

Н.В.Емельянов

**ДИНАМИКА ЕСТЕСТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ  
НА ОСНОВЕ НАБЛЮДЕНИЙ**

ГАИШ МГУ - 2019

---

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

### Резюме

Это большая глава, в которой представлен набор аналитических методов построения моделей движения спутников планет. Начинается все с задачи двух тел. Даются формулы кеплеровского движения. Для уточнения параметров орбит спутников на основе наблюдений нужны значения частных производных от координат по элементам орбиты. Здесь даются формулы для этих производных.

Приводится разложение силовой функции притяжения несферического тела, выраженное через координаты спутника. Рассматривается связанная с этим очень интересная обобщенная задача двух неподвижных центров.

Основа аналитических методов — это теория возмущений. Здесь подробно излагается весь алгоритм применения теории возмущений. Применяется метод малого параметра.

Разложение возмущающей функции, обусловленной несферичностью центрального тела, выражено через элементы кеплеровской промежуточной орбиты и дается в форме, удобной для практического применения. Для возмущающей функции, обусловленной притяжением внешнего тела, приводится разложение также выраженное через элементы кеплеровской промежуточной орбиты.

С помощью теории возмущений в первую очередь получают вековые возмущения. Далее на основе такого подхода строится модель прецессирующего эллипса. В конце главы рассматриваются применения этой модели. Показано, как получаются периодические возмущения. Изучаются их свойства.

В этой главе рассматриваются особые случаи в теории возмущений, которые не освещены должным образом в литературе. Они связаны с интерпретацией вековых возмущений и возмущениями при малых эксцентриситетах. Эти результаты кажутся неожиданными.

Как пример построения чисто аналитической теории движения спутника описывается модель движения спутника Нептуна Тритона, построенная автором данной книги. Параметры теории уточнены на основе всех имеющихся наблюдений. По точности эта модель конкурирует с моделями, построенными другими авторами численным интегрированием дифференциальных уравнений движения Тритона.

В конце главы описан метод определения возмущений орбитальных параметров спутника, обусловленных приливами в вязкоупругих телах планеты и самого спутника. Применяются некоторые упрощения модели действующих сил, принятые и другими исследователями. Приводятся результаты, выведенные автором данной книги, которые проясняют некоторые аспекты этой теории. Рассмотренная задача слабо освещена в публикациях. Однако имеются современные работы, в которых принимается более общий и точный подход, чем в предшествующих публикациях. В данной главе приводятся результаты определения параметров вязкоупругих свойств Юпитера, Сатурна и некоторых их спутников на основе астрометрических наблюдений.

### **3.1. Уравнения движения и системы координат**

Движение спутников описывается дифференциальными уравнениями. В уравнениях движения записана вся информация о том, какие силы и причины воздействуют на движение. Форма записи уравнений представляет собой очень важный момент в процессе изучения динамики. С одной стороны, здесь необходима безукоризненная точность, ибо при неаккуратной записи вся последующая работа окажется бесполезной. С другой стороны, от формы записи зависит применимость и простота методов, с помощью которых будут решаться уравнения.

Уравнения движения основаны на законах механики. Вначале предполагается, что применяемая механика — это классическая механика Ньютона. Возможно, что этого будет достаточно. На каком-

то этапе исследований возникает вопрос о необходимости перехода к законам общей теории относительности (ОТО), как более адекватным реальной окружающей нас природе. На этом этапе мы оказываемся перед противоречивыми требованиями. Переход к уравнениям общей теории относительности чрезвычайно усложняет задачу. С другой стороны, необходимость перехода должна быть четко обоснована. Нужно ли переходить? Очень важно, какими критериями при этом воспользоваться. При практическом моделировании движения с целью максимально приблизить модель к действительности критерием выбора типа применяемой модели механики должно быть соответствие точности модели точности наблюдений. Сопоставление точности уравнений и точности наблюдений здесь не годится. С точностью наблюдений нужно сопоставлять точность решения дифференциальных уравнений движения, а не самих уравнений. Однако оценка точности решения всегда весьма затруднительна. Кроме того, при моделировании величин, которые измеряются в процессе наблюдений, участвует еще множество других факторов, которые не содержатся в самих уравнениях движения.

Проблему перехода к механике ОТО можно решать тем приемом, который часто применяется в небесной механике в подобных случаях. Вместо перехода к уравнениям ОТО уравнения движения записывают в рамках механики Ньютона, но при этом вводят в рассмотрение некоторые фиктивные возмущающие силы, действующие на небесное тело, так что получаемое решение будет достаточно близко к решению уравнений ОТО. Необходимость даже такого упрощенного приема должна быть тщательно оценена. На данном этапе изложения мы ограничимся уравнениями механики Ньютона.

Рассмотрим систему планеты со спутниками, которые пронумеруем индексом  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . Движение системы  $N$  спутников происходит под действием притяжения планеты, взаимного притяжения спутников, притяжения других спутников, не включенных в первые  $N$ , а также под действием притяжения Солнца и других планет. Солнце, другие планеты и спутники назовем внешними телами. Будем допускать, что тело планеты имеет конечные размеры, а его гравитационный потенциал отличается от потенциала материальной точки. Дифференциальные уравнения движения спутников планеты первоначально составляют как уравнения движения задачи для  $N+1$  материальной точки. При этом не важно, в какой

из них расположено начало системы координат. Вид уравнений от этого не зависит. Можно полагать, что спутники, Солнце и другие планеты движутся вокруг главной планеты, в центре которой расположено начало системы координат. Такую систему мы будем называть планетоцентрической.

Дальнейшее уточнение уравнений движения спутников состоит в принятии в расчет того факта, что планета, а также другие спутники, отличаются от материальных точек и притягивают как протяженные тела со сложными гравитационными полями.

Рассмотрим уравнения движения  $N$  спутников с координатами  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) в планетоцентрической невращающейся системе координат. Уравнения движения в векторной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = & -G(m_0 + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} - \sum_{j=1}^N Gm_j \left( \frac{\Delta_{ij}}{|\Delta_{ij}|^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right) - \\ & - \sum_{j=1}^{N'} Gm'_j \left( \frac{\Delta'_{ij}}{|\Delta'_{ij}|^3} + \frac{\mathbf{r}'_j}{|\mathbf{r}'_j|^3} \right) + \mathbf{F}(t, \mathbf{r}_i) , \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $G$  — универсальная гравитационная постоянная,  $m_i$  — масса спутника,  $m_0$  — масса планеты,  $m'_j$  — масса внешнего тела (Солнца, планеты, спутника). В уравнениях обозначены:  $\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$  — радиус-вектор спутника номер  $i$ ,  $\mathbf{r}'_j = \{x_j, y_j, z_j\}$  — радиус-вектор внешнего тела номер  $j$ ,  $\Delta_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ ,  $\Delta'_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j$ . Через  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}_i)$  обозначен вектор ускорения, обусловленного несферичностью планеты. Этот вектор может явно зависеть от времени, поскольку планета со своим гравитационным полем движется независимо от спутника. Впрочем, это слагаемое может включать в себя и учет несферичности самого спутника, если его вращение задано. В первой сумме штрих означает, что слагаемое при  $j = i$  опущено.

В модели движения спутника могут учитываться и другие силы. Это могут быть силы негравитационной природы, например, силы сопротивления среды или силы приливного трения в теле планеты или в теле спутника. Тогда соответствующие члены в правой части уравнений движения могут зависеть еще и от компонент скорости спутника.

В уравнениях движения векторы  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) фигурируют как искомые функции, а векторы  $\mathbf{r}'_j$  должны быть вычисляемыми на любой заданный момент времени. Координаты Солнца

и других планет определяются по эфемеридам планет. Координаты других спутников, помимо первых  $N$ , вычисляются на основе ранее разработанных моделей их движения.

Главной силой, действующей на спутник, является притяжение планеты. Потому он и является ее спутником. Главное действие планеты — это ее притяжение как материальной точки, расположенной в центре масс. Это главное действие задается первым слагаемым в правой части уравнений движения. Пренебрегая всеми другими воздействиями на спутник, кроме главного, получим уравнения движения задачи двух материальных точек. При этом начало координат совпадает с одной из них — с планетой. Для простоты такую задачу называют задачей двух тел.

Альтернативой уравнений движения в относительной системе координат являются уравнения движения в барицентрической системе. Оставляя в рассмотрении только планету и спутник, приходим снова к уравнениям движения задачи двух тел.

Хорошо известно решение дифференциальных уравнений задачи двух тел. Это закон и модель кеплеровского движения. Такую модель рассмотрим в следующем разделе.

Для детального и глубокого изучения задачи двух тел можно рекомендовать Учебное пособие (Холшевников, Титов, 2007). Стиль изложения в этой книге абстрактно-теоретический. В частности, строятся метрические пространства орбит и описываются их топологические свойства. Уделено внимание разложению координат в ряды и задачам определения орбит. В конце книги приводится список литературы, содержащий ссылки на справочники, учебники и задачки по небесной механике.

## **3.2. Модель кеплеровского движения**

### **3.2.1. Основные формулы кеплеровского движения**

Модель кеплеровского движения появляется как решение задачи двух тел. Тела считаются материальными точками, изолированными от других тел и любых других воздействий. Они движутся только под действием взаимного притяжения по закону квадратов обратных расстояний Ньютона. Такое движение еще называется невозмущенным.

Рассматривают относительное движение в задаче двух тел, когда начало системы отсчета помещается в центр масс одного из них, и

барицентрическое движение, при котором начало помещено в центр масс обоих тел.

Траектория движения в задаче двух тел всегда лежит в неизменной плоскости. Она представляет собой эллипс, параболу или гиперболу. Центральное тело в относительном движении или барицентр двух тел в барицентрическом движении расположены в фокусе одной из указанных кривых. Существуют также прямолинейные траектории в задаче двух тел.

Точку траектории с минимальным расстоянием до начала системы отсчета называют перицентром, а точку с максимальным расстоянием (в случае эллиптического движения) — апоцентром. Апоцентр может располагаться в бесконечности (гиперболические и параболические траектории). Линию, соединяющую перицентр орбиты с ее апоцентром, называют линией апсид.

Относительное движение описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка. Следовательно, общее решение зависит от шести независимых произвольных постоянных.

Рассмотрим уравнения движения задачи двух тел с массами  $m_1$  и  $m_2$  в произвольной невращающейся системе прямоугольных координат  $x, y, z$ . Начало системы координат  $O$  расположим либо в первое тело, либо во второе, либо в барицентр системы. Для всех трех случаев уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3},$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , а  $\mu$  — постоянная, называемая гравитационным параметром.

Если начало координат помещено в одно из тел, то уравнения описывают движение другого из них, а гравитационный параметр  $\mu$  задается равенством

$$\mu = G(m_1 + m_2),$$

где  $G$  — универсальная гравитационная постоянная. Если начало координат помещено в барицентр системы, то уравнения описывают движение первого тела с гравитационным параметром

$$\mu = G \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Уравнения движения второго тела относительно барицентра имеют такой же вид, но гравитационный параметр в этом случае задается равенством

$$\mu = G \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Существуют семь первых интегралов уравнений движения, содержащих семь произвольных постоянных интегрирования, пять из которых являются независимыми. Недостающей шестой независимой произвольной постоянной является константа, определяющая положение тела на орбите в заданный момент времени.

Траекторию движения в задаче двух тел описывают параметрами (элементами) кеплеровской орбиты.

Поскольку известно, что движение тел происходит в некоторой неизменной плоскости, рассмотрим систему координат  $\xi, \eta, \zeta$  с началом в точке  $O$ , ось  $\xi$  которой направлена в перигецентр орбиты, а ось  $\eta$  располагается в плоскости движения так, что радиус-вектор тела вращается от оси  $\xi$  в сторону оси  $\eta$ . Третью ось  $\zeta$  направим так, чтобы система координат оказалась правой. Систему координат  $\xi, \eta, \zeta$  называют орбитальной.

Формулы перехода от орбитальной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  к системе координат  $Oxyz$  имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= P_x \cdot \xi + Q_x \cdot \eta + R_x \cdot \zeta, \\ y &= P_y \cdot \xi + Q_y \cdot \eta + R_y \cdot \zeta, \\ z &= P_z \cdot \xi + Q_z \cdot \eta + R_z \cdot \zeta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где через  $P_i, Q_i, R_i (i = 1, 2, 3)$  обозначены направляющие косинусы линии апсид, направляющие косинусы перпендикуляра к линии апсид в плоскости орбиты, и направляющие косинусы перпендикуляра к плоскости орбиты, соответственно. Направляющие косинусы принято выражать через три угла поворота орбитальной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  по отношению к системе координат  $Oxyz$ :

$\Omega$  — долгота восходящего узла орбиты,

$\omega$  — угловое расстояние перигецентра от восходящего узла орбиты,

$i$  — наклон орбиты к основной плоскости.



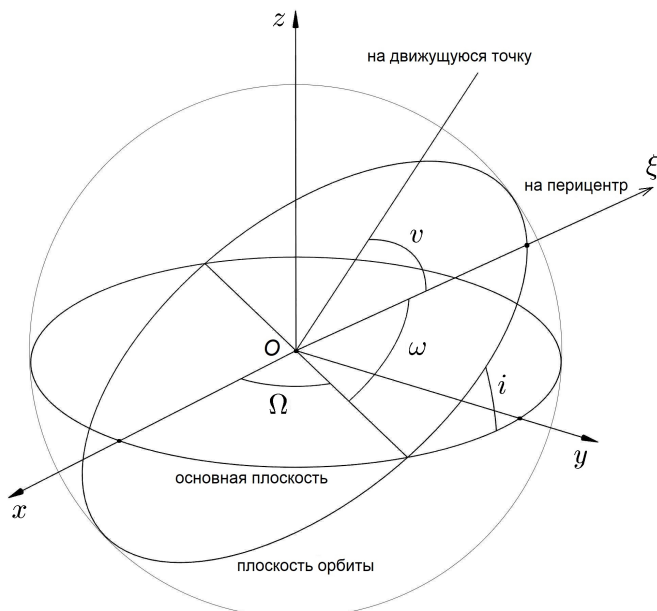


Рис. 3.1. Геометрия систем координат и плоскости орбиты кеплеровского движения.

Выражения для направляющих косинусов имеют вид

$$\begin{aligned}
 P_x &= \cos \omega \cdot \cos \Omega - \sin \omega \cdot \sin \Omega \cdot \cos i, \\
 P_y &= \cos \omega \cdot \sin \Omega + \sin \omega \cdot \cos \Omega \cdot \cos i, \\
 P_z &= \sin \omega \cdot \sin i, \\
 Q_x &= -\sin \omega \cdot \cos \Omega - \cos \omega \cdot \sin \Omega \cdot \cos i, \\
 Q_y &= -\sin \omega \cdot \sin \Omega + \cos \omega \cdot \cos \Omega \cdot \cos i, \\
 Q_z &= \cos \omega \cdot \sin i, \\
 R_x &= \sin \Omega \cdot \sin i, \\
 R_y &= -\cos \Omega \cdot \sin i, \\
 R_z &= \cos i.
 \end{aligned}$$

Ориентацию орбиты в пространстве можно увидеть на рис. 3.1, где показаны углы  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ .

Траектория движения в задаче двух тел в орбитальной системе координат описывается следующим соотношением:

$$\mu \cdot r = c^2 - f \cdot \xi,$$

где  $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  — модуль радиус-вектора тела,  $c$  — постоянная интеграла площадей,  $f$  — постоянная интеграла Лапласа.

Вырожденный случай прямолинейного движения в задаче двух тел, когда постоянная интеграла площадей  $c$  равна нулю, мы не рассматриваем. Здесь допустим, что  $c > 0$ , и рассмотрим уравнение траектории в полярных координатах.

Введем в плоскости орбиты полярные координаты  $r$  и  $v$  объекта по формулам

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v,$$

где угол  $v$  в кеплеровском движении называется *истинной аномалией* и отсчитывается от перицентра в положительном направлении движения точки. Фокальное уравнение орбиты в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

где обозначено  $p = c^2/\mu$ ,  $e = f/\mu$ . При этом  $p$  называется фокальным параметром орбиты, а  $e$  — ее эксцентриситетом.

Из первых интегралов уравнений движения в задаче двух тел следует, что постоянная энергии зависит от введенных параметров следующим образом :

$$h = \frac{\mu^2}{c^2}(e^2 - 1).$$

Изменение полярного угла  $v$  во времени описывается дифференциальным уравнением

$$\left( \frac{p}{1 + e \cos v} \right)^2 \frac{dv}{dt} = c.$$

Решение этого уравнения записывают в различных формах в зависимости от типа движения. Тип движения определяется значением эксцентриситета  $e$ . Поэтому форма зависимости координат от времени  $t$  будет различной. Существуют следующие типы орбит.

- 1) К р у г о в а я о р б и т а :  $e = 0, \quad h < 0, \quad r = const.$
- 2) Э л л и п т и ч е с к а я о р б и т а :  $0 < e < 1, \quad h < 0.$
- 3) П а р а б о л и ч е с к а я о р б и т а :  $e = 1, \quad h = 0.$
- 4) Г и п е р б о л и ч е с к а я о р б и т а :  $e > 1, \quad h > 0.$

Поскольку мы изучаем движение спутников планет на конечных траекториях, то ограничимся рассмотрением только кругового и эллиптического движений в задаче двух тел. Тогда эксцентриситет  $e < 1$ . Круговое движение будет при  $e = 0$ .

В круговом и эллиптическом движениях рассматривают большую полуось орбиты  $a$ . При этом фокальный параметр и интеграл энергии выражаются через большую полуось следующим образом:

$$p = a(1 - e^2), \quad h = -\frac{\mu}{a}.$$

Из фокального уравнения в полярных координатах следует, что минимальное расстояние тела до начала координат будет равно  $a(1 - e)$ , а максимальное —  $a(1 + e)$ .

Для нахождения  $r$  и  $v$  как функций времени введем в качестве вспомогательной переменной *эксцентрическую аномалию*  $E$ :

$$r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad r \cos v = a(\cos E - e),$$

$$r = a(1 - e \cos E).$$

Зависимость  $E$  от времени  $t$  описывается соотношениями

$$E - e \sin E = M,$$

$$M = n(t - t_0) + M_0,$$

$$n = \sqrt{\mu/a^3},$$

$t_0$  — начальный момент времени (эпоха), а  $M_0$  — произвольная постоянная интегрирования. Величина  $M$  называется *средней аномалией*,  $n$  называется *средним движением*, а  $M_0$  — средней аномалией в эпоху.

Уравнение

$$E - e \sin E = M$$

относительно эксцентрической аномалии  $E$  называется *уравнением Кеплера*. Его численное решение обычно выполняется методом

последовательных приближений. Оптимальное построение приближений описано ниже.

Отметим, что при изменении  $M$  на  $2\pi$  углы  $E$  и  $v$  также изменяются на  $2\pi$ . Точно так же обстоит дело при изменении на  $\pi$ . Разница между ними заключается в том, что  $M$  изменяется равномерно во времени, а  $E$  и  $v$  — с переменной угловой скоростью. Лишь в частном случае кругового движения ( $e = 0$ ) все три угла совпадают.

В практике вычисления координат в кеплеровском движении иногда используется функция времени  $u = v + \omega$ , которая называется *аргументом широты* объекта. Фактически  $u$  — это центральный угол в плоскости орбиты между направлением на движущееся тело и направлением на восходящий узел орбиты. Используется также величина  $\lambda = v + \omega + \Omega$ , называемая *долготой в орбите*, которая является суммой двух углов  $u$  и  $\Omega$ , отсчитываемых в разных плоскостях. Рассматривается еще величина  $\bar{\lambda} = M + \omega + \Omega$ , которая называется *средней долготой*.

Период  $T$  обращения тела по орбите связан со средним движением  $n$  соотношением

$$T = \frac{2\pi}{n}.$$

Исходными элементами эллиптической орбиты в задаче двух тел, задающими движение в плоскости орбиты, считаются три параметра

$n$  — среднее движение,

$e$  — эксцентриситет,

$M_0$  — средняя аномалия в эпоху.

Существует важное соотношение между средним движением  $n$  и большой полуосью  $a$

$$n^2 a^3 = \mu,$$

которое соответствует 3-му закону Кеплера и имеет важное практическое значение. Если в относительном движении двух тел из наблюдений независимо определяются среднее движение  $n$  и большая полуось  $a$ , то сразу находится сумма масс двух тел

$$m_1 + m_2 = \frac{\mu}{G}.$$

В качестве параметра орбиты вместо  $n$  можно задать большую полуось  $a$ . Однако следует отметить, что наблюдаемое положение тела

на орбите задается средней аномалией  $M$ . Поэтому после наблюдения нескольких оборотов тела по орбите среднее движение  $n$  определяется точнее, из соотношения

$$n = \frac{M - M_0}{t - t_0},$$

чем большая полуось  $a$ .

В качестве параметров кеплеровской орбиты рассматриваются также параметр  $\varpi = \omega + \Omega$ , который называется долготой перицентра, а также параметр  $\bar{\lambda}_0 = M_0 + \omega + \Omega$ , который называют средней долготой в эпоху.

Вместо средней аномалии в эпоху  $M_0$  иногда задают динамический момент  $t'$  прохождения телом перицентра орбиты. Т.е.

$$n(t' - t_0) + M_0 = 0.$$

Рассмотрим, как лучше решать уравнение Кеплера. В классическом методе последовательных приближений итерации выполняются по правилам:

1. В нулевом приближении полагаем  $E_0 = M$ .
2. Вычисляем последовательно  $E_{n+1} = M + e \sin E_n$  для  $n = 0, 1, \dots$  до тех пор, пока  $|E_{n+1} - E_n| > \varepsilon$ ,

где  $\varepsilon$  — требуемая точность вычислений.

Более эффективным оказывается метод последовательных приближений по Денби (Danby, 1995). Итерации производятся по схеме:

1. В нулевом приближении полагаем  $E_0 = M + 0.85 e$ .
2. Вычисляем последовательно

$$E_{n+1} = E_n - \frac{(M + e \sin E_n - E_n)^2}{E_n - 2(M + e \sin E_n) + M + e \sin(M + e \sin E_n)}$$

для  $n = 0, 1, \dots$  до тех пор, пока  $|E_{n+1} - E_n| > \varepsilon$ .

### 3.2.2. Вычисление координат в эллиптическом кеплеровском движении

В некоторых случаях вместо преобразования координат из орбитальной системы в заданную систему  $x, y, z$ , как указано выше (3.2), удобно использовать аргумент широты  $u = v + \omega$  и вычислять координаты в заданной системе по следующим формулам:

$$x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i),$$

$$y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$

$$z = r \sin u \sin i.$$

### 3.2.3. Вычисление скорости в эллиптическом кеплеровском движении

После того, как найдены расстояние  $r$  и истинная аномалия  $v$ , можно вычислить модуль скорости  $V$ , радиальную компоненту скорости  $V_r$  и трансверсальную компоненту скорости  $V_n$  из соотношений

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v,$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v).$$

Далее можно найти скорости изменения прямоугольных координат по формулам

$$\dot{x} = \frac{x}{r} V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) V_n,$$

$$\dot{y} = \frac{y}{r} V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) V_n,$$

$$\dot{z} = \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i V_n.$$

### 3.2.4. Вычисление частных производных от координат и компонент скорости по элементам кеплеровской орбиты в эллиптическом движении

В практической небесной механике решаются задачи уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений. В качестве

параметров могут использоваться элементы кеплеровской орбиты. Уточнение орбиты делается дифференциальным уточнением с применением метода наименьших квадратов. Для построения условных уравнений необходимы частные производные от координат и компонент скорости по орбитальным элементам. Приведем здесь формулы для этих производных в предположении, что координаты и скорость связаны с параметрами и временем формулами эллиптического кеплеровского движения. Формулы следуют в той последовательности, какая нужна для вычислений. Сначала вычисляются вспомогательные величины

$$c_1 = \sin i \sin \Omega, \quad c_2 = -\sin i \cos \Omega, \quad c_3 = \cos i,$$

$$l_1 = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i.$$

$$l_2 = \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i.$$

$$l_3 = \sin \omega \sin i,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos v = \frac{l_1 x + l_2 y + l_3 z}{r},$$

$$\sin v = \frac{(c_2 l_3 - c_3 l_2)x + (c_3 l_1 - c_1 l_3)y + (c_1 l_2 - c_2 l_1)z}{r},$$

$$a_1 = \frac{1 + e \cos v}{1 - e^2}, \quad r_1 = a_1 \cos v - \frac{e}{1 - e^2},$$

$$r_2 = \frac{n a_1 \sin v (1 + e \cos v + e^2)}{(1 - e^2)^{3/2}},$$

$$p_1 = -\frac{\mu}{n r^3}, \quad q_1 = \frac{2}{3n},$$

$$p_2 = -a_1 \cos v, \quad q_2 = \left( a_1 + \frac{1}{1 - e^3} \right) \sin v.$$

Затем находятся искомые производные

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\dot{x}}{n}(t - t_0) - q_1 x, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\dot{y}}{n}(t - t_0) - q_1 y, \quad \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\dot{z}}{n}(t - t_0) - q_1 z,$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial n} = p_1 x(t - t_0) + \frac{1}{2} q_1 \dot{x}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial n} = p_1 y(t - t_0) + \frac{1}{2} q_1 \dot{y}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial n} = p_1 z(t - t_0) + \frac{1}{2} q_1 \dot{z},$$

$$\frac{\partial x}{\partial i} = z \sin \Omega, \quad \frac{\partial y}{\partial i} = -z \cos \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial i} = y \cos \Omega - x \sin \Omega,$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial i} = \dot{z} \sin \Omega, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial i} = -\dot{z} \cos \Omega, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial i} = \dot{y} \cos \Omega - \dot{x} \sin \Omega,$$

$$\frac{\partial x}{\partial M} = \frac{\dot{x}}{n}, \quad \frac{\partial y}{\partial M} = \frac{\dot{y}}{n}, \quad \frac{\partial z}{\partial M} = \frac{\dot{z}}{n},$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial M} = p_1 x, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial M} = p_1 y, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial M} = p_1 z,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = c_2 z - c_3 y, \quad \frac{\partial y}{\partial \omega} = c_3 x - c_1 z, \quad \frac{\partial z}{\partial \omega} = c_1 y - c_2 x,$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \omega} = c_2 \dot{z} - c_3 \dot{y}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \omega} = c_3 \dot{x} - c_1 \dot{z}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \omega} = c_1 \dot{y} - c_2 \dot{x},$$

$$\frac{\partial x}{\partial e} = q_2 \frac{\partial x}{\partial \omega} + p_2 x, \quad \frac{\partial y}{\partial e} = q_2 \frac{\partial y}{\partial \omega} + p_2 y, \quad \frac{\partial z}{\partial e} = q_2 \frac{\partial z}{\partial \omega} + p_2 z,$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial e} = q_2 \frac{\partial \dot{x}}{\partial \omega} + r_2 x + r_1 \dot{x}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial e} = q_2 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \omega} + r_2 y + r_1 \dot{y}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial e} = q_2 \frac{\partial \dot{z}}{\partial \omega} + r_2 z + r_1 \dot{z},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -y, \quad \frac{\partial y}{\partial \Omega} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \Omega} = -\dot{y}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \Omega} = \dot{x}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \Omega} = 0,$$

При выводе этих формул предполагалось, что независимыми параметрами орбиты являются шесть элементов  $n$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $M_0$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ , обозначения которых объяснены в предыдущем разделе. При этом производные по  $M_0$  равны производным по  $M$ .

В практике исследований часто рассматривается задача независимого определения из наблюдений среднего движения  $n$  и большой полуоси  $a$  орбиты. Это бывает в тех случаях, когда масса притягивающего центра не известна, и ее желательно определить из наблюдений. Тогда необходимы частные производные от координат или компонент скорости по элементам  $n$  и  $a$ , рассматриваемым как независимые параметры. В этих случаях в приведенных выше формулах для производных по  $n$  следует отбросить вторые слагаемые, а производные по  $a$  вычислять согласно следующим равенствам:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a}, \quad \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{y}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{z}{a}, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} = -\frac{\dot{x}}{2a}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial a} = -\frac{\dot{y}}{2a}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial a} = -\frac{\dot{z}}{2a}.$$



### 3.2.5. Формулы кеплеровского движения относительно несингулярных элементов (элементов Лагранжа)

Кеплеровское движение является простейшим законом движения небесных тел. Выражения для координат и компонент скорости как функций времени следуют из общего решения уравнений движения задачи двух тел. Общее решение зависит также от шести независимых произвольных постоянных. Выбор независимых произвольных постоянных не является однозначным. В предыдущих разделах в качестве произвольных постоянных рассматривались элементы кеплеровской орбиты, которые имеют наглядный геометрический смысл.

Однако в ряде практических задач выбор кеплеровских элементов в качестве параметров орбиты приводит к потере точности при вычислениях с ограниченным числом значащих цифр в значениях искомых переменных. При применениях теории возмущений возникают проблемы, связанные с неравноценным вкладом различных членов в выражениях для возмущений кеплеровских элементов. В конечном счете это также приводит к потере точности теории. Такие проблемы возникают в случаях, когда эллиптическая орбита очень близка к круговой. Круговая орбита является вырождением эллиптической при стремлении эксцентриситета к нулю.

Аналогичная ситуация возникает и при очень малых наклонах орбиты спутника. В этих случаях угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты и долгота узла определяются из наблюдений с пониженной точностью при неизменной точности самих наблюдений.

Преодолеть указанные трудности при малых эксцентриситетах и наклонах кеплеровской орбиты позволяют элементы Лагранжа, выбранные в качестве независимых произвольных постоянных интегрирования в общем решении уравнений задачи двух тел. Рассмотрим ниже формулы, которые позволяют непосредственно из элементов Лагранжа вычислять прямоугольные координаты тела.

Элементы орбиты связывают с произвольной невращающейся системой прямоугольных координат  $x, y, z$ , начало которой либо размещают в центре масс двух тел, либо совмещают с одним из тел.

Для введения элементов Лагранжа воспользуемся принятыми выше обозначениями для кеплеровских элементов орбиты:

- $n$  — среднее движение, размерность радиан/ед. времени;  
 $e$  — эксцентриситет, безразмерный;  
 $i$  — наклон (двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью  $Oxy$ ), рад.;  
 $M_0$  — средняя аномалия в эпоху ( значение средней аномалии  $M$  в начальный момент времени — эпоху ), рад.;  
 $\omega$  — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;  
 $\Omega$  — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости  $Oxy$  между осью  $x$  и линией узлов), рад.;  
 $t_0$  — начальный момент времени — эпоха элементов;  
 $t$  — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

В некоторых случаях вместо среднего движения  $n$  в качестве исходного параметра орбиты рассматривают большую полуось орбиты  $a$ , связанную с  $n$  соотношением

$$a^3 n^2 = \mu, \quad (3.3)$$

где  $\mu$  — гравитационный параметр двух тел.

