, рассеяние излучения в атмосфере. Кроме того, суммарная яркость безлунной

⁷ Здесь предполагается, что апертура телескопа и время экспозиции достаточно большие для того, чтобы эффект мерцаний звезд был пренебрежим.

компоненты настолько мала, что рассеяние света от искусственных наземных источников иногда оказывается сопоставимо, и традиционно включается в названный список явлений.

Луна отражает значительное количество солнечного света, блеск полной Луны достигает -12^m . Из-за рассеяния в атмосфере, свет Луны приходит к наблюдателю со всех направлений, формируя вторую компоненту яркости ночного неба. Картина рассеяния более неоднородна, чем предыдущая компонента, так как вызвана рассеянием источника, близкого по геометрическим характеристикам рассеяния к точечному. Заметим, что яркость, обусловленная рассеянным лунным светом, может на несколько порядков превосходить первую компоненту.

Интенсивность вызванного сложными физическими процессами в атмосфере излучения в эмиссионных линиях вариативна во времени и пространстве: некоторые линии подвержены сезонным колебаниям, некоторые — коррелируют с солнечной активностью [20]. Рассеяние в атмосфере традиционно моделируется рэлеевским рассеянием и рассеянием на аэрозолях, содержание которых изменяется во времени и пространстве и обуславливает вариации прозрачности при фотометрических наблюдениях. Следовательно, величина яркости ночного неба может изменяться стохастическим образом во времени и пространстве.

Значит, для каждой астрономической обсерватории требуется собственная оценка данной величины, как для общей характеристики эффективности по формуле (2.18), так и для априорной оценки точности определенной наблюдательной задачи с целью оперативного планирования наблюдений.

В разделе 1.4 было показано, как с помощью измерений произведенных прибором MASS на астроклиматическом мониторе КГО можно получить оценку яркости ночного неба. Далее мы проанализируем полученные данные и попытаемся сформулировать некоторые модели, пригодные для использования в процессе автоматического планирования наблюдений.

2.2.2. Яркость безлунного неба

Яркость ночного безлунного неба принято приводить к зениту для последующего сравнения. Это связано с тем, что зависимость яркости от зенитного расстояния определяется физическими законами распространения света. Наиболее часто используется следующая зависимость: [19, 26, 27]

$$m(z) = m(0) + \alpha(M(z) - 1) - 1.086 \ln(1 - f + fM(z)), \quad (2.19)$$

где $m(0)$ — звездная величина яркости неба в зените, $M(z)$ — воздушная масса, а f — доля излучения неба формируемого эмиссионными линиями в атмосфере, принимается, что $f = 0.6$ [19, 26, 76].

Формула (2.19) исходит из предположения, что атмосферная эмиссионная компонента яркости неба в среднем формируется в оптически тонком однородном слое, а эффекты вторичного рассеяния такого излучения в первом приближении пренебрежимы [20].

В фотометрической полосе MASS, единственная значимая линия ночного неба это линия кислорода OI (557.7 нм), попадающая на край полосы. При своей наибольшей интенсивности в $750 R^8$ [20] эта линия дает не более 7% вклада в данной фотометрической полосе, а типичный вклад составляет около 3%, поэтому в наших условиях. Значит, величина f должна быть достаточно мала в фотометрической полосе MASS; однако, среди измерений астроклиматического монитора почти нет измерений выполненных с большими воздушными массами $M(z)$, поэтому применяя регрессию к формуле (2.19), мы не сможем достоверно определить параметр f .

Несмотря на то, что параметр f должен, очевидно, зависеть от спектральной полосы, Патат [19]⁹ нашел удовлетворительным применение $f = 0.6$ для своих данных во всех полосах системы UBVRI. К сожалению, наших данных недостаточно, чтобы проверить этот вывод из работы [19], но мы тоже примем,

⁸ $1 R = \frac{10^6}{4\pi} \text{с см}^{-2} \text{стер}^{-1}$

⁹ См. приложение С к работе [19], опубликованное только в электронном виде на сайте журнала.

Таблица 2.2. Широкополосные цвета безлунного ночного неба. Приведены значения и среднеквадратичные ошибки в звездных величинах.

	Показатель цвета	Число спектров
$U - B^{10}$	-0.57 ± 0.13	
$B - M$	0.37 ± 0.04	127
$M - V$	0.66 ± 0.09	127
$B - V$	1.03 ± 0.12	127
$V - R$	0.77 ± 0.13	615
$V - I$	2.10 ± 0.20	615

что $f = 0.6$ для всех спектральных полос. Однако, при условии улучшения методики измерений астроклиматического поста за счет дополнительных измерений яркости ночного неба на больших воздушных массах принципиальных ограничений для такой проверки в будущем нет.

Наши измерения оптической турбулентности выполнялись при воздушных массах не более 1.3, медианное значение $M(z)$ для программных звезд, рядом с которыми измерялся фон, составляет 1.09. При этом определяющим будет вклад второго члена формулы (2.19), составляющий порядка $0^m.02$. Это дает основание считать, что полученные при измерениях звездные величины уже относятся к зениту, таким образом мы считаем распределение $m(0)$ в полосе MASS известным. [77]

Для пересчета $m(0)$ в другие спектральные полосы, мы будем использовать фотометрические цвета. Для оценки показателей цвета мы использовали спектры ночного неба, выложенные в свободный доступ ESO¹¹. Данные состоят из нескольких сотен спектров неба, полученных на обсерватории Параналь в 2000-х годах с прибором FORS1 [20] и представленных в абсолютных энергетических единицах. Для определения нуль-пунктов использовалось распределение

¹⁰ По результатам [19]

¹¹ <http://www.eso.org/~fpatat/science/skybright/>

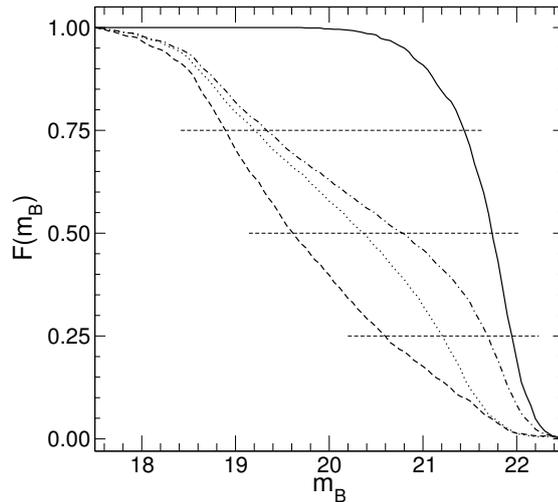


Рис. 2.13. Дополнительные кумулятивные распределения яркости ночного неба при фотометрических условиях для безлунного периода (сплошная линия), и при луне над горизонтом (штриховая линия). Штрих-пунктирная линия — общее распределение. Пунктирная линия показывает распределение величин, не скорректированных за вклад звезд.

энергии в спектре α Луи из работы [78], величины которой были приняты равными нулю для всех полос, кроме полосы MASS, где α Луи по соглашению имеет величину 0.05^m [62]. Интегрирование этих распределений энергии с кривыми реакции фотометрических полос позволяет определить звездные величины фона неба во всех полосах и, соответственно, показатели цвета $B - M$ и $M - V$, где M обозначает величину в полосе MASS. Значения приведены в Таблице 2.2, показатель цвета $U - B$ взят непосредственно из работы [19].

Таким образом, принимая значение $f = 0.6$, можно использовать формулу (2.19) для вычисления яркости неба, в отсутствии Луны, в требуемой точке с зенитным расстоянием z , в заданной фотометрической полосе. Коэффициенты экстинкции α во всех полосах рассматриваются в разделе 2.3.

Заметим, что вычисленные показатели цвета в стандартной системе довольно хорошо соответствуют многочисленным прямым определениям, сводка которых приведена, например, в работе [19], имея ввиду при этом, что в полосах V , R , I ¹² заметный вклад вносят сильно переменные эмиссионные линии ноч-

¹² К тому же, полосы R и I плохо стандартизованы.

Таблица 2.3. Квартили распределений яркости ночного неба в отсутствии Луны в различных стандартных фотометрических полосах.

	25%	50%	75%
<i>U</i>	21.74	21.53	21.27
<i>B</i>	22.31	22.10	21.84
<i>V</i>	21.28	21.07	20.81
<i>R</i>	20.51	20.30	20.04
<i>I</i>	19.18	18.97	18.71

ного неба. Распределения звездных величин яркости неба в фотометрической полосе *M* приведены на Рис. 2.13.

Таким образом, средняя звездная величина яркости неба $m_{X,n}(z)$ в полосе *X* (*X* нумерует спектральную полосу, например *UBVRI*) может быть вычислена с использованием цвета из Таблицы 2.2. В Таблице 2.3 в качестве примера приводятся квартили распределений яркости ночного неба в отсутствии Луны, рассчитанные с использованием данных цветов.

2.2.3. Яркость неба в присутствии Луны

Отраженный Луной солнечный свет дает существенный вклад в яркость ночного неба. В присутствии Луны яркость ночного неба может возрастать почти на 5 звездных величин, что очевидным образом влияет на точность и эффективность фотометрических наблюдений.

Доля солнечного света, отраженного от поверхности Луны в направлении наблюдателя зависит от спектральной полосы и параметров видимой освещенной области. Это, с одной стороны, видимая площадь области, определяемая фазовым углом, с другой стороны, положение области, поскольку поверхность Луны обладает определенным рельефом, влияющим на эффективность отражения [79]. В атмосфере Земли отраженный свет подвергается тем же процессам, что и любое другое электромагнитное излучение пришедшее из вне. Для нас

важны рэлеевское рассеяние и рассеяние на аэрозолях, именно они формируют протяженную картину и увеличивают яркость неба во всех точках, но на разную величину. Кроме того, геометрия играет свою роль, картина рассеяния существенно отличается для источника в зените и источника вблизи горизонта.

Таким образом, картина рассеяния лунного света в атмосфере — сложная функция многих переменных. Достаточно сложно подойти к описанию этой функции не затронув физических явлений стоящих за её формированием. Чисто описательный подход потребовал бы подгонки существенного числа свободных параметров, а имеющийся в нашем распоряжении набор измерений не покрывает всех возможных диапазонов измерения переменных. Достаточно лишь повторить, что измерения фона проведены в основном в области зенита, и в одной спектральной полосе.

К счастью, благодаря линейности электродинамики и, следовательно, соответствующих уравнений переноса излучения в атмосфере Земли, картина рассеяния света точечного монохроматического источника мультипликативно зависит от его интенсивности I_0 . Иначе говоря, может быть представлена в виде:

$$I_\lambda(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) = I_0 \cdot f_\lambda(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0), \quad (2.20)$$

где $\mu \equiv \cos(z)$ и $\mu_0 \equiv \cos(z_0)$ — косинусы зенитного расстояния точки на небе и источника, соответственно, а ϕ и ϕ_0 — их азимуты. Это означает, что можно моделировать отдельно $f_\lambda(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0)$ как функцию параметров атмосферы, и I_0 как функцию параметров взаимного положения поверхности Луны и наблюдателя на Земле.

Исчерпывающая многополосная модель альбедо Луны была построена по результатам длительных фотометрических измерений [79]:

$$\begin{aligned} \ln A_k = & \sum_{i=0}^3 a_{ik} g^i + \sum_{j=1}^3 b_{jk} \Phi^{2j-1} + c_1 \theta + c_2 \phi + c_3 \Phi \theta + c_4 \Phi \phi \\ & + d_{1k} \exp\left(-\frac{g}{p_1}\right) + d_{2k} \exp\left(-\frac{g}{p_2}\right) + d_{3k} \cos\left(\frac{g - p_3}{p_4}\right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где A_k — эффективное альbedo Луны в спектральной полосе номер k , g — фазовый угол, Φ — селенографическая долгота Солнца, θ и ϕ — селеноцентрические координаты Земли, a_{ik} , b_{jk} , c_i , d_{jk} , p_i — известные постоянные коэффициенты модели. Все эти величины можно с высокой астрометрической точностью рассчитать для любого заданного момента времени [80]. Отметим, что коэффициенты модели слабо зависят от длины волны и определены для специальной узкополосной фотометрической системы. Для пересчета в стандартную широкополосную фотометрическую систему Бесселя, ввиду линейности выражения (2.21) мы представим зависимость каждого коэффициента от λ с помощью линейной интерполяции и найдем средние коэффициенты следующим образом:

$$x_X = \frac{\int x(\lambda)\pi_X(\lambda)E_{\odot}(\lambda)d\lambda}{\int \pi_X(\lambda)E_{\odot}(\lambda)d\lambda}, \quad (2.22)$$

где x — обозначает любой из спектрально зависимых коэффициентов модели (a_{ik} , b_{jk} , d_{jk}), X нумерует спектральную полосу, $\pi_X(\lambda)$ — кривая реакции спектральной полосы X , $E_{\odot}(\lambda)$ — спектр излучения Солнца [81].

Таким образом, подставляя коэффициенты x_X в формулу (2.21), мы найдем среднее эффективное лунное альbedo A_X в спектральной полосе X .

Для расчета распространения света в атмосфере Земли мы используем программный пакет `libRadtran` [32]. Пакет реализует оптическую модель атмосферы путем численного решения уравнений переноса излучения и позволяет найти величину $f(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0)$ из (2.20). Таким образом звездная величина яркости неба, обусловленной лунным светом:

$$m_X = m_{X,atm}(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) + m_{X,sun} - 1.086 \left(\ln A_X - \ln \left(\frac{D_{EM} D_{ES}}{D_{EM}^0 D_{ES}^0} \right)^2 + \ln \frac{6.4177 \times 10^{-5} \text{ стер}}{\pi} \right), \quad (2.23)$$

где $m_{X,atm} \equiv -1.086 \ln f$, $m_{X,sun}$ — звездная величина Солнца в полосе X , D_{EM} — расстояние между Землей и Луной, D_{ES} — расстояние между Землей и Солнцем, D_{EM}^0 и D_{ES}^0 — соответствующие средние расстояния, а последний член —

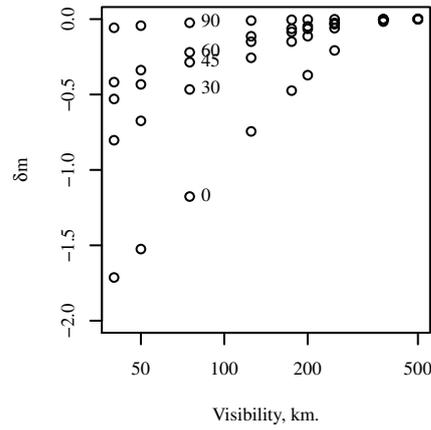


Рис. 2.14. Вариация δm величины $m_{M,atm}$ в зените, вызванная изменением содержания аэрозоля в модели атмосферы. Для разных зенитных расстояний высот источника.

геометрический фактор. Расстояния D_{EM}^0 и D_{ES}^0 могут быть вычислены с высокой точностью для любого заданного момента времени [80].

Для удобства и ускорения последующего расчета $m_{X,atm}$ раскладывается в ряд

$$m_{X,atm} = \sum_{m=0}^M \sum_{l_1=m}^M \sum_{l_2=m}^M C_{ml_1l_2} \cos m(\phi - \phi_0) P_{l_1}^m(\mu) P_{l_2}^m(\mu_0), \quad (2.24)$$

где P_l^m — присоединенные функции Лежандра [82]. На практике оказывается, что достаточно $M = 5$ для достижения точности аппроксимации лучше 0.05 звездой величины во всех полосах и при всех значениях переменных μ , μ_0 , $\phi - \phi_0$.

Для задания модели требуются параметры определяющие атмосферу, известные с разной степенью точности, это в свою очередь отражается на точности $m_{X,atm}$. Для моделирования использовалась стандартная атмосфера для средних широт, и модель аэрозоля номер 1 из работы [83]. Параметры содержания воды и озона приняты медианными для места КГО. Подробнее эти параметры обсуждаются в разделе 2.3.1, где рассматривается ослабление оптического излучения в атмосфере. Два параметра, наиболее влияющих на результат, содержание аэрозоля в атмосфере и альbedo подстилающей поверхности, требуют детального рассмотрения.

Содержание аэрозоля в используемой модели определяется модельным па-

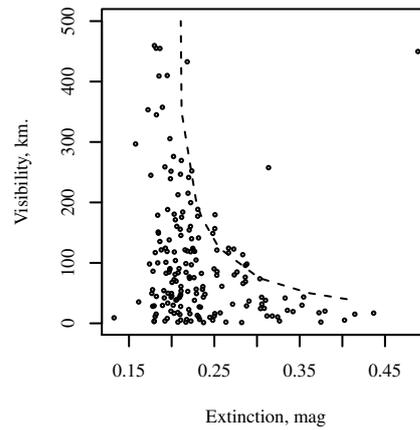


Рис. 2.15. Сравнение суточных медианных величин видимости V , извлеченной из модели яркости неба и наблюдений с помощью модели (2.25), с суточной медианной экстинкцией полученной в [62]. Пунктирной линией нанесена модельная зависимость между коэффициентом экстинкции α_M и видимостью V . Использовался пакет `libRadtran`, приняты медианные содержания воды и озона.

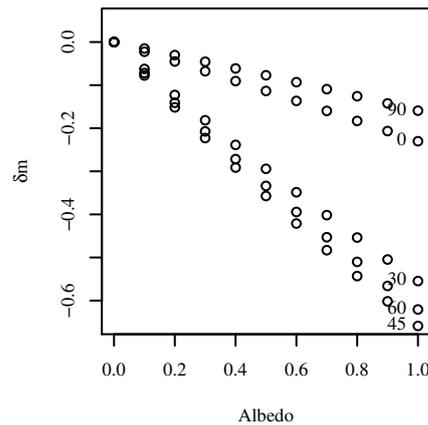


Рис. 2.16. Вариация δm величины $m_{M,atm}$ в зените, вызванная изменением альбеда подстилающей поверхности. Для разных зенитных расстояний высот источника.

