

Н.В.Емельянов

**ДИНАМИКА ЕСТЕСТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ  
НА ОСНОВЕ НАБЛЮДЕНИЙ**

ГАИШ МГУ - 2019

---

## ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

### Резюме

Описание эволюции орбит естественных спутников больших планет служит решению ряда задач, смежных по отношению к задаче моделирования движения на основе наблюдений. Это задачи выяснения происхождения спутников, задачи об эволюции и происхождении всей Солнечной системы в целом. Установление картины эволюции служит объяснению строения существующих систем спутников.

В данной главе рассмотрено несколько основных аспектов эволюции орбит естественных спутников больших планет.

В рассматриваемой теме имеется весьма интересная задача с развитым решением — это изучение эволюции орбит спутников планет при дважды осредненной возмущающей функции в случае Хилла. Здесь рассматриваются возмущения кеплеровской орбиты, обусловленные притяжением Солнца. Основной объект интереса — линия апсид орбиты спутника. Ее поведение во времени, а также, как следствие решения этой задачи, движение линии узлов описываются весьма замысловатыми функциями.

Подробное исследование этой задачи началось с открытия нового первого интеграла уравнений движения спутника. Открытие было сделано почти одновременно в 1961 году российским исследователем М. Л. Лидовым и американским ученым Y. Kozai. С тех пор все, что касается этой задачи, называется эффектами Лидова–Козаи. В данной главе подробно описаны все детали этих эффектов.

Картина эволюция орбит спутников, которая описывается эффектами Лидова–Козаи, была существенно усовершенствована в

работах российского специалиста М. А. Вашковьяка с соавторами. В данной главе подробно описаны результаты этих работ.

Другой важный аспект эволюции орбит спутников больших планет — это установление фактов пересечения орбит спутников на больших интервалах времени. Пересечения орбит чреваты сближениями спутников, что в свою очередь сильно влияет на эволюцию орбит. Такие исследования были выполнены автором настоящей книги с соавторами. В настоящей главе приводятся результаты этих исследований. Главным результатом является создание службы эфемерид орбит далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Этот сервис организован в виде вычислительной программы, запускаемой любым пользователем через Интернет. Программа дает таблицы, описывающие эволюцию орбит спутников на больших интервалах времени и позволяет детектировать пересечения орбит. В главе приводятся примеры вычислений и описываются некоторые интересные обстоятельства сближений орбит далеких спутников.

## **10.1. Воздействие различных факторов на эволюцию орбит спутников планет**

Под эволюцией орбит спутников планет мы понимаем медленные изменения орбитальных элементов, рассматриваемые на больших интервалах времени. Изучение эволюции непосредственно связано с вопросами происхождения и судьбы Солнечной системы. Эта тема не является основной в настоящей книге. Поэтому мы ограничимся только обзором некоторых достижений в этой области. Отметим однако, что для моделирования эволюции орбит спутников планет необходимы достоверные значения параметров, которые могут быть найдены только из наблюдений. Поэтому роль наблюдений в задачах исследования эволюции орбит оказывается определяющей.

Описание эволюции движения реальных спутников планет Солнечной системы выполняется путем построения моделей эволюционирующих кеплеровских орбит спутников. Говоря о свойствах эволюции, мы подразумеваем поведение на больших интервалах времени тех моделей движения, которые мы строим на основе наблюдений. Специфика данной задачи такова, что небольшие периодические отклонения реального движения от модельного здесь менее

интересны. Основное внимание уделяется адекватности поведения осредненных значений параметров орбит реальному движению на больших интервалах времени. Гипотетически мы распространяем поведение моделей на бесконечное время, однако сознаем, что никакое решение дифференциальных уравнений движения не является точным на бесконечном интервале времени. Все выводы об эволюции орбит остаются приближенными и ограниченными во времени.

Рассмотрим, почему же вообще орбиты эволюционируют. Спутники под действием притяжения планеты обращаются вокруг нее по почти кеплеровским орбитам. На их движение оказывают влияние и другие факторы. Основные из них — это несферичность планеты, притяжение Солнца и взаимное притяжение спутников. В большинстве случаев для конкретного спутника одно из перечисленных воздействий превалирует, и можно моделировать эволюцию орбиты с учетом только одного, наиболее существенного фактора. Однако совместный учет нескольких факторов может значительно изменить эволюцию орбиты.