Средняя аномалия  $M$  в любом случае вычисляется по формуле

$$M = n(t - t_0) + M_0. \quad (3.4)$$

Будем полагать, что для вычисления прямоугольных координат на заданный момент времени известны пять элементов кеплеровской орбиты  $a, e, i, \omega, \Omega$  и средняя аномалия  $M$ . Элементами Лагранжа считаются величины  $a, \bar{\lambda}, k, h, q, p$ , пять из которых определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda} &= M + \omega + \Omega, \\
 k &= e \cos(\omega + \Omega), \quad h = e \sin(\omega + \Omega), \\
 q &= \sin \frac{i}{2} \cos \Omega, \quad p = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega.
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Как указано выше, величина  $\bar{\lambda}$  называется средней долготой и является линейной функцией времени.

Если заданы элементы Лагранжа  $a, \bar{\lambda}, k, h, q, p$ , то прямоугольные координаты  $x, y, z$  и компоненты скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  можно вычислить по следующей последовательности формул.

Сначала вычисляем

$$\begin{aligned} S &= \sin \bar{\lambda}, \quad C = \cos \bar{\lambda}, \\ k' &= k C + h S, \quad h' = k S - h C. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Далее итерациями решаем уравнения

$$C_\nu = \cos \nu, \quad S_\nu = \sin \nu, \quad \nu = h' C_\nu + k' S_\nu, \quad (3.7)$$

полагая в нулевом приближении  $\nu = h'$ .

Вычисляем вспомогательные величины

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \sqrt{1 - k^2 - h^2}}, \quad (3.8)$$

$$S' = \frac{S_\nu - \nu' k' + h'}{1 - k' C_\nu + h' S_\nu}, \quad C' = \frac{C_\nu - \nu' h' - k'}{1 - k' C_\nu + h' S_\nu}, \quad (3.9)$$

$$S_\lambda = S C' + C S', \quad C_\lambda = C C' - S S'. \quad (3.10)$$

Теперь центральное расстояние  $r$  и прямоугольные координаты тела  $x, y, z$  найдутся по формулам

$$r = \frac{a(1 - k^2 - h^2)}{1 + k C_\lambda + h S_\lambda}, \quad (3.11)$$

$$x = r C_\lambda(1 - 2p^2) + 2 r S_\lambda p q,$$

$$y = r S_\lambda(1 - 2q^2) + 2 r C_\lambda p q, \quad (3.12)$$

$$z = 2 r \sqrt{1 - p^2 - q^2}(q S_\lambda - p C_\lambda).$$

Для вычисления компонент скорости необходимо найти вспомогательные величины

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - k^2 - h^2)}}(k S_\lambda - h C_\lambda), \quad (3.13)$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - k^2 - h^2)}}(1 + k C_\lambda + h S_\lambda), \quad (3.14)$$

$$R_x = 2 C_\lambda p q - S_\lambda(1 - 2 p^2),$$

$$R_y = C_\lambda(1 - 2 q^2) - 2 S_\lambda p q, \quad (3.15)$$

$$R_z = 2 \sqrt{1 - p^2 - q^2}(q C_\lambda + p S_\lambda).$$

После этого компоненты скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  вычисляются с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{x}{r} V_r + R_x V_n, \\ \dot{y} &= \frac{y}{r} V_r + R_y V_n, \\ \dot{z} &= \frac{z}{r} V_r + R_z V_n.\end{aligned}\tag{3.16}$$

### 3.2.6. Примеры использования элементов Лагранжа

Укажем здесь два примера, когда элементы Лагранжа нашли удачное применение.

Первый пример — это теория вековых возмущений планет, построенная Лагранжем. В возмущающей функции были оставлены только вековые члены (независящие от долгот планет). С учетом малости эксцентриситетов и взаимных наклонов орбит больших планет Солнечной системы вековая часть возмущающей функции была разложена в степенной ряд относительно эксцентриситетов и взаимных наклонов, и в разложении оставлены члены до второй степени включительно. При этом большие полуоси орбит планет считались неизменными. Относительно элементов Лагранжа удалось записать линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Решение этих уравнений получено Лагранжем в виде суммы тригонометрических функций относительно линейных по времени аргументов. Это позволило описать эволюцию орбит планет на больших промежутках времени и обнаружить интересные свойства взаимных возмущений планет. Хорошее описание метода Лагранжа можно найти в монографии М. Ф. Субботина (Субботин, 1968).

Второй пример является фактически применением метода Лагранжа для построения аналитической теории движения главных спутников Урана (Laskar, Jacobson, 1987). Эта теория до недавнего времени была единственным средством получения самых точных эфемерид главных спутников Урана.

## 3.3. Силовая функция притяжения несферичной планеты

### 3.3.1. Разложение силовой функции

Учет влияния несферичности планеты делается с использованием разложения силовой функции притяжения несферичной плане-

ты в ряд по сферическим функциям. Коэффициенты разложения зависят от того, в какой системе координат относительно тела планеты сделано разложение. Обычно используется система координат, связанная с телом планеты и основной плоскостью, совпадающей с ее экватором. Экватор планеты связывают с осью ее вращения. При этом предполагают, что ось вращения неизменна в теле планеты. Тела больших планет оказываются близкими к осесимметричным телам, вращающимся вокруг оси симметрии. Поэтому основная плоскость системы координат, в которой ведется разложение силовой функции ее притяжения, выбирается так, чтобы третья ось (ось  $z$ ) совпадала с осью симметрии некоторого тела, близкого по форме с планетой.

В литературе встречаются различные формы разложения силовой функции притяжения планет. Приведем здесь формулу, которая была рекомендована Комиссией 7 Международного астрономического союза. Она имеет вид

$$U(r, \varphi, \lambda') = \frac{Gm_0}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n J_n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) (C_{nk} \cos k\lambda' + S_{nk} \sin k\lambda') \right], \quad (3.17)$$

где  $r$ ,  $\varphi$  и  $\lambda'$  — центральное расстояние, широта и долгота точки в системе координат, связанной с планетой,  $P_n(\sin \varphi)$  — полиномы Лежандра,  $P_n^{(k)}(\sin \varphi)$  — присоединенные функции Лежандра, аргументом которых является  $\sin \varphi$ . Значение постоянной  $r_0$  фиксируется заранее равным радиусу круга, наиболее близкого к экваториальному сечению планеты. Тогда постоянные коэффициенты  $J_n$ ,  $C_{nk}$ ,  $S_{nk}$  задают гравитационное поле планеты. Их значения определяют из наблюдений различных типов.

Члены разложения с коэффициентами  $J_n$  называются зональными гармониками.

Во многих работах в разложении силовой функции притяжения несферического тела вместо коэффициентов  $J_n$  используют  $C_{n0} = -J_n$ . Почему в стандартной формуле (3.17) перед зональной частью разложения принято брать знак «минус», объяснено ниже.

### 3.3.2. Притяжение в моделях и для реальных тел

Следует указать на важные свойства членов разложения (3.17). Если тело строго осесимметрично и основная плоскость системы координат перпендикулярна оси симметрии, то в разложении останется только зональная часть с коэффициентами  $J_n$ . Если, кроме того, тело имеет еще и плоскость симметрии, проходящую через начало координат перпендикулярно к оси симметрии, то в разложении остаются только зональные гармоники с четными номерами.

Известно, что большие планеты сжаты у полюсов. Для сжатого тела  $J_2 > 0$ . Именно поэтому в стандартной формуле (3.17) перед зональной частью разложения принято писать «минус». Тогда не будет необходимости задавать значения всех коэффициентов  $J_2$  для больших планет со знаком «минус».

Во многих работах изучается форма поверхности тел. Для этого применяют разные модели. Форма тела косвенно влияет на нецентральность его гравитационного поля, однако поле существенно зависит от распределения масс внутри. В частности, сжатое снаружи тело может создавать вытянутое гравитационное поле. Распространенной и удобной моделью является модель однородного трехосного эллипсоида. Разложение силовой функции однородного трехосного эллипсоида содержит бесконечное число членов, однако, любой коэффициент с нечетным  $n$  или с нечетным  $k$  в разложении (3.17) равен нулю, и все коэффициенты  $S_{nk}$  тоже равны нулю.

Могут оказаться полезными формулы, связывающие коэффициенты некоторых членов разложения силовой функции с размерами однородного эллипсоида. Пусть разложение построено так, что оси системы координат  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ , связанной с телом, направлены по осям эллипсоида, а полуоси равны  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , соответственно. Тогда коэффициенты первых нескольких членов выражаются через полуоси эллипсоида следующим образом:

$$\begin{aligned} -J_2 = C_{20} &= \frac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{10r_0^2}, & C_{22} &= \frac{a^2 - b^2}{20r_0^2}, \\ -J_4 = C_{40} &= 3 \frac{3(a^4 + b^4) + 8c^4 + 2a^2b^2 - 8c^2(a^2 + b^2)}{280r_0^4}, \\ C_{42} &= \frac{(a^2 - b^2)(2c^2 - a^2 - b^2)}{280r_0^4}, & C_{44} &= \frac{(a^2 - b^2)^2}{2240r_0^4}. \end{aligned}$$

Теория потенциала развита в фундаментальных работах (Кондратьев, 2003, 2007). Рассмотрены разложения гравитационных потенциалов для разнообразных моделей тел.

Рассмотрим теперь гравитационные поля больших планет. Отметим, что для Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна с приемлемой точностью известны только значения коэффициентов  $J_2, J_4, J_6$ .

При записи уравнений движения (3.1) никак не фиксируется выбор направления осей координат. Обычно делается попытка связать направления осей с геоэкватором эпохи J2000, то есть с Международной системой небесных координат (ICRF – International Celestial Reference Frame). Следует отметить, что эту связь невозможно осуществить записью уравнений. Привязка системы, в которой отсчитываются координаты спутника, к ICRF может быть сделана только путем уточнения параметров движения спутника так, чтобы его модельное движение оказалось наиболее близким к результатам наблюдений, отсчитываемым в системе ICRF. Только близость результатов наблюдений к таковым в системе ICRF и дальнейшее уточнение орбит спутников на основе наблюдений могут обеспечить близость системы координат к системе ICRF.

Значения коэффициентов разложения силовых функций притяжения некоторых больших планет даны в разделе 2.5 Главы 2.

В уравнениях движения спутников (3.1) фигурирует слагаемое  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$  – функция, задающая вектор ускорения, обусловленного несферичностью планеты. Аргументом этой функции являются координаты спутника в системе координат  $x, y, z$ . Однако в разложении силовой функции (3.17) фигурируют координаты в системе, связанной с телом, в частности, с экватором планеты. Прямоугольные координаты в этой системе обозначим через  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ . Соотношения с координатами, фигурирующими в выражении 3.17, очевидны:

$$\bar{x} = r \cos \varphi \cos \lambda', \quad \bar{y} = r \cos \varphi \sin \lambda', \quad \bar{z} = r \sin \varphi.$$

Для вычисления правых частей уравнений движения (3.1) сначала находят компоненты ускорения  $\mathbf{F} = \{F_{\bar{x}}, F_{\bar{y}}, F_{\bar{z}}\}$  в системе координат  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , жестко связанной с телом. Это делается путем вычисления частных производных

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( U - \frac{Gm_0}{r} \right), \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( U - \frac{Gm_0}{r} \right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( U - \frac{Gm_0}{r} \right) \right\}.$$

Затем компоненты вектора  $\mathbf{F}$  переводятся в систему координат  $x, y, z$  с помощью матрицы перехода

$$\{F_x, F_y, F_z\}^T = \mathbf{R}_0 \{F_{\bar{x}}, F_{\bar{y}}, F_{\bar{z}}\}^T.$$

Здесь при записи координат мы для краткости опускаем индекс, обозначающий номер спутника. Матрица  $\mathbf{R}_0$  непосредственно определяется небесными координатами полюса планеты  $\alpha_0, \delta_0$  и углом ее вращения  $W$ , выраженными в системе координат  $x, y, z$ . Если в качестве основной системы координат принимается ICRF, то параметры  $\alpha_0, \delta_0, W$  можно взять из публикации доклада Рабочей группы по картографическим координатам и элементам вращения Международного астрономического союза (IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements) (Archinal et al., 2018). Эти параметры приведены также в Приложении 6 настоящей книги.

В частном случае, когда планета считается строго осесимметричной, ось  $\bar{x}$  можно направить по линии пересечения экватора планеты с плоскостью  $(x, y)$ . Для определенности это следует сделать так, чтобы ось  $\bar{x}$  была направлена в восходящий узел плоскости  $\bar{x}, \bar{y}$  относительно плоскости  $(x, y)$ . В этом частном случае матрица  $\mathbf{R}_0$  будет иметь вид

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_0 & -\cos \alpha_0 \sin \delta_0 & \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 \sin \delta_0 & \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ 0 & \cos \delta_0 & \sin \delta_0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Поскольку планеты Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун и некоторые другие планеты почти осесимметричны, то часто возникает вопрос, какой из полюсов планеты считать северным. Чтобы избежать путаницы, Рабочей группой по картографическим координатам и элементам вращения Международного астрономического союза принято решение (Archinal et al., 2018) считать северным полюсом планеты тот, который лежит в северной полусфере по отношению к так называемой неизменной плоскости Солнечной системы (The north pole is that pole of rotation that lies on the north side of the invariable plane of the Solar System). Координаты полюса неизменной плоскости Солнечной системы (перпендикуляра к плоскости) в системе ISRF эпохи J2000 равны: прямое восхождение  $\alpha_0 = 273.85$  град, склонение  $\delta_0 = 66.99$  град.



Таблица 3.1. Координаты полюса в системе ISRF эпохи J2000 для некоторых больших планет. Аргумент  $T$  — время в юлианских столетиях (по 36525 суток) от эпохи J2000.

	Прямое восхождение	Склонение
Планета	$\alpha_0$ , град	$\delta_0$ , град
Юпитер	268.056595 - 0.006499 T	64.495303 + 0.002413 T
Сатурн	40.589 - 0.036 T	83.537 - 0.004 T
Уран	257.311	-15.175
Нептун	299.36	43.46

В таблице 3.1 даются небесные координаты полюсов Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Как видно в таблице, для Юпитера и Сатурна известна прецессия полюсов.

Заметим, что северный полюс Урана направлен в южное полушарие небесной сферы, так как склонение полюса отрицательно. Однако вращение планеты вокруг этого северного полюса происходит в обратном направлении (от оси  $y$  к оси  $x$ ), и вектор угловой скорости направлен к южному полюсу.

Приведем здесь выражения для компонент вектора  $\mathbf{F}$  в плането-экваториальной системе координат  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  с учетом только зональных гармоник с коэффициентами  $J_2$  и  $J_4$ .

$$F_{\bar{x}} = \frac{3}{2} Gm_0 J_2 \frac{r_0^2}{r^5} \left( 5 \frac{\bar{z}^2}{r^2} - 1 \right) \bar{x} + \frac{5}{8} Gm_0 J_4 \frac{r_0^4}{r^7} \left( 63 \frac{\bar{z}^4}{r^4} - 42 \frac{\bar{z}^2}{r^2} + 3 \right) \bar{x},$$

$$F_{\bar{y}} = \frac{3}{2} Gm_0 J_2 \frac{r_0^2}{r^5} \left( 5 \frac{\bar{z}^2}{r^2} - 1 \right) \bar{y} + \frac{5}{8} Gm_0 J_4 \frac{r_0^4}{r^7} \left( 63 \frac{\bar{z}^4}{r^4} - 42 \frac{\bar{z}^2}{r^2} + 3 \right) \bar{y},$$

$$F_{\bar{z}} = \frac{3}{2} Gm_0 J_2 \frac{r_0^2}{r^5} \left( 5 \frac{\bar{z}^2}{r^2} - 3 \right) \bar{z} + \frac{5}{8} Gm_0 J_4 \frac{r_0^4}{r^7} \left( 63 \frac{\bar{z}^4}{r^4} - 70 \frac{\bar{z}^2}{r^2} + 15 \right) \bar{z}.$$

При вычислении правых частей уравнений заданными являются координаты спутника в системе координат  $x, y, z$ , а в предыдущие формулы нужно подставлять координаты  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ . Вычислить эти координаты можно используя преобразование

$$\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}^T = \mathbf{R}_0^{-1} \{x, y, z\},$$

где матрица  $\mathbf{R}_0$  определяется соотношением (3.18). Здесь вместо  $\mathbf{R}_0^{-1}$  можно использовать транспонированную матрицу  $\mathbf{R}_0^T$ , поскольку  $\mathbf{R}_0^{-1} = \mathbf{R}_0^T$  в силу ортогональности этих матриц.

### 3.4. Приближенный учет влияния главных спутников на движение далеких спутников планеты

Рассмотрим здесь один прием, который применяется для учета влияния притяжения главных спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна при моделировании движения далеких спутников этих планет. Расстояния далеких спутников до планеты значительно превосходят размеры почти круговых орбит главных спутников, которые движутся почти в плоскости экватора планеты. Приближенно можно принять, что орбиты главных спутников круговые и расположены в плоскости экватора планеты. Периоды обращения главных спутников вокруг планеты значительно меньше периодов обращения далеких спутников. Можно усреднить по времени движение главных спутников при учете их влияния на далекие. Тогда мы заменяем реальные главные спутники на бесконечно тонкие массивные круговые кольца, расположенные в плоскости экватора планеты. Массы колец будут равны массам соответствующих спутников, а радиусы равны радиусам их круговых орбит. В небесной механике подобные кольца называют гауссовыми по имени К. Ф. Гаусса, который впервые ввел их в рассмотрение. Зная массу  $m_c$  и радиус  $r_c$  кольца можно легко найти силовую функцию  $U_c$  его притяжения в форме разложения по сферическим функциям. Получаем:

$$U_c = \frac{Gm_c}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n J_n^{(c)} P_n(\sin \varphi) \right],$$

где коэффициенты  $J_n^{(c)}$  находятся из соотношения

$$J_n^{(c)} = -\frac{r_c^n}{r_0^n} P_n(0).$$

При этом для нечетных значений  $n$  оказывается, что  $P_n(0) = 0$ , а при четных  $n = 2k$ , где  $k$  — целое,  $P_{2k}(0)$  вычисляются по формуле

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k!)}{2^{2k}(k!)^2}.$$

Такой прием замены главных спутников на притягивающие кольца в модели движения далеких спутников был применен в работах (Emelyanov, 2005; Емельянов, Кантер, 2005), где показано, что при точности современных наземных наблюдений эта замена вполне допустима.

### **3.5. Различные подходы и методы построения моделей движения спутников планет**

Движение спутников планет описывается законом движения, который задается функциями, представляющими координаты спутника как функции времени. Получить эти функции можно разными способами. Различными оказываются и способы из отображения. Обычно под функциями понимают аналитические выражения, содержащие операции сложения, умножения, деления, элементарные функции: логарифм, тригонометрические функции, а также специальные функции. Однако закон движения может быть задан табличным описанием функций: численные значения координат на ряд моментов времени.

В теории движения спутников закон движения всегда является решением дифференциальных уравнений движения. Принципиальное различие заключается в способе построения решения. Первый подход заключается в получении аналитического решения, представляемого набором аналитических функций, последовательное вычисление которых позволяет найти координаты небесного тела на любой заданный момент времени. Аналитические методы дают сразу семейство решений, задаваемых различными значениями параметров, буквенно входящих в формулы. Все модели движения семейства описываются одними и теми же формулами. Параметрами движения являются произвольные постоянные аналитического решения дифференциальных уравнений. Выбор произвольных постоянных интегрирования можно сделать различными способами. Один из них — это так называемые начальные условия движения, т. е. значения координат и компонент скорости на некоторый начальный момент времени  $t_0$ .

Пользоваться аналитическим решением можно так: задаем один раз параметры движения. Затем любое число раз задаем любой момент времени. Подставляя его в аналитические функции, представ-

ляющие решение уравнений движения, получаем значения координат и компонент скорости. На каждый момент времени операция одна и та же. Поэтому время вычислений пропорционально количеству моментов, на которые нужно знать координаты, и не зависит от интервала между начальным и конечным моментом.

Получение формул аналитического решения — весьма сложный и трудоемкий процесс. Одно хорошо — сделать это нужно всего один раз. Поскольку точного решения уравнений, кроме нескольких простейших случаев, получить невозможно, то решение всегда получается приближенным. Точность зависит от того, насколько развито аналитическое решение. Чем точнее нужно решение, тем более трудоемким получается процесс его получения. Предел налагают возможности производства аналитических выкладок с огромными формулами.

В этом деле хорошо помогают методы компьютерной алгебры. Однако и эти возможности не беспредельны.

Аналитическое решение дифференциальных уравнений движения получают методами теории возмущений. Этих методов имеется большое разнообразие. Ниже рассмотрены некоторые из них и модели движения спутников планет, построенные таким способом.

Принципиально другим является метод численного интегрирования уравнений. Основной подход заключается в следующем. Задаем на некоторый начальный момент времени координаты и компоненты скорости спутника. Выбираем некоторый момент времени, очень близкий к начальному, и приближенным методом вычисляем координаты и скорость на этот новый момент.

Способов, как это сделать существует много. Главное их свойство — все они приближенные, но чем ближе заданный момент к начальному, тем точнее получается результат. После того, как координаты и скорость найдены на новый момент времени, близкий к начальному, этот момент принимается за начальный и процесс повторяется. Так шаг за шагом по времени добираемся до того момента времени, на который нам и нужно было знать положение и скорость небесного тела. Получили искомый результат, однако для этого пришлось вычислить координаты и скорость на множество промежуточных моментов.

Чем точнее нужен результат, тем меньший шаг приходится выбирать, но тем больше нужно сделать шагов вычислений, чтобы добраться до нужного момента времени. Так что время вычисле-

ний при численном интегрировании дифференциальных уравнений движения пропорционально числу шагов, а число шагов тем больше, чем лучшая нам нужна точность. Уменьшая величину шага до некоторой степени можно улучшить точность. Однако наступает такая ситуация, когда число шагов столь велико, что накопление ошибок при вычислениях из-за ошибок округления чисел при арифметических операциях начинает превалировать над влиянием ошибок получения решения на каждом одном шаге.

В итоге мы имеем предельную точность, которая получается при некотором оптимальном шаге. Улучшить эту предельную точность можно только увеличивая точность представления чисел в компьютере, уменьшая тем самым ошибки округления. Некоторого принципиального улучшения точности можно добиться усовершенствованием методов вычислений на одном шаге.

Принципиальным преимуществом методов численного интегрирования уравнений является то, что для их реализации нужно знать только выражения правых частей дифференциальных уравнений. Принципиальный недостаток этих методов заключается в весьма больших затратах времени вычислений. Всякий раз, когда нужно получать новое решение, приходится запускать процесс численного интегрирования.

К настоящему времени разработано множество методов численного интегрирования уравнений движения. Основные их свойства рассмотрены ниже в Главе 4.

Одним из недостатков методов численного интегрирования является то, что нужно как-то хранить все значения координат на промежуточные моменты времени. Эти моменты фиксируются при численном интегрировании. Их обычно чрезвычайно много. Если потом нужно найти координаты на какой-то момент, который не совпадает ни с одним из тех, что был в процессе численного интегрирования, придется что-то придумывать. Как обычно хранятся результаты численного интегрирования и как они используются, рассмотрено ниже в специальном разделе Главы 4.

Методов построения моделей движения небесных тел к настоящему времени разработано чрезвычайно много. Приемлемый обзор всех этих методов получился бы чрезвычайно большим. В настоящей книге рассмотрены только некоторые из них. Выбор того, что стоит рассмотреть, обоснован только опытом автора.

### 3.6. Модель движения спутника сжатой планеты, основанная на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров

Для больших планет характерно свойство сжатости их фигуры. Это самый главный фактор несферичности. Внешней сжатой форме сопутствует нецентральность гравитационного поля планеты. Поэтому в разложении силовой функции притяжения (3.17) после главного члена  $\frac{Gm}{r}$  доминирует вторая зональная гармоника с коэффициентом  $J_2$ . Разложение специально было записано в такой форме, чтобы этот коэффициент был положительным для больших планет Солнечной системы.

В небесной механике делались разные попытки учета второй зональной гармоники в решении дифференциальных уравнений движения спутника. В ряде работ это называется главной проблемой.

Давно рассматривается модельная задача о движении материальной точки в поле притяжения двух неподвижных центров. Легко видеть, что гравитационное поле двух неподвижных центров по структуре близко полю вытянутого тела. Однако все большие планеты сжаты.

Силовая функция притяжения двух неподвижных центров имеет вид

$$W = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2},$$

где  $m_1, m_2$  — массы центров, а  $r_1, r_2$  — расстояния от притягиваемой массы до каждого из них. Если в прямоугольной системе координат  $x, y, z$  ось  $z$  направить по линии, соединяющей центры притяжения, то выражения расстояний через координаты будут иметь вид

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_2)^2},$$

где  $z_1, z_2$  суть координаты центров на оси аппликат.

Впервые эту задачу для случая плоского движения исследовал и свел к квадратурам Леонард Эйлер (Euler, 1760, 1764). Поэтому задачу двух неподвижных центров называют также *задачей Эйлера*. В начале XX века Гастон Дарбу (Darboux, 1901) указал на возможность обобщения задачи Эйлера в случае плоского движения путем введения комплексно сопряженных масс и мнимого расстояния между ними. Силовая функция притяжения при этом всегда принимает действительные значения, а решение задачи также сводится к квадратурам. Это обобщение Дарбу получил как некоторый

чисто математический результат и не рассматривал возможностей для его практического применения.

В работе (Аксенов, Гребеников, Демин, 1961) и в последующем цикле работ этих авторов рассмотрена задача о пространственном движении материальной точки в поле двух неподвижных центров с комплексно сопряженными массами и мнимым расстоянием между ними. Авторы назвали эту модель *обобщенной задачей двух неподвижных центров*.

Главный интерес задача представляет благодаря тому, что гравитационное поле такой системы двух неподвижных центров близко к полю ньютоновского притяжения сжатой планеты. Покажем это. Положим

$$m_1 = \frac{m}{2}(1 + \sqrt{-1}\sigma), \quad m_2 = \frac{m}{2}(1 - \sqrt{-1}\sigma),$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + \sqrt{-1})]^2},$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - \sqrt{-1})]^2},$$

где  $c$  и  $\sigma$  — действительные параметры. Тогда силовая функция притяжения в такой модели примет вид

$$W = \frac{Gm}{2} \left[ \frac{1 + \sqrt{-1}\sigma}{r_1} + \frac{1 - \sqrt{-1}\sigma}{r_2} \right]. \quad (3.19)$$

Очевидно, что будучи суммой двух комплексно сопряженных величин, силовая функция будет действительной величиной.

Разложим функцию  $W$  в ряд по сферическим функциям. Запишем разложение в виде

$$W = \frac{Gm}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n J'_n P_n(\sin \varphi) \right], \quad (3.20)$$

где  $r_0$  искусственно введенный параметр, а коэффициенты  $J'_n$  определяются соотношениями

$$J'_n = -\frac{1}{2} \left( \frac{c}{r_0} \right)^n \left[ (1 + \sqrt{-1}\sigma)(\sigma + \sqrt{-1})^n + (1 - \sqrt{-1}\sigma)(\sigma - \sqrt{-1})^n \right],$$

$$(n = 2, 3, \dots).$$

В частности, имеем

$$J'_2 = \left(\frac{c}{r_0}\right)^2 (1 + \sigma^2),$$

$$J'_3 = 2\left(\frac{c}{r_0}\right)^3 \sigma(1 + \sigma^2).$$

Если теперь представить силовую функцию притяжения планеты  $U$  в виде  $U = W + R$ , то для  $R$  получим

$$R = -\frac{Gm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n (J_n - J'_n) P_n(\sin \varphi). \quad (3.21)$$

Неопределенными до сих пор параметрами  $c$ ,  $\sigma$  можно распорядиться так, чтобы оказалось

$$J'_2 = J_2, \quad J'_3 = J_3.$$

Тогда сумма в выражении (3.21) будет начинаться с  $n = 4$ , т.е. не будет содержать второй и третьей зональных гармоник. Кроме того, для Земли, Марса, Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна оказывается, что  $|J'_n| < |J_n|$  по крайней мере для  $n = 4, 5, 6$ .

Теперь вспомним, что задача двух неподвижных центров сведена Л. Эйлером к квадратурам. Это решение пригодно также и при силовой функции (3.19). Этим обстоятельством воспользовался Е. П. Аксенов (Аксенов, 1977). Он выполнил обращение квадратур и построил на этой основе новую некеплеровскую промежуточную орбиту спутника сжатой планеты и аналитическую теорию движения искусственных спутников Земли. Теория успешно применялась в течении ряда лет, благодаря тому, что возмущающая функция  $R$  оказалась в 1000 раз меньшей, чем при использовании кеплеровской промежуточной орбиты.

Аналитическая теория движения естественных спутников больших планет также может быть построена на основе решения обобщенной задачи двух неподвижных центров. Это оказывается эффективным, если достаточно учета второй и третьей зональных гармоник в разложении силовой функции притяжения планеты и возмущений первого порядка для остальных возмущающих факторов. Для определения возмущений более высоких порядков такой подход приводит к довольно громоздким выкладкам и оказывается неэффективным.



При необходимости воспользоваться промежуточной орбитой спутника, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров, формулы для вычисления координат и компонент скорости спутника для любого момента времени лучше взять из работы (Аксенов, Емельянов, Тамаров, 1988), где они даются в форме, удобной для программирования вычислений. Кроме того, в этой работе приводится текст вычислительной программы на языке Фортран.

### 3.7. Построение аналитических теорий движения спутника планеты методами теории возмущений

#### 3.7.1. Общая схема теории возмущений

Простейшая модель движения спутника планеты — кеплеровское движение. Модель и закон движения получаются путем точного решения дифференциальных уравнений задачи двух тел. Следующие этапы усовершенствования модели — учет влияния возмущающих факторов. Для этого в уравнения движения добавляются соответствующие дополнительные члены. При этом точное аналитическое решение уравнений найти уже невозможно.

Всегда доступны различные методы численного интегрирования дифференциальных уравнений. Этим методам посвящен специальный раздел данной книги. Другой путь — построение приближенного аналитического решения методами теории возмущений.

Теория возмущений применяется во многих областях науки. Основная идея всюду одна и та же. Различаются лишь формы методов и вид формул. Рассмотрим здесь один из методов теории возмущений в форме, наиболее часто применяемой в небесной механике.

Для простоты и наглядности изложения основной идеи ограничимся рассмотрением механической модели, в которой движение материальной точки описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (3.22)$$

где  $x, y, z$  — координаты материальной точки в некоторой системе прямоугольных координат,  $t$  — время, а  $U$  — силовая функция. Как правило, в практических задачах силовая функция имеет такой вид, при котором точное аналитическое решение уравнений движения найти невозможно.

Основная идея теории возмущений заключается в следующем. Разложим силовую функцию на два слагаемых

$$U = V + R$$

при соблюдении следующих двух условий:

1. После замены в уравнениях движения силовой функции  $U$  на функцию  $V$  может быть найдено их точное общее аналитическое решение.
2. По крайней мере в области рассматриваемого движения выполняется неравенство  $|R| \ll |V|$ .

Разумеется, не в любой задаче такое разбиение возможно. По крайней мере выполнение первого условия уже позволяет формально строить решение первоначальных уравнений (3.22) методами теории возмущений. Однако практический интерес представляют случаи, когда выполняется также и второе условие.

Уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.23)$$

называют уравнениями невозмущенного движения, исходные уравнения (3.22) — уравнениями возмущенного движения, а  $R$  — возмущающей функцией. Исходные уравнения (3.22) можно записать в форме системы шести уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= \frac{\partial(V+R)}{\partial x}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= \frac{\partial(V+R)}{\partial y}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= \frac{\partial(V+R)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где переменные  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  являются искомыми функциями.

Общее решение уравнений невозмущенного движения будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ y &= y(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ z &= z(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{x} &= \dot{x}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  — произвольные постоянные интегрирования.

В методе теории возмущений последние формулы используются как формулы замены переменных  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  на переменные функции времени  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  в уравнениях возмущенного движения (3.24). Заменяются зависимые переменные — искомые функции. В итоге преобразований получают дифференциальные уравнения возмущенного движения относительно новых переменных  $c_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) в виде

$$\frac{dc_i}{dt} = C_i(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (3.26)$$

Точное аналитическое решение этих уравнений так же, как и уравнений (3.22), найти невозможно. Однако они имеют одно очевидное преимущество. Если в уравнениях (3.24) положить  $R = 0$ , то они превратятся в уравнения (3.23), а в соответствующем решении (3.25) аргументы  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  будут постоянными величинами. Следовательно, в преобразованных уравнениях (3.26) правые части окажутся равными нулю. При  $R$ , не равной нулю, и соблюдении второго условия применения теории возмущений  $|R| \ll |V|$  правые части уравнений (3.26) будут содержать множителем некоторый малый параметр. Это позволяет находить приближенное решение уравнений возмущенного движения методом малого параметра. Успех его применения зависит в первую очередь от величины самого малого параметра, то есть от отношения  $|R|/|V|$ . Поэтому при разложении силовой функции  $U$  на два слагаемых  $V$  и  $R$  естественно стремление уменьшить величину  $|R|$  при сохранении первого условия применения методов теории возмущений.

В разнообразных задачах небесной механики вид уравнений движения при применении методов теории возмущений может быть различным, однако общая схема изложенного здесь подхода сохраняется.

### 3.7.2. Обстоятельства в движении реальных небесных тел, позволяющие применять методы теории возмущений

В общем случае при рассмотрении движения произвольного числа небесных тел совсем не очевидно, что выполняются условия применения методов теории возмущений. Однако в соотношениях размеров большинства реальных небесных тел, расстояний между ними и свойствах их движения существует определенная иерар-

хия. Параметры движения планет Солнечной системы и почти всех их спутников удовлетворяют условиям, необходимым для решения уравнений движения методами теории возмущений. Рассмотрим несколько конкретных случаев, которые приводят к фундаментальным задачам теории движения тел Солнечной системы.

Сначала упростим рассмотрение системы Солнца, планет и спутников, полагая, что все эти тела являются материальными точками. Тогда к ним подойдет механическая модель задачи о движении  $n + 1$  материальной точки. Среди этих точек будут Солнце, планеты и их спутники. Поместим начало координат в одну из них. Опишем движение системы  $n + 1$  материальных точек уравнениями относительного движения

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial(V_i + R_i)}{\partial x_i}, \quad \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial(V_i + R_i)}{\partial y_i}, \quad \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial(V_i + R_i)}{\partial z_i}, \quad (3.27)$$

где

$$V_i = \frac{G(m_0 + m_i)}{r_i}, \quad R_i = G \sum_{j=1}^{n'} m_j \left( \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right),$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}, \quad r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2},$$

$$r_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2},$$

$G$  — универсальная гравитационная постоянная,  $x_i, y_i, z_i, m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — прямоугольные координаты и массы тел, соответственно, а  $m_0$  — масса центрального тела. Штрих у знака суммы означает, что отсутствует слагаемое при  $j = i$ .

Рассмотрим несколько практических задач.

### **Планетная задача.**

Будем изучать движение  $n$  планет под действием притяжения Солнца и их взаимного притяжения. Малым влиянием других тел пренебрежем. В уравнениях относительного движения центральным телом будет Солнце. В данном случае для уравнений невозмущенного движения при  $R_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) известно общее решение, так как система уравнений распадается на  $n$  независимых систем уравнений движения двух тел, для каждого из которых известно общее решение. Таким образом, первое условие применения методов теории возмущений выполняется. Проверим те-

перь выполнение второго условия. Рассмотрим отношение  $R_i/V_i$ . Из уравнений относительного движения следует

$$\frac{R_i}{V_i} = \sum_{j=1}^{n'} \frac{m_j}{m_0 + m_i} \left[ \frac{r_i}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j)}{r_j^3} \right]. \quad (3.28)$$

Здесь  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Параметры орбит девяти больших планет таковы, что планеты не испытывают ни тесных сближений с Солнцем, ни тесных взаимных сближений. Поэтому величины  $x_i, y_i, z_i, \Delta_{ij}, r_i$  можно считать величинами примерно одного порядка. С другой стороны, слагаемые в формуле (3.28) имеют множители

$$\frac{m_j}{m_0 + m_i},$$

которые являются малыми параметрами в силу малости масс планет по сравнению с массой Солнца. Таким образом, выполнение второго условия применения методов теории возмущений в планетной задаче обеспечивается малостью масс планет по сравнению с массой Солнца. При решении уравнений возмущенного движения (3.26) в планетной задаче малыми параметрами будут отношения

$$\varepsilon_j = \frac{m_j}{m_0} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

### **Спутниковая задача.**

Рассмотрим движение системы спутников планеты под действием притяжения планеты, Солнца и взаимного притяжения спутников. Притяжением других планет пренебрежем в силу их удаленности. Притяжением Солнца, несмотря на его удаленность, пренебречь нельзя, так как оно имеет большую массу. В уравнениях относительного движения центральным телом будет планета. С ней и совместим начало координат. Солнце будем считать телом номер 1 ( $i = 1$ ). Уравнения при  $i = 1$  рассматривать не будем, так как они определяют относительное движение планеты и Солнца.

В рассматриваемой спутниковой задаче для уравнений невозмущенного движения при  $R_i = 0$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) также известно общее решение, так как система уравнений распадается на независимые системы уравнений движения двух тел. Таким образом, первое условие применения методов теории возмущений выполняется.

Проверим теперь выполнение второго условия. Рассмотрим выражение

$$\frac{R_i}{V_i} = \sum_{j=1}^{n'} \frac{m_j}{m_0 + m_i} \left[ \frac{r_i}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j)}{r_j^3} \right] \quad (3.29)$$

для  $i = 2, \dots, n$ . Малость слагаемых при  $j = 2, \dots, n$  так же, как и в планетной задаче, обеспечивается малостью масс спутников  $m_j$  по сравнению с массой планеты  $m_0$ . Слагаемое при  $j = 1$  (влияние притяжения Солнца) требует особого рассмотрения. Обозначим это слагаемое в величине  $R_i$  через  $(R_i)_1$ , а в величине  $\frac{R_i}{V_i}$  — через  $(\frac{R_i}{V_i})_1$ .

Воспользуемся соотношениями

$$x_i x_1 + y_i y_1 + z_i z_1 = r_i r_1 \cos H_{1i}, \quad \Delta_{i1}^2 = r_i^2 + r_1^2 - 2 r_i r_1 \cos H_{1i}.$$

Здесь  $r_i$  — планетоцентрическое расстояние спутника,  $r_1$  — гелиоцентрическое расстояние планеты, а  $H_{1i}$  — угол между планетоцентрическими направлениями на спутник и на Солнце. Очевидно, что пока спутник остается спутником планеты, отношение  $r_i/r_1$  будет малым. Разложим величину  $\frac{1}{\Delta_{i1}}$ , а затем и  $(R_i)_1$  в ряд по степеням малого параметра  $r_i/r_1$ . Будем иметь

$$(R_i)_1 = G m_1 \frac{1}{r_1} \left[ 1 + \left( \frac{r_i}{r_1} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right) + \dots \right],$$

где невыписанные члены имеют более высокий порядок малости, чем  $\left( \frac{r_i}{r_1} \right)^2$ .

Возмущающая функция  $R_i$  входит в уравнения движения только под знаком частных производных по  $x_i, y_i, z_i$ . Производные от первого слагаемого дадут нуль. Поэтому его можно опустить. Оставляя только самое существенное слагаемое в разложении, получим

$$(R_i)_1 = G m_1 \frac{r_i^2}{r_1^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right).$$

Тогда, пренебрегая массой спутника  $m_i$  по сравнению с массой планеты  $m_0$ , слагаемое в величине  $\frac{R_i}{V_i}$ , обусловленное притяжением Солнца, можно записать в виде

$$\left( \frac{R_i}{V_i} \right)_1 = \frac{m_1}{m_0} \frac{r_i^3}{r_1^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 H_{1i} - \frac{1}{2} \right).$$

Несмотря на то, что масса Солнца  $m_1$  во много раз больше массы планеты  $m_0$ , отношение  $(\frac{R_i}{V_i})_1$  для спутников планет оказывается малой величиной за счет того, что расстояния спутников до планеты  $r_i$  малы по сравнению с расстоянием  $r_1$  планеты до Солнца. Таким образом, выполнение второго условия применения методов теории возмущений в спутниковой задаче обеспечивается малостью масс спутников  $m_2, m_3, \dots, m_n$  по сравнению с массой планеты  $m_0$ , а также малостью расстояний спутников до планеты по сравнению с расстоянием планеты до Солнца. При решении уравнений возмущенного движения (3.26) в спутниковой задаче используются следующие малые параметры:

$$\varepsilon'_j = \frac{m_1}{m_0} \frac{r_j^3}{r_1^3} \quad (j = 2, 3, \dots, n).$$

Здесь расстояния  $r_j$  ( $j = 2, 3, \dots, n$ ) изменяются во времени. Чтобы параметры были действительно постоянными, изменяющиеся расстояния заменяют на приближенные их значения, равные большим полуосям кеплеровских орбит, которые используются как нулевое приближение модели движения. Можно также использовать средние движения кеплеровского движения. Тогда малыми параметрами будут

$$\varepsilon'_j = \frac{m_1}{m_0} \frac{a_j^3}{a_1^3} = \frac{n_1^2}{n_j^2} \quad (j = 2, 3, \dots, n),$$

где  $a_1, a_j$  — большие полуоси, а  $n_1, n_j$  — средние движения.

### **Задача о движении спутника несферичной планеты.**

Рассмотрим теперь пример движения в задаче двух тел, когда одно из тел (спутник) можно считать материальной точкой, а другое (планета) создает гравитационное поле, отличное от гравитационного поля материальной точки или шара со сферическим распределением плотности. Уравнения движения спутника в этом случае можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial(V+R)}{\partial z}, \quad (3.30)$$

где

$$V = \frac{G m}{r}, \quad R = \frac{G m}{r} J X(x, y, z),$$

$x, y, z$  — планетоцентрические прямоугольные координаты спутника,  $m$  — масса планеты,  $G$  — универсальная гравитационная по-

стоянная,  $r$  определяется выражением  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $J$  — постоянный параметр, а  $X(x, y, z)$  — некоторая известная функция. Последними двумя величинами можно распорядиться так, чтобы функция  $X(x, y, z)$  в области движения спутника принимала значения, немного отличающиеся от единицы. Параметр  $J$  в этом случае будет характеризовать отличие планеты от шара с концентрическим распределением плотности. Известные гравитационные поля Земли, других планет и многих естественных спутников планет мало отличаются от поля притяжения материальной точки. Поэтому условия применимости методов теории возмущений в данном случае также выполняются, а  $J$  является характерным малым параметром.

Формы больших планет и их основных спутников близки к форме сжатого осесимметричного тела. Поэтому в качестве параметра  $J$  берется коэффициент при второй зональной гармонике разложения силовой функции притяжения планеты в ряд по сферическим функциям.

### **Другие случаи применения теории возмущений.**

Рассмотренные выше конфигурации небесных тел являются лишь примерами многочисленных применений теории возмущений в небесной механике. Отметим здесь еще только одну группу задач, когда в качестве невозмущенного движения рассматривается частное решение уравнений движения. Возмущенное движение происходит вблизи этого частного решения. Малые параметры в таких задачах характеризуют разности координат в возмущенном и невозмущенном движениях, а дополнительным условием применимости теории возмущений является сохранение малости этих разностей по крайней мере на исследуемом интервале времени.

При рассмотрении различных малых параметров в задачах небесной механики следует выделять параметры, которые характеризуют малость возмущающей функции. Возмущающая функция может разлагаться в ряды по степеням также и других малых параметров. Это часто делается для обеспечения возможности решения дифференциальных уравнений возмущенного движения в форме (3.26).

Отметим еще случаи, когда силы, действующие на небесное тело, не имеют силовой функции. Примером таких сил служат силы, вызванные приливной деформацией вязко-упругих тел планеты и



спутника. В таких случаях исходные уравнения движения в прямоугольных координатах записываются в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = V_x + R_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = V_y + R_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = V_z + R_z, \quad (3.31)$$

где слагаемые  $V_x, V_y, V_z$  должны выбираться так, чтобы можно было найти общее решение уравнений движения при отбрасывании слагаемых  $R_x, R_y, R_z$ . Эти последние слагаемые называются компонентами возмущающего ускорения. Для возможности применения теории возмущений необходимо, чтобы  $R_x, R_y, R_z$  были малы по сравнению с компонентами основного ускорения  $V_x, V_y, V_z$ .

### 3.7.3. Уравнения относительно элементов промежуточной орбиты

Уравнения возмущенного движения небесного тела в теории возмущений в общем виде уже были построены выше. Чтобы изложение было непрерывным, будем исходить снова из уравнений движения в прямоугольных координатах

Для простоты понимания общей схемы теории возмущений ограничимся случаем движения одного небесного тела под действием сил, имеющих силовую функцию.

Исходные уравнения движения в прямоугольных координатах имеют общий вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (3.32)$$

где  $V$  и  $R$  являются функциями от координат  $x, y, z$  и времени  $t$ . Согласно теории возмущений слагаемое  $V$  выбирается так, чтобы можно было найти общее решение уравнений невозмущенного движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (3.33)$$

Тогда  $R$  называется возмущающей функцией.

Воспроизведем здесь для удобства изложения повторно некоторые соотношения из общей схемы теории возмущений.

Предположим, что решение уравнений (3.33) найдено в форме

$$\begin{aligned}
 x &= x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\
 y &= y(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\
 z &= z(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\
 \dot{x} &= \dot{x}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\
 \dot{y} &= \dot{y}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\
 \dot{z} &= \dot{z}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),
 \end{aligned}
 \tag{3.34}$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  — произвольные постоянные интегрирования.

На этом вспомогательная роль уравнений (3.33) заканчивается. Достаточно того, что они породили нам соотношения (3.34). Далее эти соотношения рассматриваются как формулы преобразования, связывающие координаты и компоненты скорости тела в возмущенном движении с некоторыми новыми неизвестными функциями времени  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ . Соотношения (3.34) используют как формулы замены переменных в уравнениях (3.32) от переменных  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  к переменным  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ . Таким образом получают новые уравнения возмущенного движения

$$\frac{dc_i}{dt} = C_i(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6),
 \tag{3.35}$$

преимущества которых в том, что правые части этих уравнений обращаются в нули, если в исходных уравнениях (3.32) положить  $R = 0$ . Это позволяет решать их методом малого параметра.

Формулы (3.34), если в них  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  считаются заданными постоянными, определяют закон движения, который называют промежуточной орбитой. Сами эти формулы называются формулами промежуточной орбиты. Уравнения (3.35) называются уравнениями для элементов промежуточной орбиты.

Успех дальнейших действий существенно зависит от того, как выбраны произвольные постоянные  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ . Выбирать их можно бесконечным числом способов. В практике исследователей за последние три столетия были рассмотрены и успешно применялись множество вариантов. Рассмотрим здесь один из них, который имел большое число применений.

В качестве силовой функции невозмущенного движения  $V$  выбираем силовую функцию задачи двух тел, рассматриваемых здесь

как материальные точки. Такой выбор обусловлен общей иерархией в движении тел Солнечной системы. Движение каждой планеты происходит под действием притяжения Солнца. Влияние других планет относительно слабо. Спутник потому и является спутником планеты, поскольку движется под действием ее притяжения. Другие спутники и даже Солнце лишь слегка искажают движение.

Таким образом, в данном рассмотрении мы имеем

$$V = \frac{\mu}{r}, \quad (3.36)$$

где  $\mu$  — постоянная, а  $r$  — расстояние между двумя телами. Чаще всего начало координат помещают в одно из тел, которому присвоим номер 0. Тогда  $\mu = G(m_0 + m_1)$ , где  $G$  — универсальная гравитационная постоянная, а  $m_0 + m_1$  — сумма масс тел. В случае, когда начало координат располагается в барицентре двух тел, имеем  $\mu = G \frac{m_0^3}{(m_0 + m_1)^2}$ .

Решение задачи двух тел описывает движение, которое называется кеплеровским, поскольку происходит по законам Кеплера. Поскольку мы рассматриваем движение тел Солнечной системы, имеющее определенную иерархию, ограничимся эллиптическим типом движения. В соответствии с кеплеровским движением выбирают и произвольные постоянные, которые называются кеплеровскими орбитальными элементами. Перечислим здесь кеплеровские элементы, а также связанные с ними моменты времени.

$n$  — среднее движение, размерность радиан/ед. времени;

$e$  — эксцентриситет, безразмерный;

$i$  — наклон (двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью  $Oxy$ ), рад.;

$M_0$  — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии  $M$  в начальный момент времени — эпоху), рад.;

$\omega$  — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;

$\Omega$  — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости  $Oxy$  между осью  $x$  и линией узлов), рад.;

$t_0$  — начальный момент времени — эпоха элементов;

$t$  — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

Наряду со средним движением  $n$  в качестве параметра орбиты будем рассматривать также большую полуось орбиты  $a$ , связанную с  $n$  третьим законом Кеплера

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

Замену переменных в уравнениях (3.32) делают с помощью формул кеплерского движения. Эти формулы описаны в предыдущих разделах. Частные производные от возмущающей функции  $R$  по координатам выражаются через частные производные по кеплеровским элементам. Процедура такой замены подробно описана в книге (Дубошин, 1975). Процедура называется «основной операцией».

Применение теории возмущений оказывается проще, если в качестве новых искомым функций взять величины  $a, e, i, M, \omega, \Omega$ . Вместо средней аномалии в эпоху  $M_0$  взята средняя аномалия  $M$ , которая в кеплеровском движении является известной линейной функцией времени

$$M = M_0 + n(t - t_0).$$

Для краткости записи уравнений для элементов промежуточной орбиты сделаем простые переобозначения:

$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_2 = e, \quad \alpha_3 = i, \quad \beta_1 = M, \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega. \quad (3.37)$$

В результате замены переменных уравнения возмущенного движения небесного тела можно записать в следующем общем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i}{dt} &= \sum_{j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j}, \\ \frac{d\beta_i}{dt} &= n_i - \sum_{j=1}^3 a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

В этих уравнениях  $n_i, a_{ij}$  — функции, зависящие только от элементов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и постоянной  $\mu$ . В случае кеплеровской промежуточной орбиты  $n_1, n_2$ , а также некоторые из девяти функций  $a_{ij}$ , равны нулю. Однако это обстоятельство не упрощает решение

уравнений. Запись уравнений (3.38) в таком общем виде позволяет применять их также для некоторых некеплеровских промежуточных орбит. Методы решения этих уравнений рассмотрены в следующих разделах.

Заметим, что в уравнениях (3.38) возмущающая функция  $R$  обозначена той же буквой, что и в уравнениях (3.32). Однако здесь она является функцией от элементов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  и времени  $t$ .

Рассмотрим теперь явный вид уравнений для элементов промежуточной орбиты в случае элементов (3.37)

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Множители в правых частях уравнений можно заменить согласно соотношениям

$$\frac{1}{na^2} = \frac{na}{\mu}, \quad \frac{1}{na} = \frac{na^2}{\mu}. \quad (3.41)$$

В практической небесной механике применяются и другие варианты элементов кеплеровской промежуточной орбиты. Особого внимания заслуживают два из них. Орбиты множества естественных спутников планет являются почти круговыми и лежат вблизи плоскости экватора планеты. В таких случаях положение спутника на орбите в первую очередь определяется средней долготой  $\lambda$ , а ориентация орбиты — долготой перигентра  $\varpi$ . Эти величины связаны с  $M, \omega, \Omega$  соотношениями

$$\lambda = M + \omega + \Omega, \quad \varpi = \omega + \Omega. \quad (3.42)$$

Для обратных орбит вместо суммы  $\omega$  и  $\Omega$  используется их разность. Уравнения составляются относительно функций  $\lambda$ ,  $\varpi$  и  $\Omega$ . Элементами промежуточной орбиты считаются  $\varpi$ ,  $\Omega$  и  $\lambda_0$  – средняя долгота в эпоху  $t_0$ . В этом случае вместо уравнений (3.39), (3.40) нужно решать уравнения

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial \varpi}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + e \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Правые части уравнения для  $i$  и  $\Omega$  имеют особенности при  $i = 0$ , а правые части уравнений для  $e$  и  $\omega$  имеют особенности при  $e = 0$ . Эти обстоятельства требуют особого внимания при решении уравнений.

Заметим, что во многих русскоязычных публикациях и учебниках вместо  $\varpi$  для обозначения долготы перицентра используется буква  $\pi$ .

Теперь рассмотрим вариант элементов промежуточной орбиты, при которых уравнения не имеют особенностей при эксцентриситете и наклоне орбиты, равных нулю. Такие элементы придумал Лагранж для изучения вековых возмущений планет. Они теперь так и называются – элементы Лагранжа. Уравнения для  $a$  и  $\lambda$  не имеют особенностей, а остальные элементы нужно заменить. Обычно элементы Лагранжа обозначаются в литературе через  $h, k, p, q$ . С рассмотренными выше элементами они связаны соотношениями

$$h = e \sin \varpi, \quad k = e \cos \varpi, \quad (3.45)$$

$$p = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega. \quad (3.46)$$

После замены переменных уравнения для элементов Лагранжа будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \left( \frac{\partial R}{\partial k} - \frac{h}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) + \frac{k \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{dk}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \left( -\frac{\partial R}{\partial h} - \frac{k}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) - \\ &\quad - \frac{h \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p}{2na^2 \sqrt{1-e^2} \cos i \cos^2 \frac{i}{2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right), \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial p} - \\ &\quad - \frac{q}{2na^2 \sqrt{1-e^2} \cos i \cos^2 \frac{i}{2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Для полного состава к ним нужно добавить уже приведенные выше уравнения

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + e \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \end{aligned} \quad (3.49)$$

В правых частях уравнений (3.47), (3.48), (3.49) содержатся частные производные от возмущающей функции по величинам, которые не являются искомыми функциями в этих уравнениях. Это нормально. Так следует оставить. Дело в том, что возмущающая функция получается сначала, как функция от переменных  $a, e, i, \lambda, \varpi, \Omega$ . Поэтому лучше сначала ее продифференцировать по этим элементам, а потом переходить к переменным  $h, k, p, q$  уже в полученных производных.

Заметим, что в публикациях встречаются несколько вариантов введения в рассмотрение элементов Лагранжа в зависимости от желаемого эффекта. Выше в разделе 3.2.5 мы рассмотрели один из таких вариантов, в данном разделе — другой.

### 3.7.4. Решение уравнений для элементов промежуточной орбиты. Метод малого параметра

Рассмотрим метод решения уравнений (3.38). Это наиболее часто применяемые уравнения. В случаях использования других вариантов элементов промежуточной орбиты спутника решение строится аналогично.

Метод решения основан на малости возмущающей функции  $R$  по сравнению с функцией  $V$ , поэтому он называется методом малого параметра. В литературе этот метод называется методом малого параметра А. Пуанкаре.

Для изложения метода малого параметра нужно ввести понятие порядка малости. Введение порядка малости неоднозначно. Дело в том, что на практике возмущающая функция  $R$ , выраженная через элементы промежуточной орбиты, содержит множество членов — слагаемых, разных по величине. Для выражения возмущающей функции применяют разложения в ряды по степеням различных малых параметров.

Присвоение каждому слагаемому того или иного порядка малости является иногда условным. При построении решения многократно перемножаются величины разных порядков малости. Чаще всего заранее полагается максимальный учитываемый порядок малости. В каждой конкретной теории движения имеются свои особенности. Величины малых параметров определяются как физическими свойствами небесных тел, так и соотношениями между их взаимными расстояниями.

Для общего изложения метода мы примем, что малость возмущающей функции обеспечивается некоторым малым параметром, содержащимся в ней как общий множитель. Будем считать этот параметр первого порядка малости. На практике возмущающая функция оказывается разложенной по степеням этого и других малых параметров. Таким образом, ее разложение начнется с члена первого порядка малости.

Для краткости изложения не будем выписывать явно сами малые параметры. Однако каждой величине будет присвоен определенный порядок малости. Этот порядок будем записывать с помощью верхнего индекса величины в круглых скобках. Теперь разложение возмущающей функции будет иметь вид

$$R = R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)} + \dots \quad (3.50)$$



Введем еще обозначения

$$\begin{aligned}
 A_i &= \sum_{j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial R}{\partial \beta_j} , \\
 B_i &= - \sum_{j=1}^3 a_{ji} \frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \\
 &(i = 1, 2, 3) .
 \end{aligned}
 \tag{3.51}$$

Теперь уравнения для элементов промежуточной орбиты запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{d\alpha_i}{dt} &= A_i^{(1)} + A_i^{(2)} + \dots , \\
 \frac{d\beta_i}{dt} &= n_i^{(0)} + n_i^{(1)} + \dots + B_i^{(1)} + B_i^{(2)} + \dots , \\
 &(i = 1, 2, 3) .
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

Заметим, что в частном случае кеплеровской промежуточной орбиты  $n_2 = n_3 = 0$  и  $n_1^{(s)} = 0$  при  $s > 1$ . В последних уравнениях правые части зависят от искомым функций  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  и явно от времени.

Каждое из слагаемых  $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}$  ( $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots$ ) зависит от всех шести элементов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Слагаемые  $n_i^{(0)} + n_i^{(1)} + \dots$  зависят только от  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Будем искать решение уравнений (3.52) в виде рядов по степеням малых параметров, т.е.

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \alpha_i^{(0)} + \alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} + \dots , \\
 \beta_i &= \beta_i^{(0)} + \beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)} + \dots , \\
 &(i = 1, 2, 3) .
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

Здесь мы рассматриваем построение формального решения. Доказательства существования такого решения и сходимости построенных рядов можно найти в книгах (Дубошин, 1975; Субботин, 1968).

Итак, подставим ряды (3.53) в уравнения (3.52). Затем приравняем в левой и правой частях уравнений члены одинакового порядка малости. Каждое из слагаемых в правых частях этих уравнений

придется разложить в ряд Тейлора по степеням малого параметра. Разложение делается по схеме

$$f(a + \varepsilon) = f(x)|_{x=a} + \frac{1}{1!} \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=a} \varepsilon + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2f}{dx^2} \right)_{x=a} \varepsilon^2 + \dots,$$

где  $a$  — значение аргумента функции  $f(x)$ , относительно которого отсчитывается малое приращение  $\varepsilon$ . Таким образом, в аргументах функций  $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, n_i^{(j)}$  ( $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots$ ) приращениями будут бесконечные суммы  $\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} + \dots$ ,  $\beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)} + \dots$ .

Для членов нулевого порядка малости получим

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i^{(0)}}{dt} &= 0, \\ \frac{d\beta_i^{(0)}}{dt} &= (n_i^{(0)})_0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Здесь и далее символы  $(\dots)_0$  обозначают значения функций при значениях элементов  $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$ .

Решение уравнений (3.54) тривиально:

$$\alpha_i^{(0)} = \alpha_{i0}^{(0)}, \quad \beta_i^{(0)} = (n_i^{(0)})_0(t - t_0) + \beta_{i0}^{(0)}. \quad (3.55)$$

Здесь  $\alpha_{i0}^{(0)}, \beta_{i0}^{(0)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — произвольные постоянные интегрирования. При этом постоянные  $(n_i^{(0)})_0$  зависят от  $\alpha_{i0}^{(0)}$ . Решение (3.55) описывает промежуточное невозмущенное движение.

Теперь выделим и приравняем в правых и левых частях уравнений (3.52) члены первого порядка малости с учетом (3.53). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i^{(1)}}{dt} &= (A_i^{(1)})_0, \\ \frac{d\beta_i^{(1)}}{dt} &= (B_i^{(1)})_0 + (n_i^{(1)})_0 + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$(i = 1, 2, 3)$ .

Здесь  $(A_i^{(1)})_0, (B_i^{(1)})_0$  являются известными функциями времени  $t$  в силу подстановок  $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}, \beta_i = \beta_i^{(0)}$  и равенств (3.55). Заметим, что произвольные постоянные  $\alpha_{i0}^{(0)}, \beta_{i0}^{(0)}$  входят сюда буквенно, их значения пока не определены.

Решение первых трех из шести уравнений (3.56) имеет вид

$$\alpha_i^{(1)} = \int (A_i^{(1)})_0 dt + \alpha_{i0}^{(1)} \quad (3.57)$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

где  $\alpha_{i0}^{(1)}$  — новые произвольные постоянные интегрирования. Можно оставить эти постоянные в решении присутствовать буквенно и распорядиться их значениями позже. Однако они излишни, и их можно сразу положить равными нулю. Именно так мы и поступим для дальнейших построений.

Чтобы построить решение, нужно взять неопределенный интеграл в правой части соотношения (3.57). Для этого в конкретных случаях разрабатываются специальные методы разложения возмущающей функции. Допустим, что это удалось. Тогда  $\alpha_i^{(1)}$  и правые части остальных трех уравнений (3.56) становятся известными функциями времени. Теперь решение для  $\beta_i^{(1)}$  выражается через неопределенный интеграл

$$\beta_i^{(1)} = \int \left[ (B_i^{(1)})_0 + (n_i^{(1)})_0 + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \right] dt + \beta_{i0}^{(1)} \quad (3.58)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Здесь произвольные постоянные интегрирования  $\beta_{i0}^{(1)}$  можно положить равными нулю.

Аналогично строится решение для членов второго порядка малости. Сначала находим

$$\alpha_i^{(2)} = \int \left[ (A_i^{(2)})_0 + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} \right] dt + \alpha_{i0}^{(2)} \quad (3.59)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Произвольные постоянные  $\alpha_{i0}^{(2)}$  полагаем равными нулю. Подынтегральное выражение в (3.59) оказывается известной функцией вре-

мени  $t$ . Допустим, что эту функцию удалось проинтегрировать. Тогда решение для  $\beta_i^{(2)}$  выражается в виде

$$\begin{aligned} \beta_i^{(2)} = & \int \left[ (B_i^{(2)})_0 + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \right. \\ & + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \alpha_j} \right)_0 \alpha_j^{(1)} + \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial^2 n_i^{(0)}}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \right)_0 \alpha_j^{(1)} \alpha_k^{(1)} \right] dt + \beta_{i0}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.60)$$

$(i = 1, 2, 3)$ .