раметром «видимость», измеряемым в километрах. Конечно, в реальности нельзя описать вклад всего аэрозоля одним параметром, так как он может меняться и по составу и по содержанию. Рассеяние на аэрозоле — основное явление после рэлеевского рассеяния влияющее на ослабление света в атмосфере. Поэтому мы можем выбрать диапазон модельного параметра «видимость» от 40 км до 500 км, что будет соответствовать экстинкции в полосе MASS примерно от 0.2 до 0.4, что в свою очередь соответствует разбросу измеренных значений [62], см. Рис. 1.4.

На Рис. 2.14 изображено влияние содержания аэрозоля на эффективность рассеяния лунного света для разных зенитных расстояний источника. Конечно, законы небесной механики не позволяют оказаться Луне в зените для места КГО, поэтому точки для зенитного расстояния $z = 0^\circ$ носят скорее гипотетический характер и приведены для сравнения. Тем не менее, видно, что для всех реальных ситуаций, разброс обеспечиваемый вариацией содержания аэрозоля составляет порядка одной звездной величины.

Однако, мы можем использовать измерения яркости ночного неба производимые в реальном времени, чтобы подстроить нашу существующую модель. Для этого модифицируем разложение (2.24) следующим образом, включив в него параметр видимости V :

$$m_{X,atm} = \sum_{m=0}^M \sum_{l_1=m}^M \sum_{l_2=m}^M \left(C_{ml_1l_2}^{(0)} + C_{ml_1l_2}^V \ln \frac{V}{V_0} \right) \cos m (\phi - \phi_0) P_{l_1}^m(\mu) P_{l_2}^m(\mu_0), \quad (2.25)$$

На Рис. 2.15 представлено сравнение коэффициента экстинкции α_M , полученного в работе [62] и определенного из (2.25) по измерениям яркости ночного неба модельного параметра V . Для каждой ночи были выбраны медианы обеих величин и нанесены на график. Пунктирной линией показана модельная зависимость этих величин. Разброс значения V обусловлен присутствием в измерениях паразитной засветки от близких ярких звезд, о чем уже упоминалось.

На Рис. 2.16 изображено влияние параметра ламбертова альbedo подстилающей поверхности. Ламбертово альbedo — это величина изменяющаяся в пределах от 0 до 1.0. Эффект наиболее заметен при «боковой» засветке и его полный размах составляет 0.6.

С физической точки зрения модельному параметру альbedo соответствует некий усредненный по площади в нескольких километрах вокруг обсерватории параметр. Следует понимать, что окрестности обладают сложным рельефом, и снег, периодически сметаемый штормовым ветром с огромных площадей в складки местности, не всегда покрывает все поверхности. Кроме того, в случае

моделирования фона безлунного неба этот эффект так же остался не учтен. Поэтому мы просто используем величину альбедо $A = 0.51$, найденную исходя из принципа соответствия невязок моделей яркости ночного неба в лунное и безлунное время, как это показано на Рис. 2.17. Средняя невязка в лунное время для альбедо $A = 0$ составляет -0.2 , а при $A = 0.51$ совпадает со средней невязкой в безлунное время.

Таким образом, мы построили однопараметрическую модель яркости ночного неба в лунное время. Собственная яркость ночного неба $m_{X,n}$ может быть добавлена к ней понятным образом:

$$m_X = -1.086 \ln \left(\exp \left(-\frac{m_{X,atm}}{1.086} \right) + \exp \left(-\frac{m_{X,n}}{1.086} \right) \right). \quad (2.26)$$

На Рис. 2.17 (справа) приведено распределение невязок модели. Видно, что распределение в целом симметрично и для простоты будем считать его нормальным. Тогда непосредственно распределение потока яркости неба будет представляться масштабированным логнормальным распределением ScaledLogN, важные свойства которого приводятся в приложении А.

На Рис. 2.18 изображены графики рассеяния точек демонстрирующие зависимость невязки от высоты Луны в случаях с двумя значениями альбедо подстилающей поверхности. Видно, что в случае $A = 0.51$ отсутствует явная систематическая зависимость.

Дополнительная валидация модели яркости ночного неба с Луной

Осенью 2015 года нами был проведен дополнительный эксперимент. Были измерены значения яркости фона ночного неба близко к зениту с временным разрешением 1 с в течении всей ночи. Эксперимент продолжался с 20 сентября по 5 октября и был связан с выходом из строя монтировки телескопа, таким образом измерения могли производиться только в одной точке. Эти данные дают возможность более детально верифицировать модель распространения рассеянного света Луны $m_{X,atm}(1, \mu_0, 0)$, к сожалению только при вариации одного из

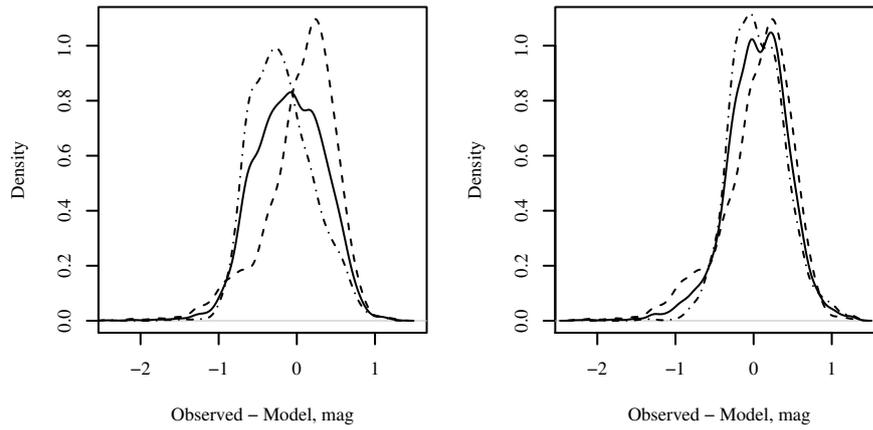


Рис. 2.17. Слева: сплошная кривая — распределение невязок, штриховая линия — распределение невязок в безлунное время, штрих-пунктирная — распределение невязок в лунное время. Альbedo подстилающей поверхности $A = 0$. Справа — для $A = 0.51$

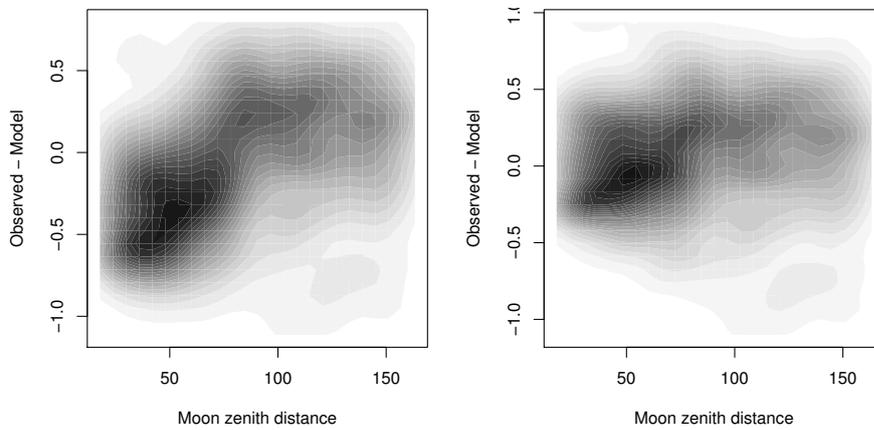


Рис. 2.18. Слева: график рассеяния точек невяки в зависимости от зенитного расстояния Луны. Альbedo подстилающей поверхности $A = 0$. Справа — для $A = 0.51$

параметров. Только несколько ночей отличались стабильностью потока и отсутствием облачности, поэтому мы отбросили все остальные зашумленные данные. Считая, что инструментальная константа не изменилась сильно с 3 сентября до 20 сентября, мы провели грубую калибровку сигнала используя $R = 19.52$.

На Рис. 2.19 приведет пример измерений для 29 сентября. Пики обусловлены звездами, проходящими через диафрагму поля прибора. Видны вариации прозрачности атмосферы во времени.

На Рис. 2.20 изображен график рассеяния точек для четырех ночей (около 110 тысяч одно-секундных измерений), использовался параметр видимости

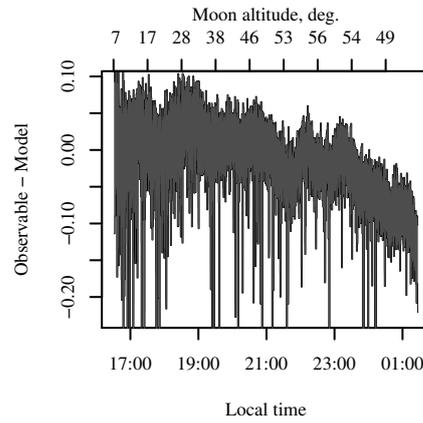


Рис. 2.19. Пример измерений фона около зенита. 29 сентября 2015 г.

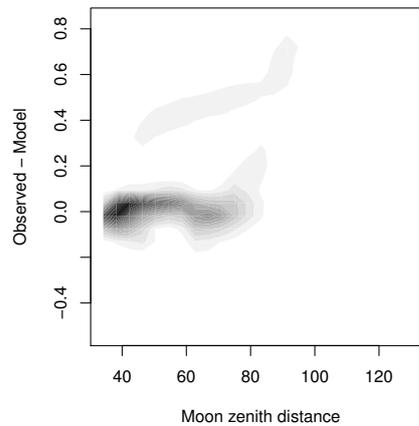


Рис. 2.20. График рассеяния точек невяки в зависимости от зенитного расстояния Луны. По результатам эксперимента 20.09 – 5.10

200 км и альбедо подстилающей поверхности $A = 0.51$. Видно, что разброс значительно меньше чем на Рис. 2.18 (справа), это обусловлено гораздо меньшими вариациями внешних условий.

2.3. Модель ослабления оптического излучения в атмосфере

2.3.1. Основные понятия и постановка задачи

Ослабление света в атмосфере Земли — один из важных факторов, влияющих на наземные астрономические наблюдения. Свет источника, проходя сквозь атмосферу к телескопу, взаимодействует с веществом путем рассеяния

и поглощения. В результате, до наблюдателя доходит только некоторая часть энергии

$$T \equiv \frac{E}{E_0}, \quad (2.27)$$

где E_0 — энергия излучения на верхней границе атмосферы, E — энергия внутри атмосферы, после прохождения слоя вещества единичной воздушной массы. Величина T называется пропусканием атмосферы, а величина

$$\alpha \equiv -1.086 \ln T \quad (2.28)$$

называется коэффициентом экстинкции [84].

Полное ослабление зависит от положения источника на небе:

$$m = m^{(0)} + \alpha M(z), \quad (2.29)$$

где m — наблюдаемая звездная величина источника, $m^{(0)}$ — заатмосферная звездная величина. Воздушная масса для заданного зенитного расстояния z может быть достаточно точно вычислена по следующей простой формуле: [85]

$$M(z) = \frac{1.002432 \cdot \cos(z)^2 + 0.148386 \cdot \cos(z) + 0.0096467}{\cos(z)^3 + 0.149864 \cdot \cos(z)^2 + 0.0102963 \cdot \cos(z) + 0.000303978}. \quad (2.30)$$

В оптическом диапазоне основными агентами поглощения принято считать озон и молекулы воды, ослабление излучения происходит в соответствующих молекулярных полосах, расположенных, соответственно, ультрафиолетовой и красной областях спектра. Рассеяние происходит как на молекулах воздуха, и при этом удовлетворительно описывается теорией рассеяния Рэлея, так и на гораздо более крупных частицах разнообразной природы, называемых аэрозолю. Важно отметить, что относительное содержание озона, воды и аэрозоля в атмосфере постоянно меняется, причем амплитуда вариаций каждого компонента различна и в свою очередь зависит от множества факторов. Кроме того, очевидно, что коэффициент экстинкции различный в различных спектральных диапазонах.

Содержание воды в атмосфере над горой Шатджатмаз обсуждалось Возяковой [62]. Было показано, что содержание воды в атмосфере подвержено сезонным изменениям и медиана распределения изменяется от приблизительно 5 мм в зимний период до 17 мм в летний период. Общее по времени же распределение ограничено сверху величиной 20 мм, а медиана распределения — 7.7 мм.

Данные¹³ по полному содержанию озона в атмосфере получены в ходе переобработки различных источников данных [86]. На Рис. 2.22 представлена зависимость среднемесячного полного содержания озона от времени, видно, что присутствуют сезонные вариации от 280 DU до 400 DU¹⁴. На Рис. 2.21 представлена гистограмма распределения содержания озона, медиана распределения составляет 315 DU.

В разделе 2.2.3 уже упоминалось, что для описания концентрации аэрозоля нельзя ввести единый параметр однозначно описывающий его влияние, так как аэрозоль делится на различные компоненты, имеющие различные характеристики и разным образом распределенные по высоте. Как и в разделе 2.2.3 далее мы используем для характеристики влияния аэрозоля на распространение оптического излучения в атмосфере модельный параметр «видимость», который измеряется в километрах [83]. Напомним, что этот параметр используется в пакете для численного моделирования распространения излучения в атмосфере libRadtran [32],

2.3.2. Полихроматическая модель экстинкции

Как было показано в разделе 1.5, с помощью прибора MASS можно удовлетворительно измерить коэффициент экстинкции. Но измеренным оказывается только коэффициент α_M в спектральной полосе MASS. Для оперативного планирования наземных оптических астрономических наблюдений требует-

¹³ http://www.temis.nl/macc/index.php?link=o3_msr_intro.html

¹⁴ 100 DU = 1 мм

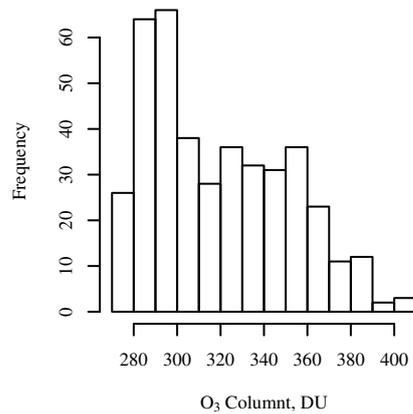


Рис. 2.21. Распределение полного содержания озона в атмосфере.

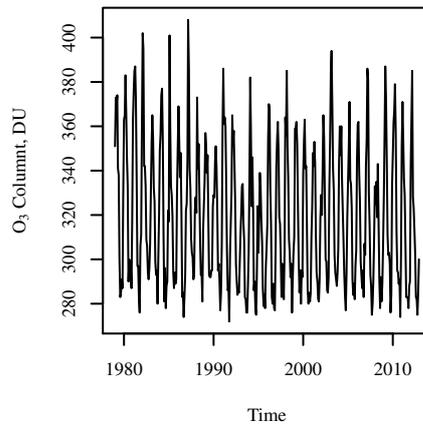


Рис. 2.22. Зависимость полного содержания озона в атмосфере от времени.

ся знать коэффициент α_X в любой интересующей нас спектральной полосе X . Рассмотрим стандартный набор широкополосной системы Бесселя UVVRI, а спектральную полосу пропускания прибора MASS мы как и прежде обозначаем M . Отметим, что описываемый подход может быть применен к любой полосе пропускания, если известны её характеристики.

Нет оснований сомневаться в том, что величины α_X и α_Y в разных спектральных полосах X и Y имеют связь, так как определяются одними и теми же физическими причинами. Для того, чтобы понять характер зависимости α_X для разных спектральных полос от параметров атмосферы: содержания озона, воды и аэрозоля, мы использовали программный пакет `libRadtran` [32], который моделирует распространение света в атмосфере Земли. Для моделирования использовалась стандартная атмосфера для средних широт, и модель аэрозоля

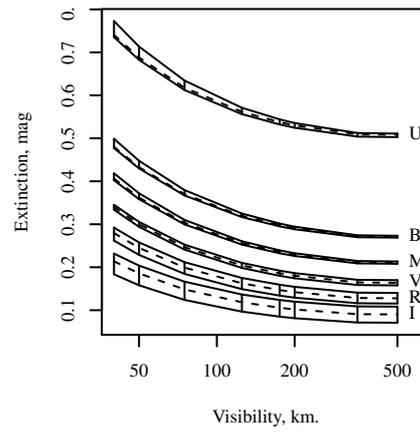


Рис. 2.23. Зависимость экстинкции в разных спектральных полосах от параметра модели «видимость». Пунктирная линия — медиана, сплошные линии — максимальное и минимальное значение.

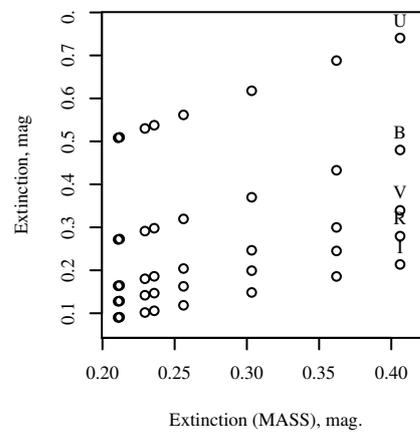


Рис. 2.24. Зависимость экстинкции в разных спектральных полосах от экстинкции в полосе MASS.

номер 1 из работы [83]. Параметры содержания воды, озона и аэрозоля варьировались таким образом, чтобы покрыть весь диапазон возможных значений. Разброс значений содержания аэрозоля выбран таким образом, чтобы его влияние соответствовало наблюдаемому распределению экстинкции из работы [62], см. Рис. 1.4.

Результат моделирования показан на Рис. 2.23. На графике для удобства отдельные значения экстинкции при заданном содержании аэрозоля и различных других параметрах не показаны, а нанесены линии, ограничивающие диапазон значений. Видно, что наибольший вклад в вариации коэффициента экстинкции вносит содержание аэрозоля. Поэтому мы будем использовать следующую

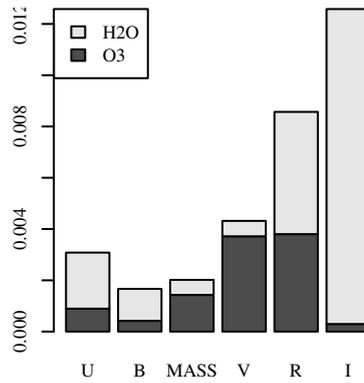


Рис. 2.25. Полные вариации экстинкции в разных спектральных полосах. По данным моделирования. Вариации содержания водяного пара: от 5 мм до 20 мм. Вариации содержания озона: от 200 DU до 400 DU.