Рассмотрим поочередно влияние каждого фактора на эволюцию орбит естественных спутников больших планет и характерные для разных спутников процессы эволюции орбит.

## **10.2. Эволюция орбит спутников, подверженных преимущественному влиянию сжатия планеты**

Несферичность планет заключается главным образом в их динамическом сжатии. Влияние этого сжатия описывается второй зональной гармоникой разложения силовой функции притяжения центральной планеты в ряд по сферическим функциям. Для моделирования эволюции орбит спутников обычно берут только этот член разложения.

Отметим, что динамическое сжатие планеты является решающим фактором эволюции орбит только для близких спутников планет. На эволюцию орбит главных спутников планеты ее сжатие оказывает сильное влияние наряду с влиянием взаимного притяжения спутников.

Как эволюционирует орбита, если принимается во внимание только сжатие планеты, рассмотрено выше в Главе 3. Воспроизведем здесь формулы, описывающие такую эволюцию.

Будем использовать принятые в Главе 3 обозначения для элементов кеплеровской орбиты:

$n$  — среднее движение, размерность радиан/ед.времени;

$e$  — эксцентриситет, безразмерный;

$i$  — наклон (двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью  $Oxy$ ), рад.;

$M_0$  — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии  $M$  в начальный момент времени — эпоху), рад.;

$\omega$  — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;

$\Omega$  — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости  $Oxy$  между осью  $x$  и линией узлов), рад.;

$t_0$  — начальный момент времени — эпоха элементов;

$t$  — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

Наряду со средним движением  $n$  в качестве параметра орбиты будем рассматривать также большую полуось орбиты  $a$ , связанную с  $n$  третьим законом Кеплера

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},$$

где  $\mu$  — гравитационный параметр планеты.

Рассматривая сжатие планеты как доминирующий фактор эволюции орбиты, располагаем основную координатную плоскость перпендикулярно оси динамической симметрии планеты.

При изучении эволюции орбит спутников планет выполняют операцию осреднения возмущающей функции по быстро изменяющимся аргументам. В данном случае таким аргументом является средняя аномалия  $M$ . В теории возмущений применяется разложение возмущающей функции по малым параметрам. В результате выражение для нее принимает вид разложения по кратным средней аномалии  $M$ , аргумента перицентра  $\omega$  и долготы восходящего узла  $\Omega$ . Операция осреднения по  $M$  фактически состоит в отбрасывании короткопериодических членов, содержащих  $M$  под знаком тригонометрических функций.

Динамическая структура больших планет такова, что в ее несферичности превалирует сжатие, и приближенно планету можно счи-

тять осесимметричным телом. Тогда мы берем в разложении возмущающей функции  $R$  только вторую зональную гармонику с коэффициентом  $J_2$  и, после осреднения по  $M$ , имеем

$$R = -\mu \frac{r_0^2}{a^3} J_2 \sum_{p=0}^2 F_{20p}(i) X_0^{-3,2-2p}(e) \cos[(2-2p)\omega],$$

где  $F_{20p}(i)$  и  $X_0^{-3,2-2p}(e)$  — функции наклона и функции эксцентриситета, а  $r_0$  — средний экваториальный радиус планеты. Природа оказалась так устроенной, что функции эксцентриситета  $X_0^{3,-2}(e)$  и  $X_0^{3,2}(e)$  равны нулю. Поэтому осредненная возмущающая функция, обусловленная второй зональной гармоникой, принимает вид

$$R = -\mu \frac{r_0^2}{a^3} J_2 F_{201}(i) X_0^{-3,0}(e).$$

Подставляя сюда явные выражения для функции наклона и функции эксцентриситета из Приложения 3, получим

$$R = -\mu \frac{r_0^2}{a^3} J_2 (1-e^2)^{-3/2} \left( \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, в возмущающей функции остался только вековой член. Для определения возмущений его нужно подставить в уравнения Лагранжа относительно элементов орбиты спутника.

Поскольку вековой член не зависит от элементов  $M$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ , то правые части уравнения Лагранжа для элементов  $a$ ,  $e$ ,  $i$  окажутся равными нулю, а сами эти элементы не будут содержать вековых возмущений. При этом не нужно забывать про постоянную величину, которую нужно добавить к большой полуоси, как это объяснено в разделе 3.10 Главы 3.