Произвольные постоянные  $\beta_{i0}^{(2)}$  также полагаем равными нулю.

Таким образом, последовательно находится решение для членов следующих порядков малости. Всякий раз нужно интегрировать новую известную функцию времени, а новые излишние произвольные постоянные полагать равными нулю. Так как при получении подынтегральных выражений в правых частях уравнений делались подстановки  $\alpha_i = \alpha_i^{(0)}$ ,  $\beta_i = \beta_i^{(0)}$ , то с учетом (3.55) все слагаемые рядов (3.53) оказываются зависимыми от произвольных постоянных  $\alpha_{i0}^{(0)}$ ,  $\beta_{i0}^{(0)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). В результате мы получаем решение уравнений возмущенного движения как функции времени  $t$  и шести независимых произвольных постоянных

$$\begin{aligned} \alpha_i = & \alpha_i(\alpha_{10}^{(0)}, \alpha_{20}^{(0)}, \alpha_{30}^{(0)}, \beta_{10}^{(0)}, \beta_{20}^{(0)}, \beta_{30}^{(0)}) , \\ \beta_i = & \beta_i(\alpha_{10}^{(0)}, \alpha_{20}^{(0)}, \alpha_{30}^{(0)}, \beta_{10}^{(0)}, \beta_{20}^{(0)}, \beta_{30}^{(0)}) \end{aligned} \quad (3.61)$$

$(i = 1, 2, 3)$ .

### 3.7.5. Решение уравнений для элементов промежуточной орбиты. Способ Пуассона

Применение метода малого параметра в том порядке, как описано выше, приводит к некоторым принципиальным осложнениям, которые следуют из свойств разложения возмущающей функции. Этих осложнений можно избежать, если применить прием, предложенный еще французским математиком Пуассоном. Проблема возникает на этапе получения возмущений второго порядка методом малого параметра Пуанкаре.

Уравнения для элементов промежуточной орбиты мы рассматриваем в виде (3.52). Решение этих уравнений ищем в виде рядов по степеням малых параметров (3.53).

Возмущения второго порядка в элементах  $\alpha_i$  находятся по формулам (3.59). Произвольные постоянные  $\alpha_{i0}^{(2)}$  можно положить равными нулю, так как они входят в решение уравнений (3.52) аддитивно вместе с произвольными постоянными, появляющимися в членах других порядков малости. Подынтегральная функция в (3.59) оказывается известной функцией времени. Если эту функцию удалось проинтегрировать, то возмущения второго порядка в элементах  $\beta_i$  найдутся по формуле (3.60).

Рассмотрим в подынтегральных выражениях последних двух формул слагаемые

$$\left( \frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)}, \quad \left( \frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \beta_j^{(1)} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.62)$$

После подстановки в уравнения для элементов промежуточной орбиты возмущающей функции в форме (3.65) (см. ниже) становится ясно, что левые множители в выражениях (3.62) могут содержать только периодические члены. С другой стороны, мы получили ранее, что в возмущениях первого порядка  $\beta_j^{(1)}$  могут содержаться как периодические, так и вековые, т.е. линейные по времени члены. Произведение периодических членов на вековые даст в подынтегральном выражении смешанные члены, что после интегрирования приведет к появлению в решении смешанных членов в возмущениях второго порядка. Смешанными членами мы называем произведения вида  $t \sin at$ , где  $t$  — время, а  $a$  — постоянная. Появление таких выражений в возмущениях второго порядка является следствием применяемого метода. Это не означает неизбежного неограниченного возрастания возмущений во времени, так как таким образом мы получаем только начальные члены разложения возмущений по степеням малых параметров. Полный ряд, представляющий возмущения, может оказаться разложением ограниченной функции на бесконечном интервале времени.

Оказывается, существует способ, основная идея которого была предложена еще французским математиком Пуассоном, позволяющий исключить в решении смешанные члены по крайней мере второго, а возможно и более высоких порядков малости. Рассмотрим

этот способ в приложении к уравнениям возмущенного движения (3.52).

Предположим, что все возмущения элементов  $\alpha_i$  не содержат вековых и смешанных членов и все возмущения элементов  $\beta_i$  не содержат смешанных членов по крайней мере до некоторого порядка малости. Однако возмущения элементов  $\alpha_i$  могут содержать периодические, а элементов  $\beta_i$  — периодические и вековые члены любых порядков. Обозначим суммы вековых членов данного порядка малости  $k$  через  $\bar{\alpha}_i^{(k)}, \bar{\beta}_i^{(k)}$  а суммы периодических членов порядка  $k$  через  $\tilde{\alpha}_i^{(k)}, \tilde{\beta}_i^{(k)}$ . Теперь представим разложение искомого решения уравнений возмущенного движения в виде

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \bar{\alpha}_i^{(0)} + \tilde{\alpha}_i^{(1)} + \tilde{\alpha}_i^{(2)} + \dots, \\ \beta_i &= \bar{\beta}_i^{(0)} + \bar{\beta}_i^{(1)} + \bar{\beta}_i^{(2)} + \dots + \tilde{\beta}_i^{(1)} + \tilde{\beta}_i^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (3.63)$$

$(i = 1, 2, 3).$

Как было показано выше, по крайней мере  $\bar{\alpha}_i^{(1)} = 0$  для  $i = 1, 2, 3$  и возмущения первого порядка всех элементов не содержат смешанных членов.

По методу малого параметра нужно делать разложение правых частей уравнений по степеням малого параметра по схеме

$$f(a + \varepsilon) = f(x)|_{x=a} + \frac{1}{1!} \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=a} \varepsilon + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2f}{dx^2} \right)_{x=a} \varepsilon^2 + \dots,$$

где  $a$  — значение аргумента функции  $f(x)$ , относительно которого отсчитывается малое приращение  $\varepsilon$ . Согласно способу Пуассона центрами разложения ( $a$ ) считаются  $\bar{\alpha}_i^{(0)}$  и бесконечные суммы  $\bar{\beta}_i^{(0)} + \bar{\beta}_i^{(1)} + \bar{\beta}_i^{(2)} + \dots$  вековых членов, а приращениями ( $\varepsilon$ ) — бесконечные суммы  $\tilde{\alpha}_i^{(1)} + \tilde{\alpha}_i^{(2)} + \dots, \tilde{\beta}_i^{(1)} + \tilde{\beta}_i^{(2)} + \dots$  периодических слагаемых.

При этих предположениях вместо выражений (3.62), входящих в формулы для возмущений второго порядка, мы будем иметь

$$\left( \frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \tilde{\beta}_j^{(1)}, \quad \left( \frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \right)_0 \tilde{\beta}_j^{(1)} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.64)$$

Эти выражения представляют собой произведения сумм периодических членов. Таким образом, в возмущениях второго порядка исключены смешанные члены.

Легко показать, что если все возмущения элементов  $\alpha_i$  не содержат вековых и смешанных членов и все возмущения элементов  $\beta_i$  не содержат смешанных членов по крайней мере до порядка малости  $(k - 1)$  включительно, то все возмущения порядка  $k$  не будут содержать смешанных членов, но могут быть вековые.

### 3.8. Разложение возмущающей функции относительно элементов промежуточной орбиты спутника планеты

Во всех предыдущих разделах возмущающая функция рассматривалась как функция от координат небесного тела. Теперь для применения теории возмущений и метода малого параметра необходимо выразить ее через элементы промежуточной орбиты. При этом выражение должно иметь такой вид, чтобы интегралы по времени, возникающие в теории возмущений, можно было получить в аналитическом виде. Общий подход заключается в том, чтобы привести результаты интегрирования к виду

$$\int \cos(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t + \beta),$$

где  $\alpha, \beta$  — постоянные.

Для каждого типа возмущающих факторов это разложение имеет специальный вид. Рассмотрим здесь разложения возмущающей функции в теории движения спутника планеты для основных факторов — притяжения других тел и несферичности планеты. Выводы таких разложений чрезвычайно сложны и объемны. Мы воздержимся от того, чтобы демонстрировать эти выводы здесь. Ниже даны ссылки на работы, где можно найти соответствующие выкладки и результаты. Приведем здесь самый общий вид разложения возмущающей функции

$$R = \bar{R} + \sum \left( R_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n}^{(s)} \sin D_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n} + R_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n}^{(c)} \cos D_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n} \right), \quad (3.65)$$

где

$$D_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n} = k_1 M + k_2 \omega + k_3 \Omega + j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + \dots + j_n \lambda_n.$$

Суммирование ведется по индексам  $k_1, k_2, k_3, j_1, j_2, \dots, j_n$ . Здесь коэффициенты  $\bar{R}, R_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n}^{(s)}, R_{k_1 k_2 k_3 j_1 j_2 \dots j_n}^{(c)}$  зависят от элементов  $a, e, i$  и не зависят от  $M, \omega, \Omega$  и времени  $t$ . Величины  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  суть известные линейные функции времени. Слагаемое  $\bar{R}$  называется вековым членом разложения возмущающей функции. Все эти коэффициенты и величины содержат параметры, характеризующие возмущающие факторы. В частности,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  описывают орбитальные движения или вращения других тел.

Легко показать, что подставляя в таком виде возмущающую функцию в уравнения теории возмущений, которые рассмотрены выше, получающиеся интегралы по времени будут «берущимися». В возмущениях первого порядка малости будут получаться только вековые и периодические члены, но в возмущениях более высоких порядков могут появляться также смешанные члены вида

$$t \cos(\alpha t + \beta).$$

В теории движения спутника планеты учитывается притяжение других спутников этой же планеты, а также и притяжение Солнца. Система дифференциальных уравнений относительного движения имеет тот же вид, берется ли в качестве доминирующего притягивающего тела Солнце или планета. Поэтому в теории движения спутника принимается, что Солнце движется вокруг планеты, как и другие спутники. Притяжение других планет учесть в аналитической теории гораздо сложнее. Мы здесь этот весьма слабый эффект не рассматриваем.

Рассмотрим здесь возмущающую функцию, обусловленную несферичностью планеты. Воспользуемся выводом и результатами работы (Брумберг, 1967).

При выводе формулы исходят из выражения возмущающей функции через координаты, которое дано выше (3.17). При этом система прямоугольных координат связана с телом планеты, основная плоскость — с экватором планеты, которая в реальных случаях больших планет близка к осесимметричному телу. Фактически ось  $z$  берется совпадающей с осью динамической симметрии. Выражение (3.17) содержит угол вращения планеты  $S$ .

На практике бесконечный предел в первой сумме заменяют на конечное число  $N$ . Таким образом пренебрегают влиянием гармоник более высоких порядков. При выражении функции через элементы кеплеровской промежуточной орбиты приходится делать



разложения по степеням эксцентриситета  $e$ . При этом пренебрегают членами, содержащими  $e$  в более высокой степени, чем заданное число  $K$ .

Рассмотрим одну модификацию разложения возмущающей функции, обусловленной нецентральностью гравитационного поля планеты, имеющую преимущества на практике и при анализе возмущений в движении спутника. В формуле из работы (Брумберг, 1967) изменим порядок суммирования так, чтобы выделить члены с одинаковыми коэффициентами при  $M, \omega, (\Omega - S)$ . Получим

$$R = \sum_{q=q'}^{q''} \sum_{j=j'}^{j''} \sum_{k=0}^N (A_{qjk} \cos D_{qjk} + B_{qjk} \sin D_{qjk}), \quad (3.66)$$

где

$$D_{qjk} = qM + j\omega + k(\Omega - S),$$

$$A_{qjk} = \sum_{p=p'}^{p''} Gm \frac{r_0^n}{a^{n+1}} F_{nkp}(i) X_q^{-n-1,j}(e) C'_{nk}, \quad (3.67)$$

$$B_{qjk} = \sum_{p=p'}^{p''} Gm \frac{r_0^n}{a^{n+1}} F_{nkp}(i) X_q^{-n-1,j}(e) S'_{nk}, \quad (3.68)$$

$$C'_{nk} = \begin{cases} C_{nk} & \text{при } n - k - \text{чет} \\ -S_{nk} & \text{при } n - k - \text{нечет} \end{cases},$$

$$S'_{nk} = \begin{cases} S_{nk} & \text{при } n - k - \text{чет} \\ C_{nk} & \text{при } n - k - \text{нечет} \end{cases},$$

$$n = j + 2p.$$

Здесь и далее в тех случаях, когда массой спутника по сравнению с массой планеты пренебрегают, масса планеты обозначена через  $m$ . Как и выше,  $G$  — универсальная гравитационная постоянная.

Пределы суммирования  $q', q'', j', j'', p', p''$  определяются из соотношений

$$q' = -K - N, \quad q'' = K + N,$$

$$j' = \max\{q - K, -N\}, \quad j'' = \min\{q + K, N\},$$

$$p' = -E \left( -\frac{1}{2} \max\{0, -2j, 2 - j, k - j\} \right), \quad p'' = E \left( \frac{N - j}{2} \right).$$

Здесь функция  $E(\dots)$  означает целую часть числа, то есть ближайшее целое, не превышающее заданное. Через  $S_{nk}$ ,  $C_{nk}$  обозначены, как и выше, коэффициенты разложения силовой функции притяжения планеты, однако дополнительно принято, что

$$C_{n0} = -J_n, \quad S_{n0} = 0.$$

В формулах (3.67), (3.68) фигурируют специальные функции небесной механики:  $F_{nkp}(i)$  — функции наклона и  $X_q^{-n-1,j}(e)$  — функции эксцентриситета, которые в данном разложении называют еще коэффициентами Ганзена. Методы вычисления этих функций описаны в книгах (Аксенов, 1986; Каула, 1970) и в статье (Брумберг, 1967). Здесь только отметим некоторые их свойства. При значении индекса  $q = 0$  коэффициенты Ганзена выражаются в конечном виде как функции от эксцентриситета. Кроме того для всех допустимых значений индексов можно записать разложение

$$X_q^{l,j}(e) = e^{|q-j|} \sum_{s=0}^{\infty} X_{q,s}^{l,j} e^{2s}, \quad (3.69)$$

где  $X_{q,s}^{l,j}$  — некоторые числа, а ряд сходится при всех  $e < 1$ . Функции наклона и функции эксцентриситета для некоторых значений индексов приведены в явном виде в Приложении 3.

Поскольку в разложении силовой функции притяжения больших планет Солнечной системы превалирует вторая зональная гармоника, то принято считать малым параметром первого порядка малости величину коэффициента  $J_2$ . Остальные гармоники имеют значительно меньшую величину. Их вклад в возмущения элементов промежуточной орбиты спутника считается малой величиной второго порядка малости.

Рассмотрим теперь разложение возмущающей функции, обусловленной притяжением внешних тел. Для далеких спутников планет главным из таких внешних тел является Солнце. Разложение в удобном для практических применений виде впервые появляется в работе (Kaula, 1962). Изящный вывод этого разложения сделан также в работе (Брумберг, 1967). Разложение приводится также в книге (Мюррей, Дермотт, 2010).

Воспроизведем здесь разложение возмущающей функции, обусловленной притяжением внешних тел, с использованием принятых в этой главе обозначений для кеплеровских элементов  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,

$M, \omega, \Omega$ , а также других связанных с ними величин  $n, \lambda = M + \omega + \Omega$ ,  $\varpi = \omega + \Omega$ . Такие же величины, но относящиеся к возмущающему телу, будем обозначать теми же буквами, но со штрихом. Гравитационный параметр возмущающего тела (произведение универсальной гравитационной постоянной на массу) обозначим через  $\mu'$ . В этих обозначениях разложение имеет вид

$$R = \frac{\mu'}{a} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=0}^k \sum_{p=0}^k \sum_{p'=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{q'=-\infty}^{\infty} (2 - \delta_{m,0}) \left(\frac{a}{a'}\right)^{k+1} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \times$$

$$\times F_{kmp}(i) F_{kmp'}(i') X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e) X_{k-2p'+q'}^{k,k-2p'}(e') \times \quad (3.70)$$

$$\times \cos[(k-2p+q)M - (k-2p'+q')M' + (k-2p)\omega - (k-2p')\omega' + m(\Omega - \Omega')]$$

Здесь аргумент под знаком косинуса может быть выражен через средние долготы и долготы перицентров следующим образом:

$$(k-2p+q)M - (k-2p'+q')M' + (k-2p)\omega - (k-2p')\omega' + m(\Omega - \Omega') =$$

$$= (k-2p+q)\lambda - (k-2p'+q')\lambda' - q\varpi + q'\varpi' + (m-k+2p)\Omega - (m-k+2p')\Omega'.$$

Величина  $\delta_{m,0}$  равна единице при  $m = 0$  и нулю в противном случае.

Входящие в разложение функции наклона  $F_{kmp}(i)$  и функции эксцентриситета  $X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e)$  рассмотрены в Приложении 3. Для построения моделей движения и анализа возмущений спутников важны следующие три свойства этих функций.

1. При наклонах орбит малых или близких к 180 градусам справедливо следующее свойство (Брумберг, 1967):

$$F_{kmp}(i) = O\left(\left(\sin \frac{i}{2}\right)^{|k-2p-m|}, \left(\cos \frac{i}{2}\right)^{|k-2p-m|}\right).$$

Отсюда следует, что если выбрать основную плоскость системы координат, совпадающей с плоскостью орбиты внешнего тела, то в разложении возмущающей функции останутся только те члены, при которых  $|k - 2p' - m| = 0$ .

2. При нулевом эксцентриситете отличны от нуля только те функции эксцентриситета  $X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e)$ , при которых  $q = 0$ . Это следует из приведенной выше формулы (3.69). Поэтому для круговых орбит спутника в разложении возмущающей функции остаются только члены с  $q = 0$ , а при круговых орбитах внешнего тела остаются только члены с  $q' = 0$ .

3. При  $k - 2p + q = 0$  функции  $X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e)$  выражаются в конечном виде без использования разложений в ряды по степеням эксцентриситета.

В Приложении 3 даны явные выражения для некоторых функций наклона и функций эксцентриситета.

Отметим, что приведенное разложение возмущающей функции (3.70) с учетом указанных свойств функций наклона и функций эксцентриситета применяется при построении модели эволюции орбит спутников. Этому посвящена специальная глава книги. Разложение (3.70) было использовано также при построении аналитической теории движения спутника Нептуна Тритон (Emelyanov, Samorodov, 2015). Как это делалось, описано ниже в специальном разделе.

### 3.9. Определение возмущений элементов промежуточной орбиты спутника планеты

Рассмотрим некоторые аспекты построения аналитической теории движения спутников методами теории возмущений.

Естественно, наибольший интерес представляют вековые возмущения элементов промежуточной орбиты спутника. По крайней мере именно с них начинают вывод всех возмущений в теории. Из вышеприведенных формул видно, что вековые возмущения, обусловленные несферичностью планеты, создаются только четными зональными гармониками разложения силовой функции, т. е. при  $k = 0$  и  $n - \text{четном}$ .

Периодические возмущения элементов могут иметь периоды, равные

$$\frac{2\pi}{q\dot{M} + j\dot{\omega} + k(\dot{\Omega} - \dot{S})}, \quad (3.71)$$

где буквы с верхней точкой означают скорости изменения соответствующих величин. Здесь среди аргументов в знаменателе максимальную скорость изменения имеет  $M$ . Поэтому при  $q \neq 0$  возмущения имеют минимальный период и называются короткопериодическими.

#### **Вековые возмущения.**

Возвращаясь к вековым возмущениям, их можно получить, подстановкой вековых членов в уравнения Лагранжа относительно элементов и интегрированием их сначала для возмущений первого по-

рядка. В некоторых задачах могут оказаться существенными также вековые возмущения второго порядка.

Для спутников больших планет Солнечной системы в разложении силовой функции притяжения планеты среди зональных гармоник максимальную величину имеет вторая гармоника ( $n = 2$ ). Следующая по значимости оказывается четвертая зональная гармоника ( $n = 4$ ). Вековые возмущения содаются также притяжением внешних тел — Солнца и других спутников. Приведем здесь формулы для упомянутых вековые возмущений.

При определении вековых возмущений полагаем

$$M = M_0 + n_1(t - t_0), \quad \omega = \omega_0 + n_2(t - t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + n_3(t - t_0) .$$

Величины  $a, e, i, M_0, \omega_0, \Omega_0$  считаются произвольными постоянными интегрирования. Если определяются только возмущения первого порядка, то коэффициенты  $n_1, n_2, n_3$  найдутся как значения правых частей уравнений Лагранжа относительно элементов  $M, \omega, \Omega$ , соответственно, после подстановки в них значений постоянных значений  $a, e, i$ . Аналогичный вид будут иметь и вековые возмущения второго порядка.

Чтобы различить между собой вековые члены разных порядков, обусловленные различными возмущающими факторами, представим  $n_1, n_2, n_3$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} n_1 &= n[1 + \nu_1(J_2) + \nu_1(J_2^2) + \nu_1(J_4) + \nu_1(m')], \\ n_2 &= n[\nu_2(J_2) + \nu_2(J_2^2) + \nu_2(J_4) + \nu_2(m')], \\ n_3 &= n[\nu_3(J_2) + \nu_3(J_2^2) + \nu_3(J_4) + \nu_3(m')], \end{aligned}$$

где  $\nu_j(J_2)$  и  $\nu_j(J_2^2)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — члены первого и второго порядков, обусловленные второй зональной гармоникой в разложении силовой функции притяжения планеты,  $\nu_j(J_4)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — члены первого порядка, обусловленные четвертой зональной гармоникой,  $\nu_j(m')$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — члены, обусловленные притяжением внешнего тела (Солнце, другой спутник).

Вековые возмущения первого порядка относительно коэффициента  $J_2$  при второй зональной гармонике разложения силовой функции притяжения планеты получаются следующим образом. В возмущающей функции берем только вековую часть, подставляем ее в уравнения для элементов промежуточной орбиты. Интегрируем уравнения, считая  $a, e, i$  постоянными. Обозначим через  $r_0$  —

средний экваториальный радиус планеты и положим  $s = \sin i$ . Таким образом, получаем

$$\nu_1(J_2) = \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{2 - 3s^2}{(1 - e^2)^{3/2}} , \quad (3.72)$$

$$\nu_2(J_2) = \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{4 - 5s^2}{(1 - e^2)^2} , \quad (3.73)$$

$$\nu_3(J_2) = -\frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2} . \quad (3.74)$$

В некоторых задачах необходимо сразу вычислять сумму

$$\begin{aligned} & \nu_1(J_2) + \nu_2(J_2) + \nu_3(J_2) = \\ & = \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{4 - 5s^2 + \sqrt{1 - e^2}(2 - 3s^2) - 2 \cos i}{(1 - e^2)^2} . \end{aligned} \quad (3.75)$$

Аналогично получаются выражения для  $\nu_1(J_4)$ ,  $\nu_2(J_4)$ ,  $\nu_3(J_4)$  :

$$\nu_1(J_4) = -\frac{45}{128} J_4 \left( \frac{r_0}{a} \right)^4 e^2 \frac{8 - 40s^2 + 35s^4}{(1 - e^2)^{7/2}} ,$$

$$\nu_2(J_4) = -\frac{15}{128} J_4 \left( \frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{4(16 - 62s^2 + 49s^4) + 9e^2(8 - 28s^2 + 21s^4)}{(1 - e^2)^4} ,$$

$$\nu_3(J_4) = \frac{15}{32} J_4 \left( \frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{\cos i(4 - 7s^2)(2 + 3e^2)}{(1 - e^2)^4} .$$

Вековые возмущения второго порядка находятся более сложными действиями. Воспользуемся результатами, полученными Брауэром (Brower, 1959). В наших обозначениях имеем

$$\begin{aligned} \nu_1(J_2^2) &= \frac{3}{128} J_2^2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} \{ -15 + 16\sqrt{1 - e^2} + 25(1 - e^2) + \\ & \quad + [30 - 96\sqrt{1 - e^2} - 90(1 - e^2)] \cos^2 i + \\ & \quad + [105 + 144\sqrt{1 - e^2} + 25(1 - e^2)] \cos^4 i \} , \\ \nu_2(J_2^2) &= \frac{3}{128} J_2^2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{1}{(1 - e^2)^4} \{ -35 + 24\sqrt{1 - e^2} + 25(1 - e^2) + \end{aligned}$$

$$+ [90 - 192\sqrt{1 - e^2} - 126(1 - e^2)] \cos^2 i + \\ + [385 + 360\sqrt{1 - e^2} + 45(1 - e^2)] \cos^4 i \} ,$$

$$\nu_3(J_2^2) = \frac{3}{32} J_2^2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^4} \{ -5 + 12\sqrt{1 - e^2} + 9(1 - e^2) - \\ - [35 + 36\sqrt{1 - e^2} + 5(1 - e^2)] \cos^2 i \} .$$

Для орбит с малыми наклонами и эксцентриситетами удобнее пользоваться другим видом этих формул

$$\nu_1(J_2^2) = \frac{3}{128} J_2^2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} [3(40 - 80s^2 + 35s^4) + \\ + 16(4 - 12s^2 + 9s^4)\sqrt{1 - e^2} + 5(-8 + 8s^2 + 5s^4)(1 - e^2)] , \\ \nu_2(J_2^2) = \frac{3}{128} J_2^2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{1}{(1 - e^2)^4} [5(88 - 172s^2 + 77s^4) + \\ + 24(8 - 22s^2 + 15s^4)\sqrt{1 - e^2} + (-56 + 36s^2 + 45s^4)(1 - e^2)] , \\ \nu_3(J_2^2) = \frac{3}{32} J_2^2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^4 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^4} [5(-8 + 7s^2) + \\ + 12(-2 + 3s^2)\sqrt{1 - e^2} + (4 + 5s^2)(1 - e^2)] .$$

### **Периодические возмущения.**

Периодические возмущения элементов промежуточной орбиты, обусловленные несферичностью планеты, имеют небольшие амплитуды. Поэтому возмущенное движение спутника сжатой осесимметричной планеты можно представить, как движение вблизи некоторого эллипса, плоскость которого прецессирует при постоянном наклоне вокруг оси симметрии планеты с угловой скоростью  $\dot{\Omega}$  в направлении, обратном орбитальному движению. При этом линия апсид прецессирует в плоскости орбиты с угловой скоростью  $\dot{\omega}$ . Направление вращения линии апсид определится знаком выражения  $4 - 5 \sin^2 i$ . Добавок  $\Delta \dot{M}$  к угловой скорости орбитального движения не изменяет характер движения.

Отметим любопытный факт в теории возмущенного движения спутника сжатой планеты. Попробуем определить периодические

возмущения элементов, порождаемые членами разложения возмущающей функции при  $q = 0$ ,  $k = 0$ . Очевидно, что скорость прецессии линии апсид  $\dot{\omega}$  имеет малую величину первого порядка малости. Соответствующий этим возмущениям период по формуле (3.71) получается максимальным среди периодических возмущений. Поэтому эти возмущения называются долгопериодическими. Ясно, что вторая зональная гармоника при  $n = 2$  с коэффициентом  $J_2$  будет также порождать долгопериодические возмущения в элементах промежуточной орбиты спутника. Поскольку  $J_2$  имеет первый порядок малости, следует ожидать получения долгопериодического возмущения первого порядка. При интегрировании уравнений Лагранжа для рассматриваемых членов разложения возмущающей функции в знаменатель выражения поступает величина  $\dot{\omega}$ , имеющая первый порядок малости. В итоге получаем возмущение нулевого порядка малости. На первый взгляд получается, что метод малого параметра дает отказ в попытках описать возмущенное движение спутника сжатой планеты. Ситуацию спасает «подарок природы». Искомое долгопериодическое возмущение при  $n = 2$ ,  $q = 0$ ,  $k = 0$  содержит функции эксцентриситета, равные нулю, т. е.

$$X_0^{-3,2}(e) = X_0^{-3,-2}(e) = 0$$

при всех  $e < 1$ . По этой причине долгопериодические возмущения, обусловленные второй зональной гармоникой разложения силовой функции притяжения планеты, просто отсутствуют. Долгопериодические возмущения, обусловленные другими гармониками разложения, будут малыми, поскольку соответствующие коэффициенты имеют второй порядок малости.

Отметим важное свойство возмущений элементов промежуточной орбиты спутника несферичной планеты. Применяя метод малого параметра, как описано выше, мы будем получать вековые, периодические, а также, возможно, смешанные возмущения. Присутствие вековых возмущений в элементах  $a$ ,  $e$ ,  $i$  могло бы приводить к катастрофическим последствиям — потерей планетой своих спутников. Смешанные возмущения привели бы к выводу о несостоятельности теории. Однако, как доказано в работе (Аксенов, 1966), в возмущениях элементов промежуточной орбиты спутника, обусловленных несферичностью планеты, в элементах  $a$ ,  $e$ ,  $i$  отсутствуют вековые, а во всех шести элементах  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $M$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  отсутствуют смешанные возмущения всех порядков малости. Это можно дока-



зять методом математической индукции, применяя его к последовательности возмущений каждого следующего порядка малости.

Определение возмущений, обусловленных притяжением других тел, а именно других спутников и Солнца, вызывает особые проблемы.

Обратимся к общему виду разложения возмущающей функции (3.65). Как предписано методами теории возмущения, сначала определяются вековые возмущения элементов промежуточной орбиты. Элементы  $\omega$ ,  $\Omega$ , постоянные в кеплеровском движении, теперь станут линейными функциями времени с коэффициентом при времени, пропорциональным малому параметру возмущающей функции. Затем находятся периодические члены. При этом встретятся слабые, содержащие только  $\omega$ ,  $\Omega$  под знаком тригонометрических функций. При интегрировании уравнений Лагранжа по времени, малый параметр окажется в знаменателе и сократится с малым параметром в возмущающей функции. Здесь при построении теории методом малого параметра возникает противоречие: малые возмущения фактически оказываются не малыми. Такие возмущения оказываются весьма долгопериодическими. Если такая теория применяется на коротком интервале времени, то такие возмущения можно считать постоянными. Они фактически будут учтены при определении параметров движения из наблюдений. Однако на больших интервалах времени так теорию построить нельзя. Поэтому для далеких спутников больших планет приемлемых аналитических теорий движения так и не было до сих пор построено. В некоторых случаях, когда вековые возмущения от сжатия планеты превалируют, то при указанном выше интегрировании уравнений Лагранжа для периодических членов разложения возмущающей функции в знаменатель поступает не столь малая величина, как малый параметр, обусловленный притяжением другого тела. Пример такой благоприятной ситуации рассмотрен ниже. Так была успешно построена аналитическая теория движения главного спутника Нептуна Тритон (Emelyanov, Samorodov, 2015).

Еще одна проблема учета притяжения других спутников связана с необходимостью разлагать возмущающую функцию по степеням отношения больших полуосей орбит возмущаемого и возмущающего тел. Это разложение представлено в книге (Мюррей, Дормотт, 2010). При определении возмущений, обусловленных взаимным притяжением главных спутников Юпитера, Сатурна и Урана,

обычным методом теории возмущения построить аналитическую теорию не удастся. Примеры специальных теорий для этих спутников кратко рассмотрены ниже в специальном разделе.