Таблица 2.4. Параметры зависимости $\alpha_X = \alpha_X^{(0)} + K_X \delta\alpha_M$ для различных спектральных полос. По результатам моделирования `libRadtran`.

X	U	B	V	R	I	M
K_X	1.219	1.075	0.9045	0.7774	0.6357	1.0
$\alpha_X^{(0)}$	0.482	0.210	0.119	0.091	0.064	0.155

простую модель для пересчета экстинкции между полосами, представим

$$\alpha_X \equiv \alpha_X^{(0)} + \delta\alpha_X, \quad (2.31)$$

где $\alpha_X^{(0)}$ — средняя экстинкция, обусловленная рэлеевским рассеянием и типичным содержанием воды и озона, $\delta\alpha_X$ — дополнительная экстинкция, обусловленная рассеянием на аэрозоле.

$\alpha_X^{(0)}$ могут быть заранее вычислены с помощью пакета `libRadtran`, в то время как $\delta\alpha_X$ может быть найдена из результатов текущих измерений. Понятно, что в каждый момент времени мы имеем одно измерение α_M и поэтому можем построить модель с одним скрытым параметром — содержанием аэрозоля. Для этого достаточно установить связь $\delta\alpha_X = \delta\alpha_X(\delta\alpha_M)$. В этом нам снова может помочь пакет `libRadtran`, на Рис. 2.24 видно, что связь с высокой степенью линейная. Коэффициенты определены в Таблице 2.4.

Таким образом, по измерению в одной спектральной полосе, можно вос-

становить экстинкцию в любой другой полосе с известной точностью. Точность определяется возможным вкладом других агентов в конкретные спектральные полосы и может быть определена из результатов моделирования. Например, в полосах R и I очевидно сильное влияние содержания воды, как показано в на Рис. 2.25. Как бы то ни было, описанный подход позволяет пересчитать измеренную астроклиматическим монитором экстинкцию в другие спектральные полосы с точностью лучше 0.01 звездной величины.

Очевидно, что изложенный подход может быть расширен, и при наличии измерений в двух фотометрических полосах может быть построена двухкомпонентная модель экстинкции. При реализации такого подхода следует учитывать, что, во-первых, влияние озона и воды ограничено определенными спектральными диапазонами; во-вторых, такие измерения экстинкции в различных полосах технически могут выполняться различными устройствами и часть данных может быть не доступна в данный момент времени по техническим причинам.

Глава 3

Модели оборудования

3.1. Модель астрономического ПЗС-фотометра

3.1.1. Статистические свойства времени экспозиции и относительной ошибки при фотометрических наблюдениях с ПЗС

Точность фотометрических измерений с помощью астрономического фотометра на базе ПЗС камеры зависит от большого количества различных факторов. Часть этих эффектов, таких как нелинейность при больших и при малых потоках, неточный учет плоского поля, вариации формы функции рассеяния точки по полю изображения, связана с неточностью калибровок и практически не зависит от времени экспозиции. Ошибки такого рода далее не рассматриваются.

Влияние других эффектов, определяющих точность наблюдений, таких как быстрые вариации прозрачности или шум мерцаний, уменьшается при увеличении времени экспозиции за счет усреднения. Однако, эти эффекты становятся существенными только при измерениях достаточно ярких объектов, когда фундаментальное ограничение на точность, связанное с фотонным шумом измеряемого потока, уже не существенно.

Отметим, что далеко не для всех ярких объектов целесообразно использовать большие телескопы, где точность измерений уже не определяется фотонным пуассоновским шумом. Напомним, что как и у Боуэна [3] полагается, что наибольший интерес представляют задачи находящиеся на пределе возможностей данного телескопа. Поэтому мы сначала рассмотрим точность измерений в случае сравнительно слабых объектов, измерения которых требуют длительных экспозиций, и в этом случае планирование, вероятно, может привести к заметному повышению общей эффективности наблюдений на телескопе.

Широко известна формула (2.18), выражающая относительную точность фотометрических измерений с помощью ПЗС [75].

Из формулы (2.18) с помощью простых преобразований и подстановок можно получить формулу в более удобном виде:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{n\tau} + \frac{\beta^2 s}{n^2 \tau} + \left(\frac{F}{\mu}\right)^2 \frac{\beta^2 (d \cdot \tau + r^2)}{n^2}, \quad (3.1)$$

n — интегрированный по изображению поток фотоэлектронов, τ — время экспозиции, β^2 — площадь изображения в фокальной плоскости, определяемая величиной качества изображения β , s — количество фото-событий, производимых единицей телесного угла ночного неба, F — фокусное расстояние оптической системы, μ — линейный размер фото-ячейки, d — темп термогенерации в фото-ячейке, r — шум считывания ПЗС.

Если относительная ошибка задана, то требуемое время экспозиции может быть найдено из следующего уравнения:

$$\tau = \frac{1}{n\epsilon^2} + \frac{\beta^2 s}{n^2 \epsilon^2} + \left(\frac{F}{\mu}\right)^2 \frac{\beta^2 \left(d + \frac{r^2}{\tau}\right)}{n^2 \epsilon^2}, \quad (3.2)$$

здесь все величины соответствуют величинам из выражения (3.1). Видно, что первый член (3.2) — основной и определяет вклад пуассоновского шума, второй член — определяет вклад яркости ночного неба и существенен в случае слабых источников, третий член определяет шум приемника излучения: темп термогенерации d обычно пренебрежимо мал, вклад шума считывания r^2 при больших экспозициях $\tau \rightarrow \infty$ пренебрежим.

Будем считать, что величины площади изображения β^2 , определяемой атмосферной оптической турбулентностью, и яркости неба s могут быть известны не точно. В таком случае они полагаются случайными величинами, а значит ϵ^2 в (3.1) и τ в (3.2) соответственно также будут случайными величинами. Есть основания считать, что площадь изображения $\beta^2 \sim \text{LogN}$ (см. раздел 2.1.1) [87] и яркость неба $s \sim \text{LogN}$ (см. раздел 2.2.3), параметры распределений известны, а величины считаются независимыми. Таким образом, мы собираемся описать

стохастические свойства величин ϵ^2 и τ в терминах распределений, параметры которых выражаются через параметры распределений величин β^2 и s .

Для упрощения последующего анализа введем дополнительные обозначения для детерминированных коэффициентов в выражениях (3.1) и (3.2):

$$\epsilon^2 = \frac{1}{A} + C_1\beta^2s + C_2\beta^2, \quad (3.3)$$

$$\tau = A_0 + A_1\beta^2s + A_2\beta^2 + A_3\frac{\beta^2}{\tau}. \quad (3.4)$$

Обратим внимание, что произведение двух случайных величин, распределенных логнормально, есть случайная величина распределенная в свою очередь логнормально, параметры которой известным образом выражаются через параметры первоначальных величин. Таким образом, выражения (3.3) и (3.4) имеют форму суммы нескольких логнормальных величин и аддитивной детерминированной константы. Фентон показал, что сумма логнормальных величин может быть с известной точностью представлена логнормальной величиной [74], хотя, безусловно, лишь в приближенном смысле.

Для дальнейшего представления распределений интересующих нас величин введем смещенное логнормальное распределение ScaledLogN, которое описано в приложении А. Обратим внимание, что примененная операция сдвига распределения позволяет в общем случае вычислять среднее, дисперсию, квантили и кумулятивную функцию сдвинутого распределения через соответствующие величины исходного независимо от вида самого распределения. Среднее определяется формулой (А.13), дисперсия — (А.7), кумулятивная и квантильная функции — (А.11) и (А.12) соответственно. Значит, как с точки зрения практического использования, так и с точки зрения анализа, смещенное логнормальное распределение (А.10) не сложнее логнормального.

Найдем теперь параметры распределения величины ϵ^2 из (3.3) по методу Фентона [74]. Для этого заметим, что величина $C_1\beta^2s \sim \text{LogN}$, а ее параметры следующие:

$$\mu_{C_1\beta^2s} = \mu_{\beta^2} + \mu_s + \ln(C_1), \quad (3.5)$$

$$\sigma_{C_1\beta^2 s}^2 = \sigma_{\beta^2}^2 + \sigma_s^2. \quad (3.6)$$

А параметры величины $C_2\beta^2 \sim \text{LogN}$ еще более тривиальным образом:

$$\mu_{C_2\beta^2} = \mu_{\beta^2} + \ln(C_2), \quad (3.7)$$

$$\sigma_{C_2\beta^2}^2 = \sigma_{\beta^2}^2. \quad (3.8)$$

Найдем ковариацию $\text{Cov} [C_1\beta^2 s, C_2\beta^2]$, которая в точности равна:

$$\text{Cov} [C_1\beta^2 s, C_2\beta^2] = C_1 C_2 \text{E} [s] \text{D} [\beta^2], \quad (3.9)$$

причем для среднего и дисперсии справедливы выражения (A.6) и (A.7).

С помощью выражений (A.9) и (A.8), найдем теперь параметры μ , σ распределения такой логнормальной величины X , что ее среднее и дисперсия были бы равны следующим величинам:

$$\text{E} [X] = \text{E} [C_1\beta^2 s] + \text{E} [C_2\beta^2], \quad (3.10)$$

$$\text{D} [X] = \text{D} [C_1\beta^2 s] + \text{D} [C_2\beta^2] + 2 \cdot \text{Cov} [C_1\beta^2 s, C_2\beta^2]. \quad (3.11)$$

Будем считать, что величина $\epsilon^2 \sim \text{ScaledLogN}$ с параметрами $x_0 = 1/A$ и только что определенными параметрами μ и σ . В этом и состоит метод, предложенный Фентоном [74].

Заметим, что для моделирования яркости ночного неба в присутствии рассеянного света Луны величина $s \sim \text{ScaledLogN}$ (см. раздел 2.2.3). Если представить $s \equiv s_0 + s'$, где $s' \sim \text{LogN}$, тогда все вышеизложенное остается справедливым при следующей подстановке:

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \cdot s_0. \quad (3.12)$$

Применим теперь подобную процедуру к уравнению (3.4). Распределение величины τ также будет аппроксимировано смещенным логнормальным распределением. К сожалению, в этот раз придется действовать несколько иначе, присутствие члена $\frac{A_3\beta^2}{\tau}$ не позволяет избежать интегрирования для малых

значений τ , когда член существенен, в случаях малых экспозиций или узкополосной фотометрии. Аналоги выражений (3.10) и (3.11) задаются следующим образом:

$$E[X] = \frac{1}{2\pi} \iint dx dy \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) (\tau(x, y) - A_0), \quad (3.13)$$

$$D[X] = \frac{1}{2\pi} \iint dx dy \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) (\tau(x, y) - A_0 - E[X])^2, \quad (3.14)$$

где $\tau(x, y)$ — решение следующего уравнения:

$$\tau = A_0 + A_1 s(x) \beta^2(y) + A_2 \beta^2(y) + \frac{A_3 \beta^2(y)}{\tau}, \quad (3.15)$$

в котором в свою очередь использованы обозначения $s(x) \equiv \exp(x\sigma_s^2 + \mu_s)$, и $\beta^2(y) \equiv \exp(y\sigma_{\beta^2}^2 + \mu_{\beta^2})$. К счастью, интегралы (3.13) и (3.14) на практике легко вычислить используя метод Гаусса-Эрмита [82]. Применяется сетка из пяти узлов по обоим координатам, таким образом требуется 25 вычислений подынтегральной функции. Таким образом, параметры масштабированного логнормального распределения, приближающего истинное распределение величины τ , следующие: $x_0 = A_0$, μ и σ определяются исходя из выражений (A.9), (A.8), (3.13) и (3.14).

Как и в предыдущем случае, если $s \sim \text{ScaledLogN}$, то результат остается справедливым при следующей подстановке:

$$A_2 \leftarrow A_2 + A_1 \cdot s_0. \quad (3.16)$$

Основной целью для нас является вычисление величин $F_\epsilon(\epsilon)$ и $Q_t(0.95)$, то есть с физической точки зрения, это вероятность того, что точность будет меньше ϵ при заданной экспозиции, и экспозиция τ , которая с уровнем достоверности 95% приведет к получению заданной относительной точности ϵ .

Далее используем данные величины, чтобы установить, насколько хорошо работает предложенный метод вычисления при разных входных параметрах. Для этого используем метод Монте-Карло с количеством испытаний $N =$

Таблица 3.1. Параметры выражений (3.1) и (3.2), использованные для моделирование Монте-Карло.

Параметр	Значение
Масштаб $\frac{\mu}{F}$ (число угловых секунд в одном пикселе)	0.166''
Шум считывания r	$12 e^-$
Темновой сигнал d	$1 e^- c^{-1}$
Средний поток яркости ночного неба $E [s]$	$3.5 \times 10^{-3} e^- c^{-1} ''^{-1}$
Его стандартное отклонение $\sqrt{D} [s]$	$1 \times 10^{-3} e^- c^{-1} ''^{-1}$
Среднее качество изображения $E [\beta]$	1.0''
Его стандартное отклонение $\sqrt{D} [\beta]$	0.03''
Время экспозиции τ	10 c
Относительная ошибка ϵ	0.1

1×10^7 и предложенный метод вычисления параметров распределений. Очевидно, что все параметры входящие в (3.1) и (3.2), кроме количества фотоэлектронов изображения, варьируются вокруг характерных значений. Поэтому будем варьировать только этот параметр, это позволит оценить рамки точности описанной процедуры. Понятно, что при увеличении параметра n уравнения перейдут в так называемое приближение ярких источников, где точность и экспозиция определяются фотонным шумом самого источника, поэтому являются для нас детерминированными.

В Таблице 3.1 приведены использованные параметры для выражений (3.1) и (3.2), на Рис. 3.1 приводится сравнение для некоторых случаев. На рисунке приведена относительная разница между величинами $F_\epsilon(0.1)$ и $Q_\tau(0.95)$, вычисленными соответственно изложенной процедурой, и методом Монте-Карло. Заметим, что доверительный интервал 95% для исследуемого 95% квантиля определенного методом Монте-Карло вычислен в соответствии теорией порядковых статистик, изложенный Дейвидом [88], и его длина меньше обнаруженной разницы между способами.

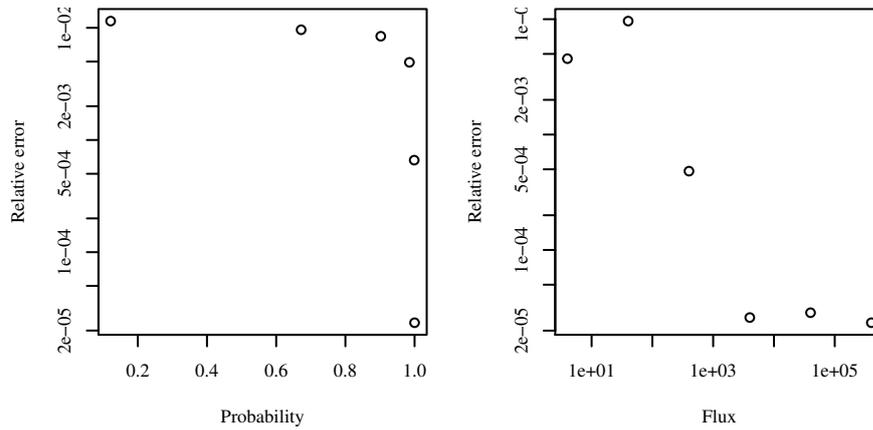


Рис. 3.1. Слева: модуль относительной разницы величин $F_\epsilon(0.1)$ определенный описанной методикой и моделированием методом Монте-Карло. Справа: модуль относительной разницы величин $Q_\tau(0.95)$ определенный описанной методикой и моделированием методом Монте-Карло.

Несмотря на то, что шум мерцаний в основном существенен при измерениях ярких объектов на крупных телескопах, можно было бы достаточно просто учесть его в будущем. Величина шума рассчитывается следующим образом [60, 61]:

$$\epsilon_s^2 = D^{-\frac{4}{3}} \frac{S_3^2}{\tau} M^3(z), \quad (3.17)$$

где D — диаметр телескопа, $M(z)$ — воздушная масса, S_3^2 — некоторая величина, определяемая высотными профилями оптической турбулентности и скорости ветра и распределенная логнормально [60]. Значит, принципиально расчет распределений величин ϵ и τ не изменится. Влияние шума мерцаний войдет в формулы (3.1) и (3.2) как дополнительный аддитивный член. При расчет, в формулах (3.10) и (3.11) появится дополнительный член, а интегралы (3.13) и (3.14) станут трехкратными.

3.1.2. Пропускание оптической системы фотометра

Определим связь между освещенностью на входной апертуре оптической системы и числом фото-событий на ПЗС. Для этого определим следующую

величину:

$$G_X = \int E(\lambda)\pi_X(\lambda)d\lambda, \quad (3.18)$$

где $E(\lambda)$ — спектр излучения, $\pi_X(\lambda)$ — теоретическая (идеальная) кривая реакции спектральной полосы X , G_X — число фотонов в единицу времени на единицу площади апертуры в данной спектральной полосе X . Функции $\pi_X(\lambda)$ определяются используемой фотометрической системой [89].

Число фото-событий n в единицу времени в данной спектральной полосе X обозначим для симметрии G'_X , тогда справедливо:

$$G'_X = S \int E(\lambda)o'(\lambda)\pi'_X(\lambda)d\lambda, \quad (3.19)$$

$\pi'_X(\lambda)$ — кривая реакции реализации фотометрической полосы X (кривая пропускания фильтра и кривая квантовой эффективности ПЗС), $o'(\lambda)$ — кривая пропускания реальной оптической системы, S — площадь входной апертуры оптической системы.