При определении вековых возмущений полагаем

$$M = M_0 + (n+n_1)(t-t_0), \quad \omega = \omega_0 + n_2(t-t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + n_3(t-t_0) .$$

Если в теории возмущений определяются только возмущения первого порядка, то коэффициенты  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  найдутся как значения правых частей уравнений Лагранжа относительно элементов  $M$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ , соответственно, после подстановки в них постоянных значений  $a$ ,  $e$ ,  $i$ .

В случае возмущений, обусловленных второй зональной гармоникой, выражения для  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  имеют следующий вид:

$$n_1 = n \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{2 - 3 \sin^2 i}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad (10.1)$$

$$n_2 = n \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{4 - 5 \sin^2 i}{(1 - e^2)^2}, \quad (10.2)$$

$$n_3 = -n \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2}. \quad (10.3)$$

Напомним, что элементы  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  мы отсчитываем относительно экватора планеты, который перпендикулярен оси ее динамической симметрии, а также относительно направления основной оси  $Ox$  и линии узлов.

Существенным свойством вековых изменений трех элементов орбиты является малость коэффициентов  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  по сравнению со средним движением  $n$ .

Из приведенных выше формул видно, как эволюционирует орбита под действием только указанного здесь возмущающего фактора. Если пренебречь небольшими отклонениями от некоторой опорной кеплеровской орбиты, то получается, что плоскость орбиты спутника медленно прецессирует с почти постоянным наклоном к оси симметрии планеты, линия апсид также медленно прецессирует, а сам спутник движется по этой орбите с частотой обращения вокруг планеты, слегка измененной по сравнению с кеплеровским средним движением. Свойства прецессий таковы, что узел орбиты движется всегда в сторону, противоположную движению спутника, а линия апсид в зависимости от наклона может поворачиваться как в одну, так и в другую сторону, оставаясь неподвижной в плоскости оскулирующей орбиты при ее наклоне, близком к 63 градусам.

Несферичность планеты не ограничивается ее сжатием. Другие члены разложения силовой функции притяжения планеты также могут влиять на эволюцию орбиты. На этом этапе изучения важным фактом в теории возмущений оказывается то, что с какой бы точностью мы ни вычисляли возмущения от несферичности планеты, мы не получим ни вековых ни даже смешанных возмущений в элементах  $a$ ,  $e$ ,  $i$ . Доказательство можно сделать методом математической индукции. Вместо этого мы здесь просто сошлемся на уже цитированную выше работу (Аксенов, 1966).

### Случай малых эксцентриситетов.

Описанные здесь свойства эволюции орбит спутников сжатой планеты остаются справедливыми только при значительных эксцентриситетах. Если эксцентриситет мал и имеет величину порядка  $J_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2$ , то свойства эволюции орбиты качественно меняются. При уменьшении эксцентриситета короткопериодические возмущения в аргументе перицентра  $\omega$  приобретают все большую амплитуду, и в итоге его изменение становится монотонным со скоростью обращения спутника вокруг планеты. В то же время короткопериодические возмущения средней аномалии  $M$  превращают ее изменение из монотонного в либрационное относительно значения  $M = 0$ . Этот случай движения спутника сжатой планеты впервые был подробно изучен в работе (Емельянов, 2015). Он рассмотрен также в специальном разделе Главы 3.

## 10.3. Эволюция орбит спутников планет под действием притяжения Солнца

### 10.3.1. Осреднение возмущающей функции

Учет влияния притяжения Солнца на движение спутников планет в аналитической теории весьма затруднен, особенно если этот фактор является доминирующим. Затруднение связано с тем, что коэффициенты вековых возмущений элементов  $M$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  имеют тот же порядок малости, что и долгопериодические члены разложения возмущающей функции. Метод малого параметра в обычной теории возмущений перестает работать. К тому же, пока не удалось доказать отсутствие вековых и смешанных возмущений высоких порядков, как это было сделано в случае возмущений от сжатия планеты. Однако приближенную модель эволюции орбит удастся исследовать. Выявлены некоторые свойства эволюции даже без получения точных решений уравнений движения.