### 3.10. Постоянное возмущение большой полуоси орбиты спутника

Вековые возмущения элементов промежуточной орбиты спутника являются основными возмущениями при рассмотрении движения на интервалах времени, значительно превышающих период обращения спутника. По определению вековые возмущения получаются от вековой части разложения возмущающей функции. Легко видеть в уравнениях Лагранжа, что вековые возмущения первого порядка в элементах  $a$  — большая полуось,  $e$  — эксцентриситет,  $i$  — наклон отсутствуют.

Как было положено выше, большая полуось орбиты  $a$  связана с невозмущенным значением среднего движения  $n$  соотношением

$$n = \sqrt{\frac{Gm}{a^3}}, \quad (3.76)$$

где  $G$  — универсальная гравитационная постоянная, а  $m$  — масса планеты.

Можно предположить, что учет вековых возмущений в элементах  $M$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  дает приемлемую модель движения спутника, поскольку периодические возмущения, пропорциональные малому параметру возмущающей функции, малы. На самом деле такая модель вековых возмущений не будет наилучшей при согласовании с наблюдениями. Оказывается, что при заданном значении  $n$  с наблюдениями лучше согласуется другое значение большой полуоси. Дело в том, что комбинация короткопериодических возмущений в эксцентриситете  $e$  и средней аномалии  $M$  дает постоянный член в возмущениях центрального расстояния спутника  $r$ . Однако в теории вековых возмущений короткопериодические возмущения отброшены.

Лучшая модель вековых возмущений получится, если в качестве большой полуоси вместо  $a$  взять значение  $\bar{a}$ , вычисляемое по формуле

$$\bar{a} = a + \bar{\delta r}, \quad (3.77)$$

где  $\bar{\delta r}$  — постоянная часть возмущений центрального расстояния.

Определение  $\delta r$  произведем здесь для случая возмущений, обусловленных второй зональной гармоникой разложения силовой функции притяжения планеты. Кроме того, будем предполагать, что эксцентриситет орбиты спутника  $e$  настолько мал, что в разложениях по степеням эксцентриситета можно ограничиться членом наименьшего порядка. То есть мы пренебрегаем величиной эксцентриситета по сравнению с единицей.

С принятой точностью можно записать

$$\delta r = (1 - e \cos M) \delta a - a \cos M \delta e + ea \sin M \delta M, \quad (3.78)$$

где  $\delta a$ ,  $\delta e$ ,  $\delta M$  — возмущения соответствующих элементов.

Возьмем разложение возмущающей функции согласно приведенным выше формулам (3.66), (3.67), (3.68). Оставим в разложении только члены, соответствующие второй зональной гармонике разложения силовой функции притяжения планеты. Получим

$$R = Gm \frac{r_0^2}{a^3} C_{20} \sum_{p=0}^2 F_{2,0,p}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} X_q^{-3,2-2p}(e) \cos[qM + (2 - 2p)\omega],$$

где  $C_{20}$  — коэффициент при второй зональной гармонике, а  $r_0$  — средний экваториальный радиус планеты, принятый при определении  $C_{20}$ . При этом  $C_{20} = -J_2$ . В последней сумме окажутся только четыре короткопериодических слагаемых наименьшего порядка относительно малого эксцентриситета, которые соответствуют следующим комбинациям значений индексов суммирования

$$\begin{aligned} p = 0, \quad q = 1, \\ p = 1, \quad q = 1, \\ p = 1, \quad q = -1, \\ p = 2, \quad q = -1. \end{aligned}$$

Оставляя в сумме только эти слагаемые, найдем

$$\begin{aligned} R = Gm \frac{r_0^2}{a^3} C_{20} \times \\ \left[ F_{200}(i) X_1^{-3,2}(e) \cos(M + 2\omega) + F_{201}(i) X_1^{-3,0}(e) \cos M + \right. \\ \left. F_{201}(i) X_{-1}^{-3,0}(e) \cos(-M) + F_{202}(i) X_{-1}^{-3,-2}(e) \cos(-M - 2\omega) \right]. \end{aligned}$$

Входящие сюда функции наклона и функции эксцентриситета с принятой точностью имеют вид

$$F_{200}(i) = F_{202}(i) = -\frac{3}{8} \sin^2 i, \quad F_{201}(i) = \frac{3}{4}(i) \sin^2 i - \frac{1}{2},$$

$$X_1^{-3,2}(e) = X_{-1}^{-3,-2}(e) = -\frac{1}{2}e, \quad X_1^{-3,0}(e) = X_{-1}^{-3,0}(e) = \frac{3}{2}e.$$

Подставляя их в предыдущее выражение для возмущающей функции, будем иметь

$$R = Gm \frac{r_0^2}{a^3} C_{20} 3e \left[ \left( \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \cos M + \frac{1}{8} \sin^2 i \cos(M + 2\omega) \right].$$

Теперь выпишем необходимые здесь уравнения возмущенного движения относительно кеплеровских элементов  $a$ ,  $e$  и функции  $M$ :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned}$$

После подстановки выведенного выше упрощенного выражения для возмущающей функции уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -Gm \frac{r_0^2}{a^3} C_{20} \frac{6e}{na} \left[ \left( \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \sin M + \frac{1}{8} \sin^2 i \sin(M + 2\omega) \right], \\ \frac{de}{dt} &= -Gm \frac{r_0^2}{a^3} C_{20} \frac{3}{na^2} \left[ \left( \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \sin M - \frac{1}{8} \sin^2 i \sin(M + 2\omega) \right], \\ \frac{dM}{dt} &= -Gm \frac{r_0^2}{a^3} C_{20} \frac{3}{ena^2} \left[ \left( \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \cos M + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \sin^2 i \cos(M + 2\omega) \right]. \end{aligned}$$

Интегрирование уравнений методом малого параметра дает следующие возмущения первого порядка относительно коэффициента  $C_{20}$ :

$$\begin{aligned} \delta a &= r_0^2 C_{20} \frac{6e}{a} \left[ \left( \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \cos M + \frac{1}{8} \sin^2 i \cos(M + 2\omega) \right], \\ \delta e &= r_0^2 C_{20} \frac{3}{a^2} \left[ \left( \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \cos M - \frac{1}{8} \sin^2 i \cos(M + 2\omega) \right], \\ \delta M &= -r_0^2 C_{20} \frac{3}{ea^2} \left[ \left( \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \sin M + \frac{1}{8} \sin^2 i \sin(M + 2\omega) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.78), найдем основные короткопериодические возмущения центрального расстояния

$$\begin{aligned} \delta r = & r_0^2 C_{20} \frac{1}{a^2} 6ea \left[ \left( \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) (1 - e \cos M) \cos M + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \sin^2 i (1 - e \cos M) \cos(M + 2\omega) \right] - \\ & - r_0^2 C_{20} \frac{1}{a^2} 3a \left[ \left( \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \cos^2 M - \frac{1}{8} \sin^2 i \cos(M + 2\omega) \cos M \right] - \\ & - r_0^2 C_{20} \frac{1}{a^2} 3a \left[ \left( \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \sin^2 M + \frac{1}{8} \sin^2 i \sin(M + 2\omega) \sin M \right]. \end{aligned}$$

Выделим образующуюся здесь постоянную часть возмущения наимизшего порядка относительно эксцентриситета

$$\overline{\delta r} = \frac{3}{4} \frac{r_0^2}{a^2} C_{20} a (2 - 3 \sin^2 i).$$

В итоге оказывается, что при заданном среднем движении спутника  $n$  возмущенное постоянное значение большой полуоси (3.77) следует определять по формуле

$$\bar{a} = a \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{r_0^2}{a^2} C_{20} (2 - 3 \sin^2 i) \right], \quad (3.79)$$

где  $a$  находится из соотношения (3.76).

Заметим, что из наблюдений обычно определяется возмущенное значение среднего движения  $n_1$ . Тогда невозмущенное значение  $n$  находят итерациями из соотношения

$$n_1 = n[1 + \nu_1(J_2)],$$

где  $\nu_1(J_2)$  определяется по формуле (3.72), а невозмущенное значение большой полуоси  $a$  находится из соотношения

$$n^2 a^3 = Gm.$$

При малых наклонах и эксцентриситетах лучше всего из наблюдений определяется возмущенное среднее движение в долготе  $\bar{n}$ . В этом случае  $n$  находится итерациями из соотношения

$$\bar{n} = n[1 + \nu_1(J_2) + \nu_2(J_2) + \nu_3(J_2)], \quad (3.80)$$

где  $\nu_2(J_2)$  и  $\nu_3(J_2)$  определяются по формулам (3.73), (3.74).

Рассмотрим специально случай малых эксцентриситетов и наклонов орбиты спутника сжатой планеты. Пренебрегая эксцентриситетом и наклоном в соотношениях (3.79) и (3.80), получим

$$\bar{n} = n \left( 1 + 3J_2 \frac{r_0^2}{a^2} \right), \quad (3.81)$$

$$\bar{a} = a \left( 1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{r_0^2}{a^2} \right). \quad (3.82)$$

В итоге учет основных возмущений, обусловленных сжатием планеты, позволяет представить спутник, обращающийся с частотой  $\bar{n}$  по орбите радиуса  $\bar{a}$ . Такая модель наилучшим образом будет соответствовать наблюдениям. Третий закон Кеплера, модифицированный в силу возмущений, примет вид

$$\bar{a}^3 \bar{n}^2 = Gm \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{r_0^2}{a^2} \right). \quad (3.83)$$

Соотношение

$$Gm = n^2 a^3$$

используется для определения массы планеты по наблюдениям спутников. Как следует из формулы (3.83) в случае сжатой планеты из наблюдений фактически получается значение правой части этой формулы. Для учета сжатия планеты в этом случае приходится либо принимать какие-нибудь гипотезы относительно величины динамического сжатия, либо пытаться определить коэффициент  $J_2$  из наблюдений.

### 3.11. Модель прецессирующего эллипса

Для изучения динамики спутника планеты строится та или иная модель движения на основе наблюдений. Во многих случаях важно увидеть основные свойства движения, пренебрегая малыми возмущениями. Иногда требуется приближенная эфемерида. Для некоторых спутников точность наблюдений оказывается невысокой, и простейшая модель движения может дать хорошее согласование с результатами наблюдений. Во всех этих случаях пригодна некоторая приближенная модель движения, называемая прецессирующим

эллипсом. В этой модели спутник движется по некоторому эллипсу, плоскость которого прецессирует с постоянной угловой скоростью при постоянном наклоне к некоторой основной неподвижной плоскости. Линия апсид эллипса вращается в плоскости орбиты с постоянной угловой скоростью. Движение спутника по прецессирующему эллипсу происходит по законам задачи Кеплера, однако постоянное среднее движение отличается от того, которое получается из большой полуоси орбиты согласно известному соотношению.

Из предыдущих разделов ясно, что такая модель может быть создана в процессе построения аналитической теории движения путем учета вековых возмущений, обусловленных основными возмущающими факторами. Получается приближенное решение точных дифференциальных уравнений движения шестого порядка. Поэтому это решение содержит шесть произвольных постоянных интегрирования.

На практике определение вековых возмущений бывает затруднительным, неточным или вообще невозможным из-за того, что параметры, характеризующие возмущающие факторы, неточны или неизвестны. В таких случаях поступают следующим образом. Изменения функции  $M$  и элементов  $\omega$  и  $\Omega$  задают линейными функциями времени

$$M = M_0 + \bar{n}(t - t_0), \quad \omega = \omega_0 + \dot{\omega}(t - t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0), \quad (3.84)$$

где  $M_0$ ,  $\bar{n}$ ,  $\omega_0$ ,  $\dot{\omega}$ ,  $\Omega_0$ ,  $\dot{\Omega}$  — постоянные. Элементы кеплеровской орбиты спутника  $e$ ,  $i$  тоже считаются постоянными. Большая полуось, непосредственно входящая в формулы кеплеровского движения, задается независимо от параметра  $\bar{n}$ . Поскольку эти параметры уже не будут связаны законами кеплеровского движения, обозначим большую полуось через  $\bar{a}$ .

Для определения координат используются формулы кеплеровского движения. Средняя аномалия  $M$  и элементы  $\omega$ ,  $\Omega$  вычисляются по формулам (3.84), параметры  $\bar{a}$ ,  $e$ ,  $i$  независимо подставляются в формулы кеплеровского движения.

В итоге девять постоянных параметров  $\bar{a}$ ,  $\bar{n}$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $M_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\dot{\omega}$ ,  $\Omega_0$ ,  $\dot{\Omega}$ , формулы (3.84) и формулы кеплеровского движения полностью описывают модель движения. Основная плоскость, относительно которой отсчитываются наклон  $i$ , долгота восходящего узла  $\Omega$  и угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, задается

так, чтобы в этой системе координат изменения наклона, получаемые из наблюдений, были минимальны.

Все девять параметров уточняются из наблюдений так, чтобы согласование модели с наблюдениями было наилучшим. В такой модели учитываются все вековые возмущения, вызванные любыми возможными причинами.

Модель прецессирующего эллипса используется также для приближенной аппроксимации более точной модели движения спутника, основанной на аналитической теории, или построенной методом численного интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Пример использования модели прецессирующего эллипса для четырех близких спутников Юпитера описан в работе (Емельянов, 2015). Параметры модели были определены по эфемеридам спутников, вычисленным на основе двух различных моделей, каждая из которых в свою очередь была построена на основе наблюдений путем численного интегрирования уравнений движения.

## **3.12. Возмущенное движение при малых эксцентриситетах орбит**

### **3.12.1. Формулировка проблемы**

В классическом подходе к теории возмущенного движения, когда уравнения Лагранжа относительно элементов кеплеровской орбиты решаются методом малого параметра Пуанкаре, встречаются мало исследованные случаи, приводящие иногда к непривычным выводам. К таким случаям относится возмущенное движение при малых эксцентриситетах промежуточной орбиты.

При решении уравнений Лагранжа в первую очередь необходимо найти вековые возмущения, поскольку именно они наиболее существенны как в количественном, так в качественном аспектах описания движения. Вековые возмущения обычно получают путем разложения возмущающей функции и отбрасывания в правых частях уравнений Лагранжа периодических членов. Так была создана и стала широко применяться модель прецессирующего эллипса. Для возмущений, обусловленных несферичностью осесимметричного центрального тела, например, сжатой большой планеты, плоскость орбиты будет прецессировать вокруг оси симметрии тела с постоянным наклоном.



Невозмущенная кеплеровская орбита может быть вырождена в круговую орбиту, а наклон в невозмущенном движении определен только выбором системы прямоугольных координат. Естественным параметром, описывающим вырождение орбиты в круговую, является эксцентриситет. Для круговой орбиты он просто равен нулю. Можно было бы ожидать, что и для возмущенного движения, когда эксцентриситет изменяется во времени, его близость или равенство нулю должны приводить к вырождению орбиты в круговую. На самом деле это совсем не так.

Первое упоминание о существовании кругового возмущенного движения с ненулевым эксцентриситетом мы обнаружили в работе В. В. Белецкого (Белецкий, 1962). В этой работе указано частное решение уравнений относительно элементов кеплеровского движения, при котором круговая орбита в оскулирующих элементах описывается эллипсом, вращающимся с угловой скоростью обращения спутника вокруг центрального тела, причем спутник всегда находится в перицентре этого эллипса.

Впрочем, в работе В. В. Белецкого замечено, что данный пример принадлежит Т. М. Эневу.

Широко применяемая на практике модель прецессирующего эллипса с произвольным постоянным и сколь угодно малым эксцентриситетом находится в противоречии с примером, приведенным в работе (Белецкий, 1962). Интересно выяснить, как соотносятся между собой эти две модели. Важно иметь строгое доказательство существования решения для кругового возмущенного движения с ненулевым эксцентриситетом. Было бы полезно найти достаточно простое решение, адекватно описывающее возмущенное движение при малых эксцентриситетах.

Такое исследование было выполнено в работе (Емельянов, 2015). В следующем разделе приведем основные выкладки и выводы из этой работы.

### 3.12.2. Построение модели кругового возмущенного движения

Рассмотрим движение материальной точки в центральном поле притяжения с силовой функцией вида

$$U = \frac{\mu}{r}[1 + f(r)],$$

где  $r$  — центральное расстояние,  $\mu$  — гравитационный параметр, а  $f(r)$  — некоторая достаточно произвольная безразмерная функция.

Разложим силовую функцию на два слагаемых следующим образом:

$$U = V + R, \quad V = \frac{\mu}{r}, \quad R = \frac{\mu}{r} f(r),$$

где  $V$  — силовая функция задачи Кеплера, а  $R$  — возмущающая функция. Движение при  $R = 0$  называют невозмущенным.

Покажем, что при некотором ограничении на функцию  $f(r)$  уравнения с силовой функцией  $U$  будут иметь частное решение, соответствующее круговому движению. Рассмотрим подробнее возмущенные движения материальной точки, близкие к круговому.

Попытаемся построить приближенные аналитические модели движения реальных спутников планет при малых эксцентриситетах орбит. Для примера возьмем четыре близких спутника Юпитера.

Поскольку силовая функция зависит только от расстояния, траектория движения лежит в некоторой неизменной плоскости, в которой зададим невращающуюся систему координат  $Oxy$  с началом  $O$  в притягивающем центре. Тогда дифференциальные уравнения движения можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}[1 + F(r)], \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}[1 + F(r)], \quad (3.85)$$

где безразмерная функция  $F(r)$  задается соотношением

$$F(r) = f(r) - r f'(r),$$

а штрих здесь означает первую производную по  $r$ . При этом  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

В области, в которой выполняется условие  $F(r) > -1$ , существуют решения дифференциальных уравнений движения, соответствующие круговым движениям точки вокруг притягивающего центра на любом расстоянии  $r$  с линейной скоростью  $V_c$ , зависящей от  $r$ .

Центростремительное ускорение точки, движущейся по окружности радиуса  $r$  с линейной скоростью  $V_c$ , независимо от причины ускорения определяется выражением

$$\frac{V_c^2}{r}.$$

Причиной движения по окружности является гравитационная сила, создающая ускорение

$$\frac{\mu}{r^2}[1 + F(r)].$$

Приравнивая эти два выражения для ускорения, получим

$$V_c^2 = \frac{\mu}{r}[1 + F(r)]. \quad (3.86)$$

Не нарушая общности задачи, будем предполагать, что в начальный момент времени  $t_0$  точка находится на оси  $x$ . Тогда частное решение дифференциальных уравнений для кругового движения в координатах будет иметь вид

$$x = r \cos n_c(t - t_0), \quad y = r \sin n_c(t - t_0), \quad (3.87)$$

где частота обращения точки  $n_c$  определится формулой

$$n_c = \frac{V_c}{r}.$$

Это будет однопараметрическое семейство частных решений. В качестве параметра этого семейства можно взять  $r$  или  $n_c$ .

Поставим задачу найти элементы кеплеровской оскулирующей орбиты как функции времени для кругового движения, рассматривая уравнения (3.85), как уравнения возмущенного кеплеровского движения. Для этого нужно сделать замену переменных искомым функций  $x, y$  на элементы кеплеровской оскулирующей орбиты как функции времени и подставить в формулы замены переменных вместо  $x, y$  частное решение (3.87). Кроме того, желательно рассмотреть уравнения движения, выраженные в кеплеровских элементах, то есть уравнения Лагранжа, и проверить, удовлетворяют ли полученные выражения для кеплеровских элементов этим уравнениям.

### 3.12.3. Переход к элементам кеплеровской орбиты

Поскольку мы рассматриваем здесь плоское движение, нам достаточно использовать для описания движения четыре кеплеровских элемента:  $a$  — большая полуось, размерность единица длины;  $e$  — эксцентриситет, безразмерный;  $M$  — средняя аномалия, рад;  $\omega$  — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.

Наряду с большой полуосью  $a$  в качестве параметра орбиты будем рассматривать также параметр  $n$ , называемый средним движением и связанный с  $a$  законом

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

Размерность среднего движения  $n$  — радианы в единицу времени.

Связь прямоугольных координат и компонент скорости с элементами кеплеровской орбиты можно найти в книгах (Дубошин, 1975; Субботин, 1968).

В кеплеровском движении скорость  $V$  и расстояние  $r$  связаны соотношением

$$V^2 = \mu \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right], \quad (3.88)$$

где  $a$  — постоянная.

В случае кругового кеплеровского движения при  $e = 0$  имеем  $r = a$  и

$$V_c^2 = \frac{\mu}{r},$$

что отличается от (3.86). Поэтому оказывается, что частное решение уравнений возмущенного движения (3.85) не может быть представлено элементами кеплеровской оскулирующей орбиты с постоянным нулевым эксцентриситетом. В зависимости от знака  $F(r)$  имеется возможность представить возмущенное круговое движение одним из двух способов. Если  $F(r) > 0$ , то, положим

$$M = 0, \quad r = a(1 - e), \quad \omega = n_c(t - t_0),$$

а элементы  $a$  и  $e$  будем считать постоянными. Сравнивая (3.86) и (3.88), найдем

$$e = F(r).$$

Тогда оказывается, что материальная точка всегда находится в перицентре орбиты, а линия апсид вращается с угловой скоростью  $n_c$ . Истинная  $v$  и эксцентрическая  $E$  аномалии постоянны и равны нулю. Элемент  $a$  найдется по формуле

$$a = \frac{r}{1 - e}.$$

Частота  $n_c$  обращения точки вокруг притягивающего центра выразится через элементы кеплеровской оскулирующей орбиты формулой

$$n_c = \sqrt{\frac{\mu}{a^3} \frac{\sqrt{1+e}}{(1-e)^{3/2}}}. \quad (3.89)$$

В случае  $-1 < F(r) < 0$  следует положить

$$M = \pi, \quad r = a(1 + e),$$

где

$$e = -F(r).$$

В этом случае оказывается, что точка всегда находится в апоцентре орбиты, а линия апсид вращается с угловой скоростью  $n_c$ . Истинная и эксцентрисическая аномалии  $v$  и  $E$  постоянны и равны  $\pi$ . Большая полуось орбиты  $a$  и скорость вращения линии апсид найдутся по формулам

$$a = \frac{r}{1+e}, \quad n_c = \sqrt{\frac{\mu}{a^3} \frac{\sqrt{1-e}}{(1+e)^{3/2}}}.$$

Здесь мы нашли выражения для элементов оскулирующей кеплеровской орбиты как функций времени для частных решений уравнений движения, соответствующих круговым орбитам материальной точки вокруг притягивающего центра. Формулы получены при произвольной функции  $f(r)$  при условии  $F(r) > -1$ . Рассмотрим частный случай возмущенного движения.

Пусть движение точки происходит в плоскости экватора осесимметричной планеты под действием ее притяжения. В разложении силовой функции притяжения планеты в ряд по сферическим функциям возьмем только главный член и вторую зональную гармонику. Для больших планет таким образом учитывается динамическое сжатие планеты в движении ее спутника. Тогда имеем

$$R = \frac{1}{2}\mu J_2 r_0^2 \frac{1}{r^3}, \quad f(r) = \frac{1}{2}J_2 r_0^2 \frac{1}{r^2}, \quad F(r) = \frac{3}{2}J_2 r_0^2 \frac{1}{r^2}.$$

Здесь всегда  $F(r) > 0$ , и круговое движение на любом заданном расстоянии  $r$  представлено кеплеровской оскулирующей орбитой с вращающейся линией апсид, а точка находится постоянно в перигентре орбиты. Эксцентриситет и большая полуось такой орбиты определяются по формулам

$$e = \frac{3}{2}J_2 r_0^2 \frac{1}{r^2}, \quad a = \frac{r}{1-e}, \quad (3.90)$$

а скорость вращения линии апсид находится по формуле (3.89).

Попытаемся сравнить построенную здесь модель кругового возмущенного движения спутника с моделью кругового возмущенного движения, рассмотренного в разделе 3.10. В обоих случаях возмущения обусловлены второй зональной гармоникой в разложении силовой функции притяжения планеты. В разделе 3.10 радиус круговой орбиты получался равным возмущенному значению большой

полуоси  $\bar{a}$ , а частота обращения спутника была равна возмущенному значению среднего движения  $\bar{n}$ . Поэтому в соответствии с моделью кругового движения, построенной здесь выше, мы должны положить

$$\bar{a} = r, \quad \bar{n} = n_c.$$

Выразим теперь левую часть соотношения (3.83), используя выражение (3.89) для  $n_c$  и приведенное выше выражение  $r = a(1 - e)$  для  $r$ . После простых преобразований получим

$$\bar{a}^3 \bar{n}^2 = \mu \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 r_0^2 \frac{1}{a^2} \right),$$

что в точности воспроизводит соотношение (3.83). Здесь так же, как и в разделе 3.10, мы пренебрегли малыми величинами порядка  $J_2^2$  по сравнению с единицей.

Таким образом, мы доказали полное соответствие двух рассмотренных моделей кругового возмущенного движения спутника.

#### 3.12.4. Оскулирующие кеплеровские элементы орбиты спутника в возмущенном движении при малых эксцентриситетах

В часто используемой модели прецессирующего эллипса при любых значениях эксцентриситета орбиты, включая равное нулю, средняя аномалия изменяется линейно по времени. Это находится в противоречии с выводом о том, что возмущенное движение по круговой орбите возможно только при некотором ненулевом значении эксцентриситета и средней аномалии постоянной и равной нулю. Интересно было бы выяснить, как изменяются элементы кеплеровской оскулирующей орбиты при движении спутника под действием притяжения сжатой планеты. Поскольку точного аналитического решения этой задачи не найдено, анализ можно выполнить только по результатам численного интегрирования.

Рассмотрим снова движение спутника осесимметричной планеты в плоскости экватора. Возьмем уравнения движения (3.85) с силовой функцией

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2} \mu J_2 \frac{r_0^2}{r^3}.$$

Здесь из разложения силовой функции притяжения планеты взяты основной член и вторая зональная гармоника.

Автором было выполнено численное интегрирование этих уравнений (3.85) и получены значения координат  $x$ ,  $y$  и компонент скорости спутника  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  для ряда моментов времени с постоянным шагом. Затем, независимо от возможных приближенных аналитических решений, в полученном точном решении сделаем замену переменных  $x$ ,  $y$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  на переменные  $a(t)$ ,  $e(t)$ ,  $M(t)$ ,  $\omega(t)$  по формулам кеплеровского движения. Посмотрим, как изменяются эти переменные во времени при различных начальных условиях.

Такие вычисления были сделаны, приводим здесь полученные результаты. Для нашего примера гравитационный параметр  $\mu$  и начальные условия были взяты приблизительно соответствующими близкому спутнику Юпитера Адрастея. Для Юпитера  $\mu = 126712763.92 \text{ км}^3/\text{с}^2$ ,  $J_2 = 0.014736$ ,  $r_0 = 71398.0 \text{ км}$ . Начальные условия мы взяли так, что в начальный момент времени координата  $y$  равна нулю, а вектор начальной скорости перпендикулярен оси  $x$ . Значение начального расстояния  $x_0$ , примерно соответствующее спутнику Юпитера Адрастея, было взято равным  $127748.2879217545 \text{ км}$ . Вычисления сделаны для ряда значений начальной скорости  $V$ . В первом варианте значение скорости было взято соответствующим круговому движению,  $V = V_c$  (3.86). В следующих вариантах вычисления были сделаны для  $V > V_c$ . Интервал времени интегрирования соответствовал двум оборотам спутника вокруг планеты.

Результаты изменения во времени оскулирующих элементов  $M$ ,  $\omega$  представлены на рис. 3.2-3.5. Сплошной тонкой линией показаны значения средней аномалии  $M$ , штриховой линией — значения  $\omega$ , а жирной линией — значения суммы  $M + \omega$ , то есть средней долготы в орбите. На рис. 3.2 видно, что при  $V = V_c$  (круговое движение) средняя аномалия  $M$  остается равной нулю, а график  $\omega$  сливается с графиком средней долготы  $M + \omega$  и показывает линейное вращение линии апсид с угловой скоростью обращения спутника вокруг планеты. При следующем большем значении начальной скорости на рис. 3.3 видно, что на изменения  $M$  и  $\omega$  накладываются сильные колебания в противофазе друг другу, а средняя долгота по-прежнему линейно возрастает во времени. Для следующего значения начальной скорости на рис. 3.4 наступает критический характер изменения элементов. Колебания элементов  $M$  и  $\omega$  имеют амплитуду до половины оборота. При этом долгота по-прежнему линейно возрастает во времени. Для следующего значения начальной скорости гра-

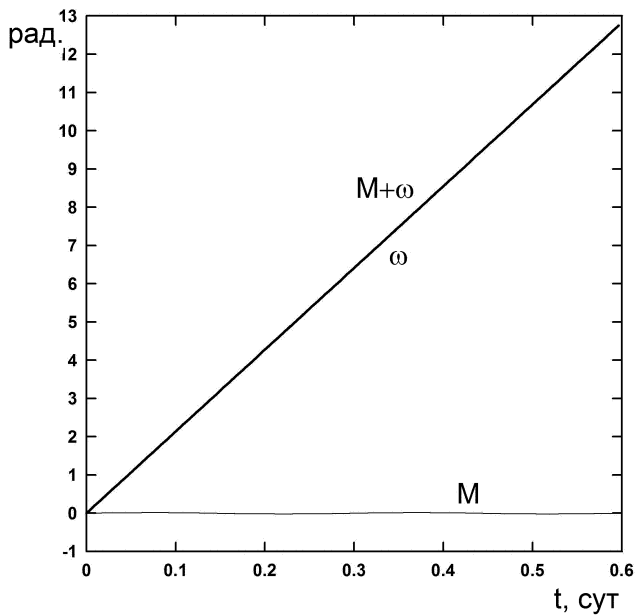


Рис. 3.2. Изменение средней аномалии  $M$ , углового расстояния перицентра от узла орбиты  $\omega$  и  $M + \omega$  для начальной скорости кругового движения. Средняя аномалия равна нулю. Линия апсид вращается с угловой скоростью обращения материальной точки вокруг центрального тела.

фики на рис. 3.5 показывают, что  $M$  и  $\omega$  обменялись характерами изменения. Теперь в средней аномалии  $M$  на линейное возрастание во времени накладываются колебания, а  $\omega$  имеет периодическое изменение с небольшим линейным ходом.

Чтобы различать два качественных характера изменения средней аномалии, мы будем называть монотонное возрастание средней аномалии *циркуляционным изменением*. Случаи, когда средняя аномалия испытывает колебания относительно нулевого значения, будем называть *либрационным изменением*.

Из рассмотренных примеров видно, что существует некоторое *сепаратрисное значение* начальной скорости  $V = V_s$ , разделяющее два различных по характеру семейства решений.

Представляет интерес изменение эксцентриситета в рассмотренных семействах решений. На рис. 3.6 точками на концентрических



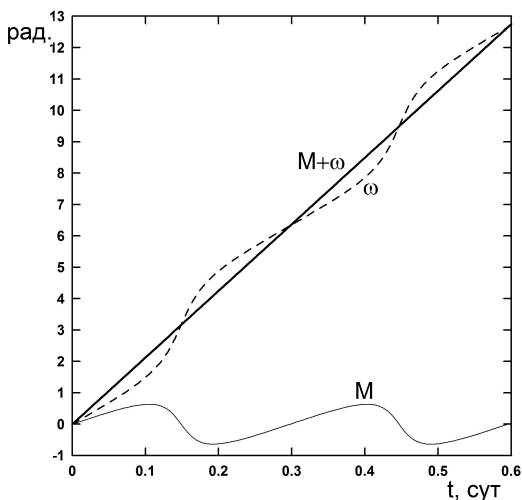


Рис. 3.3. Изменение средней аномалии  $M$ , углового расстояния перигентра от узла орбиты  $\omega$  и  $M + \omega$  для начальной скорости, незначительно превышающей скорость кругового движения. Средняя аномалия колеблется относительно нулевого значения с периодом, равным периоду обращения.