Будем считать, что кривая реакции реализации фотометрической полосы X достаточно хорошо воспроизводит теоретическую кривую (как это и должно быть на самом деле). Тогда введем следующее обозначение:

$$\frac{\pi'_X}{\pi_X} = A_X (1 + \delta_X(\lambda)), \quad (3.20)$$

где $\delta_X(\lambda)$ — малая функция поправки. Нормировочную константу A_X определим таким образом, чтобы $\int E(\lambda)\pi_X(\lambda)\delta_X(\lambda)d\lambda = 0$:

$$A_X = \frac{\int E(\lambda)\pi'_X(\lambda)d\lambda}{\int E(\lambda)\pi_X(\lambda)d\lambda}. \quad (3.21)$$

Кроме того, будем считать, что кривая пропускания оптической системы меняется слабо с изменением длины волны излучения λ в рабочем диапазоне длин волн (как это и есть на самом деле в случае с телескопом рефлектором в оптическом диапазоне). Тогда по аналогии будем считать, что в спектральной полосе X функция o' представима в следующем виде:

$$o'_X = B_X (1 + \nu(\lambda)), \quad (3.22)$$

Таблица 3.2. Пример значений A_X для набора фильтров стандартной широкополосной системы UBVRI производства фирмы Asahi и ПЗС чипа E2V 44-82. В таблице приведены средние значения и среднеквадратические отклонения при усреднении величин A_X по спектрам нормальных звезд в диапазоне спектральных классов от В0 до К5.

X	U	B	V	R	I
$E[A_X]$	0.354	0.622	0.71	0.481	0.557
$\sqrt{D[A_X]}$	0.016	0.015	0.03	0.013	0.008

Таблица 3.3. Пример значений B_X для телескопа-рефлектора с зеркалами, покрытыми алюминием с 30 нм защитным слоем SiO_2 , усредненных по спектрам нормальных звезд в диапазоне спектральных классов от В0 до К5. Стандартное отклонение всех величин $\sqrt{D[B_X]} < 0.003$.

X	U	B	V	R	I
Два зеркала					
$E[B_X]$	0.771	0.798	0.798	0.777	0.741
Три зеркала					
$E[B_X]$	0.677	0.713	0.713	0.685	0.634

где $\nu(\lambda)$ — малая функция поправки. Нормировочную константу B_X определим таким образом, чтобы $\int E(\lambda)\pi_X(\lambda)\nu(\lambda)d\lambda = 0$:

$$B_X = \frac{\int E(\lambda)\pi_X(\lambda)o'(\lambda)d\lambda}{\int E(\lambda)\pi_X(\lambda)d\lambda}. \quad (3.23)$$

Можно выразить G'_X через G_X , подставляя обозначения (3.20) и (3.22) в (3.19), Тогда, пренебрегая членом содержащими под интегралом произведение $\delta_X(\lambda)\nu(\lambda)$ второго порядка малости, получим:

$$G'_X = SA_X B_X G_X. \quad (3.24)$$

Таблица 3.4. Отношение рассчитанного значения G'_X к измеренному при наблюдениях. Воздушная масса площадки $M \approx 1.5$, коэффициент экстинкции в полосе V принят $\alpha_V = 0.25$, коэффициенты экстинкции в других полосах определены как описано в разделе 2.3. Коэффициент конверсии ПЗС принят 0.28.

X	U	B	V	R	I
SA98 624	1.35	1.18	1.07	0.95	1.004
SA98 634	1.40	1.28	1.13	1.04	1.09
SA98 642	1.52	1.28	1.14	1.04	1.13
SA98 650	1.06	1.22	1.05	0.98	1.06
SA98 671	1.39	1.20	1.09	0.99	1.04

Выражение (3.24) формально является уравнением, потому-что определения A_X и B_X включают в себя спектр рассматриваемого объекта. Однако, мы усредним величины по разным спектральным классам¹ и будем считать, что с этого момента они не зависят от спектра источника. В Таблице 3.2 приведен пример расчета величин A_X для набора фильтров стандартной широкополосной системы UBVRI производства фирмы Asahi и ПЗС чипа E2V 44-82². В Таблице 3.3 приведен пример расчета величин B_X для телескопа-рефлектора с двумя или тремя зеркалами, покрытыми алюминием с 30 нм защитным слоем SiO₂.

Например, от звезды 14^m в спектральной полосе V , с учетом экстинкции в среднем приходит $2.6 \text{ с}^{-1} \text{ см}^{-2}$ фотонов, используя формулу (3.24) и Таблицы 3.2 и 3.3, находим $G'_V = 4 \text{ м}^2 \cdot 0.71 \cdot 0.798 \cdot 2.6 \text{ с}^{-1} \text{ см}^{-2} = 59 \times 10^3 \text{ с}^{-1}$.

Для верификации модели пропускания используем реальные изображения площадки Ландольта SA98 [90], полученные с ПЗС-фотометром на 2.5 м телескопе в ходе тестовых наблюдений 13 ноября 2014 года. Результаты сравнения

¹ Альтернативой может быть использование величин для спектрального класса A0.

² Данные фильтры и чип используются для астрономических наблюдений на 2.5 м телескопе КГО ГАИШ.

приводятся в Таблице 3.4. Видно, что результаты расчетов в целом совпадают в пределах 10%, кроме полос U и B , различие в которых, вероятно, связано с неопределенностью в значении коэффициента экстинкции α . Во время наблюдений, астроклиматический монитор не функционировал по техническим причинам, поэтому достоверной информации о коэффициенте экстинкции α в момент наблюдений нет.

3.2. Модель монтировки 2.5 м телескопа

С точки зрения автоматического планирования наблюдений необходимо задать математическую модель движения монтировки телескопа для вычисления времени перенаведения с одной площадки на небе на другую. Время движения по азимуту и высоте монтировки 2.5 м телескопа КГО ГАИШ составляет порядка 17 с рад^{-1} . Значит, характерное время перенаведения составляет десятки секунд и сравнимо с минимальными временами экспозиций ПЗС фотометра. Следовательно, требуется учитывать затраченное на движение монтировки время в алгоритме автоматического планирования наблюдений.

3.2.1. Перенаведение монтировки телескопа между площадками

Пренебрегая ускорением и торможением, исходя из алгоритмов системы управления телескопа, время перенаведения задается следующим образом:

$$s_{i,j}^{\text{Mount}}(t) = C^{\text{Mount}} \max \{ |A_i(t) - A_j(t)|, |z_i(t) - z_j(t)| \}, \quad (3.25)$$

где C^{Mount} — обратная скорость движения, $A_{i,j}(t)$ — азимут, $z_{i,j}(t)$ — высота площадок i и j соответственно. Обратим внимание, что для нашего случая альт-азимутальной монтировки время перенаведения между двумя площадками, заданными в экваториальной системе координат, зависит от момента времени и варьируется в пределах 30 %.

3.2.2. Выбор фокальной станции

Некоторые телескопы позволяют автоматически переключаться между различными фокальными позициями, такими как фокус Кассегрена или фокус Несмита. Например, 2.5 м телескоп КГО ГАИШ использует для этого третичное зеркало и способен за время порядка двух минут изменить рабочий оптический порт. До сих пор мы рассматривали приложение описываемой методики только к фотометрическим наблюдениям с ПЗС, но, очевидно, методика может быть распространена на большое число других астрономических приборов, одновременно установленных на телескопе. Таким образом, если задача i подразумевает выполнение с устройством в фокусе o_i , а задача j — o_j , то время установки определяется следующим образом:

$$s_{i,j}^{\text{Port}}(t) = C^{\text{Port}} (1 - \delta_{o_i o_j}), \quad (3.26)$$

где C^{Port} — время движения третичного зеркала, δ_{ij} — символ Кронекера.

Планирование как задача оптимизации

4.1. Постановка задачи

Во введении упоминалось, что под понятием эффективности наземных оптических астрономических наблюдений могут пониматься различные вещи. Далее примем вариант Боуэна [3], согласно которому эффективность телескопа в некотором смысле связана с его проникающей силой, и попробуем до некоторой степени переосмыслить его глубокую мысль.

Представим себе совокупность атмосферы, оптической системы телескопа и приемной аппаратуры как единую физическую систему, задействованную в проведении научного эксперимента — наземных астрономических оптических наблюдений. На современные наземные оптические астрономические наблюдения влияет значительное число внешних факторов, к примеру, среди наиболее важных факторов традиционно называется оптическая турбулентность в атмосфере, влияющая на угловое разрешение и постоянно меняющая свою мощность во времени. Эволюцию во времени нашей системы вообразим в виде движения точки в специальном многомерном фазовом пространстве, оси координат которого соответствуют физическим величинам влияющим на проведение наблюдений. К таковым относятся величины, которые существенным образом не меняются во времени, например, размер входной апертуры телескопа или шум считывания ПЗС приемника; величины, которые мы способны уверенно контролировать и менять, например, положение телескопа, или режим бинирования ПЗС приемника, а так же величины, которые контролировать, увы, мы не в силах, например мощность оптической турбулентности, коэффициенты экстинкции атмосферы, яркость ночного неба. Иначе говоря, вдоль таких координатных осей наша система совершает движение разной степени беспорядочности

без какого-либо внешнего вмешательства.

Проведение классических наземных астрономических наблюдений известного объекта подразумевает, что система находится в некоторой определенной области описанного выше фазового пространства. Например, для проведения отдельной фотометрии некоторой двойной системы, с компонентами разделанными на расстоянии $1.4''$, есть основания настаивать, что оптическое разрешение должно быть заведомо лучше $0.7''$. Для каждой из конкретных задач формы и размеры таких допустимых областей различны. Кроме того, почти на любом современном неспециализированном телескопе ресурсы наблюдательного времени ограничены, поэтому различные наблюдательные научные программы вынуждены некоторым образом конкурировать друг с другом.

Подразумевается, что для текущей наблюдательной ночи процессом долгопериодического планирования подготовлен некоторый набор разнообразных задач с учетом возможности их наблюдений (например, близость площадки к Солнцу или Луне, или требуемая фаза переменности самого объекта), и мы должны, исходя из меняющейся обстановки, оперативным образом в каждый момент времени выбрать и упорядочить те задачи, которые мы собираемся далее выполнить. Причем, сделать это наиболее эффективным в совокупности образом. Далее не рассматривается вопрос что делать с теми наблюдениями, которые не были приняты к выполнению, однако наиболее логичным, но не единственным, решением представляется сохранить их в наборе для следующей ночи.

Далее мы полагаем, что один телескоп может считаться эффективнее другого, если набор одинаковых наблюдений удастся без потери качества выполнить быстрее, и таким образом остаются дополнительные временные возможности для других наблюдений.

4.2. Задачи оптимизации

Поскольку речь идет об автоматическом планировании, то есть некотором алгоритме в обобщенном смысле, понятие эффективности следует операционализировать конкретным образом. Иначе говоря, свести все многообразие астрономических наблюдательных задач, и, следовательно, будущего научного знания, к некоторому единственному числу. Конечно, с точки зрения современной философии науки это возможно сделать множеством различных способов, каждый из которых будет далек от совершенства. Поэтому, волюнтаристическим образом просто введем следующие величины.

Пусть T — множество всех имеющихся в распоряжении наблюдательных задач для текущей ночи.

Вероятность успешного выполнения наблюдательной задачи $p(t|\theta)$, при условии начала в момент времени t в будущем, где θ — вся история эволюции нашей системы до настоящего времени, величина θ далее будет опускаться в формулах для краткости. Предполагается, что текущее состояние (значит и история всей эволюции состояния) известно, например, либо из измерений специализированных мониторов [6], либо из оперативного конвейера обработки наблюдений [2]. Под успешным выполнением подразумевается присутствие в правильной области фазового пространства в течении всего времени выполнения задачи. Предполагается, что мы некоторым образом можем спрогнозировать стохастическую траекторию системы в фазовом пространстве.

Урожайность¹ $y(t)$ — некоторый относительный вес отдельной задачи. Без ограничения общности полагается, что $0 \leq y(t) \leq 1$, в силу конечности множества доступных наблюдательных задач.

Пусть далее $S \in T^+$ — конечная последовательность задач, где T^+ обозначает множество всех возможных не пустых конечных последовательностей,

¹ В англоязычных работах мы используем термин «yield». Среди всех возможных переводов в данной работе используется «урожайность», так как это слово реже других используется в астрономии, и, следовательно, будет сложнее спутать вновь введенное понятие с уже существующими терминами.

составленных из элементов T . Всюду далее полагается, что $\forall i \neq j, S_i \neq S_j$. Тогда введем полную урожайность:

$$\mathcal{Y} = \sum_{i=1}^{|S|} y_{S_i}(t_{S_i}) \xi_{S_i}(t_{S_i}), \quad (4.1)$$

где $\xi_{S_i}(t_{S_i})$ — случайные бинарные переменные, принимающие значение 1 с вероятностью $p_{S_i}(t_{S_i})$, будем для простоты считать все ξ_i независимыми; $|S|$ обозначает количество элементов последовательности S , а величины t_{S_i} введены следующим рекуррентным образом:

$$t_{S_{i+1}} = t_{S_i} + d_{S_i}(t_{S_i}) + s_{S_i, S_{i+1}}(t_{S_i} + d_{S_i}(t_{S_i})), \quad (4.2)$$

где начальный момент времени $t_{S_1} = 0$ без ограничения общности, $d_{S_i}(t)$ — длительность выполнения задания начатого в момент времени t , $s_{S_i, S_{i+1}}(t)$ — время требуемое для начала выполнения задания S_{i+1} после завершения задания S_i . Назовем среднее от (4.1) средней урожайностью:

$$Y \equiv \mathbb{E}[\mathcal{Y}] = \sum_{i=1}^{|S|} y_{S_i}(t_{S_i}) p_{S_i}(t_{S_i}). \quad (4.3)$$

Заметим, что полная урожайность по своей сути — обобщение понятия количества успешно выполненных задач, при $y(t) \equiv 1$ в точности с ним совпадающее.

Запишем вероятность успеха для конечной последовательности задач S :

$$\Pi = \prod_{i=1}^{|S|} p_{S_i}(t_{S_i}). \quad (4.4)$$

Далее сформулируем две следующие задачи дискретной оптимизации, которые будем считать задачами автоматического планирования наблюдений. Задача максимизации средней урожайности:

$$Y^* = \max_{S \in T^+} \left(\sum_{i=1}^{|S|} y_{S_i}(t_{S_i}) p_{S_i}(t_{S_i}) \right). \quad (4.5)$$

Задача максимизации вероятности успеха:

$$\Pi^* = \max_{S \in T^+} \left(\prod_{i=1}^{|S|} p_{S_i}(t_{S_i}) \right). \quad (4.6)$$

К обоим задачам прилагаются ограничения на длительность исполнения цепочки, требуемые для поиска нетривиальных решений. В первом случае:

$$t_{S_{|S|}} + d(t_{S_{|S|}}) \leq D, \quad (4.7)$$

во втором:

$$t_{S_{|S|}} \geq D, \quad (4.8)$$

где D имеет смысл горизонта планирования, либо момента завершения наблюдений (например, по случаю восхода Солнца). Заметим, что функцию

$$S^*(\theta) = \arg \max_{S \in T^+} \left(\sum_{i=1}^{|S|} y_{S_i}(t_{S_i}) p_{S_i}(t_{S_i} | \theta) \right) \quad (4.9)$$

или ее аналог для случая (4.6) обычно называют априорной политикой процесса принятия решений.

Таким образом, в случае (4.5) мы связываем понятие эффективности наземных оптических наблюдений с понятием урожайности, а в случае (4.6) — с вероятностью успеха. Две эти задачи дополнительные в некотором смысле: в случае (4.5) максимизируется количество успехов, а в (4.6) минимизируется число провалов. Введенные величины основываются на некоторых естественных представлениях (типа числа выполненных наблюдений) и до некоторой степени воспроизводят существующие модели [5].

Снова отметим, что существует принципиальный логический пробел между философской категорией и ее некоторой конкретной численной мерой. Поэтому, вместо окончательного формального доказательства эквивалентности категории и введенной меры мы можем лишь рассматривать меру в качестве репрезентации категории. А критерием адекватности такой репрезентации может

служить практический опыт ее конечных пользователей, основанный на их текущем представлении о том, что же такое в реальности эффективность телескопа как концепция. Такое понимание, безусловно, будет эволюционировать по мере получения нового опыта и изменения окружающего мира. А значит, наш приводимый подход должен быть по возможности достаточно гибким, чтобы в будущем быть адаптированным к новой реальности.

Кроме того, невозможно определить какой из двух подходов (максимизация средней полной урожайности (4.5) или максимизация полной вероятности успеха (4.6)) более правильный, так как такое сравнение возможно только на философско-методологическом уровне, что выходит за рамки данной работы. Действительно, пусть у нас есть S_1^* и S_2^* решения задач (4.5) и (4.6), соответственно, и метрика f . И пусть мы почему-то считаем, что чем больше $f(S_{1,2}^*)$, тем правильнее и адекватнее поставлена задача. Тогда следует просто решать задачу о максимизации непосредственно $f(S)$, а (4.5) и (4.6) рассматривать как упрощения непосредственно процесса оптимизации. И далее выбор f может быть поставлен под сомнение аналогичным образом.

4.2.1. Конкретизация функций $p(t)$, $d(t)$, $s(t)$

Рассмотрим теперь некоторые возможные виды функций $p(t)$, $d(t)$, и $s(t)$, фигурирующих в (4.5) и (4.6), заодно станет понятно, что мы понимаем под задачей, как объектом некоторой математической природы, и моделью чего является эта абстракция. Сначала опишем задачи, которые получены путем агрегации других задач.

Группа задач

Определим группу задач g как упорядоченную во времени последовательность отдельных задач. Тогда между рассматриваемыми функциями группы

задач и функциями задач этой группы существует следующая связь:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{|g|} y_{g_i}(t + t_{g_i}), \quad (4.10)$$

$$p(t) = \prod_{i=1}^{|g|} p_{g_i}(t + t_{g_i}), \quad (4.11)$$

$$d(t) = t_{g_{|g|}} + d_{g_{|g|}}(t + t_{g_{|g|}}), \quad (4.12)$$

$$s_{*,j}(t) = s_{g_{|g|},j}(t), \quad (4.13)$$

$$s_{j,*}(t) = s_{j,g_1}(t). \quad (4.14)$$

В реальности группа отражает, например, необходимость снять одну и ту же площадку в нескольких фотометрических полосах. Группы атомарны и не вытесняемы.