Разумеется, при изучении эволюции орбит под действием притяжения Солнца движение спутника планеты рассматривается в рамках ограниченной задачи трех тел. Начало координат располагают в центре планеты. Предполагается, что Солнце движется вокруг планеты по заданной невозмущенной кеплеровской орбите. Уравнения движения спутника в прямоугольных координатах можно видеть в Главе 3.



Обычный путь при решении таких задач — это методы теории возмущений. Общий ход решения методами теории возмущений описан в Главе 3. Силовую функцию  $U$  в уравнениях движения разбивают на два слагаемых  $U = V + W$ , где  $V$  есть силовая функция задачи Кеплера. Функцию  $W$  называют возмущающей.

Согласно теории возмущений переходят от уравнений движения в прямоугольных координатах к уравнениям Лагранжа относительно элементов оскулирующей кеплеровской орбиты. Уравнения содержат все ту же возмущающую функцию  $W$ , однако ее нужно выразить через искомые элементы оскулирующей орбиты. Это можно сделать только путем разложения возмущающей функции в ряды по степеням различных малых параметров. Общее разложение возмущающей функции, обусловленной притяжением внешнего тела, рассмотрено выше в Главе 3. Для упрощения понимания теории эволюции орбиты спутника воспроизведем здесь это разложение снова с использованием принятых обозначений для кеплеровских элементов  $a, e, i, M, \omega, \Omega$ , а также других, связанных с ними величин  $n, \lambda = M + \omega + \Omega, \varpi = \omega + \Omega$ . Такие же величины, но относящиеся к возмущающему телу, мы обозначили теми же буквами, но со штрихом. Гравитационный параметр возмущающего тела (произведение универсальной гравитационной постоянной на его массу) обозначен через  $\mu'$ . Рассматриваемое разложение имеет вид (Брумберг, 1967):

$$W = \frac{\mu'}{a} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=0}^k \sum_{p=0}^k \sum_{p'=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{q'=-\infty}^{\infty} (2 - \delta_{m,0}) \left(\frac{a}{a'}\right)^{k+1} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \times$$

$$\times F_{kmp}(i) F_{kmp'}(i') X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e) X_{k-2p'+q'}^{k,k-2p'}(e') \times \quad (10.4)$$

$$\times \cos[(k-2p+q)M - (k-2p'+q')M' + (k-2p)\omega - (k-2p')\omega' + m(\Omega - \Omega')].$$

Здесь аргумент под знаком косинуса может быть выражен через средние долготы и долготы перицентров следующим образом:

$$(k-2p+q)M - (k-2p'+q')M' + (k-2p)\omega - (k-2p')\omega' + m(\Omega - \Omega') =$$

$$= (k-2p+q)\lambda - (k-2p'+q')\lambda' - q\varpi + q'\varpi' + (m-k+2p)\Omega - (m-k+2p')\Omega'.$$

В разложение входят функции наклона  $F_{kmp}(i)$  и функции эксцентриситета  $X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e)$ . Для построения модели эволюции орбит спутников воспользуемся следующими свойствами этих функций.

1. При малых наклонах орбит справедливо такое свойство функций наклона (Брумберг, 1967), что

$$F_{kmp}(i) = O \left( \left( \sin \frac{i}{2} \right)^{|k-2p-m|}, \left( \cos \frac{i}{2} \right)^{|k-2p-m|} \right).$$

Отсюда следует, что если выбрать основную плоскость, совпадающей с плоскостью орбиты внешнего тела, то получится  $i' = 0$ , а в разложении возмущающей функции останутся только те члены, для которых  $|k - 2p' - m| = 0$ .

2. При нулевом эксцентриситете отличны от нуля только те функции эксцентриситета  $X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e)$ , для которых  $q = 0$ . Поэтому при круговой орбите внешнего тела остаются только члены с  $q' = 0$ .

3. При  $k - 2p + q = 0$  функции  $X_{k-2p+q}^{k,k-2p}(e)$  выражаются в конечном виде без использования разложений в ряды по степеням эксцентриситета.