около нуля показаны графики изменения эксцентриситета  $e$  и средней аномалии  $M$  для ряда значений начальной скорости. По оси абсцисс отложены значения  $e \cos M$ , а по оси ординат значения  $e \sin M$ . Таким образом, расстояние точки от начала координат  $(0, 0)$  на графиках дает нам значение эксцентриситета, а угол между центральным направлением и осью абсцисс — значение средней аномалии  $M$ . Решение, соответствующее круговому движению ( $V = V_c$ ), показано на графике точкой, в которой  $M = 0$ , а эксцентриситет  $e$  имеет значение, вычисляемое по формуле (3.90). На рис. 3.6 видны два решения при значениях  $V$ , больших  $V_c$ , в которых средняя аномалия  $M$  испытывает колебания возле нуля, а эксцентриситет изменяется в небольших пределах. Значком «s» показано некоторое частное решение, в котором эксцентриситет изменяется от некоторого максимального значения до нуля, а средняя аномалия колеблется в пределах  $(-\pi, \pi)$ . На графиках показаны также два решения, в которых средняя аномалия  $M$  имеет циркуляционный характер движения, при этом эксцентриситет изменяется в некоторых

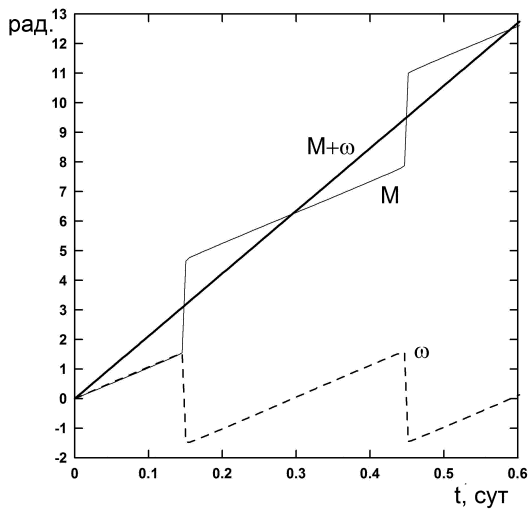


Рис. 3.4. Критический характер изменения средней аномалии  $M$ , углового расстояния перигенция от узла орбиты  $\omega$  и средней аномалии  $M + \omega$  при некотором частном значении начальной скорости движения. Средняя аномалия и угловое расстояние перигенция от узла испытывают колебания в противофазе с большой амплитудой.

небольших пределах. Частное решение «s» разделяет два семейства решений с различными свойствами изменений эксцентриситета и средней аномалии. Решение с такими начальными условиями мы называем *сепаратрисным*.

На рис. 3.6 тонкими линиями изображено еще одно семейство изменений элементов. Это семейство получено на основе аналитического решения обобщенной задачи двух неподвижных центров, рассмотренной выше в специальном разделе. На рисунке видно, что это решение совпадает с результатами численного интегрирования по крайней мере с точностью изображения линий на графиках.

Из полученных результатов следует вывод о том, что модель прецессирующего эллипса с постоянным эксцентриситетом как вариант приближенного аналитического решения не отражает качественную картину семейств решений.

В работе (Емельянов, 2015) выведены первые интегралы дифференциальных уравнений движения в рассматриваемой задаче. Они

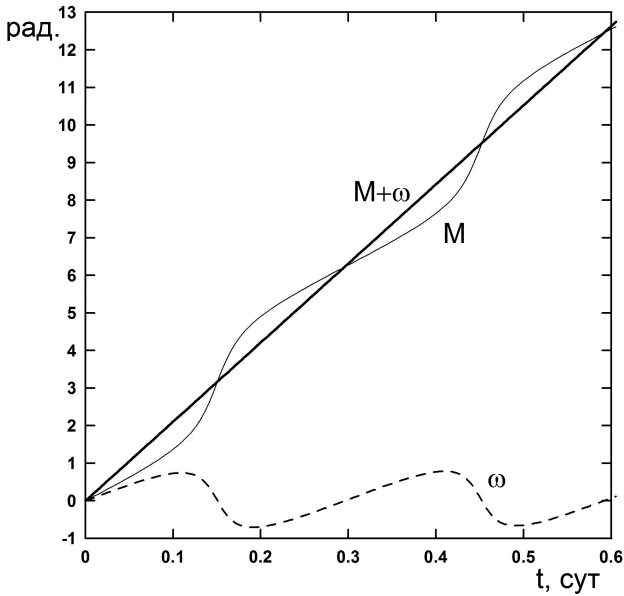


Рис. 3.5. Изменения средней аномалии  $M$ , углового расстояния перигентра от узла орбиты  $\omega$  и средней долготы  $M + \omega$  при начальной скорости, превышающей критическое значение. Средняя аномалия монотонно возрастает со временем.

помогли найти такие начальные условия, которые разделяют два семейства решений с различными свойствами изменений эксцентриситета и средней аномалии, т.е. начальные условия сепаратрисного решения.

В этой цитируемой работе показано, что в сепаратрисном движении расстояние изменяется от некоторого минимального значения, при котором эксцентриситет максимален, до максимального значения, когда эксцентриситет равен нулю.

Отметим, что в сепаратрисном решении в моменты, когда истинная аномалия принимает нулевое значение при нулевом эксцентриситете, средняя аномалия тоже принимает нулевое значение.

На примере движения спутника Юпитера, рассмотренного выше, в работе (Емельянов, 2015) проведено исследование точности представления движения спутника сжатой планеты двумя рассмот-

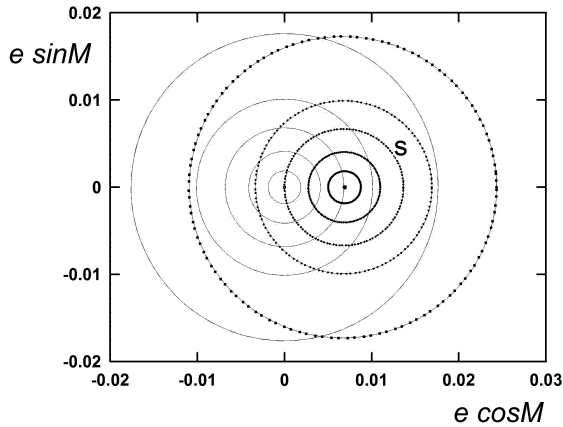


Рис. 3.6. Изменения средней аномалии  $M$  и эксцентриситета  $e$  в точном решении (точки), в уточненной модели, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров (окружности, проходящие по точкам) и в модели прецессирующего эллипса (концентрические окружности с центром в начале координат).

ренными моделями: моделью прецессирующего кеплеровского эллипса (ПЭ) и моделью, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров, и которую будем обозначать буквами УМ (уточненная модель). В качестве опорных решений было взято семейство решений, полученное численным интегрированием уравнений движения сжатой планеты на интервале времени двух оборотов спутника вокруг планеты. Результаты исследования позволяют сделать следующие выводы. Погрешность представления точного решения моделью решения обобщенной задачи двух неподвижных центров в 120 раз меньше, чем погрешность представления моделью прецессирующего эллипса, для всех вариантов начальных условий. Для обеих моделей погрешность убывает при приближении траектории к круговой.

В работе (Емельянов, 2015) сделана также попытка представить двумя рассмотренными аналитическими моделями ПЭ и УМ эфемериды четырех близких спутников Юпитера, построенные с помощью численного интегрирования уравнений движения на основе имеющихся наблюдений. При построении этих эфемерид учитывались возмущения от притяжения Галилеевых спутников Юпите-

ра, возмущающее действие которых значительно и не учитывается в аналитических моделях. Поскольку рассогласования, вызванные пренебрежением этими возмущающими факторами, превалируют, то рассогласования оказались лишь немного меньше при использовании модели, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров, по сравнению с моделью прецессирующего эллипса. Обе модели с почти одинаковой точностью представляют движение упомянутых выше спутников Юпитера.

### **3.13. Построенные аналитические теории движения спутников планет**

#### **3.13.1. Аналитическая теория движения спутника Нептуна Тритон**

Более подробно рассмотрим аналитическую теорию движения спутника Нептуна Тритон, построенную в работе (Emelyanov, Samorodov, 2015). Ко времени выполнения этой работы уже существовали несколько версий модели движения этого спутника, основанных на численном интегрировании дифференциальных уравнений движения. Однако очень выгодное соотношение возмущающих факторов и подходящие свойства орбиты Тритона позволили авторам продемонстрировать преимущества аналитической теории по сравнению с методами численного интегрирования.

Система Тритон – Нептун характеризуется следующими приближенными значениями параметров (Jacobson, Riedel, Taylor, 1991). Экваториальный радиус Нептуна составляет 25225 км, радиус Тритона равен 1350 км. Отношение массы спутника к массе планеты составляет 0.0002089.

Тритон обращается вокруг планеты по почти круговой орбите с периодом 5.87685244989 суток на расстоянии 354700 км. Наклон орбиты к экватору планеты равен примерно 156.66 градусов. Прямое восхождение и склонение северного полюса Нептуна равны приблизительно 299.5 и 43.6 градусов, соответственно. На движение спутника влияет динамическое сжатие Нептуна и гравитационное притяжение Солнца. Притяжение других спутников Нептуна пренебрежимо мало.

Критерием необходимости учета тех или иных возмущений является точность наблюдений. Поэтому был проведен анализ всех возможных возмущений в элементах промежуточной орбиты Три-

тона. Члены разложения возмущающей функции, которые дают вклад в видимые координаты спутника, не превышающие точность наблюдений, были отброшены. Из предшествующих работ других авторов было ясно, что эксцентриситет орбиты Тритона пренебрежимо мал. Поэтому орбита заранее принималась круговой. Сделанные авторами статьи (Emelyanov, Samorodov, 2015) оценки короткопериодических возмущений в элементах круговой кеплеровской орбиты показали, что их учитывать не нужно. Остается необходимым учет только вековых и долгопериодических возмущений первого порядка малости.

Из уравнений Лагранжа (3.39) следует, что долгопериодических возмущений первого порядка в большой полуоси орбиты не будет. Они могут порождаться только членами возмущающей функции, не содержащими среднюю аномалию  $M$ , а такие члены при подстановке в правую часть уравнения относительно большой полуоси дают нуль. Поэтому в цитируемой работе (Emelyanov, Samorodov, 2015) большая полуось  $a$  принималась постоянной.

Тритон своим притяжением влияет на вращательное движение Нептуна. Поэтому ось вращения планеты прецессирует синхронно с движением плоскости орбиты Тритона вокруг вектора суммарного момента количества движения планеты и спутника. Постоянный угол между этими осями составляет примерно 0.506 градуса (Jacobson, 2009). Углы наклона орбиты относительно оси вращения планеты и относительно вектора суммарного момента количества движения также остаются постоянными. Как показано в работе (Jacobson, 2009), такая модель движения планеты и спутника наиболее близка к действительности. Небольшие отклонения от нее могут вызвать лишь возмущения от притяжения Солнца.

Рассмотрим принятые в этой теории системы координат. Основная система координат связана с неподвижным вектором суммарного момента количества движения планеты и спутника. Ось  $z$  системы направлена вдоль этого вектора, ось  $x$  — по линии пересечения плоскости  $xy$  с плоскостью геоэкватора так, чтобы ось  $y$  была наклонена к плоскости геоэкватора под острым углом. Будем называть в дальнейшем такую систему *орбитальной системой координат*.

Расположение плоскостей орбит Тритона и Солнца, а также плоскости геоэкватора в орбитальной системе координат показано на рис. 3.7.

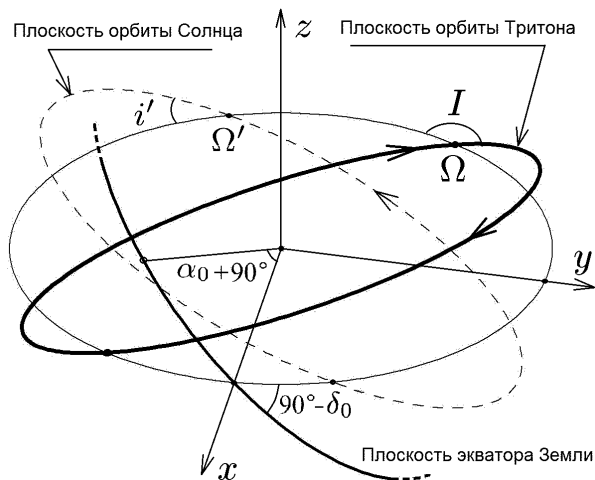


Рис. 3.7. Расположение основных плоскостей в теории движения Тритона.

Обозначим через  $x_g, y_g, z_g$  оси планетоцентрической геоэкваatorialной системы координат. Связь этих координат с координатами орбитальной системы задается прямым восхождением  $\alpha_0$  и наклоном  $\delta_0$  оси  $z$ . Переход к координатам  $x_g, y_g, z_g$  осуществляется по формулам

$$\begin{aligned}
 x_g &= -\sin \alpha_0 x - \cos \alpha_0 \sin \delta_0 y + \cos \alpha_0 \cos \delta_0 z, \\
 y_g &= \cos \alpha_0 x - \sin \alpha_0 \sin \delta_0 y + \sin \alpha_0 \cos \delta_0 z, \\
 z_g &= \cos \delta_0 y + \sin \delta_0 z.
 \end{aligned}
 \tag{3.91}$$

Параметры  $\alpha_0, \delta_0$  заранее неизвестны. Их можно определить только из наблюдений движения спутника.

Основной фактор несферичности Нептуна — это вторая зональная гармоника разложения силовой функции притяжения. Долгопериодических возмущений первого порядка этот фактор вызвать не может. Ось симметрии Нептуна остается неподвижной в орбитальной системе координат и относительно плоскости орбиты Тритона. В итоге, в элементах кеплеровской оскулирующей орбиты не может быть долгопериодических возмущений, вызванных несферичностью планеты. Если пренебречь возмущениями от притяжения Солнца, то движение спутника должно происходить по плоской

орбите, прецессирующей с постоянной угловой скоростью и постоянным наклоном к основной плоскости.

В рассматриваемой модели радиус орбиты  $a$ , наклон  $I$ , аргумент широты  $u$ , долгота восходящего узла  $\Omega$  задают положение спутника относительно центра планеты в орбитальной системе координат. Три из этих величин являются функциями времени

$$\begin{aligned} I &= I_0 + \delta I(t), \\ u &= u_0 + \dot{u}(t - t_0) + \delta u(t), \\ \Omega &= \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0) + \delta \Omega(t), \end{aligned} \quad (3.92)$$

где  $I_0, u_0, \dot{u}, \Omega_0, \dot{\Omega}$  — постоянные,  $t_0$  — некоторая заданная начальная эпоха, а  $\delta I(t), \delta u(t), \delta \Omega(t)$  — долгопериодические возмущения соответствующих элементов.

В силу принятых упрощений формулы кеплеровского движения вырождаются в следующие простые соотношения

$$\begin{aligned} x &= a (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos I), \\ y &= a (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos I), \\ z &= a \sin u \sin I. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Для построения модели движения Тритона при сделанных допущениях остается определить долгопериодические возмущения  $\delta I(t), \delta u(t), \delta \Omega(t)$ , обусловленные притяжением Солнца.

Разложение возмущающей функции  $R'$  было взято из книги (Мюррей, Дермотт, 2010). Это разложение представляет собой ряд по степеням отношения  $a/a'$ , где  $a'$  — большая полуось орбиты Солнца вокруг планеты. Ряд начинается с члена, содержащего  $(a/a')^2$ .

Сделаны дополнительные обоснованные упрощения. Так как большая полуось орбиты Тритона  $a = 354700$  км, а среднее расстояние Нептуна от Солнца составляет  $4504449760$  км, то  $a/a' = 0.000078757455$ .

В теории движения Тритона пренебрегаем более высокими степенями этого отношения и оставляем в разложении только члены с  $(a/a')^2$ . Кроме того предполагаем, что Солнце движется по круговой орбите в неизменной плоскости. Обозначим через  $i'$  и  $\Omega'$  наклон и долготу восходящего узла орбиты Солнца в орбитальной системе



Таблица 3.2. Параметры модели движения Солнца по средним элементам из работы (Simon et al., 1994) и определенные с помощью эфемерид INPOP10.

Параметр	По средним элементам	По эфемериде INPOP 10
$a'$ , км	4504449760	4499478064
$i'$ , град	27.923658	27.923678
$\Omega'$ , град	200.788305	200.788181
$u'_0$ , град	258.329018	258.727508
$\dot{u}'$ , град/сут	0.00598182615	0.00598084154

координат. Полагаем, что  $i'$  и  $\Omega'$  являются известными постоянными величинами, а аргумент широты Солнца  $u'$  есть известная линейная функция времени  $u' = u'_0 + \dot{u}'(t - t_S)$ , где  $t_S$  — некоторая заданная эпоха. Величины  $i'$  и  $\Omega'$ ,  $u'_0$ ,  $\dot{u}'$  можно определить, используя средние элементы орбиты Нептуна, которые можно взять, например, из работы (Simon et al., 1994). Однако в работе (Emelyanov, Samorodov, 2015) параметры модели движения Солнца были определены методом наименьших квадратов по гелиоцентрическим координатам Солнца, вычисленным на ряд моментов времени с шагом 10 суток на интервале времени с 1800 по 2200 год с помощью эфемерид INPOP10 (Fienga et al., 2011). Значения параметров даны в табл. 3.2. Для начальной эпохи  $t_S$  параметра  $u'_0$  взят момент JD=2451545.0 (ТТ).

В итоге сделанных упрощений возмущающая функция принимает вид

$$R' = \frac{Gm'}{a'} \left( \frac{a}{a'} \right)^2 \sum_{k=0}^2 (2 - \delta_{0,k}) \frac{(2-k)!}{(2+k)!} \sum_{p'=0}^2 F_{2k1}(I) F_{2kp'}(i') \times \\ \times \cos[(2 - 2p')u' + k(\Omega' - \Omega)],$$

где  $m'$  — масса Солнца, символ Кронекера  $\delta_{0,k} = 1$  при  $k = 0$  и  $\delta_{0,k} = 0$  при  $k \neq 0$ , а штрих у знака второй суммы означает, что пропущено слагаемое при  $k = 0$  и  $p' = 1$ , соответствующее вековому члену. Через  $F_{2k1}(I)$  обозначены функции наклона. В результате

выражение содержит 8 слагаемых, два из которых равны между собой, поскольку  $F_{200}(i') = F_{202}(i')$ . Необходимые функции наклона можно взять из книги (Каула, 1970).

Уравнения Лагранжа относительно  $\delta I(t)$ ,  $\delta u(t)$ ,  $\delta \Omega(t)$  решались методом малого параметра. Определялись возмущения первого порядка относительно малого параметра  $(m'/m)(a/a')^3$ . Кроме того, принималось во внимание то, что вековые возмущения от второй зональной гармоники с коэффициентом  $J_2$  в элементах  $u$ ,  $\Omega$  зависят от элемента  $I(t)$ , который подвержен долгопериодическим возмущениям. Здесь фактически определялись возмущения второго порядка в методе малого параметра Пуанкаре по способу Пуассона, как предписано выше. Эти возмущения содержатся в общих формулах (3.60), (3.64). Таким образом, учитывались также комбинированные возмущения, пропорциональные  $(m'/m)(a/a')^3 J_2$ .

Долгопериодические возмущения от Солнца определялись сначала в аналитическом виде. Затем в полученные формулы были подставлены значения приведенных выше параметров движения Солнца, а также найденные из наблюдений значения параметров движения Тритона. В итоге оказалось, что возмущения в элементах на заданный момент времени можно вычислять по следующим простым формулам:

$$\begin{aligned}\delta I(t) &= \sum_{i=1}^7 K_I^{(i)} \cos \left[ k_1^{(i)} u' + k_2^{(i)} (\Omega' - \bar{\Omega}) \right], \\ \delta u(t) &= \sum_{i=1}^7 K_u^{(i)} \sin \left[ k_1^{(i)} u' + k_2^{(i)} (\Omega' - \bar{\Omega}) \right], \\ \delta \Omega(t) &= \sum_{i=1}^7 K_\Omega^{(i)} \sin \left[ k_1^{(i)} u' + k_2^{(i)} (\Omega' - \bar{\Omega}) \right],\end{aligned}\tag{3.94}$$

где

$$u' = u'_0 + \dot{u}'(t - t_S), \quad \bar{\Omega} = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0).\tag{3.95}$$

Входящие в эти формулы коэффициенты даны в Табл. 3.3.

Графики изменений долгопериодических возмущений от притяжения Солнца в элементах орбиты Тритона  $I$ ,  $u$ ,  $\Omega$  на интервале времени с 1800 по 2200 год показаны на рис. 3.8.

В итоге была построена аналитическая теория движения спутника Нептуна Тритон. Произвольными постоянными теории были параметры  $I_0$ ,  $u_0$ ,  $\dot{u}$ ,  $\Omega_0$ ,  $\dot{\Omega}$ . Параметры теории были определены в

Таблица 3.3. Коэффициенты в формулах для долгопериодических возмущений, обусловленных притяжением Солнца.

$i$	$K_I^{(i)}$ , град	$K_u^{(i)}$ , град	$K_\Omega^{(i)}$ , град	$k_1^{(i)}$	$k_2^{(i)}$
1	0.0	-0.00012327	0.00063339	2	0
2	0.00096486	-0.00279450	-0.00178905	2	1
3	0.00664661	-0.04335622	-0.01560091	0	1
4	0.00004687	-0.00017215	-0.00009186	-2	1
5	0.00095976	-0.00233686	-0.00218071	2	2
6	-0.00037627	0.00096231	-0.00037627	0	2
7	-0.00000225	0.00000730	0.00000536	-2	2

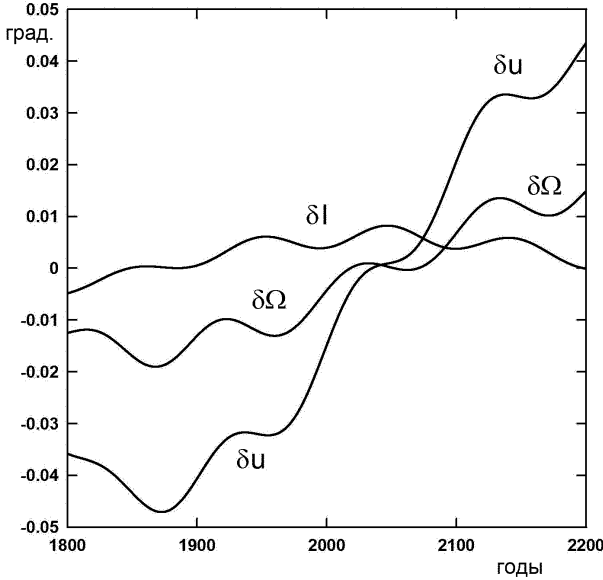


Рис. 3.8. Долгопериодические возмущения от притяжения Солнца в элементах орбиты Тритона.

работе (Emelyanov, Samorodov, 2015) по всем имеющимся наблюдениям, выполненным на интервале времени 165 лет с 1847 по 2012 год. При этом в число определяемых параметров были включены

также геоэквиаториальные координаты оси  $z$  орбитальной системы координат  $\alpha_0, \delta_0$ . Эфемерида Тритона, основанная на рассмотренной аналитической теории, незначительно отличается от эфемерид других авторов. Отличия обусловлены разным составом использованных наблюдений.

Таким образом было показано преимущество аналитической теории по сравнению с моделями движения, основанными на численном интегрировании дифференциальных уравнений движения.

Более подробно с рассмотренной здесь теорией можно познакомиться в публикации (Emelyanov, Samorodov, 2015).

### **3.13.2. Модели прецессирующих эллипсов для близких спутников Юпитера**

Четыре близких спутника Юпитера движутся вокруг планеты почти в плоскости экватора и по почти круговым орбитам. В порядке возрастания больших полуосей орбит это спутники Метис, Адрастея, Амальтея и Теба. В возмущениях кеплеровских орбит спутников превалирует влияние сжатия Юпитера. Значительно меньшие возмущения оказывает притяжение массивных Галилеевых спутников. Действие притяжения Солнца весьма мало. В работе (Jacobson, 1997) сообщалось о построении теории движения близких спутников Юпитера. Применены модели прецессирующих эллипсов с учетом вековых возмущений от несферичности Юпитера, притяжения Галилеевых спутников и Солнца. Скорости прецессии  $\dot{\omega}, \dot{\Omega}$  определены по теории возмущений. Исследователи из Томского государственного университета (ТГУ) В. А. Авдюшев и М. А. Баньщикова (Авдюшев, Баньщикова, 2008) построили новую модель движения четырех близких спутников Юпитера. Уравнения движения решались методом численного интегрирования. Параметры движения уточнены на основе всех имевшихся к 2008 году наземных наблюдений. В работе показано, что в задаче имеется несколько решений, примерно одинаково хорошо представляющих наблюдения. Выбрано одно из решений. На его основе построены эфемериды на интервале времени с 1954 по 2034 год. Эфемериды представлены в форме разложений прямоугольных планетоцентрических координат спутников в ряды по полиномам Чебышева.

В современной работе (Jacobson, 2013) объявлено о создании эфемерид Галилеевых и близких спутников Юпитера с помощью численного интегрирования уравнений движения на основе всех

имеющихся наземных наблюдений и наблюдений с помощью космических аппаратов. Эти эфемериды спутников доступны через Интернет в службе Данные Солнечной системы JPL (Jet Propulsion Laboratory, NASA, USA). Служба описана в статье (Giorgini et al., 1997).

В работе автора (Емельянов, 2015) сделано представление эфемерид JPL (Jacobson, 2013) и эфемерид (Авдюшев, Баньщикова, 2008) двумя моделями: прецессирующим эллипсом (ПЭ) и моделью, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров и учитывающей периодические возмущения, которую мы обозначили буквами УМ (уточненная модель). Эфемериды (Авдюшев, Баньщикова, 2008), представленные в форме разложений прямоугольных планетоцентрических координат спутников в ряды по полиномам Чебышева, были переданы автору работы (Емельянов, 2015).

С помощью каждого из двух вариантов эфемерид были составлены таблицы прямоугольных планетоцентрических координат четырех близких спутников Юпитера на интервале времени с 1 августа 2014 года по 1 января 2016 года с шагом 0.1 суток. Эфемериды JPL были получены через Интернет 3 апреля 2014 года. По этим данным методом дифференциального уточнения были найдены параметры каждой из двух моделей. В число определяемых параметров были включены также геоэквиаториальные координаты  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$  полюса Юпитера. Эти координаты фактически определяют ту ось, вокруг которой прецессирует плоскость орбиты с постоянным наклоном к экватору планеты. Для каждого из четырех спутников отдельно определялись  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$ . При этом геоэквиатор считался неподвижным и заданным на эпоху J2000.

Следует отметить, что в модели прецессирующего эллипса фактически учитываются только вековые возмущения. В модели, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров, учитываются также короткопериодические возмущения первого порядка, обусловленные второй зональной гармоникой разложения силовой функции притяжения планеты. В опорных моделях JPL и ТГУ учитываются также и другие возмущения от несферичности Юпитера, от притяжения Галилеевых спутников и Солнца. Поэтому рассогласования аналитических моделей с результатами численного интегрирования обусловлены различиями в учитываемых возмущающих факторах.

Таблица 3.4. Согласование представления эфемерид JPL (Jacobson, 2013) и ТГУ (Авдюшев, Баныщикова, 2008) двумя приближенными моделями: ПЭ — модель прецессирующего эллипса, УМ — уточненная модель, основанная на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров.

Спутник	$a$ км	JPL		ТГУ	
		$\bar{\sigma}$ (ПЭ) км	$\bar{\sigma}$ (УМ) км	$\bar{\sigma}$ (ПЭ) км	$\bar{\sigma}$ (УМ) км
Метис	127978.9	0.49	0.47	0.64	0.48
Адрастея	128979.9	0.49	0.48	1.87	0.58
Амальтея	181365.5	2.82	2.71	2.89	2.73
Теба	221888.2	12.98	12.55	12.98	12.62

В результате для четырех спутников на основе каждого из двух источников эфемерид, JPL и ТГУ, по двум моделям движения были определены 11 параметров: девять параметров модели прецессирующего эллипса  $\bar{a}$ ,  $\bar{n}$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $M_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\dot{\omega}$ ,  $\Omega_0$ ,  $\dot{\Omega}$  и параметры  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$ . В процессе уточнения параметров определялась среднеквадратичная величина  $\bar{\sigma}$  отклонений модельных координат от опорных, вычисленных из эфемерид. Отклонение для каждого момента времени эфемерид вычислялось как расстояние между модельными и эфемеридными положениями и измерялось в километрах.

Величина  $\bar{\sigma}$  показывает точность согласования аналитической модели с опорной моделью, основанной на численном интегрировании. Полученные значения для спутников даны в табл. 3.4. В этой таблице приводятся также значения большой полуоси  $a$ , полученные для модели прецессирующего эллипса из эфемерид JPL.

Результаты, данные в табл. 3.4, показывают, что рассогласование аналитических моделей с эфемеридами тем больше, чем больше большая полуось орбиты. Это легко объяснить тем, что при увеличении большой полуоси орбиты близкого спутника движение происходит все ближе к орбитам Галилеевых спутников, возмущающее действие которых значительно и не учитывается в аналитических моделях. Поскольку рассогласования, вызванные различиями в учитываемых возмущающих факторах, превалируют, величина  $\bar{\sigma}$  лишь немного меньше в модели, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров, по сравнению с моделью

прецессирующего эллипса. Обе модели с почти одинаковой точностью представляют движение близких спутников Юпитера.

Чтобы оценить найденные рассогласования моделей в масштабе геоцентрических угловых координат спутников следует учитывать, что 1 секунда дуги соответствует 3800 км на среднем расстоянии Юпитера от Земли. Рассогласование в 12 км на орбите спутника соответствует разности геоцентрических угловых координат в 0.003 секунды дуги. Такая разность по крайней мере в 50 раз меньше точности имеющихся наземных наблюдений близких спутников Юпитера.

Параметры прецессирующих эллипсов, которые были определены по эфемеридам JPL и ТГУ, можно использовать для вычисления эфемерид по простым формулам кеплеровского движения на любой момент времени. Для этого в табл. 3.5, 3.6 мы приводим найденные значения с необходимым числом значащих цифр для вычисления эфемерид. Параметры различаются для разных моделей и разных опорных эфемерид, однако каждый набор параметров является самосогласованным.

Координаты полюса Юпитера  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$ , полученные по эфемеридам JPL, оказались почти одинаковыми для четырех спутников и двух моделей, а именно  $\alpha_0 = 268.057$  град,  $\delta_0 = 64.497$  град. По эфемеридам ТГУ координаты полюса Юпитера получились следующими:  $\alpha_0 = 268.049$  град,  $\delta_0 = 64.489$  град.