Повторение задачи

Определим повторение задачи $\tau \in T$ как конечную последовательность задач, все N элементов которой равны τ . Длительность выполнения повторения определяется следующим рекуррентным образом:

$$\begin{aligned} d(t, N) &= d(t, N - 1) + s_{\tau, \tau}(t + d(t, N - 1)) \\ &\quad + d_{\tau}(d(t, N - 1) + s_{\tau, \tau}(t + d(t, N - 1))), \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $d(t, 1) \equiv d_{\tau}(t)$. Вероятность более K успехов при N -кратном повторении:

$$p(t, K, N) = p_{\tau}(t_N)p(t_{N-1}, K - 1, N - 1) + (1 - p_{\tau}(t_N))p(t_{N-1}, K, N - 1), \quad (4.16)$$

где $p(t, 0, N) \equiv 1$, $p(t, K, 0) \equiv 0 (K \neq 0)$, $t_N \equiv t + d(t, N)$. Средняя урожайность:

$$\begin{aligned} y(t, K, N) &= p_{\tau}(t_N)y_{\tau}(t_N)p(t_{N-1}, K - 1, N - 1) \\ &\quad + p_{\tau}(t_N)y(t_{N-1}, K - 1, N - 1) + (1 - p_{\tau}(t_N))y(t_{N-1}, K, N - 1), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $y(t, K, 0) \equiv 0$, $y(t, 0, N) = p_{\tau}(t)y_{\tau}(t) + y(t, 0, N - 1)$.

Количество повторов N может быть задано, а может быть сформулировано как решение некоторых задач оптимизации с ограничениями. Рассмотрим вначале возможные ограничения, затем рассмотрим формулировки самих задач. Ограничения могут включать в себя величины вероятности успеха повторения задачи p и времени выполнения повторения d . Например, вероятность того, что не менее K повторов из полного числа будут успешными, больше чем p_0 :

$$p(t, K, N') \geq p_0. \quad (4.18)$$

Условие становится тривиальным при $p_0 = 0$. Аналогично вводится условие того, что не более K повторов из полного числа будут не успешными.

Пример ограничения на длительность повторения: длительность повторов d должна быть больше D :

$$d(t, N') \geq D. \quad (4.19)$$

Условие тривиально при $D = 0$. Аналогичным образом, вводится условие «меньше». При подстановке $d(t, N') \leftarrow t + d(t, N')$ вводится условие с абсолютным временем: завершится позже (раньше) определенного момента.

Теперь мы можем сформулировать две различные задачи оптимизации. Жадный повтор:

$$N = \max_{N' \in \mathbb{N}} N', \quad (4.20)$$

с условиями типа (4.18) и (4.19). Ленивый повтор:

$$N = \min_{N' \in \mathbb{N}} N', \quad (4.21)$$

с такими же условиями типа (4.18) и (4.19).

Определения жадного и ленивого повторов сформулированы исходя из предположения, что в некоторых случаях необходимо проводить мониторинг определенной площадки неба в течении заданного времени. Определяющим критерием в данном случае является ограничение на длительность (4.19), оно же

ограничение на абсолютное время, так как именно такое ограничение в конечном счете связано с конкретными астрономическими явлениями. Таким образом, число необходимых повторов N заранее не известно и должно быть определено так, чтобы удовлетворялись ограничения. По-сути, задача (4.20) с ограничением вида $t + d(t, N') \leq t_0$ соответствует задаче (4.21) с ограничением вида $t + d(t, N') \geq t_0$ с точностью до одного повторения, которое накрывает момент времени t_0 .

Как и в случае с группами, повторения атомарны и не вытесняемы. К сожалению, это ограничивает возможность формулирования определенных типов задач. К примеру, если мы хотели бы проводить мониторинг некоторого объекта с шагом по времени раз в час в течении только лишь нескольких минут. Чтобы сконструировать вытесняемые аналоги групп и повторов требуется ввести зависимости между заданиям, что, впрочем, может быть сделано в дальнейшем.

ПЗС фотометрия

Рассмотрим теперь тип задач, непосредственно связанный с действительностью, на примере астрономического ПЗС-фотометра. Будем считать, что устройство (панорамный ПЗС-фотометр) делает экспозицию заданной области неба в заданной спектральной полосе. Перед тем, как построить функции $p(t)$, $d(t)$, и $s(t)$, рассмотрим какие опциональные ограничения может сформулировать пользователь: требуемая относительная ошибка ϵ фотометрических измерений некоторого целевого объекта, требуемая длительность экспозиции τ , требуемые характеристики изображения точечного источника: интенсивность в центре изображения γ_1 , полная ширина на половине максимума γ_2 , радиус круга, включающий в себя e часть всей энергии $\gamma_3(e)$ [87]. Кроме того, должны быть заданы желаемое состояние устройства: используемая спектральная полоса, бинирование, режим считывания.

В зависимости от комбинаций заданных ограничений определяются функ-

ции d и p^0 . Если задана экспозиция τ и не задана требуемая относительная ошибка, то:

$$d(t) \equiv \tau, \quad (4.22)$$

$$p^0(t) \equiv 1.0. \quad (4.23)$$

Если задана экспозиция τ и задана требуемая относительная ошибка ϵ , то:

$$d(t) \equiv \tau, \quad (4.24)$$

$$p^0(t) \equiv F_\epsilon(\epsilon), \quad (4.25)$$

где $F_\epsilon(\epsilon)$ — кумулятивная функция распределения прогноза относительной ошибки ϵ с заданной экспозицией τ . Если задана требуемая относительная ошибка ϵ и не задана требуемая экспозиция, то:

$$p^0(t) \equiv 0.95. \quad (4.26)$$

$$d(t) \equiv Q_\tau(p^0(t)), \quad (4.27)$$

где $Q_\tau(p)$ — квантиль распределения прогноза величины требуемой экспозиции τ , а 0.95 принятая в данном случае вероятность успеха. Обратим внимание, что распределение τ считается логнормальным, поэтому $Q_\tau(p) \rightarrow \infty$, при $p \rightarrow 1$.
Полная вероятность успешного выполнения:

$$p(t) = p^0(t) (1 - F_{\gamma_1}(\gamma_1)) F_{\gamma_2}(\gamma_2) F_{\gamma_3}(\gamma_3), \quad (4.28)$$

где $F_{\gamma_i}(\gamma_i)$ — кумулятивные распределения величин γ_i , описанные в разделе 2.1.4 и работе [87].

Заметим, что функции $F_\epsilon(\epsilon)$ и $Q_\tau(p)$, описываемые в разделе 3.1.1, вычисляются на основе прогноза качества изображения. Напомним, что прогноз представляется в виде многомерной условной плотности вероятности для значений качества изображения β_i , взятых на минутных интервалах. Эта функция

плотности вероятности вычисляется с помощью модели авторегрессии скользящего среднего. Модельное медианное качество изображения стремится к генеральному медианному качеству изображения при $t \rightarrow \infty$. Такая модель может использоваться на временных упреждениях до двух часов [87].

Конкретный вид $s(t)$ для реальных астрономических задач

В выражениях (4.13) и (4.14) уже рассматривался вид функций $s(t)$, однако в них функция задана рекуррентно, не раскрывая физической действительности. Время установки $s_{i,j}(t)$ между задачами i и j в нашей модели определяется следующими факторами:

- Перенаведение монтировки телескопа между площадками описывается выражением (3.25).
- Время выбор точки фокуса описывается выражением (3.26).
- Установка внутреннего состояния устройства. Наверное все без исключения астрономические приборы обладают внутренним состоянием. К примеру, внутреннее состояние ПЗС фотометра характеризуется богатым набором параметров, в том числе, например, используемой спектральной полосой. В используемом на 2.5 м телескопе КГО ГАИШ ПЗС фотометре применяется механическая смена оптических фильтров, что требует время порядка 10 с для смены фотометрической полосы. Аналогично предыдущему случаю можно ввести определение. Пусть b_i — требуемая спектральная фотометрическая полоса, тогда:

$$s_{i,j}^{\text{Passband}}(t) = C^{\text{Passband}} (1 - \delta_{b_i b_j}), \quad (4.29)$$

где C^{Passband} — время движения устройства перевода фильтров.

Эта величина сравнима с самыми маленькими доступными экспозициями, и гораздо меньше времени считывания и передачи информации, которое

составляет порядка одной минуты. Используемая ПЗС камера устроена таким образом, что не считав информацию, нельзя выполнять следующую экспозицию, поэтому время считывания постоянно для любых последующих задач:

$$s_{i,j}^{\text{Readout}}(t) = C_i^{\text{Readout}} N_{pix,i}, \quad (4.30)$$

где C_i^{Readout} — скорость считывания, и $N_{pix,i}$ — размер окна интереса, выбранные для задачи i .

Таким образом, полное время установки выглядит следующим образом:

$$s_{i,j}(t) = \max \left\{ s_{i,j}^{\text{Mount}}(t), s_{i,j}^{\text{Port}}(t), \delta_{o_i o_j} \max \left\{ s_{i,j}^{\text{Passband}}(t), s_{i,j}^{\text{Readout}}(t) \right\} \right\}, \quad (4.31)$$

где $i, j \in T$. Обратим внимание, что выражение (4.31) не является даже метрикой, из-за входящих в его состав членов типа $s_{i,j}^{\text{Readout}}$, для которых условие $s_{ii} \equiv 0$ не выполняется.

Отметим еще раз, что в реальности, конечно, возможны накладные расходы, влияющие как на s_{ij} , так и на d_i , связанные с аварийными и ошибочными ситуациями, однако, очевидно, что вполне возможно устранить технические причины их вызывающие. В отличие от, например, оптической атмосферной турбулентности, которую нельзя устранить.

4.3. Решение дискретных задач оптимизации

4.3.1. Алгоритм PDDS

Задачи максимизации средней полной урожайности (4.5) и полной вероятности успеха (4.6) могут быть сформулированы в виде задачи нелинейного целочисленного программирования, используя N^2 бинарных переменных², где $N \equiv |T|$ — полное количество задач для планирования, которая принадлежат

² Имеется ввиду стандартный подход, когда бинарная переменная $x_{ij} = 1$, если задача i в решении стоит на месте j и выполняются ограничения $\sum_i x_{ij} \leq 1, \sum_j x_{ij} \leq 1$.

классу NP-hard [91, 92], и, если класс задач P не совпадает с классом NP, не может быть разрешена за полиномиальное время с помощью детерминированной машины Тьюринга [93].

Для решения задач мы используем алгоритм PDDS³ [33], построив на его основе классический метод ветвей и границ [94]. Уже было сказано, что для нас важна возможность проверить постановку задачи на адекватность, для этого необходима возможность исследовать, адекватен ли алгоритм задаче, а задача — действительности. Данный подход более прозрачен, чем часто применяемые в астрономии для решения аналогичных задач нейронные сети (см., например, пионерскую работу [4]) или генетические алгоритмы [9], не говоря уже о том, что последние являются объектом справедливой жесткой критики (см., например, [95]), и рассматриваются как метод последней надежды. Алгоритм в описываемом подходе, с одной стороны, просто изменять при модификациях исходных задач максимизации средней полной урожайности (4.5) или полной вероятности успеха (4.6), например, дополнить задачу условиями взаимной зависимости наблюдательных задач в нормальной дизъюнктивной форме; с другой стороны, есть простор для оптимизации времени поиска решения, например, применяя в качестве эвристики нелинейные методы регрессии, типа нейронных сетей.

Итак, представим дерево поиска. Каждый лист дерева представляет элемент допустимого пространства поиска $S \in T^+$, включая ограничения. Каждая вершина V дерева на глубине $D(V)$ — частичная задача оптимизации, где первые $D(V)$ элементов исследуемой последовательности S зафиксированы и равны $i_1, \dots, i_{D(V)}$ соответственно, а оставшиеся — свободные переменные. Таким образом, корень дерева — наша исходная задача (4.5) или (4.6).

PDDS представляет собой параллельную модификацию поиска в глубину, поэтому обозначим кандидат в решение S^* , наибольший найденный к текущему моменту времени элемент. Параллелизм достигается за счет разделения множества листьев на подмножества, отличающиеся по размеру не более чем на

³ Parallel Depth-bounded Discrepancy Search

$O(N)$, таким образом, что каждый процесс поиска может без синхронизации с другими процессами обходить свои узлы. За счет отсутствия накладных расходов на синхронизацию, авторам алгоритма удалось достичь масштабируемости в несколько тысяч потоков [33].

PDDS представляет из себя вариант алгоритма типа LDS⁴, вариант обхода дерева в глубину, когда для каждой вершины V задано отображение H из множества всех ребер E , выходящих из V , на подмножество натуральных чисел. Такое отображение называется эвристикой, и упорядочивает порядок обхода в порядке вероятности обнаружить решение пройдя по данному ребру E . Обычно эта функция задается в виде некоторого алгоритма сортировки. Таким образом, пространство поиска обходится не в произвольном порядке, а покрывая сначала наиболее вероятное подмножество, а наименее вероятное в последнюю очередь. Становится очевидным, что можно было бы обходить лишь только малую часть пространства поиска, подмножество полиномиального размера, где наиболее вероятно сосредоточено решение. Алгоритм PDDS достигает это, обходя целиком все вершины дерева лишь до некоторой максимальной глубины k_{max} , а затем всегда следуя по наиболее вероятному ребру.

Коль скоро мы строим метод ветвей и границ, для каждой вершины мы должны задать функцию верхней границы $B(V)$, которая будет являться верхней границей значения целевой функции частичной задачи при заданных фиксированных $S'_1, \dots, S'_{D(V)}$. Очевидно, что если для какого-то узла $B(V) \leq C(S^*)$ (где C — целевая функция Y или Π , в зависимости от рассматриваемой задачи) — обходить такое поддереву не требуется. Рассмотрим сначала функцию B , а затем вернемся к эвристике.

Заметим, что для задачи максимизации полной вероятности успеха (4.6) можно использовать

$$B(V) = \Pi(\{i_1, \dots, i_{D(V)}\}). \quad (4.32)$$

⁴ Least Discrepancy Search

Из ограниченности функции p_i (по свойствам вероятности) и формы выражения (4.4) следует, что (4.4) монотонно не возрастает при увеличении глубины обхода. Отметим, что этим задача максимизации полной вероятности успеха (4.6) существенно отличается от задачи максимизации средней полной урожайности (4.5) в сторону простоты. Задача (4.6) подразумевает поиск максимума ограниченной сверху функции. Однако функция (4.32) на практике оказывается слишком грубой оценкой, поэтому рассмотрим оценки на основе линейной релаксации мажорирующей задачи о рюкзаке.

Напомним, что задача о рюкзаке состоит в упаковке набора различных дискретных вещей в рюкзак конечной грузоподъемности. Каждая вещь имеет два атрибута: вес и ценность. И для каждой из них следует принять решение — положить ли её в рюкзак. Цель состоит в том, чтобы положить в рюкзак вещи с наибольшей общей ценностью при этом не превышая грузоподъемность [96].

В нашем случае длительность задания d_i по существу играет ту же роль, что и вес. А средняя урожайность $y_i p_i$ (в случае 4.5) или логарифм вероятности успеха $\ln p_i$ (в случае 4.6) — эквиваленты ценности. В самом деле, перепишем (4.6) в более удобном линейном виде:

$$\ln \Pi^* = \max_{S \in T^+} \left(\sum_{i=1}^{|S|} \ln(p_{S_i}(t_{S_i})) \right). \quad (4.33)$$

Введем обозначения $\overline{\ln p_i} \equiv \max_t \ln p_i(t)$, $\overline{y_i p_i} \equiv \max_t y_i(t) p_i(t)$, $\underline{d_i} \equiv \min_t d_i(t)$, $\underline{s_{i,j}} \equiv 0$. При подстановках $d_i \leftarrow \underline{d_i}$ и $s_{i,j} \leftarrow \underline{s_{i,j}}$ в (4.7) и (4.8), ограничения остаются выполненными для любых S , поэтому для всех S^* справедливо:

$$Y^*(S^*) \leq \sum_{i=1}^{|S^*|} \overline{y_{S_i^*} p_{S_i^*}} \leq \max_{S \in T^+} \left(\sum_{i=1}^{|S|} \overline{y_{S_i} p_{S_i}} \right), \quad (4.34)$$

$$\ln \Pi^*(S^*) \leq \sum_{i=1}^{|S^*|} \overline{\ln p_{S_i^*}} \leq \max_{S \in T^+} \left(\sum_{i=1}^{|S|} \overline{\ln p_{S_i}} \right). \quad (4.35)$$

Правая часть (4.34) с соответствующими условиями (4.7) формулируют известную задачу о рюкзаке [96]. Аналогично, правая часть (4.35) и (4.8) формули-

руют задачу о минимальном рюкзаке [96]. Заметим, что ограничения (4.34) и (4.35) уже не зависят от порядка следования элементов последовательность S^* .

Для задачи о рюкзаке известен алгоритм вычисления верхней границы за $O(N)^5$ на основе линейной релаксации задачи [96]. Кроме того, гарантируется, что вычисленная таким образом верхняя граница не более чем в два раза больше оптимального значения [96]. Процедура представляет собой сортировку элементов по убыванию отношения $\frac{y_{S_i} p_{S_i}}{d_{S_i}}$ с последующим суммированием до тех пор, пока выполняются условия (4.7). Оставшееся свободное время заполняется дробной частью граничного элемента $\frac{y_{S_s} p_{S_s}}{d_{S_s}}$ ⁶, с начислением пропорциональной ценности в итоговую целевую функцию. Именно в этом и состоит принцип линейной релаксации — элемент может входить в решение не полностью, а на некоторую свою часть. Аналогично поступаем с (4.35). Итак, будем использовать в качестве верхней границы для задач максимизации средней полной урожайности (4.5) и полной вероятности успеха (4.6) оценку на основе линейной релаксации мажорирующей задачи о рюкзаке, будем обозначать такую функцию $B_{LR}(V)$.

С эвристикой дело обстоит сложнее, для решения задачи (4.6) хорошим выбором оказывается сортировка ветвей по убыванию отношения, называемого в задаче о рюкзаке эффективностью [96]:

$$e_i = \frac{\ln p_i(t_{S_k})}{d_i(t_{S_k})}, \quad (4.36)$$

т.е. сначала просматривается та ветвь, на которой это отношение максимально. С ростом глубины k , такая эвристика ведет себя все точнее и точнее.

Для задачи максимизации средней полной урожайности (4.5) аналогичная величина

$$e_i = \frac{y_i(t_{S_k}) p_i(t_{S_k})}{d_i(t_{S_k})} \quad (4.37)$$

⁵ Хотя, наивные версии работают за $O(N \ln N)$.