В работе (Емельянов, 2015) показано, что для спутников Метис и Адрастея средняя аномалия имеет либрационный характер изменения во времени. Изменение средней аномалии спутника Теба имеет циркуляционный характер. Для спутника Амальтея изменение эксцентриситета и средней аномалии почти совпадает с сепаратрисным решением уравнений движения.

### **3.13.3. Специальные аналитические теории главных спутников больших планет, учитывающие взаимное притяжение спутников**

Взаимное притяжение главных спутников в известных аналитических теориях спутников учитывалось специальными методами теории возмущений. Не вдаваясь в подробности этих методов, кратко опишем, что было сделано.

Для Галиевых спутников Юпитера английским исследователем Sampson R.A. в 1921 году (Sampson, 1921) был предложен некото-

Таблица 3.5. Параметры прецессирующего эллипса для спутников Юпитера Метис и Адрастея, полученные по эфемеридам JPL (Jacobson, 2013) и ТГУ (Авдюшев, Баньщикова, 2008). Начальная эпоха элементов (шкала TT) 0 часов 1 августа 2014 г. (MJD=56870.0).

Параметр	JPL	ТГУ
Метис		
$\bar{a}$ , км	127978.860	127978.870
$e$	0.000504857	0.001274382
$i$ , рад	0.000213446	0.000348744
$M_0$ , рад	3.813296566	0.527952271
$\omega_0$ , рад	0.169346010	0.312420298
$\Omega_0$ , рад	5.753821299	2.603426115
$\bar{n}$ , рад/сут	21.164087429	21.164083095
$\dot{\omega}$ , рад/сут	0.300596369	0.300600575
$\dot{\Omega}$ , рад/сут	-0.149768271	-0.149770172
Адрастея		
$\bar{a}$ , км	128979.903	128979.840
$e$	0.000180935	0.005415531
$i$ , рад	0.000225599	0.007701531
$M_0$ , рад	2.545515933	1.724761655
$\omega_0$ , рад	3.034354065	2.395080996
$\Omega_0$ , рад	5.712371588	0.919577232
$\bar{n}$ , рад/сут	20.919404709	20.919415107
$\dot{\omega}$ , рад/сут	0.292385013	0.292382363
$\dot{\Omega}$ , рад/сут	-0.145685219	-0.145690358

рый эвристический метод построения аналитической теории движения спутников. Система координат принималась цилиндрической, основная плоскость — плоскость экватора Юпитера. Решение дифференциальных уравнений движения четырех Галилеевых спутников находилось в виде рядов Пуассона с полиномиальными и тригонометрическими аргументами. Применялись разложения в ряды по степеням малых параметров, малость которых обеспечива-



Таблица 3.6. Параметры прецессирующих эллипсов близких спутников Юпитера Амальтея и Теба, полученные по эфемеридам JPL (Jacobson, 2013) и ТГУ (Авдюшев, Баныщикова, 2008). Начальная эпоха элементов (шкала ТТ) 0 часов 1 августа 2014 г. (MJD=56870.0).

Параметр	JPL	ТГУ
Амальтея		
$\bar{a}$ , км	181365.552	181365.561
$e$	0.003426003	0.004079207
$i$ , рад	0.006565694	0.005659253
$M_0$ , рад	3.839867712	4.038848183
$\omega_0$ , рад	4.598920930	4.476760700
$\Omega_0$ , рад	4.630652745	4.556545020
$\bar{n}$ , рад/сут	12.568437183	12.568436283
$\dot{\omega}$ , рад/сут	0.087582088	0.087583381
$\dot{\Omega}$ , рад/сут	-0.043716407	-0.043716439
Теба		
$\bar{a}$ , км	221888.173	221888.157
$e$	0.017531954	0.016117934
$i$ , рад	0.018706263	0.019443802
$M_0$ , рад	1.526572934	1.603754238
$\omega_0$ , рад	4.294075517	4.238345375
$\Omega_0$ , рад	4.125853541	4.115550534
$\bar{n}$ , рад/сут	9.293210969	9.293215547
$\dot{\omega}$ , рад/сут	0.043193094	0.043188124
$\dot{\Omega}$ , рад/сут	-0.021577028	-0.021574888

лась малыми эксцентриситетами и наклонами орбит. Впоследствии эта теория была развита в работе (Lieske, 1977) с применением методов компьютерной алгебры. Формулы этой теории содержали 49 свободных параметров, которые уточнялись из всех имевшихся тогда наблюдений. В работе (Arlot, 1982) параметры теории были заново переуточнены на основе всех предыдущих и новых к тому времени наблюдений.

Для главных спутников Сатурна аналитические теории строились методами теории возмущений с использованием разложений по степеням различных малых параметров (Harper, Taylor, 1993). Заслуживает особого внимания модель движения главных спутников Сатурна построенная в работе (Vienne, Duriez, 1995). В этой работе основные частоты тригонометрических рядов, представляющих возмущения элементов промежуточной орбиты спутников, находились методами аналитической теории, а амплитуды уточнялись по модели движения, построенной методом численного интегрирования уравнений движения. Теория получила название «синтетической».

Для главных спутников Урана аналитическая теория была построена методом вековых возмущений Лагранжа – Лапласа. Этот метод описан в книгах (Дубошин, 1975; Субботин, 1968), а построенная теория движения спутников – в работе (Laskar, Jacobson, 1987).

### **3.14. Влияние приливов в вязко-упругих телах планеты и спутника на его орбитальное движение**

#### **3.14.1. Постановка задачи о влиянии приливов**

Задача о влиянии приливов в вязко-упругих телах планеты и спутника на его орбитальное движение в последнее время стала весьма актуальной. Точность наблюдений главных спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна возросла. С течением времени естественным образом увеличился интервал времени наблюдений. Этот прогресс стал основанием для попыток определения из наблюдений физических параметров планет и спутников, от которых зависят силы приливного трения. Приливной горб движется в небесном теле, создавая момент сил, действующих на спутник. Движение спутника зависит от параметров приливных деформаций. Поэтому можно решать обратную задачу: определять эти параметры по наблюдениям движения спутника. Сила пропорциональна отношению  $k_2/Q$ , где  $k_2$  – число Лява, характеризующее деформируемость тела, а  $Q$  – величина, называемая добротностью, характеризует вязкость вещества. Из уравнений движения следует, что по наблюдениям нельзя получить отдельно  $k_2$  и  $Q$ , а только их отношение  $k_2/Q$ .

В работе (Laine et al., 2009) по всем имеющимся к тому времени астрометрическим наблюдениям Галилеевых спутников Юпитера были определены отношения  $k_2/Q$  для Юпитера и для его спутника Ио. Для Юпитера получено  $k_2/Q = (1.102 \pm 0.203) \cdot 10^{-5}$ , для Ио  $k_2/Q = 0.015 \pm 0.003$ .

В работе (Laine et al., 2012) также на основе астрометрических наблюдений получено новое значение параметра вязкости Сатурна которое примерно в 10 раз больше, чем обычно принимаемое значение, установленное из теоретических предпосылок. Публикуется следующее значение:  $k_2/Q = (2.3 \pm 0.7) \cdot 10^{-4}$ .

В этой же работе (Laine et al., 2012) получено неожиданно высокое значение векового ускорения спутника Мимас, обусловленное приливами в теле спутника.

При определении параметров из наблюдений обычно выполняют численное интегрирование уравнений движения в прямоугольных координатах. Поэтому необходимо выражение для возмущающего ускорения, обусловленного приливными силами. Такие уравнения были получены уже давно несколькими авторами. Ниже цитируются соответствующие работы.

Эволюцию орбиты спутника под действием приливных сил удобно изучать по изменению двух ключевых параметров: большой полуоси  $a$  и эксцентриситету  $e$  орбиты. Изменения именно этих двух параметров определяют судьбу спутника: он либо падает на планету, либо удаляется от нее. С этой целью в ряде работ выведены дифференциальные уравнения относительно этих элементов. Пренебрегая малыми короткопериодическими возмущениями, получают два уравнения вида

$$\frac{da}{dt} = \frac{k_2}{Q} A_a(a, e), \quad \frac{de}{dt} = \frac{k_2}{Q} A_e(a, e).$$

Такие уравнения составляются отдельно для задачи учета приливов в теле планеты и задачи учета приливов в теле спутника. В двух этих задачах уравнения получаются различными. Однако можно совместно учесть оба эффекта в одной системе уравнений.

Дифференциальные уравнения относительно элементов кеплеровской орбиты в рассматриваемой задаче встречаются в ранее опубликованных работах. В частности, они приводятся в работе (Laine et al., 2012) со ссылкой на источник формул (Kaula, 1964) в

случае приливов в теле планеты и на источник (Peale, Cassen, 1978) в случае приливов в теле спутника.

В цитированных здесь работах уравнения относительно элементов орбиты выводятся отдельно от уравнений в прямоугольных координатах, используя выражения для правых частей уравнений, как функций от  $a$  и  $e$ .

С целью развития методов, выяснения возможностей определения параметров приливного трения из наблюдений и изучения эволюции орбит было бы интересно сравнить между собой решение уравнений в координатах и решение уравнений в элементах кеплеровской орбиты. Именно такая цель была поставлена в работе (Emelyanov, 2018). В этой работе заново выведены дифференциальные уравнения, описывающие изменения большой полуоси и эксцентриситета орбиты спутника, обусловленные приливами в вязко-упругих телах планеты и спутника. Рассмотрим здесь выводы и результаты, полученные в работе (Emelyanov, 2018).

### 3.14.2. Уравнения в прямоугольных координатах

Возьмем дифференциальные уравнения движения спутника планеты в прямоугольных планетоцентрических координатах, используя результаты ряда работ.

Уравнения, необходимые для поставленной задачи, были выведены в работе (Mignard, 1979). Рассматривалось влияние приливов в вязко-упругом теле Земли на движение Луны. Воспользуемся формулой (5) из этой работы. Далее рассматриваемая теория была развита в работе (Mignard, 1980).

Позже задача о влиянии приливов в теле Марса на движение Фобоса была решена в работе (Lainey, Dehant, Patzold, 2007). Авторы этой работы воспроизвели и использовали уравнения движения спутника в прямоугольных координатах со ссылкой на работу (Mignard, 1980). Соответствующая идентичная формула в работе (Lainey, Dehant, Patzold, 2007) имеет номер (3).

Авторы работы (Lainey et al., 2009a) обобщили формулы для возмущающего ускорения со стороны приливов в теле планеты на случай влияния приливов в вязко-упругом теле спутника на его орбитальное движение. Подробного вывода сделано не было. Формулы просто были объявлены и приведены в Дополнительном материале к этой работе без объяснений (Lainey et al., 2009b). Это формулы с номерами (1) и (2). Они имеют общий вид для влияния

приливов в теле планеты и для влияния приливов в теле спутника. Позже эти же уравнения в идентичном виде были даны также в работе (Laineу et al., 2012). Там они также имеют номера (1) и (2).

Воспользуемся общим видом уравнений движения спутника планеты, приведенным в работах (Laineу et al., 2009) и (Laineу et al., 2012). Введем пару упрощений, оставляя в формулах только члены, принципиально важные для дальнейшего анализа. Во-первых, оставим в уравнениях только главный член, соответствующий притяжению планеты, как материальной точки, и члены, описывающие рассматриваемые приливные эффекты. Во-вторых, пренебрежем массой спутника по сравнению с массой планеты. Это предположение близко к реальности: массы спутников действительно малы по сравнению с массой планеты. Для фигурирующих в формулах величин будем использовать иные обозначения, чем в цитируемых здесь работах. Уравнения движения, как и в цитированных выше работах, запишем относительно прямоугольных координат спутника в планетоцентрической системе. Для удобства рассмотрения запишем уравнения отдельно для двух задач: задача о движении спутника под действием приливов в вязко-упругом теле планеты и задача о движении спутника под действием приливов в вязко-упругом теле самого спутника.

В выводимых далее формулах мы используем следующие обозначения.

$R$  — радиус планеты,

$R_s$  — радиус спутника,

$G_M$  — гравитационный параметр планеты,

$G_s$  — гравитационный параметр спутника,

$a$  — большая полуось орбиты спутника,

$n$  — среднее движение спутника,

$k_2$  — число Лява планеты (безразмерный),

$k_2^{(s)}$  — число Лява спутника,

$\Delta t_p$  — временное запаздывание прилива в теле планеты,

$\Delta t_s$  — временное запаздывание прилива в теле спутника,

$Q_p$  — параметр вязкости планеты,

$Q_s$  — параметр вязкости спутника,

$\Omega$  — вектор угловой скорости вращения планеты,

$\Omega_s$  — вектор угловой скорости вращения спутника.

Величины  $\Delta t_p$ ,  $\Delta t_s$  считаются положительными. Для спутника будем задавать вектор положения  $\mathbf{r}$  и вектор скорости  $\mathbf{v}$ .

Согласно общим формулам (1) и (2) работ (Lainey et al., 2009) и (Lainey et al., 2012) при сделанных допущениях и в принятых здесь обозначениях дифференциальные уравнения движения спутника имеют вид:

– в случае приливов в теле планеты

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G_M}{r^3} \mathbf{r} - \frac{3k_2 G_s R^5}{r^8} \Delta t_p \left[ \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{v} \right], \quad (3.96)$$

– в случае приливов в теле спутника

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G_M}{r^3} \mathbf{r} - \frac{3k_2^{(s)} G_M R_s^5}{r^8} \frac{G_M}{G_s} \Delta t_s \left[ \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}_s] + \mathbf{v} \right]. \quad (3.97)$$

Здесь выражения  $[\mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}]$ ,  $[\mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}_s]$  представляют собой векторные произведения, а выражение  $(\mathbf{r} \mathbf{v})$  — скалярное произведение векторов.

Для упрощения дальнейшего рассмотрения введем еще несколько новых обозначений и слегка преобразуем полученные уравнения. Введем в рассмотрение некоторую произвольную величину  $\bar{a}$ , значение которой для удобства вычислений лучше выбрать равным некоторому среднему значению большой полуоси орбиты спутника. Воспользуемся известным соотношением для элементов кеплеровской орбиты

$$n^2 a^3 = G_M.$$

Введем безразмерные постоянные коэффициенты  $K_p$ ,  $K_s$  с помощью выражений

$$K_p = \frac{3R^5}{\bar{a}^5} \frac{G_s}{G_M}, \quad (3.98)$$

$$K_s = \frac{3R_s^5}{\bar{a}^5} \frac{G_M}{G_s}. \quad (3.99)$$

Влияние вязко-упругих приливов на орбитальное движение спутника определяется свойством деформируемости тела и свойством запаздывания приливной волны. Для тела планеты и тела спутника влияние характеризуется коэффициентами

$$K_2^{(p)} = k_2 \Delta t_p, \quad (3.100)$$

$$K_2^{(s)} = k_2^{(s)} \Delta t_s, \quad (3.101)$$

соответственно.

Теперь с новыми обозначениями уравнения примут вид:

– в случае приливов в теле планеты

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G_M}{r^3} \mathbf{r} - K_2^{(p)} K_p \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} n^2 \left[ \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{v} \right], \quad (3.102)$$

– в случае приливов в теле спутника

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G_M}{r^3} \mathbf{r} - K_2^{(s)} K_s \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} n^2 \left[ \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}_s] + \mathbf{v} \right]. \quad (3.103)$$

В цитируемых выше работах объяснено, как времена запаздывания приливов связаны с параметрами вязкости. Согласно этим объяснениям имеем

$$\Delta t_p = \frac{1}{2Q_p(|\boldsymbol{\Omega}| - n)}, \quad \Delta t_s = \frac{1}{Q_s n}. \quad (3.104)$$

При этом считается, что планета вращается быстрее, чем спутник по орбите. В этом случае  $\Delta t_p > 0$ .

В работе (Laine et al., 2012) отмечено, что времена запаздывания приливов  $\Delta t_p$ ,  $\Delta t_s$  зависят от так называемой приливной частоты, т.е. скорости пробегания приливной волны по поверхности. Здесь возможны два варианта предположений. Первый — считается, что на бесконечном интервале времени постоянными остаются  $\Delta t_p$ ,  $\Delta t_s$ . Во втором варианте предполагаются постоянными коэффициенты  $k_2/Q_p$ ,  $k_2^{(s)}/Q_s$ . Однако рассматривая эволюцию орбит на умеренных интервалах времени, все эти величины можно считать постоянными.

В наших дальнейших аналитических выкладках мы не фиксируем, как коэффициенты  $K_2^{(p)}$ ,  $K_2^{(s)}$  зависят от скорости пробегания приливной волны.

Заметим, что в некоторых работах вместо параметра вязкости  $Q$  используется параметр  $\arctan Q$  или  $\arcsin Q$ . Такая замена параметров в данном исследовании не существенна.

### 3.14.3. Решение уравнений в прямоугольных координатах

Решение полученных уравнений на достаточно большом интервале времени может дать нам представление об изменениях параметров орбиты спутника, вызванных приливами в вязко-упругих

телах планеты и спутника. Это именно то, что интересует исследователей в рассматриваемой задаче. Попытаемся получить искомые свойства движения спутников. Точное аналитическое решение в данном случае невозможно. Поэтому приходится применять методы численного интегрирования.

Мы выполнили интегрирование дифференциальных уравнений движения (3.102), (3.103) на некотором достаточно большом интервале времени, выдавая планетоцентрические координаты и вектор скорости спутника на ряд моментов времени, распределенных с постоянным шагом. На каждый такой момент мы вычисляли оскулирующие элементы кеплеровской орбиты. Вычисления выполнялись для частного случая, когда коэффициенты  $K_2^{(p)}$ ,  $K_2^{(s)}$  считаются постоянными. Изменение элементов во времени было главной целью проводимых вычислений. Нас интересует прежде всего изменение большой полуоси  $a$  и эксцентриситета  $e$ .

Орбиты реальных главных спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна имеют небольшие наклоны к плоскостям экваторов планет. Рассмотрим здесь некоторый гипотетический случай, близкий к реальному, когда движение спутника происходит в неизменной плоскости, а оси вращений планеты и спутника перпендикулярны этой плоскости. Тогда векторы  $[\mathbf{r} \ \Omega]$ ,  $[\mathbf{r} \ \Omega_s]$  лежат в плоскости движения. В итоге, все действующие силы лежат в одной плоскости, и движение спутника действительно будет плоским. Поэтому при решении дифференциальных уравнений (3.102), (3.103) можно ограничиться моделированием двумерного движения.

При проведении вычислений необходимо решить, как выбирать значение угловой скорости вращения спутника  $\Omega_s$ . Полной ясности в этом вопросе нет. В данном исследовании мы не изучаем вращение спутника. Остается принять ту или иную гипотезу. Возможны два варианта. В первой гипотезе мы предполагаем, что в результате воздействия планеты на приливную волну в вязко-упругом теле спутника он постоянно сохраняет режим синхронного вращения, в котором угловая скорость равна среднему движению орбитального движения. Как видно из описанных ниже исследований, именно такая гипотеза неявно принимается в разных работах по рассматриваемой задаче. Вторая гипотеза состоит в предположении, что угловая скорость вращения спутника не остается постоянной в процессе эволюции орбитального движения и с течением времени может отличаться от среднего движения. Как будет показано ниже,



результат принятия этой второй гипотезы противоречит результатам работ по рассматриваемой задаче. В наших вычислениях мы принимали первую гипотезу о постоянном синхронном вращении спутника.

Физические параметры были взяты близкими к параметрам движения спутников Урана. Для планеты приняты следующие значения постоянных:

$$G_M = 5793939.3 \text{ км}^3/\text{с}^2, \quad \Omega = 501.1600928 \text{ град}^3/\text{сут}^2.$$

Коэффициенты в уравнениях приняты следующими:

$$K_p = 0.1 \cdot 10^{-6},$$

$$K_s = 10.0 \cdot 10^{-6}.$$

Эти значения не соответствуют реальным возможным значениям параметров вязкости Урана и его спутников. Однако такие преувеличенные значения коэффициентов позволили увидеть особенности решения. Чтобы коэффициенты в уравнениях были безразмерными, введена постоянная  $\bar{a}$ . Ее значение выбиралось равным начальному значению большой полуоси орбиты спутника.

Начальные условия решения дифференциальных уравнений движения были взяты в двух вариантах:

вариант 1 —  $a = 190940.453 \text{ км}$ ,

вариант 2 —  $a = 114820.064 \text{ км}$ .

Начальный эксцентриситет в обоих случаях равен 0.002. Первый вариант параметров орбиты очень близок к параметрам спутника Урана Ариэль. Выбор второго варианта обусловлен рассмотренной ниже особенностью эволюции орбиты в этом случае. При интегрировании предполагалось, что спутник стартует из перицентра орбиты.

Чтобы увидеть характер и величину короткопериодических изменений оскулирующих элементов, были выведены значения большой полуоси и эксцентриситета орбиты сначала на интервале 8 суток с шагом по времени 0.01. Именно эти изменения для второго варианта начальных условий в задаче учета приливной диссипации в теле планеты показаны на рис. 3.9, 3.10. Короткопериодических колебаний большой полуоси на графике не видно из-за сильного векового изменения. Однако для эксцентриситета хорошо видны периодические колебания с периодом, равным периоду обращения спутника. Результаты на графиках показывают, что короткопериодические изменения оскулирующих элементов  $a$  и  $e$  чрезвычайно малы и не могут характеризовать приливную эволюцию орбиты.

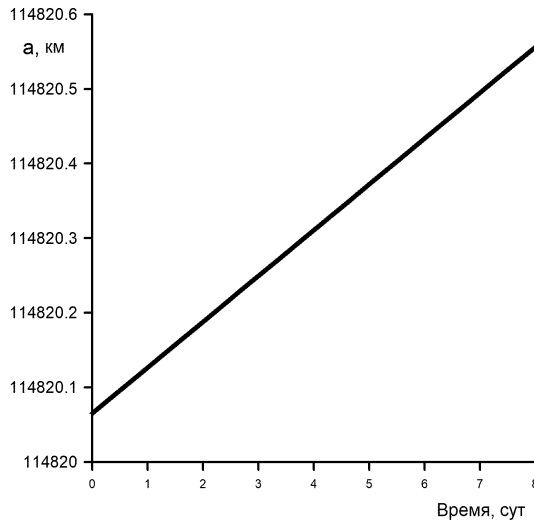


Рис. 3.9. Изменение большой полуоси орбиты спутника на интервале времени 8 суток из-за приливного трения в теле планеты. Вариант 2 начальных условий.

Аналогичные малые амплитуды короткопериодических изменений элементов мы получили во всех остальных исследуемых случаях.

Для исследования эволюции орбиты интегрирование выполнялось на интервале времени 80200.0 суток, что составляет примерно 220 лет. Результаты выводились на печать с шагом 100 суток. Ниже приводятся полученные результаты.

На рис. 3.11-3.14 показаны изменения большой полуоси и эксцентриситета орбиты спутника, вызванные приливным трением в теле планеты, для двух вариантов начальных условий.

Заметим, что при возмущающем влиянии приливов в теле планеты в варианте 2 эксцентриситет в начале интервала остается почти постоянным, а затем возрастает с ростом большой полуоси. В этом решении начальное значение большой полуоси было выбрано специально так, чтобы показать особенность решения в этом случае. Как выбиралось такое значение, поясняется ниже.

На рис. 3.15-3.18 показаны изменения большой полуоси и эксцентриситета орбиты спутника, вызванные приливным трением в теле спутника, для двух вариантов начальных условий.

Отметим, что полученные и изображенные на графиках измене-

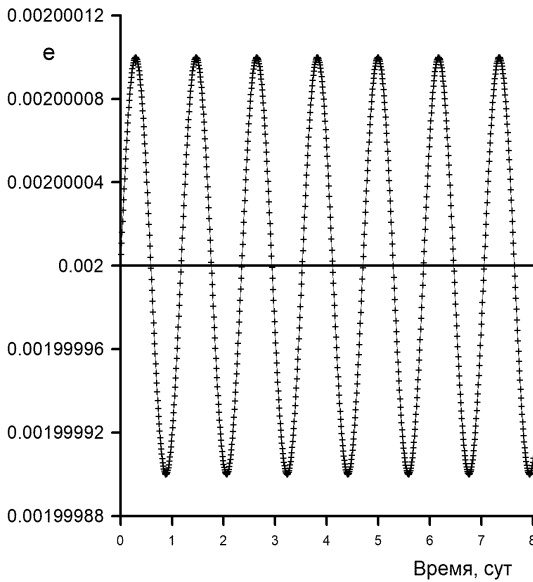


Рис. 3.10. Изменение эксцентриситета орбиты спутника на интервале времени 8 суток из-за приливного трения в теле планеты. Вариант 2 начальных условий.

ния большой полуоси и эксцентриситета отражают именно реальную эволюцию орбиты в результате воздействия приливов в вязкоупругих телах планеты и спутника. Достоверность результатов основана на достоверности уравнений движения спутника планеты в прямоугольных координатах, взятых из цитированных выше работ.

#### 3.14.4. Переход к дифференциальным уравнениям относительно элементов кеплеровской орбиты

При изучении движения спутников планет на больших интервалах времени нас интересует прежде всего поведение большой полуоси  $a$  и эксцентриситета  $e$  орбиты. Именно эти параметры описывают судьбу спутников. Из-за приливной диссипации механической энергии  $a$  и  $e$  могут измениться так, что в результате спутник может упасть на планету или удалиться от нее. Поэтому во многих работах при изучении эволюции орбит составляются дифференциальные уравнения относительно большой полуоси и эксцентриситета. Мы сделали попытку составить и решить такие уравнения.

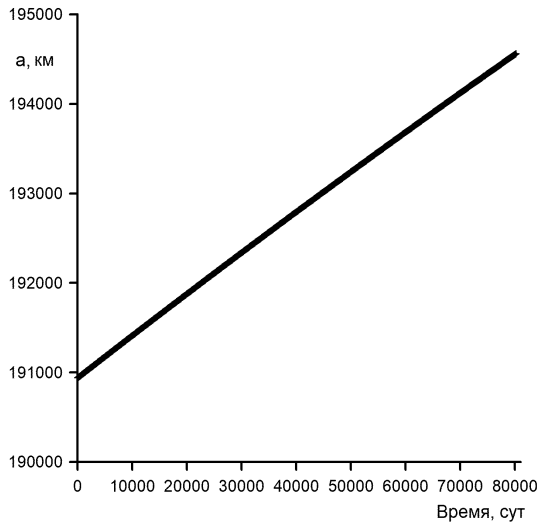


Рис. 3.11. Изменение большой полуоси орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле планеты. Вариант 1 начальных условий.

Поскольку в данной задаче без нарушения общности можно рассматривать плоские движения, в задаче не будут фигурировать наклон и долгота восходящего узла орбиты. Очевидно, что долгота перицентра и средняя аномалия в эпоху не определяют интересующую нас эволюцию орбиты спутника. По этим причинам мы ограничились построением только уравнений относительно большой полуоси  $a$  и эксцентриситета орбиты  $e$ .

Для вывода искомым уравнений воспользуемся уравнениями относительно  $a$  и  $e$ , данными в книге (Субботин, 1968). Они имеют вид

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[ e \sin f R + \frac{a(1-e^2)}{r} T \right], \quad (3.105)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [\sin f R + (\cos f + \cos E) T], \quad (3.106)$$

где  $f$  — истинная аномалия,  $E$  — эксцентрическая аномалия,  $R$  — радиальная компонента возмущающего ускорения,  $T$  — его трансверсальная компонента. Возмущающее ускорение представлено соответствующими членами правых частей уравнений (3.102), (3.103).

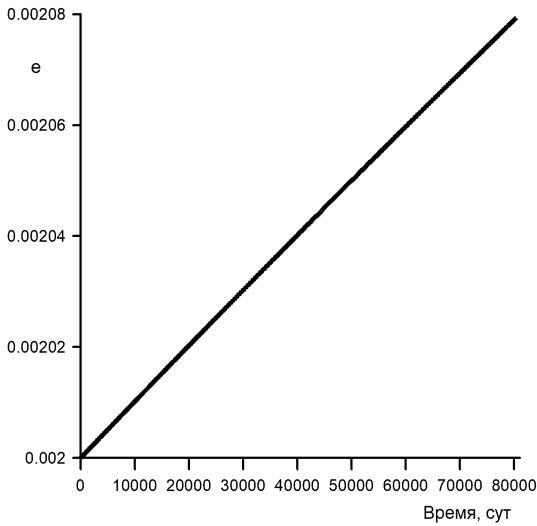


Рис. 3.12. Изменение эксцентриситета орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле планеты. Вариант 1 начальных условий.

Искомые уравнения будем выводить отдельно для случая приливов в теле планеты и случая приливов в теле спутника.

Сначала займемся первой задачей. Из уравнений (3.102) для компонент возмущающего ускорения получим

$$R^{(p)} = -K_p K_2^{(p)} \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} n^2 \left[ \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \mathbf{\Omega}] + \mathbf{v} \right]_R^{(p)}, \quad (3.107)$$

$$T^{(p)} = -K_p K_2^{(p)} \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} n^2 \left[ \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \mathbf{\Omega}] + \mathbf{v} \right]_T^{(p)}. \quad (3.108)$$

Здесь верхний индекс  $(p)$  означает принадлежность к задаче с приливами в теле планеты, а нижние индексы  $R, T$  здесь и далее различают две компоненты векторов.

Очевидно, что первое слагаемое в квадратных скобках имеет только радиальную составляющую, второе слагаемое — только трансверсальную, а третье — обе компоненты. Мы предположили, что плоскость орбиты спутника перпендикулярна вектору угловой скорости вращения планеты  $\mathbf{\Omega}$ . Отсюда следует, что вектор  $[\mathbf{r} \mathbf{\Omega}]$  лежит в плоскости орбиты, перпендикулярен вектору  $\mathbf{r}$  и направлен в

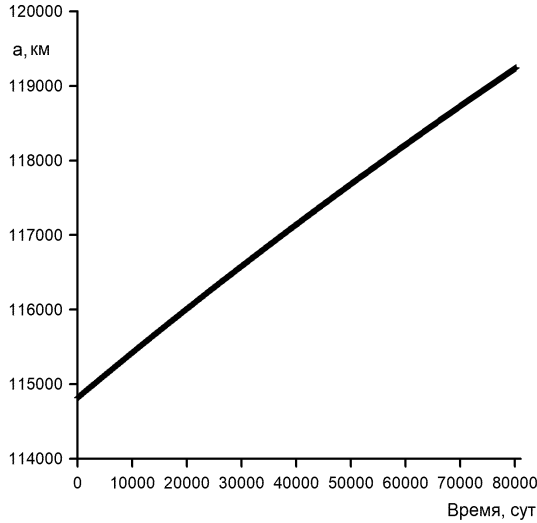


Рис. 3.13. Изменение большой полуоси орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле планеты. Вариант 2 начальных условий.

сторону, противоположную направлению движения спутника. Радиальная компонента произвольного вектора  $\mathbf{V}$  может быть получена операцией  $(\mathbf{V} \mathbf{r})/r$ .