⁶ Такой элемент может быть найден за $O(N)$ [96], обеспечивая полную асимптотическую сложность в $O(N)$.

не приводит к успеху. Ровно как и сортировка по отношению, учитывающему зависимость величин от времени:

$$e'_i = \frac{\left. \frac{d(y_i(t)p_i(t))}{dt} \right|_{t=t_{S_k} + \frac{1}{2N} \sum_j d_j(t_{S_k})}}{d_i(t_{S_k})}, \quad (4.38)$$

здесь следует выбрать наименьшее отношение. Соотношение выводится по аналогии с работой [97]. Когда условия качества изображения лучше чем в среднем, вероятность успеха (4.28) для заданий требующих высокое угловое разрешение убывает со временем, поэтому, ожидается, что такие задания, имеющие отрицательную производную e'_i , должны быть размещены в начале последовательности.

Наиболее удовлетворительным оказывается использование функции $B_{LR}(V)$, для упорядочивания ветвей. Первой обходится ветвь с наибольшей верхней границей.

4.3.2. Анализ производительности

Описанный алгоритм и модели были реализованы в форме библиотеки на языке C++⁷, что позволило, в частности, произвести некоторое моделирование направленное на анализ поведения алгоритма. Были проведены численные эксперименты типа Монте-Карло. Выполнялось по 300 запусков поиска решения со случайными входными данными, параметры которых описаны в Таблице 4.1.

При каждом запуске генерировалось 30 задач. С учетом применения агрегации задач из раздела 4.2.1 и 4.2.1 в реальности $|T|$ оценивается нами не более 70 на одну наблюдательную ночь. При средней длительности агрегированной задачи в 20 минут это составляет около 20 ч наблюдательного времени, что с запасом перекрывает возможности.

Горизонт поиска решения D был выбран так, чтобы производился полный обход дерева, это с вычислительной точки зрения можно сделать для k не больше 8. Величина D при этом составила $D = 90$ минут, что сравнимо с глубиной

⁷ Исходные коды доступны по адресу <https://bitbucket.org/matwey/chelyabinsk>

Таблица 4.1. Параметры задач, использованные при моделировании. $U(a, b)$ — обозначает равномерное распределение. $\text{Log}U(a, b)$ — обозначает логравномерное распределение.

Параметр	Значение	Вероятность появления
Прямое восхождение α	$U(0^\circ, 360^\circ)$	
Склонение δ	$U(-40^\circ, 90^\circ)$	
Поток n	$\text{Log}U(-6, 7)$	
Относительная ошибка ϵ	$U(0.001, 0.1)$	
Урожайность y	1	
Время экспозиции τ	$U(15 \text{ с}, 1500 \text{ с})$	$p = 0.8$
Плотность энергии в центре ФРТ γ_1	$U(0.4''^{-2}, 1.2''^{-2})$	$p = 0.3$
Полная ширина на половине максимума γ_2	$U(0.4'', 1.2'')$	$p = 0.3$
Радиус концентрации доли e энергии γ_3	$U(0.4'', 1.2'')$	$p = 0.3$
Доля энергии e	$U(0.8, 1.0)$	
Полное число задач $ T $	30	

прогноза изменения окружающих условий, которая составляет около двух часов, в зависимости от выбранного критерия [87]. При данных параметрах, в среднем, $|S|$ составило 10 задач, а полное число возможных комбинаций можно оценить $|T^+| > 1 \times 10^{15}$, и для прямого перебора потребовалось бы несколько CPU-месяцев вычислений.

На Рис. 4.1 изображена плотность вероятности величины относительной урожайности $\frac{Y(S)}{Y^*} \leq 1$, при случайном равномерном распределении величин S . Напомним, что Y^* обозначает максимально возможное значение. Представляя распределение нормальным, можно оценить вероятность случайно встретить максимальное значение в $p < 1 \times 10^{-5}$. К счастью, предлагаемый алгоритм работает гораздо быстрее, поэтому мы смогли провести моделирование и оценить некоторые аспекты его производительности.

На Рис. 4.2 и 4.3 демонстрируется эффективность функции верхней гра-

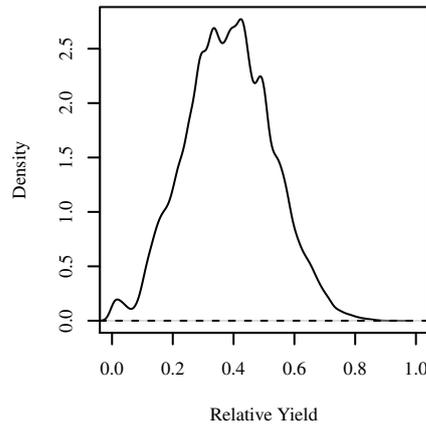


Рис. 4.1. Плотность вероятности $\frac{Y(S)}{Y^*} \leq 1$ при равномерном распределении S .

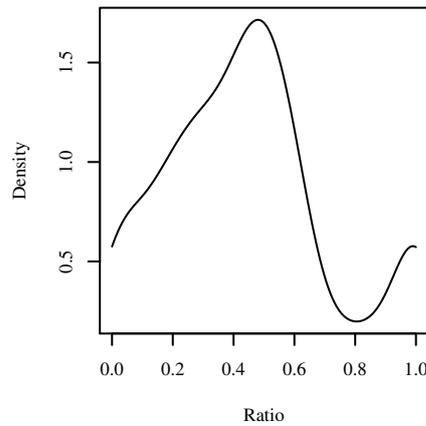


Рис. 4.2. Отношение $B_{LR}(V)$ к найденному решению для задачи максимизации логарифма полной вероятности успеха (4.33). Целевая функция задачи всегда отрицательная, поэтому верхняя граница по модулю меньше величины.

ницы на первом уровне $B_{LR}(V_0)$. Чем ближе значение к единице, тем меньше пространство поиска. С теоретической точки зрения мы не можем дать какой-то определенной границы для этого отношения, из-за операции оценки сверху в (4.34) и (4.35).

Рис. 4.3 может быть интерпретирован обратным образом: в среднем найденное решение в 1.15 раз меньше верхней границы на первом уровне, которая может быть тривиально вычислена. Такая интерпретация позволяет оценить масштаб точности поиска оптимального значения.

На Рис. 4.4 приведено поведение эвристики для задачи (4.33). Видно, что с ростом глубины обхода эвристика ошибается все реже, на этом основан принцип алгоритма PDDS [33]. Аналогичная эвристика для задачи (4.5) работает хуже,

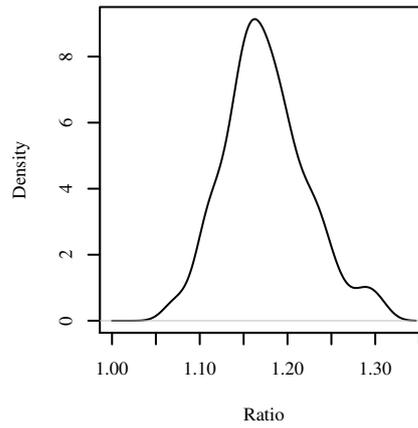


Рис. 4.3. Отношение $B_{LR}(V)$ к найденному решению для задачи максимизации средней полной урожайности (4.5).

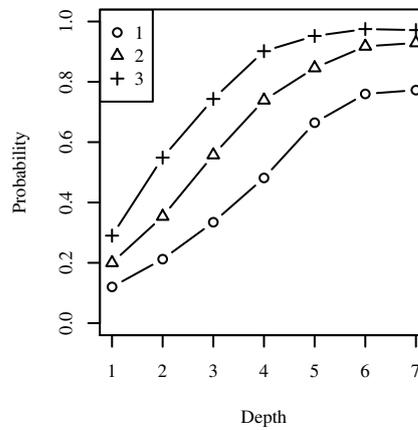


Рис. 4.4. Вероятность того, что оптимальное решение лежит в пределах первых N ветвей на уровне k . Для задачи максимизации логарифма полной вероятности успеха (4.33) и эвристики (4.36).

как видно на Рис. 4.5.

Как уже отмечалось, подразумевается, что все функции $p(t)$ в (4.33) и (4.5) — условные вероятности, более подробно обозначаемые как $p(t|\theta_0)$, где θ_0 текущее обобщенное состояние. Когда будущий момент времени $t'_0 > t_0$ станет настоящим, будет справедливо:

$$p(t|\theta_0) = \int d\omega p(t|\theta'_0; \omega) p(\theta'_0|\theta_0; \omega), \quad (4.39)$$

где ω — элемент пространства элементарных исходов эволюции системы с момента времени t_0 до t'_0 . Таким образом $p(t|\theta_0)$ может интерпретироваться как величина, усредненная по всем возможным эволюциям с момента времени t_0

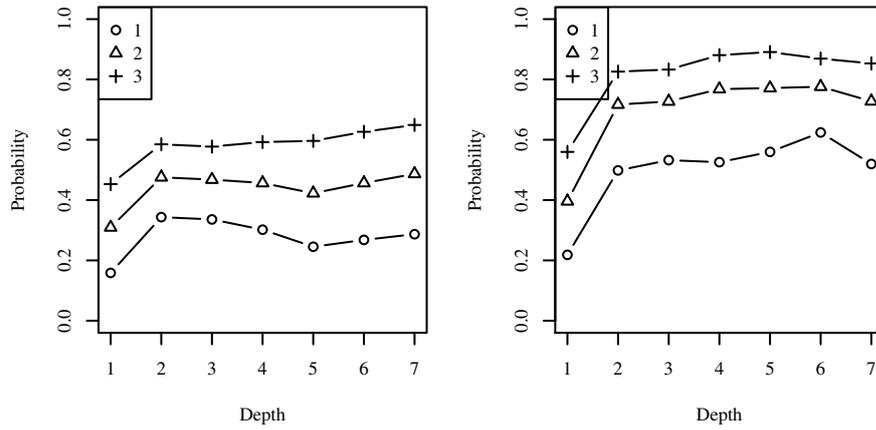


Рис. 4.5. Вероятность того, что оптимальное решение лежит в пределах первых N ветвей на уровне k . Слева: для задачи максимизации средней полной урожайности (4.5) и эвристики (4.37). Справа: для задачи максимизации средней полной урожайности (4.5) и эвристики $B_{LR}(V)$.

до t'_0 .

Для того чтобы оценить устойчивость решения задачи максимизации средней полной урожайности (4.5) по отношению к изменяющимся внешним условиям был проведен аналогичный численный эксперимент. В каждом эксперименте был найден S^* , затем вплоть до времени t_2 случайным образом моделировалось поведение оптической турбулентности [87]. Для моделирования эволюции оптической турбулентности мы использовали модель авторегрессии скользящего среднего из раздела 2.1.3. Обозначим все элементы S^* кроме первого как S^0 , а S^1 будет обозначать решение задачи, начатой с момента t_2 и с измененными начальными условиями. В численном эксперименте среднее $t_2 = 215$ с, чуть более нескольких минут. На Рис. 4.6 показано распределение отношения $\frac{Y(S^1)}{Y(S^0)}$. На Рис. 4.7 показаны распределения двух метрик между S^1 и S^0 . На левой части рисунка в качестве нормы выбрано расстояние Левенштейна [98], на правой — обе последовательности были вначале упорядочены используя одинаковое правило упорядочивания. Напомним, что строковая метрика Левенштейна для двух последовательностей S_1 и S_2 равна минимальному числу вставок, удалений и подстановок элементов, необходимых для превращения S_1 в S_2 . Таким образом на правой части Рис. 4.7 идет речь о количестве различных задач в

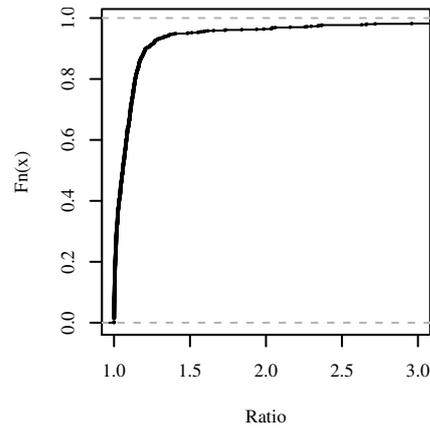


Рис. 4.6. Кумулятивная функция отношения $\frac{Y(S^0)}{Y(S^1)}$.

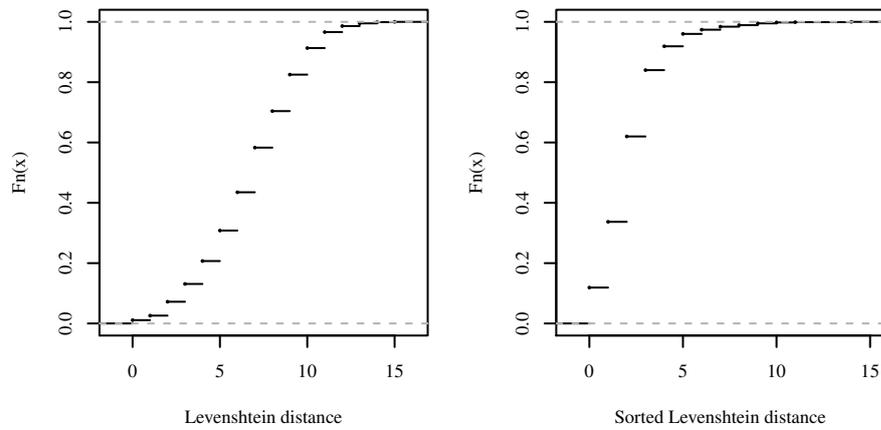


Рис. 4.7. Слева: кумулятивная функция метрики Левенштейна между S^0 и S^1 . Справа: кумулятивная функция упорядоченной метрики Левенштейна между S^0 и S^1 .

двух последовательностях. На Рис. 4.8 в качестве метрики использовано количество элементов не входящих в наибольшую общую подпоследовательность. Из перечисленных рисунков видно, что порядок элементов последовательности наиболее неустойчив, в то время как состав и значение максимума целевой функции скорее сохраняются.

Данный вывод не очень оптимистичный, так как причиной, по которой оптимизация происходит над множеством конечных последовательностей S , является желание уменьшить время установки $s_{i,j}$, что предполагает высокую степень повторяемости. Если мы отказываемся от этой идеи, то в любой момент времени исходя из текущих условий, мы можем выбирать следующую наблюдательную задачу исходя из рассмотренных эвристик. Такой локальный подход

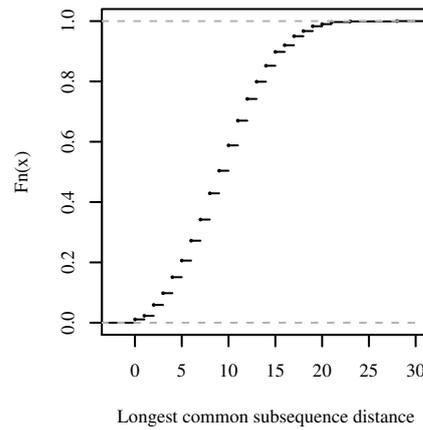


Рис. 4.8. Кумулятивная функция метрики «наибольшая общая подпоследовательность» между S^0 и S^1 .

гораздо проще описанного метода решения задач дискретной оптимизации с практической точки зрения.

Если мы желаем сохранить подход глобальной оптимизации, то возможный путь решения проблемы может состоять в переформулировке задач максимизации средней полной урожайности (4.5) и полной вероятности успеха (4.6) с условиями (4.7) и (4.8) в форму, при которой учитывается дисперсия величин $p(t) \equiv p(t|\theta_0)$ по отношению к пространству элементарных исходов эволюции системы с момента времени t_0 до t'_0 . Обозначая эту дисперсию $\sigma^2(t|\theta_0)$, имеем:

$$\sigma^2(t|\theta_0) + p^2(t|\theta_0) = \int d\omega p^2(t|\theta'_0; \omega) p(\theta'_0|\theta_0; \omega) = p(t|\theta'_0; \omega^*) p(t|\theta_0), \quad (4.40)$$

откуда видно, что при $p(t|\theta_0) \rightarrow 0$, $\sigma^2(t|\theta_0) \rightarrow 0$. Кроме того, для $p(t|\theta_0) \rightarrow 1$, учитывая $p(t|\theta_0) \leq p(t|\theta'_0; \omega^*) \leq 1$, $\sigma^2(t|\theta_0) \rightarrow 0$. Таким образом, независимо от конкретного вида функции $p(t)$, если вероятность успешного выполнения задачи высока, то вероятность изменения этой вероятности мала.

На Рис. 4.9 демонстрируется полученная из моделирования условная вероятность попадания наблюдательной задачи в решение $F_{\pi,e}(1|e)$. Величина e определена в (4.37). Например для задачи с $d = 50$ с, $p = 1$, $y = 1$ эффективность $e = 0.02$ с $^{-1}$. Форма кривых на Рис. 4.9 хорошо описывается зависимостью $C_1 - C_2 \ln(e)e^{-1}$, кроме малой области вблизи нуля. Соответствующая условная

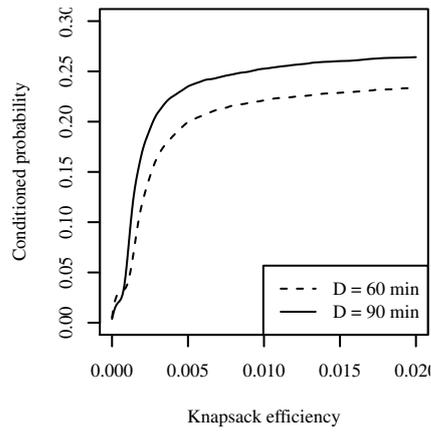


Рис. 4.9. Условная вероятность попадания задачи в решение $F_{\pi,e}(1|e)$, где e — величина эффективности из (4.37).

плотность вероятности $p_{\pi,e}(1|e)$ может быть получена следующим образом:

$$p_{\pi,e}(1|e) = F_{\pi,e}(1|e) + e \frac{\partial F_{\pi,e}(1|e)}{\partial e}, \quad (4.41)$$

и в целом повторяет поведение функции $F_{\pi,e}(1|e)$.

Рис. 4.9 дает объяснение тому факту, что эвристика (4.37) достаточно неэффективно направляет поиск решения: задачи с e больше некоторой в нашей тестовой выборке попадают в решения почти с одинаковой частотой.

Конечно, конкретный вид функции зависит от формулировки задачи: состава множества задач, текущего состояния θ_0 , определяющего $p_i(t|\theta_0)$, и горизонта планирования D . Например, асимптотика определяется соотношением между числом задач и горизонтом планирования D . Однако, рассмотрение функции типа $p_{\pi,e}(1|e)$ позволяет понять, что, с точки зрения частотности встречи задачи в решении, веса $y(t)$ вообще говоря, определены в нелинейной шкале, точный вид которой не известен. Поэтому, назовем далее две задачи p_e -эквивалентными, если у них совпадают величины e , а значит совпадает вероятность появления в решении. Такое определение не зависит от конкретного вида $p_{\pi,e}(1|e)$ и удобно. А благодаря предполагаемой монотонности $p_{\pi,e}(1|e)$ позволяет в любой момент времени t ввести порядок на множестве доступных задач T , называемый p_e -порядком.

Таким образом, некоторый абстрактный научный комитет, рассматривая

наблюдательные задачи из множества T , может провести порядка $O(|T| \ln_2 |T|)$ попарных сравнений, и затем, проведя топологическую сортировку полученного графа, присвоить такие $y_i(t)$, что, при средних по времени и условиям p_i и d_i , порядок «научной важности» совпадет с p_e -порядком. Стоит особо подчеркнуть, что это один из множества равноправных способов назначения урожайности y .

Более справедливый⁸ способ мог бы состоять в упорядочивании на основе безусловных вероятностей задач $\hat{p}_i = \int p_i(t|\theta)p(t, \theta)d\theta dt$. Параметры окружающих условий распределены вполне определенным образом, поэтому разные задачи имеют разный процент пригодного для их выполнения наблюдательного времени. Безусловно справедливыми урожайностями y назовем такие, при которых все задачи p_e -эквивалентны, где \hat{e} — средние по безусловному распределению параметров окружения эффективности.

Еще одна интерпретация величины y_i связана с временем открытого затвора, которое в наших терминах представляется следующим выражением:

$$\sum_{i=1}^{|S|} d_{S_i}(t_{S_i}). \quad (4.42)$$

Мы определим полезное время открытого затвора следующим образом:

$$\mathcal{O} \equiv \sum_{i=1}^{|S|} d_{S_i}(t_{S_i})\xi_{S_i}(t_{S_i}), \quad (4.43)$$

где $\xi_{S_i}(t_{S_i})$ независимые бинарные случайные величины, принимающие значение 1 с вероятностью $p_{S_i}(t_{S_i})$. В отличие от обычного времени открытого затвора, величина \mathcal{O} учитывает только успешно выполненные задания. Её среднее выражается следующим образом:

$$O = \sum_{i=1}^{|S|} d_{S_i}(t_{S_i})p_{S_i}(t_{S_i}). \quad (4.44)$$

Можно видеть, что среднее полезное время открытого затвора O пропорционально средней полной урожайности, если $y_i(t) \equiv C^{-1} \cdot d_i(t)$ для всех i , где константа C может быть выбрана как, например, $\max_{i,t} d_i(t)$.

⁸ В том же самом смысле слова «справедливый» как в термине «completely fair scheduler».

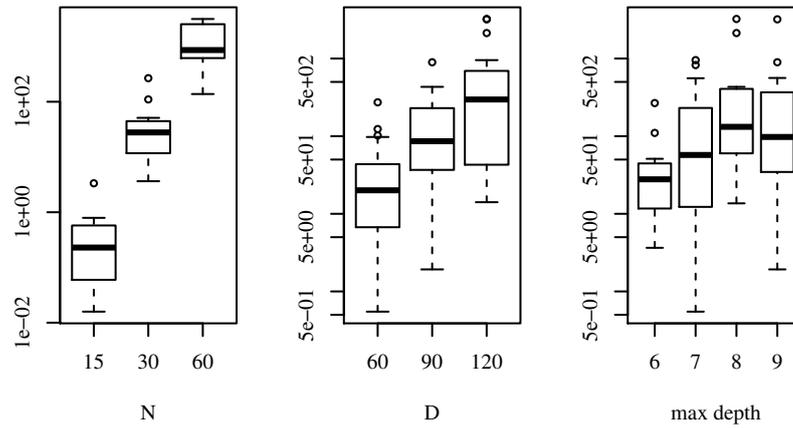


Рис. 4.10. Распределение времени решения задачи максимизации средней полной урожайности (4.5) в секундах для различных значений параметров числа задач N , горизонта планирования D (минуты), максимальной глубины обхода k в виде графика «ящик с усами». Верхние и нижние части прямоугольников — первый и третий квартили распределения. Жирные линии — медианы. Индивидуальные кружки — вылетающие значения, которые вне пределов полутора межквартильных расстояний. Усы обозначают минимум и максимум выборки, без учета вылетающих значений.

На Рис. 4.10 показано время выполнения при различных параметрах: глубине прогноза D , количестве входных задач N , максимальной глубине поиска k алгоритма PDDS [33]. Решение искалось в четыре потока используя четыре ядра процессора коммерческого процессора Xeon E5-2630L. Следует понимать, что данные тесты носят синтетический характер. Вне всякого сомнения, остается большой простор для оптимизации алгоритма, однако, для этого требуется иметь реальный набор входных данных, который может возникнуть только после опытного внедрения.

Таким образом, реализация предложенного алгоритма может использоваться для оперативного планирования наземных оптических астрономических наблюдений. В любой текущий момент времени t_0 на основе текущего состояния $\theta_0 \equiv \theta(t_0)$, которое обозначает все характеристики окружения, рассмотренные в разделах 2.1, 2.2, и 2.3, с помощью выражений из раздела 4.2.1, использующих результаты разделов 3.1 и 3.2, для каждой задачи $i \in T$ вычисляются функции $p_i(t)$, $d_i(t)$, и $s_{ij}(t)$, для которых решается задача максимизации полной вероят-

ности успеха (4.6) или средней полной урожайности (4.5). Полученное решение $S(\theta_0)$ и считается оперативным планом наблюдений.

Заключение

В работе рассмотрена проблема автоматического оперативного планирования наземных оптических астрономических наблюдений. В последнее время данная задача становится популярной и актуальной для многих астрономических обсерваторий. Считается, что оперативное планирование способно повысить эффективность использования наземного оптического телескопа.

По видимому, причины этого в том, что даже современный астрономический телескоп небольшого класса, скажем, диаметром чуть больше двух метров, — с экономической точки зрения достаточно затратный проект. Отсюда возникает дефицит наблюдательных возможностей. С другой стороны, в отличие от многих других более затратных физических экспериментов, наземные астрономические оптические наблюдения подвержены влиянию внешних причин, обусловленных эффектами физических явлений в атмосфере Земли, которые зачастую делают проведение заданных наблюдений нецелесообразными. Действительно, для лабораторного физического эксперимента могут быть предприняты все технические действия по повышению надежности и резервированию отдельных компонент сложной экспериментальной установки, таким образом, гарантируя, что эксперимент всегда проводится корректно.

Тем не менее, сама категория эффективности является не вполне конкретным предметом обсуждения. Поэтому в данной работе мы сконцентрировались не только на создании системы оперативного планирования астрономических наблюдений для 2.5 м телескопа ГАИШ МГУ, но и предполагаем, что практическое использование такой системы позволит некоторым образом конкретизировать понятие эффективности телескопа в перспективе. В свою очередь, система оперативного планирования (в виде математических моделей и компьютерных программ) до некоторой степени заранее предусматривает возможность критической ревизии этого понятия. Автор считает это достаточно важным, так как между правильным решением неправильной задачи и неправильным решением

правильной задачи есть принципиальная разница.

Представленный в работе подход имеет «блочную» иерархическую структуру. Так как влияние эффектов окружающей среды на проведение наземных оптических астрономических наблюдений считается принципиальным, то первой группой моделей являются модели, описывающие такие явления. В работе была построена модель прогноза мощности атмосферной оптической турбулентности на основе линейных моделей авторегрессии скользящего среднего. При использовании линейной модели ARIMA (4, 0, 1) возможно прогнозирование качества изображения на упреждениях до двух часов, причем стандартное отклонение прогноза в 1.4 раза меньше стандартного отклонения безусловного распределения данной величины. Поэтому важно обеспечивать данную модель текущими значениями характеристик оптической турбулентности, получаемыми в реальном времени из измерений, проводимых астроклиматическим монитором. На основе прогноза мощность атмосферной оптической турбулентности строятся прогнозы характеристик изображения точечного источника: интенсивность в центре функции рассеяния точки, полная ширина на половине максимума, радиус круга концентрации заданной доли энергии.

Модель яркости ночного неба включает в себя две компоненты, позволяющие определить яркость неба в заданной стандартной фотометрической полосе в заданный момент ночного времени со стандартным отклонением порядка 0.18 звездной величины. В моменты времени, когда основной вклад в яркость ночного неба дает рассеянный свет Луны, возможен дополнительный учет влияния концентрации аэрозоля на рассеяния на основе измерений проводимых в реальном времени астроклиматическим монитором. Модель ослабления излучения в атмосфере использует измеряемый астроклиматическим монитором в реальном времени коэффициент экстинкции для расчет коэффициентов экстинкции в других фотометрических полосах. При фотометрических условиях коэффициент экстинкции эволюционирует во времени достаточно медленно, поэтому точность прогноза определяется в первую очередь допущениями модели

при пересчете между фотометрическими полосами и составляет меньше 0.012 звездной величины.

Кроме того, не исключается возможность впоследствии учитывать и другие эффекты, а так же расширять существующие модели на основе изложенных принципов. Это важно, например, для наземных астрономических наблюдений в ближнем инфракрасном диапазоне, где среди прочего существенное значение имеет концентрация молекул воды в атмосфере. Другие внешние условия, такие как облачность, скорость приземного ветра и влажность также могут влиять на эффективность наблюдений. Несмотря на то, что изначально в работе предполагается, что метеоусловия позволяют открыть купол и выполнять любые наблюдения, возможно, например, представить себе, что какое-то более важное задание следует выполнить раньше, если есть реальная угроза того, что в скором времени погода закончится. Так, например, в работе [99] намечен способ вычисления вероятности ясного времени в ближайший промежуток времени. Однако, рассмотрение дополнительных внешних условий в свою очередь потребует вовлечение недоступных сейчас дополнительных источников информации об этих характеристиках в реальном времени.

Вторым уровнем являются модели оборудования, применяемого для наземных оптических астрономических наблюдений. Такие модели требуются для априорной оценки характеристик (проще говоря, точности) запланированных наблюдений. Необходимость априорной оценки в общем случае следует из необратимости времени. К счастью, для большинства типов оборудования существуют исчерпывающие теории его работы, поэтому требуется лишь приведение отдельных формул и величин в стохастический вид, в связи с тем, что прогноз величин характеризующих окружение является в общем случае стохастической величиной.

В данной работе рассмотрен, вероятно, один из самых массовых астрономических приборов — фотометр с приемником на основе ПЗС. Однако, на основе ПЗС фотометра был продемонстрирован процесс построения подобных моде-

лей. Выделяются наборы стохастических характеристик и детерминированных характеристик. Для стохастических характеристик (являющихся функциями стохастических величин, обычно описывающих окружение), можно определить ограничения в виде неравенств для каждой конкретной наблюдательной задачи. Данные ограничения позволяют вычислить вероятность успешного выполнения заданной задачи в заданный момент времени в будущем.

Вероятность успешного выполнения (соответствия требований и априорной оценки характеристик) наряду с введенной величиной урожайности связываются с понятием эффективности наземных оптических наблюдений. А оперативное планирование связывается с решением задач дискретной оптимизации, которые максимизируют кумулятивную вероятность успеха и урожайность для последовательностей наблюдательных задач путем выбора и упорядочивания задач.

Для решения сформулированных задач дискретной оптимизации применяется реализованный на языке C++ алгоритм на основе алгоритма PDDS [33], обеспечивающего линейную масштабируемость при росте числа вычислительных потоков. Даже при использовании четырех потоков, при глубине прогноза в 90 минут, поиск решения занимает в среднем порядка 5 минут, что позволяет использовать реализацию для оперативного планирования в реальном времени по мере изменения окружающих условий. Прозрачная структура алгоритма позволяет при необходимости проведение критического анализа полученных решений [100].

Конечно, предлагаемый метод оперативного планирования может рассматриваться как один из многих шагов к полностью автоматизированному наземному оптическому астрономическому телескопу общего назначения. Однако, в данной работе он полностью рассматривается как «подсказка» или руководство для оператора телескопа, облегчающее его интеллектуальную деятельность, подобно тому, как различные современные коммерческие продукты позволяют рядовому водителю автомобиля не только успешно ориентироваться на незна-

комых улицах, но и оперативно учитывать картину дорожных заторов. Между философским понятием эффективности и её конкретными численными мерами есть принципиальное различие, поэтому важно не только формальное повышение конкретной меры эффективности, но и сближение определения этой меры с изначальным понятием, а это может быть сделано только критическим анализом результатов практического применения.

Приложение А

Избранные сведения о логнормальном распределении

Логнормальное распределение $\text{LogN}(\mu, \sigma)$ имеет следующую функцию плотности вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (\text{A.1})$$

где μ и σ — параметры распределения [74]. Кумулятивная функция распределения:

$$F(x) = F_N(\ln x), \quad (\text{A.2})$$

где F_N — кумулятивная функция нормального распределения $N(\mu, \sigma)$, которая в свою очередь имеет следующий вид:

$$F_N(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right), \quad (\text{A.3})$$

где erf — функция ошибок [82].

Квантильная функция логнормального распределения:

$$Q(p) = \exp(Q_N(p)), \quad (\text{A.4})$$

где Q_N — квантильная функция нормального распределения, которая в свою очередь имеет следующий вид:

$$Q_N(p) = \mu + \sqrt{2}\sigma \operatorname{erf}^{-1}(2p - 1), \quad (\text{A.5})$$

где erf^{-1} — функция, обратная к функции ошибок [82].

Среднее логнормального распределения может быть легко найдено из (A.1):

$$E[X] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right). \quad (\text{A.6})$$

Аналогично, дисперсия логнормального распределения:

$$D[X] = \exp(2\mu + \sigma^2) (\exp(\sigma^2) - 1). \quad (\text{A.7})$$

Если среднее и дисперсия распределения известны, то параметры распределения могут быть найдены следующим образом:

$$\mu = \ln \frac{E[X]^2}{\sqrt{E[X]^2 + D[X]}}, \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma^2 = \ln \left(1 + \frac{D[X]}{E[X]^2} \right). \quad (\text{A.9})$$

Иногда рассматривается так называемое смещенное логнормальное распределение, получаемое из логнормального распределения с помощью введения третьего параметра — некоторой аддитивной константы x_0 :

$$f_S(x) = \frac{1}{(x + x_0) \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(\ln(x + x_0) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right). \quad (\text{A.10})$$

Кумулятивная функция такого распределения будет равна:

$$F_S(x) = F(x - x_0), \quad (\text{A.11})$$

где F — кумулятивная функция из (A.2). А квантильная функция:

$$Q_S(p) = Q(p) + x_0, \quad (\text{A.12})$$

где Q — квантильная функция из (A.4). Легко показать, что среднее случайной величины, распределенной в соответствии со смещенным логнормальным распределением, имеет следующий вид:

$$E[X] = x_0 + \exp \left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right), \quad (\text{A.13})$$

а дисперсия такой величины совпадает с (A.7).

Для многомерного нормального распределения, параметры которого — вектор μ и матрица Σ , аналогичным образом вводят многомерное логнормальное распределение. Таким образом, если случайный вектор $\mathbf{X} \sim N(\mu, \Sigma)$, то

случайный вектор $\mathbf{Y} \sim \text{LogN}(\mu, \Sigma)$, где $Y_i \equiv \exp X_i$. Вектор среднего и матрица ковариации для такого распределения вычисляются следующим образом.

$$\mathbb{E}[X_i] = \exp\left(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_{ii}\right), \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbb{D}[X_i, X_j] = \exp\left(\mu_i + \mu_j + \frac{1}{2}\sigma_{ii} + \frac{1}{2}\sigma_{jj}\right) (\exp(\sigma_{ij}) - 1). \quad (\text{A.15})$$

Приложение Б

Статистические свойства C_1

Ранее в разделе 1.4.2 была введена следующая величина:

$$C_1 \equiv \frac{c_1}{F}, \quad (\text{Б.1})$$

где c_1 — автокорреляция светового потока, F — среднее светового потока. Далее обсуждаются некоторые важные статистические свойства этой величины.

Оценка дисперсии выборочной ковариации c_1 для некоррелированного пуассоновского потока следует из общих формул [101, 102]:

$$D[c_1] = \frac{\lambda^2}{N}, \quad (\text{Б.2})$$

где λ — параметр пуассоновского распределения, в нашем случае $\lambda \equiv F$, N — размер выборки.

Рассматривая, в соответствии с определением (Б.1), величину C_1 как отношение выборочной ковариации к среднему, можно получить:

$$D[C_1] = D\left[\frac{c_1}{F}\right] = \frac{1}{N}. \quad (\text{Б.3})$$

Обратим внимание, что эта величина не зависит от потока.

Для светового потока F , состоящего из двух компонент: коррелированной по времени компоненты F_1 и некоррелированной компоненты F_2 , среднее величины C_1 отлично от нуля:

$$E[C_1] = \frac{c_{1,1}}{F_1 + F_2}, \quad (\text{Б.4})$$

где, для случая оптической турбулентности, $c_{1,1} = F_1^2 s_1^2$, s_1^2 — измеряемая в эксперименте нормированная ковариация потока [59].