Из формул кеплеровского движения имеем

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \quad \mathbf{v}_R = \frac{an}{\sqrt{1 - e^2}} e \sin f, \quad \mathbf{v}_T = \frac{an}{\sqrt{1 - e^2}} (1 + e \cos f),$$

$$(\mathbf{r} \mathbf{v}) = \frac{ane}{\sqrt{1 - e^2}} r \sin f.$$

Учитывая эти соотношения, получаем

$$\left[ \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \mathbf{\Omega}] + \mathbf{v} \right]_R^{(p)} = 3 \frac{nae}{\sqrt{1 - e^2}} \sin f, \quad (3.109)$$

$$\left[ \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \mathbf{\Omega}] + \mathbf{v} \right]_T^{(p)} = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}} (1 + e \cos f) - \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} |\mathbf{\Omega}|. \quad (3.110)$$

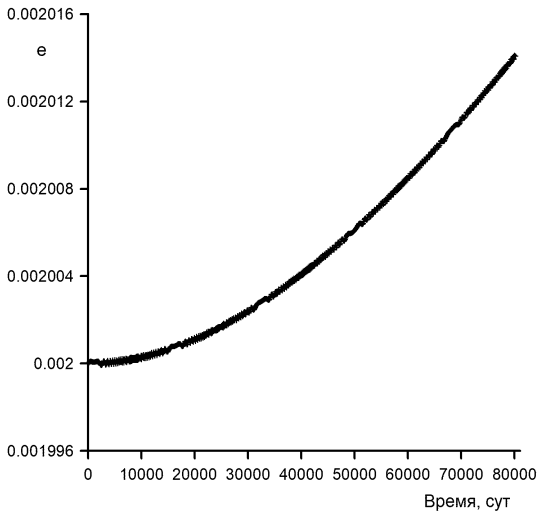


Рис. 3.14. Изменение эксцентриситета орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле планеты. Вариант 2 начальных условий.

Подставляя теперь соотношения (3.109),(3.110) в (3.107),(3.108), а затем полученные выражения в (3.105), (3.106), найдем

$$\frac{da}{dt} = K_p K_2^{(p)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n a \frac{2\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^8} (1+e \cos f)^8 \times \left[ |\Omega| - \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}} (1+2e \cos f + 3e^2 - 2e^2 \cos^2 f) \right], \quad (3.111)$$

$$\frac{de}{dt} = K_p K_2^{(p)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^8} (1+e \cos f)^8 \times \left\{ |\Omega| \frac{1-e^2}{1+e \cos f} (\cos f + \cos E) - \frac{n}{\sqrt{1-e^2}} [3e \sin^2 f + (\cos f + \cos E)(1+e \cos f)] \right\}. \quad (3.112)$$

Выведенные здесь уравнения в точности соответствуют исходным уравнениям (3.102), (3.103) относительно прямоугольных координат. Их решение должно выполняться совместно с уравнениями относительно аргумента перицентра  $\omega$  и средней аномалии  $M$ .

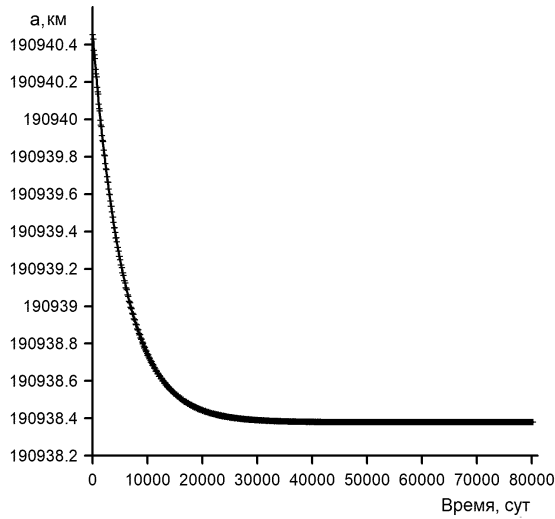


Рис. 3.15. Изменение большой полуоси орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле спутника. Вариант 1 начальных условий.

Такое решение в точности соответствовало бы решению уравнений в прямоугольных координатах. Элементы орбиты и векторы положения и скорости остаются связанными формулами кеплеровского движения.

Как было показано выше, после перехода в решении уравнений относительно координат от координат и вектора скорости к кеплеровским элементам изменения большой полуоси и эксцентриситета представляют собой монотонные эволюционные функции с наложенными на них малыми короткопериодическими колебаниями. Эти короткопериодические колебания весьма малы, и при анализе эволюции орбиты спутника ими можно пренебречь.

Мы сделали предположение, что путем осреднения по времени правых частей полученных уравнений (3.111), (3.112) решение этих уравнений даст нам эволюционные изменения элементов, освобожденные от короткопериодических колебаний. Проверить предположение можно путем сравнения решений точных уравнений (3.102), (3.103) в координатах с решением осредненных уравнений относительно элементов. Совпадение осредненного решения уравнений в координатах с решением осредненных уравнений в элементах дало



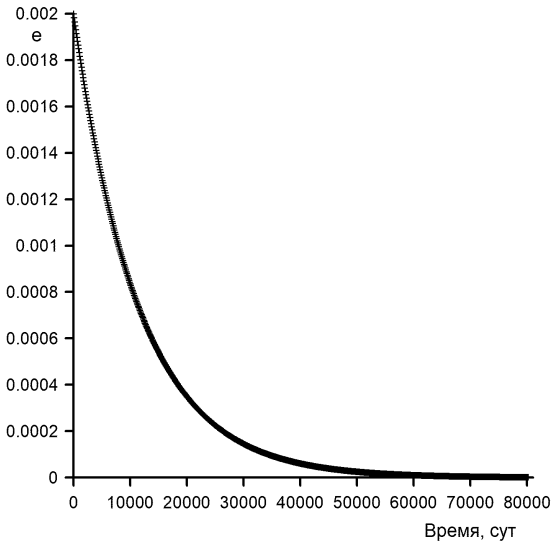


Рис. 3.16. Изменение эксцентриситета орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле спутника. Вариант 1 начальных условий.

бы возможность изучать эволюцию орбит спутников под действием приливного трения в телах планеты и спутников на больших интервалах времени, используя только уравнения относительно  $a$  и  $e$ .

Чтобы выполнить такую проверку, нужно сначала вывести осредненные уравнения относительно элементов  $a$ ,  $e$ , затем решить их методом численного интегрирования. Мы вывели такие уравнения и получили решение. Далее нас интересовало сравнение двух рассматриваемых решений.

При осреднении уравнений (3.111), (3.112) нам пришлось выполнить также разложение по степеням малого эксцентриситета и оставить только главные члены разложений, пренебрегая квадратом эксцентриситета по сравнению с единицей. Такое упрощение допустимо, поскольку решение задачи предположительно будет применяться к главным спутникам больших планет, орбиты которых действительно имеют малые эксцентриситеты. У наших модельных орбит также были малые эксцентриситеты.

Рассмотрим теперь процедуры, выполненные по указанному плану.

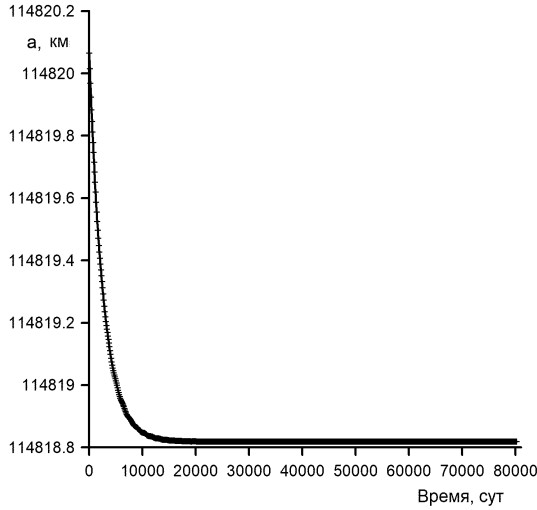


Рис. 3.17. Изменение большой полуоси орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле спутника. Вариант 2 начальных условий.

Осредненные по времени величины мы обозначаем чертой сверху. При осреднении мы учли следующие соотношения:

$$\overline{\cos f} = -e, \quad \overline{\cos E} = -\frac{e}{2}, \quad \overline{\cos^2 f} = \frac{1}{2} + O(e^2), \quad \overline{\cos f \cos E} = \frac{1}{2} + O(e^2),$$

где  $O(e^2)$  — члены разложения по степеням малого эксцентриситета  $e$ , имеющие второй порядок малости. Кроме того, мы использовали разложения вида

$$(1 + e \cos f)^k = 1 + ke \cos f + O(e^2),$$

где  $k$  — произвольное целое число, и оставляли в этом разложении только первые два слагаемых.

На промежуточном этапе действий мы привели уравнения к виду

$$\frac{da}{dt} = 2K_p \frac{\bar{a}^5}{a^5} na \times \\ \times (1 + 8e \cos f) [|\mathbf{\Omega}| - n(1 + 2e \cos f + 3e^2 - 2e^2 \cos^2 f)], \quad (3.113)$$

$$\frac{de}{dt} = K_p \frac{\bar{a}^5}{a^5} n \{ |\mathbf{\Omega}| (1 + 7e \cos f) (\cos f + \cos E) -$$

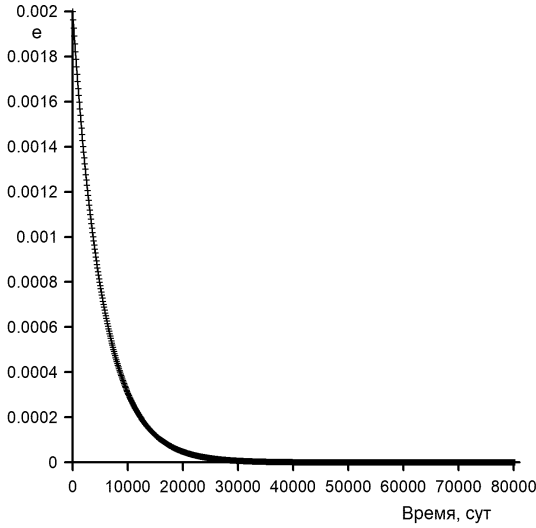


Рис. 3.18. Изменение эксцентриситета орбиты спутника на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле спутника. Вариант 2 начальных условий.

$$-\frac{n}{\sqrt{1-e^2}} \left[ 3e \sin^2 f (1 + 8e \cos f) + (\cos f + \cos E)(1 + 9e \cos f) \right] \Bigg\}. \quad (3.114)$$

После осреднения окончательно получили

$$\frac{da}{dt} = 2K_p K_2^{(p)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} na(|\Omega| - n), \quad (3.115)$$

$$\frac{de}{dt} = K_p K_2^{(p)} \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{a}^5}{a^5} \cdot (11|\Omega| - 18n)ne. \quad (3.116)$$

Теперь рассмотрим, как и какие уравнения получаются в случае возмущающего влияния приливов в вязко-упругом теле спутника. Из дифференциальных уравнений (3.103) находим, что радиальная и трансверсальная компонента возмущающего ускорения будут иметь вид

$$R^{(s)} = -K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} n^2 \left[ \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \Omega_s] + \mathbf{v} \right]_R^{(s)}, \quad (3.117)$$

$$T^{(s)} = -K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} n^2 \left[ \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \Omega_s] + \mathbf{v} \right]_T^{(s)}. \quad (3.118)$$

Здесь верхний индекс  $(s)$  означает принадлежность к задаче с приливами в теле спутника, а нижние индексы  $R, T$ , как и выше, различают две компоненты векторов.

Здесь угловая скорость вращения спутника  $\Omega_s$  по предположению перпендикулярна плоскости орбиты. Тогда аналогично предыдущему случаю имеем

$$\left[ \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \Omega_s] + \mathbf{v} \right]_R^{(s)} = 3 \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}} \sin f, \quad (3.119)$$

$$\left[ \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r^2} + [\mathbf{r} \Omega_s] + \mathbf{v} \right]_T^{(s)} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (1 + e \cos f) - \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} |\Omega_s|. \quad (3.120)$$

Поскольку мы приняли гипотезу о постоянном синхронном вращении спутника, то в дальнейшем можно положить  $|\Omega_s| = n$ . Учитывая это обстоятельство и подставляя выражения (3.119), (3.120) в формулы (3.117), (3.118), а затем в (3.105), (3.106), находим

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} \cdot \frac{2n^2 a}{1-e^2} \times \\ &\times \left[ 3e^2 \sin^2 f + (1 + e \cos f)^2 - (1 - e^2)^{3/2} \right], \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5 a^3}{r^8} n^2 \times \\ &\times \left\{ 3e \sin^2 f + (\cos f + \cos E) \left[ 1 + e \cos f - \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{1 + e \cos f} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

В правых частях этих точных уравнений мы сделали затем упрощения согласно указанному выше плану: выполнили разложения по степеням эксцентриситета, оставили в разложениях только главные члены и усреднили по времени. На промежуточном этапе после разложения по степеням эксцентриситета были получены следующие уравнения:

$$\frac{da}{dt} = -K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} 2n^2 a (1 + 8e \cos f) \left( \frac{9}{2} e^2 - 2e^2 \cos^2 f + 2e \cos f \right), \quad (3.123)$$

$$\frac{de}{dt} = -K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n^2 e [3 \sin^2 f + 2 \cos f (\cos f + \cos E)]. \quad (3.124)$$

Осреднение по времени окончательно дало

$$\frac{da}{dt} = -19K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n^2 a e^2, \quad (3.125)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{7}{2} K_s K_2^{(s)} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n^2 e. \quad (3.126)$$

Эти уравнения должны описывать эволюцию элементов  $a$  и  $e$ , обусловленную диссипацией механической энергии орбитального движения спутника из-за приливного трения в вязко-упругом теле самого спутника. Выведенные и приведенные выше уравнения (3.115), (3.116) описывают эволюцию элементов  $a$  и  $e$ , обусловленную приливым трением в вязко-упругом теле планеты.

Заметим, что эти четыре уравнения были выведены при произвольной зависимости  $K_2^{(p)}$ ,  $K_2^{(s)}$  от среднего движения  $n$ , то есть при произвольной частотной зависимости запаздывания приливов. Предполагая справедливыми соотношения (3.104), приведем уравнения к виду, в котором они встречаются в публикациях. В результате получим

$$\frac{da}{dt} = K_p \frac{k_2}{Q_p} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n a, \quad (3.127)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{4} K_p \frac{k_2}{Q_p} \cdot \frac{\bar{a}^5}{a^5} \cdot \frac{11|\Omega| - 18n}{|\Omega| - n} n e, \quad (3.128)$$

$$\frac{da}{dt} = -19K_s \frac{k_2^{(s)}}{Q_s} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n a e^2, \quad (3.129)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{7}{2} K_s \frac{k_2^{(s)}}{Q_s} \frac{\bar{a}^5}{a^5} n e. \quad (3.130)$$

Теперь следует сверить решение уравнений в прямоугольных координатах, полученное и показанное выше, с решением уравнений (3.115), (3.116) первой задачи и решение уравнений (3.125), (3.126) – во второй. Мы выполнили численное интегрирование последних уравнений с тем же предположением о постоянстве коэффициентов  $K_2^{(p)}$ ,  $K_2^{(s)}$  и с теми же начальными условиями, которые были заданы при решении дифференциальных уравнений движения спутника в прямоугольных координатах. Эти решения показаны графически на тех же рис. 3.11-3.14 и рис. 3.15-3.18, соответствующих

первой и второй задачам. Линии соответствующих решений полностью сливаются, показывая точное в пределах толщины линий совпадение двух решений. Более точный численный анализ показывает, что решения уравнений относительно элементов орбиты в точности равны значениям элементов, полученным по решению уравнений в координатах и осредненным относительно короткопериодических колебаний.

Полученный результат доказывает сделанное предположение о том, что решение уравнений (3.115), (3.116), (3.125), (3.126) в элементах достоверно описывает эволюцию орбиты спутника в двух рассмотренных задачах.

Заметим, что во втором варианте начальных условий большая полуось орбиты была выбрана именно так, чтобы выполнялось условие

$$n = \frac{11}{18} |\Omega|.$$

В этом случае правая часть уравнения (3.116) в начальный момент равна нулю. На соответствующем рис. 3.12 видно, что в начале периода среднее значение эксцентриситета почти не изменяется. Именно такое поведение этой функции позволило увидеть на рис. 3.10 короткопериодические колебания.

Принимаемая нами гипотеза о постоянном синхронном вращении спутника может быть подвергнута сомнению. По этому вопросу необходимы специальные исследования. Предположение о неизменной угловой скорости вращения спутника, независимой от орбитального движения, было также рассмотрено. В этом случае скорость изменения большой полуоси из-за приливного трения в теле спутника уже не будет пропорциональна квадрату эксцентриситета, как это следует из уравнения (3.125). Численное интегрирование уравнений в координатах для задачи учета вязко-упругих приливов в теле спутника было выполнено для первого варианта начальных условий в предположении постоянной угловой скорости вращения спутника. Результат — изменение большой полуоси во времени показан на рис. 3.19. На рисунке видно, что изменение большой полуоси имеет иной характер по сравнению со случаем синхронного вращения спутника. Изменение более значительное. Изменение эксцентриситета в этом случае не отличается от его изменения в случае синхронного вращения спутника. Поэтому соответствующий график мы не приводим.

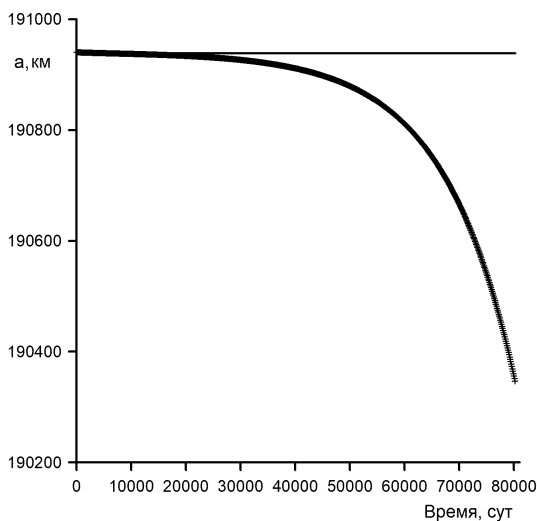


Рис. 3.19. Случай постоянной угловой скорости вращения спутника. Показано изменение большой полуоси орбиты на интервале времени 80200 суток (220 лет) из-за приливного трения в теле спутника. Взят вариант 1 начальных условий. Жирной линией показано изменение большой полуоси при постоянной скорости вращения спутника. Тонкой линией показано изменение большой полуоси при синхронном вращении. В последнем случае кажущееся постоянство большой полуоси проявляется из-за выбранного на графике масштаба.

### 3.14.5. Некоторые важные выводы о влиянии приливных деформаций на динамику спутников

В результате выполненной работы (Emelyanov, 2018) получены дифференциальные уравнения эволюционных изменений большой полуоси и эксцентриситета орбиты спутника, обусловленных приливным трением в теле планеты и в теле спутника. Мы исходили из соответствующих дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах, опубликованных в работе (Lainey et al., 2012). Показана идентичность осредненных решений уравнений в координатах с точным решением выведенных в работе (Emelyanov, 2018) осредненных уравнений в элементах.

В задаче учета влияния приливов в теле планеты обнаружено соотношение между средним движением спутника  $n$  и угловой скоростью вращения планеты  $|\Omega|$ , при котором скорость изменения экс-

центриситета становится равной нулю (Emelyanov, 2018). Это происходит при  $n = \frac{11}{18}|\Omega|$ .

Представляет интерес сравнение полученных результатов с результатами других авторов. Рассмотрим несколько аспектов.

Приливная эволюция в тесных двойных системах была изучена в работе (Hut, 1981). Выведенные в этой работе дифференциальные уравнения движения частицы в прямоугольных координатах с учетом приливного влияния вязко-упругого центрального тела совпадают с уравнениями, опубликованными в статьях (Mignard, 1979, 1980; Lainey et al., 2009; Lainey et al., 2012). Уравнения соответствуют случаю возмущений орбитального движения спутника под действием приливов в вязко-упругом теле планеты. Автор работы (Hut, 1981) преобразовал уравнения к переменным большая полуось  $a$ , эксцентриситет  $e$ . Наши уравнения (3.127), (3.128) в точности совпадают с результатами работы (Hut, 1981).

Дифференциальные уравнения относительно большой полуоси и эксцентриситета орбиты спутника, описывающие влияние вязко-упругих приливов в теле планеты и в теле спутника на орбитальное движение, опубликованы в работе (Lainey et al., 2012). Эти уравнения имеют такую же форму, как и наши уравнения (3.127), (3.128), (3.129), (3.130). Однако только два из четырех уравнений в работе (Lainey et al., 2012) совпадают с уравнениями (3.127), (3.130). Другие два существенно отличаются. Соответственно они отличаются и от результатов работы (Hut, 1981).

Более общая теория, чем рассмотренная здесь, для учета приливного влияния на орбитальное движение спутников развита в работах (Efroimsky, Makarov, 2013; Makarov, Efroimsky, 2013; Makarov, 2015). Авторы ссылаются на работы предшественников. Показано, что в телах планеты и спутника кроме основной приливной деформации, которая рассмотрена выше, возникают и другие волны деформаций, имеющие другие скорости пробегания по телам и другие запаздывания по времени. Множественность этих волн порождена, в основном, отличием орбиты спутника от круговой и ее наклоном к плоскости экватора планеты.

Параметры диссипации энергии орбитального движения спутника от приливных деформаций можно определить только из наблюдений. Точность наблюдений ограничена. В настоящее время точности едва хватает, чтобы определить эти параметры для Юпитера, Сатурна и их главных спутников. Что касается вязко-упругих



тел Урана и Нептуна, то попыток определения таких параметров пока не делалось. В работе (Laineу, 2016) исследовалось соотношение между точностью наблюдений и возможными значениями параметров приливных деформаций Урана и Нептуна. Найдены такие гипотетические значения параметров, при которых они могли бы быть определены из наблюдений. Эти значения соответствуют значительной приливной деформации.

Отметим здесь результаты определения орбитального ускорения спутника Марса Фобоса. Особенность движения этого спутника состоит в том, что он обращается по орбите быстрее вращения Марса. Приливы в вязко-упругом теле Марса, вызванные притяжением спутника, запаздывают от направления на спутник. В результате энергия орбитального движения теряется, и спутник «падает» на Марс. Наиболее развитая теория орбитального движения Фобоса и Деймоса на основе наблюдений опубликована в работе (Laineу et al., 2007). Значения орбитального ускорения, взятые из этой работы и из нескольких более ранних публикаций, приведены в Приложении 2.

### **Литература к Главе 3**

- Авдюшев В.А., Баньщикова М.А.* Определение орбит близких спутников Юпитера. *Астрономический вестник*. 2008. Т. 42. № 4. С. 317–340.
- Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г.* Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. *Сборник Искусственные спутники Земли*. 1961. № 8. С. 64–71.
- Аксенов Е. П.* Один вид дифференциальных уравнений движения спутника. 1966. *Труды ГАИШ*. Т. 35. С. 44–58.
- Аксенов Е. П.* Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977.
- Аксенов Е.П.* Специальные функции в небесной механике. М.: Наука, 1986.
- Аксенов Е.П., Емельянов Н.В., Тамаров В.А.* Практическое применение промежуточной орбиты спутника. Формулы, программы, тесты. *Труды ГАИШ*. 1988. Т. 59. С. 3–40.

- Белецкий В. В.* Орбита экваториального спутника Земли. Искусственные спутники Земли. 1962. Вып. 13. С. 53–60.
- Брумберг В. А.* Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. Бюллетень ИТА. 1967. Т. 11. № 2. С. 73–83.
- Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. Учебник для студентов университетов, обучающихся по специальности «Астрономия». Издание 3-е, дополненное. М.: Наука, 1975.
- Емельянов Н.В., Кантер А.А.* Орбиты новых внешних спутников планет на основе наблюдений. Астрономический вестник. 2005. Т. 39. № 2. Р. 128–140.
- Емельянов Н.В.* Возмущенное движение при малых эксцентриситетах. Астрономический вестник. 2015. Т. 49. № 5. С.380–394.
- Каула У.* Спутниковая геодезия. М.: Мир, 1970.
- Кондратьев Б. П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. Издание института компьютерных исследований. Москва – Ижевск. 2003. ISBN 5-93972-222-9, 624 с.
- Кондратьев Б. П.* Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007. ISBN 978-5-03-003798-1, 512 с.
- Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
- Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968.
- Холиевников К. В., Титов В. Б.* Задача двух тел. Санкт-Петербургский государственный университет. Санкт-Петербург, 2007.
- Archinal B. A., Acton C. H., A'hearn M. F., Conrad A., Consolmagno G. J., Duxbury T., Hestroffer D., Hilton J. L., Kirk R. L., Klioner S. A., McCarthy D., Meech K., Oberst J., Ping J., Seidelmann P. K., Tholen D. J., Thomas P. C., Williams I. P.* Report of the IAU Working Group on cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2015. Celestial Mechanics and Dynamic Astronomy. 2018. 130:22.
- Arlot J.-E.* New constants for Sampson-Lieske theory of the Galilean Satellites of Jupiter. Astronomy and Astrophysics. 1982. V. 107. № 2. Р. 305–310.

- Brower D.* Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *Astronomical Journal*. 1959. V. 64. P. 378–397.
- Darboux G.* Sur un probleme de mecanique. *Archives Neerlandaises des Sciences, Exact et naturel*. 1901. Ser. 2. T. 6. P. 371.
- Danby J. M. A.* *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Second Edition. Willmann-Bell, Inc. USA. 1995.
- Efroimsky M., Makarov V. V.* Tidal Friction and Tidal Lagging. Applicability Limitations of a Popular Formula for the Tidal Torque. *Astrophysical Journal*. 2013. V. 764. Issue 1. Article id. 26, 10 pp.
- Emelyanov N.V.* Ephemerides of the outer Jovian satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 2005. V. 435, p. 1173–1179.
- Emelyanov N. V., Samorodov M. Yu.* Analytical theory of motion and new ephemeris of Triton from observations *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. V. 454. P. 2205–2215.
- Emelyanov N.* Influence of tides in viscoelastic bodies of planet and satellite on the satellite's orbital motion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2018. V. 479. Issue 1. P. 1278–1286.
- Euler L.* Un corps etant attire an raison reciproque quaree des distances vers deux points fixes donnes. *Mem. Berlin*. 1760. V. 228.
- Euler L.* De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti. *Novi Commentarii Acad. Scient. Imperial. Petropolit.* 1764. V. 10. P. 207; 1765. V. 11. P. 152
- Fienga A., Laskar J., Kuchynka P., Manche H., Desvignes G., Gastineau M., Cognard I., Theureau G.* The INPOP10a planetary ephemeris and its applications in fundamental physics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. V. 111. Issue 3. P. 363–385.
- Giorgini J.D., Yeomans D.K., Chamberlin A.B., Chodas P.W., Jacobson R.A., Keesey M.S., Lieske J.H., Ostro S.J., Standish E.M., Wimberly R.N.* JPL's On-Line Solar System Data Service. *Amer. Astron. Soc. DPS meeting N.28, N.25.04*. 1997. *Bull. Amer. Astron. Soc.* 1997. V. 28. P. 1158–1158.
- Harper D., Taylor D. B.* The orbits of the major satellites of Saturn. *Astronomy and Astrophysics*. 1993. V. 268. C. 326–349.

- Hut P.* Tidal evolution in close binary systems. *Astronomy and Astrophysics*. 1981. V. 99. P. 126–140.
- Jacobson R. A., Riedel J. E., Taylor A. H.* The orbits of Triton and Nereid from spacecraft and earthbased observations. *Astronomy and Astrophysics*. 1991. V. 247. P. 565–575.
- Jacobson R.A.* The Orbits of the Inner Jovian Satellites. Amer. Astron. Soc. DDA meeting N.28. 1997. *Bull. Amer. Astron. Soc.* 1997. V. 28. P. 1098–1098.
- Jacobson R. A.* The Orbits of the Neptunian Satellites and the Orientation of the Pole of Neptune. *Astronomical Journal*. 2009. V. 137. 4322–4329.
- Jacobson R. A.* The Orbits of the Regular Jovian Satellites, Their Masses, and the Gravity Field of Jupiter. American Astronomical Society, DDA meeting #44. 2013. Id.402.04.
- Kaula W. M.* Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite. *Astronomical Journal*. 1962. V. 67. P. 300–303.
- Kaula W.M.* Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution. *Reviews of Geophysics*. 1964. V. 2. P. 661–684.
- Lainey V., Dehant V., Patzold M.* First numerical ephemerides of the Martian moons. *Astronomy and Astrophysics*. 2007. V. 465. P. 1075–1084.
- Lainey V., Arlot J.-E., Karatekin O., van Hoolst T.* Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations. *Nature*. 2009a. V. 459. Issue 7249. P. 957–959.
- Lainey V., Arlot J.-E., Karatekin O., van Hoolst T.* Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations. *Nature*. 2009b. V. 459. Issue 7249. P. 957–959. Supplementary information.
- Lainey V., Karatekin O., Desmars J., Charnoz S., Arlot J.-E., Emelyanov N., Le Poncin-Lafitte Chr., Mathis S., Remus F., Tobie G., Zahn J.-P.* Strong tidal dissipation in Saturn and constraints on Enceladus' thermal state from astrometry. *The Astrophysical Journal*. 2012. V. 752. Issue 1. Article id. 14.
- Lainey V.* Quantification of tidal parameters from Solar System data. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2016. V. 126. Issue 1–3. P. 145–156.

- Laskar J., Jacobson R. A.* GUST86 - An analytical ephemeris of the Uranian satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 1987. V. 188. № 1. P. 212–224.
- Lieske J. H.* Theory of motion of Jupiter's Galilean satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 1977. V. 56. P. 333–352.
- Makarov V. V., Efroimsky M.* No Pseudosynchronous Rotation for Terrestrial Planets and Moons. *Astrophysical Journal*. 2013. V. 764. Issue 1. Article id. 27, 12 pp.
- Makarov V. V.* Equilibrium Rotation of Semiliquid Exoplanets and Satellites. *Astrophysical Journal*. 2015. V. 810. Issue 1. Article id. 12, 9 pp.
- Mignard F.* The evolution of the lunar orbit revisited. I. Moon and the Planets. 1979. V. 20. P. 301–315.
- Mignard F.* The evolution of the lunar orbit revisited. II. Moon and the Planets. 1980. V. 23. P. 185–201.
- Peale S. J., Cassen P.* Contribution of Tidal Dissipation to Lunar Thermal History. *Icarus*. 1978. V. 36. P. 245–269.
- Sampson R. A.* Theory of the Four Great Satellites of Jupiter. *Memoirs of the Royal Astronomical Society*. 1921. V. 63. P. 1.
- Simon J. L., Bretagnon P., Chapront J., Chapront-Touze M., Francou G., Laskar J.* Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets *Astronomy and Astrophysics*. 1994. V. 282. P. 663–683.
- Vienne A., Duriez L.* TASS1.6: Ephemerides of the major Saturnian satellites. *Astronomy and Astrophysics*. 1995. V. 297. C. 588–605.