Литература

1. Cuillandre J., Mahoney B., Withington K. A Signal-to-noise Approach to Queue Observing with Ground-based Telescopes // *Astronomical Data Analysis Software and Systems XXIII* / Ed. by N. Manset, P. Forshay. Vol. 485 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*. 2014. — May. P. 81.
2. Delgado F., Schumacher G. The LSST OCS scheduler design // *Proc. SPIE*. Vol. 9149. 2014. P. 91490G–91490G–13.
3. Bowen I. S. Telescopes // *Astronomical Journal*. 1964. — Dec.. Vol. 69. P. 816.
4. Johnston M., Adorf H.-M. Scheduling with neural networks — the case of the hubble space telescope // *Computers and Operations Research*. 1992. Vol. 19, no. 3. P. 209 – 240.
5. Gómez de Castro A. I., Yáñez J. Optimization of telescope scheduling // *Astronomy and Astrophysics*. 2003. Vol. 403, no. 1. P. 357–367.
6. Colomé J., Casteels K., Ribas I., Francisco X. The TJO-OAdM Robotic Observatory: the scheduler // *Proc. SPIE*. Vol. 7740. 2010. P. 77403K–77403K–12.
7. Mora M., Solar M. A survey on the dynamic scheduling problem in astronomical observations // *Artificial Intelligence in Theory and Practice III* / Ed. by M. Bramer. Springer, 2010. Vol. 331 of *IFIP Advances in Information and Communication Technology*. P. 111–120.
8. Colome J., Colomer P., Guàrdia J. et al. Research on schedulers for astronomical observatories // *Proc. SPIE*. Vol. 8448. 2012. P. 84481L–84481L–18.

9. Mahoney W., Veillet C., Thanjavur K. A genetic algorithm for ground-based telescope observation scheduling // Proc. SPIE. Vol. 8448. 2012. P. 84480W–84480W–14.
10. Colomé J., Colomer P., Campreciós J. et al. Artificial intelligence for the CTA Observatory scheduler // Proc. SPIE. Vol. 9149. 2014. P. 91490H–91490H–15.
11. Silva D. R. Service mode scheduling at the ESO very large telescope // Proc. SPIE. Vol. 4844. 2002. P. 94–103.
12. Sasaki T., Kosugi G., Kawai J. A. et al. Observation scheduling scheme for the Subaru telescope // Proc. SPIE. Vol. 4009. 2000. P. 350–354.
13. Masciadri E., Lascaux F., Fini L. MOSE: operational forecast of the optical turbulence and atmospheric parameters at European Southern Observatory ground-based sites - I. Overview and vertical stratification of atmospheric parameters at 0-20 km // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2013. — Dec.. Vol. 436. P. 1968–1985.
14. Giordano C., Vernin J., Vázquez Ramió H. et al. Atmospheric and seeing forecast: WRF model validation with in situ measurements at ORM // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2013. — Apr.. Vol. 430. P. 3102–3111.
15. Trinquet H., Vernin J. A Model to Forecast Seeing and Estimate C_N^2 Profiles from Meteorological Data // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 2006. — May. Vol. 118. P. 756–764.
16. Racine R. Temporal Fluctuations of Atmospheric Seeing // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 1996. — Apr.. Vol. 108. P. 372.

17. Skidmore W., Els S., Travouillon T. et al. Thirty Meter Telescope Site Testing V: Seeing and Isoplanatic Angle // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 2009. Vol. 121, no. 884. P. 1151–1166.
18. Kornilov V., Sarazin M., Tokovinin A. et al. Comparison of the scintillation noise above different observatories measured with MASS instruments // Astronomy and Astrophysics. 2012. — Oct.. Vol. 546. P. A41.
19. Patat F. UBVRI night sky brightness during sunspot maximum at ESO-Paranal // Astronomy and Astrophysics. 2003. Vol. 400, no. 3. P. 1183–1198.
20. Patat F. The dancing sky: 6 years of night-sky observations at Cerro Paranal // Astronomy and Astrophysics. 2008. — Apr.. Vol. 481. P. 575–591.
21. Krisciunas K. Optical Night-Sky Brightness at Mauna Kea over the Course of a Complete Sunspot Cycle // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 1997. — Oct.. Vol. 109. P. 1181–1188.
22. Leinert C., Vaisanen P., Mattila K., Lehtinen K. Measurements of sky brightness at the Calar Alto Observatory // Astrophysics and Space Science. 1995. — Jul.. Vol. 112. P. 99.
23. Mattila K., Vaeisaenen P., Appen-Schnur G. F. O. V. Sky brightness at the ESO La Silla Observatory 1978 to 1988 // Astrophysics and Space Science. 1996. — Oct.. Vol. 119. P. 153–170.
24. Sánchez S. F., Aceituno J., Thiele U. et al. The Night Sky at the Calar Alto Observatory // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 2007. — Oct.. Vol. 119. P. 1186–1200.
25. Sánchez S. F., Thiele U., Aceituno J. et al. The Night Sky at the Calar Alto Observatory II: The Sky at the Near-infrared // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 2008. — Nov.. Vol. 120. P. 1244–1254.

26. Garstang R. H. Night-sky brightness at observatories and sites // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 1989. — Mar.. Vol. 101. P. 306–329.
27. Pedani M. Sky surface brightness at Mount Graham II. First JHKs science observations with the Large Binocular Telescope // New Astronomy. 2014. — Apr.. Vol. 28. P. 63–69.
28. Kornilov V. G., Kornilov M. V. The revision of the turbulence profiles restoration from MASS scintillation indices // Experimental Astronomy. 2011. Vol. 29, no. 3. P. 155–176.
29. Lombardi G., Sarazin M. Using MASS for AO simulations: a note on the comparison between MASS and Generalized SCIDAR techniques // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2016. Vol. 455, no. 3. P. 2377–2386.
30. Catala L., Crawford S. M., Buckley D. A. H. et al. Optical turbulence characterization at the SAAO Sutherland site // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2013. — Nov.. Vol. 436. P. 590–603.
31. Thomas-Osip J. E., Prieto G., Berdja A. et al. Characterizing Optical Turbulence at the GMT Site with MooSci and MASS-DIMM // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 2012. — Jan.. Vol. 124. P. 84–93.
32. Mayer B., Kylling A. Technical note: The libRadtran software package for radiative transfer calculations - description and examples of use // Atmospheric Chemistry and Physics. 2005. Vol. 5, no. 7. P. 1855–1877.
33. Moisan T., Quimper C.-G., Gaudreault J. Parallel Depth-Bounded Discrepancy Search // Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming / Ed. by H. Simonis. Springer International Publishing, 2014. Vol. 8451 of Lecture Notes in Computer Science. P. 377–393.
34. Kornilov V., Safonov B., Kornilov M. et al. Study on Atmospheric Optical

- Turbulence above Mount Shatdzhatmaz in 2007–2013 // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 2014. Vol. 126. P. 482–495.
35. Schoeck M., Els S., Riddle R. et al. Thirty Meter Telescope Site Testing I: Overview // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 2009. Vol. 121, no. 878. P. 384.
 36. Vernin J., Muñoz-Tuñón C., Sarazin M. et al. European Extremely Large Telescope Site Characterization I: Overview // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 2011. — Nov.. Vol. 123. P. 1334–1346.
 37. Vázquez Ramió H., Vernin J., Muñoz-Tuñón C. et al. European Extremely Large Telescope Site Characterization. II. High Angular Resolution Parameters // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 2012. — Aug.. Vol. 124. P. 868–884.
 38. Thomas-Osip J. E., Prieto G., Johns M., Phillips M. M. Giant Magellan Telescope site evaluation and characterization at Las Campanas Observatory // Proc. SPIE. Vol. 7012. 2008. P. 70121U–70121U–12.
 39. Tokovinin A., Baumont S., Vasquez J. Statistics of turbulence profile at Cerro Tololo // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2003. — Mar.. Vol. 340. P. 52–58.
 40. Dali Ali W., Ziad A., Berdja A. et al. Multi-instrument measurement campaign at Paranal in 2007. Characterization of the outer scale and the seeing of the surface layer // Astronomy and Astrophysics. 2010. — Dec.. Vol. 524. P. A73.
 41. Wilson R. W., Butterley T., Sarazin M. The Durham/ESO SLODAR optical turbulence profiler // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2009. — Nov.. Vol. 399. P. 2129–2138.
 42. Kornilov V., Tokovinin A., Shatsky N. et al. Combined MASS-DIMM

- instruments for atmospheric turbulence studies // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2007. — Dec.. Vol. 382. P. 1268–1278.
43. Sarazin M., Roddier F. The ESO differential image motion monitor // Astronomy and Astrophysics. 1990. — Jan.. Vol. 227. P. 294–300.
44. Kornilov V., Tokovinin A. A., Vozyakova O. et al. MASS: a monitor of the vertical turbulence distribution // Proc. SPIE. Vol. 4839. 2003. P. 837–845.
45. Tokovinin A., Kornilov V., Shatsky N., Voziakova O. Restoration of turbulence profile from scintillation indices // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2003. — Aug.. Vol. 343, no. 3. P. 891–899.
46. Vernin J., Munoz-Tunon C., Sarazin M. E-ELT site characterization status // Proc. SPIE. Vol. 7012. 2008. P. 70121T–70121T–12.
47. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967.
48. von Karman T. Progress in the Statistical Theory of Turbulence // Proceedings of the National Academy of Science. 1948. — Nov.. Vol. 34. P. 530–539.
49. Roddier F. The Effects of Atmospheric Turbulence in Optical Astronomy // Progress in Optics / Ed. by E. Wolf. Elsevier, 1981. Vol. 19 of Progress in Optics. P. 281 – 376.
50. Fried D. L. Statistics of a Geometric Representation of Wavefront Distortion // Journal of the Optical Society of America (1917-1983). 1965. — Nov.. Vol. 55. P. 1427–1431.
51. Потанин С. А., Белинский А. А., Возякова О. В. и др. Контроль оптики 2.5 метрового телескопа ГАИШ МГУ. 2015. Настоящее и будущее малых и средних телескопов (Нижний Архыз, КЧР, Россия,

- 19–22 октября 2015). URL http://istina.msu.ru/media/conferences/conferencepresentation/eb4/52d/11446868/opt_25_2015.pdf.
52. Tokovinin A., Kornilov V. Accurate seeing measurements with MASS and DIMM // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2007. Vol. 381, no. 3. P. 1179–1189.
 53. Tokovinin A. Measurement of seeing and the atmospheric time constant by differential scintillations // Applied Optics. 2002. — Feb.. Vol. 41. P. 957–964.
 54. Fuchs A., Tallon M., Vernin J. Focusing on a Turbulent Layer: Principle of the “Generalized SCIDAR” // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 1998. — Jan.. Vol. 110. P. 86–91.
 55. Martin H. M. Image motion as a measure of seeing quality // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 1987. — Dec.. Vol. 99. P. 1360–1370.
 56. Tokovinin A. From Differential Image Motion to Seeing // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 2002. — Oct.. Vol. 114. P. 1156–1166.
 57. Kornilov V., Safonov B. Differential image motion in the short-exposure regime // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2011. — Dec.. Vol. 418, no. 3. P. 1878–1888.
 58. Kornilov M. V. Estimation of vertical profiles of wind from MASS measurements // Proc SPIE. Vol. 8447. 2012. P. 84471B–84471B–10.
 59. Tokovinin A. Measurement of seeing and the atmospheric time constant by differential scintillations // Applied Optics. 2002. — Feb.. Vol. 41. P. 957–964.
 60. Kornilov V. The statistics of the photometric accuracy based on MASS data and the evaluation of high-altitude wind // Astronomy Letters. 2011. — Nov. Vol. 37. P. 40.

61. Kenyon S. L., Lawrence J. S., Ashley M. C. B. et al. Atmospheric Scintillation at Dome C, Antarctica: Implications for Photometry and Astrometry // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 2006. — Jun.. Vol. 118. P. 924–932.
62. Voziakova O. V. Atmospheric transparency over Mount Shatdzhatmaz in the optical and near-infrared ranges // Astronomy Letters. 2012. — Apr.. Vol. 38. P. 271–279.
63. Allen C. W. Astrophysical quantities. Third edition. University of London, Athlone Press, 1973.
64. Schulz M., Stattegger K. Spectrum: spectral analysis of unevenly spaced paleoclimatic time series // Computers and Geosciences. 1997. Vol. 23, no. 9. P. 929 – 945.
65. Box G. E. P., Cox D. R. An Analysis of Transformations // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1964. Vol. 26. P. 211–252.
66. Freeman J., Modarres R. Inverse Box–Cox: The power-normal distribution // Statistics and Probability Letters. 2006. Vol. 76, no. 8. P. 764 – 772.
67. Safonov B. Twilight observations with MASS-DIMM // ArXiv e-prints. 2011. — Jan.. arXiv:astro-ph.IM/1101.2351.
68. Cleveland R. B., Cleveland W. S., McRae J. E., Terpenning I. STL: A Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess // Journal of Official Statistics. 1990. Vol. 6, no. 1. P. 3 – 73.
69. R Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2013. URL <http://www.R-project.org>.

70. Kornilov V., Shatsky N., Voziakova O. et al. First results of a site-testing programme at Mount Shatdzhatmaz during 2007–2009 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2010. Vol. 408, no. 2. P. 1233–1248.
71. Box G. E. P., Jenkins G. Time Series Analysis, Forecasting and Control. Holden-Day, Incorporated, 1976. ISBN: 0816211043.
72. Akaike H. A new look at the statistical model identification // IEEE Trans. Automatic Control. 1974. Vol. AC-19. P. 716–723.
73. Granger C. W. J., Joyeux R. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing // Journal of Time Series Analysis. 1980. Vol. 1, no. 1. P. 15–29.
74. Fenton L. The Sum of Log-Normal Probability Distributions in Scatter Transmission Systems // IRE Trans. Commun. Systems. 1960. Vol. 8, no. 1. P. 57–67.
75. Howell S. B. Handbook of CCD Astronomy. Second edition. Cambridge University Press, 2000.
76. Roach F. E., Meinel A. B. Nightglow Heights: a Reinterpretation of Old Data. // Astrophysical Journal. 1955. — Nov.. Vol. 122. P. 554.
77. Kornilov V., Kornilov M., Voziakova O. et al. Night-sky brightness and extinction at Mt Shatdzhatmaz // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2016. Vol. 462, no. 4. P. 4464–4472.
78. Hayes D. S. Stellar absolute fluxes and energy distributions from 0.32 to 4.0 microns // Calibration of Fundamental Stellar Quantities / Ed. by D. S. Hayes, L. E. Pasinetti, A. G. D. Philip. Vol. 111 of IAU Symposium. 1985. P. 225–249.
79. Kieffer H. H., Stone T. C. The Spectral Irradiance of the Moon // Astronomical Journal. 2005. — Jun.. Vol. 129. P. 2887–2901.

80. Meeus J. H. *Astronomical Algorithms*. Willmann-Bell, Incorporated, 1991. ISBN: 0943396352.
81. Kurucz R. L. *Synthetic Infrared Spectra // Infrared Solar Physics / Ed. by D. M. Rabin, J. T. Jefferies, C. Lindsey*. Vol. 154 of IAU Symposium. 1994. P. 523.
82. Abramowitz M., Stegun I. *Handbook of Mathematical Functions*. Fifth edition. New York: Dover, 1964.
83. Shettle E. P. *Models of aerosols, clouds, and precipitation for atmospheric propagation studies // AGARD, Atmospheric Propagation in the UV, Visible, IR, and MM-Wave Region and Related Systems Aspects 14*. 1990. — Mar.. P. 15–32.
84. Миронов А. В. *Основы астрофотометрии. Практические основы фотометрии и спектрофотометрии звёзд*. Москва: Физматлит, 2008.
85. Young A. T. *Air mass and refraction // Applied Optics*. 1994. — Feb. Vol. 33, no. 6. P. 1108–1110.
86. van der A R. J., Allaart M. A. F., Eskes H. J. *Extended and refined multi sensor reanalysis of total ozone for the period 1970–2012 // Atmospheric Measurement Techniques*. 2015. Vol. 8, no. 7. P. 3021–3035.
87. Kornilov M. V. *Forecasting seeing and parameters of long-exposure images by means of ARIMA // Experimental Astronomy*. 2016. Vol. 41, no. 1. P. 223–242.
88. David H., Nagaraja H. *Order Statistics*. Third edition. New York: Wiley, 2003.
89. Fiorucci M., Munari U. *The Asiago Database on Photometric Systems (ADPS). II. Band and reddening parameters // Astronomy and Astrophysics*. 2003. — Apr.. Vol. 401. P. 781–796.

90. Landolt A. U. UBVRI photometric standard stars in the magnitude range 11.5-16.0 around the celestial equator // *Astronomical Journal*. 1992. — Jul.. Vol. 104. P. 340–371.
91. Kannan R., Monma C. L. On the Computational Complexity of Integer Programming Problems // *Optimization and Operations Research* / Ed. by R. Henn, B. Korte, W. Oettli. Springer Berlin Heidelberg, 1978. Vol. 157 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. P. 161–172.
92. Belotti P., Kirches C., Leyffer S. et al. Mixed-integer nonlinear optimization // *Acta Numerica*. 2013. — 5. Vol. 22. P. 1–131.
93. *Handbook of Theoretical Computer Science, Volume A: Algorithms and Complexity* / Ed. by J. van Leeuwen. Elsevier and MIT Press, 1990. ISBN: 0-444-88075-5.
94. Land A. H., Doig A. G. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems // *Econometrica*. 1960. Vol. 28, no. 3. P. 497–520.
95. Skiena S. S. *The Algorithm Design Manual*. Second edition. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.
96. Kellerer H., Pferschy U., Pisinger D. *Knapsack Problems*. Springer, Berlin, Germany, 2004.
97. Alidaee B. A Heuristic Solution Procedure to Minimize Makespan on a Single Machine with Non-Linear Cost Functions // *The Journal of the Operational Research Society*. 1990. Vol. 41, no. 11. P. 1065–1068.
98. Levenshtein V. I. Binary Codes Capable of Correcting Deletions, Insertions and Reversals // *Soviet Physics Doklady*. 1966. — Feb.. Vol. 10. P. 707.
99. В. Г. Корнилов, М. В. Корнилов, Н. И. Шатский и др. Метеорологические условия в Кавказской обсерватории ГАИШ МГУ по результатам кампании

2007–2015 годов // Письма в Астрономический журнал. 2016. Т. 42, № 9. С. 678–693.

100. Kornilov M. V. Astronomical observation tasks short-term scheduling using PDDS algorithm // Astronomy and Computing. 2016. Vol. 16. P. 131–139.
101. Bartlett M. S. On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time-series // Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society. 1946. P. 27–41.
102. Jenkins G. M., Watts D. G. Spectral analysis and its applications. London: Holden-Day, 1969.