Поскольку нас интересует здесь только эволюция орбиты спутника, то короткопериодическими изменениями элементов орбиты можно пренебречь. Поэтому для упрощения задачи отбросим все слагаемые, содержащие средние долготы спутника и Солнца — это самые короткопериодические (быстроосциллирующие) члены из всех содержащихся в разложении. В литературе данная операция называется еще осреднением по средним долготам. Получается так называемое «дважды осредненное значение возмущающей функции». Осреднение по средним долготам  $\lambda, \lambda'$  заставляет нас положить  $k - 2p + q = 0, k - 2p' + q' = 0$ .

Наряду с указанным осреднением возмущающей функции, упростим задачу рассмотрением движения спутника планеты в рамках круговой ограниченной задачи трех тел. Это означает, что движение Солнца предполагается происходящим по круговой орбите в неизменной плоскости. Поскольку мы рассматриваем эволюцию орбиты спутника только под влиянием притяжения Солнца, то ничто не мешает нам выбрать основную координатную плоскость, совпадающей с плоскостью орбиты Солнца. Из этих упрощений следует, что  $i' = 0, e' = 0$ . Тогда из указанных выше свойств функций наклона и функций эксцентриситета следует в свою очередь, что в разложении возмущающей функции останутся только те члены, для которых  $|k - 2p' - m| = 0, q' = 0$ .

Сочетая все указанные ограничения на индексы суммирования, приведем разложение возмущающей функции к следующему виду:

$$W(a, e, i, \omega) = \frac{\mu'}{a} \sum_{k=2}^{\infty'} \sum_{p=0}^k \left(\frac{a}{a'}\right)^{k+1} \times \\ \times F_{k0p}(i) F_{k,0,k/2}(0) X_0^{k,k-2p}(e) X_0^{k,0}(0) \cos[(k-2p)\omega], \quad (10.5)$$

где штрих у знака суммы означает, что суммирование производится только по четным значениям индекса  $k$ .

Полученное таким образом выражение для возмущающей функции обладает следующими свойствами:

- 1) оно зависит только от элементов  $a, e, i, \omega$ ,
- 2) выражается в конечном виде относительно  $e, i, \omega$ ,
- 3) остается разложенным в ряд по четным степеням отношения больших полуосей орбит спутника и Солнца  $a/a'$ .

Рассмотрим теперь, какой вид примут уравнения Лагранжа, которым должны удовлетворять как функции времени элементы  $a, e, i, \omega$ , описывающие эволюцию орбиты спутника. Учитывая первое свойство возмущающей функции, получим

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial W}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial W}{\partial \omega}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial W}{\partial i}, \quad (10.6) \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial W}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial W}{\partial i}.$$

Тот факт, что теперь возмущающая функция зависит только от  $a, e, i, \omega$ , позволяет вывести три первых интеграла уравнений Лагранжа (10.6).

Один из них следует из первого уравнения:

$$a = \text{const.}$$

Чтобы вывести второй интеграл сделаем следующие операции: второе уравнение умножим почленно на

$$-\frac{e \cos i}{\sqrt{1-e^2}},$$

третье — на  $-\sqrt{1-e^2} \sin i$  и сложим результаты почленно. Получим

$$-\frac{e \cos i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt} - \sqrt{1-e^2} \sin i \frac{di}{dt} = 0.$$

Левая часть этого равенства представляется как полная производная по времени от произведения двух функции, раздельно зависящих от  $e$  и  $i$ , и мы имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \sqrt{1-e^2} \cos i \right) = 0,$$

откуда, интегрируя по времени, получим

$$\sqrt{1-e^2} \cos i = c'_1, \quad (10.7)$$

где  $c'_1$  — независимая произвольная постоянная интегрирования. Физический смысл интеграла (10.7) состоит в постоянстве проекции вектора количества движения спутника (нормированной на  $\sqrt{a}$ ) на нормаль к плоскости орбиты Солнца. Это является следствием осевой симметрии двукратно осредненной задачи (т.е. следствием независимости функции  $W$  от  $\Omega$ ).

Третий интеграл получается путем определения полной производной от возмущающей функции  $W$  по времени в силу дифференциальных уравнений Лагранжа (10.6). Поскольку  $W$  зависит от времени только посредством своих аргументов  $a, e, i, \omega$ , то имеем

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial W}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial W}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt}.$$

Подставляя теперь входящие сюда выражения для производных от элементов по времени согласно уравнениям Лагранжа и суммируя, получим

$$\frac{dW}{dt} = 0,$$

откуда, интегрируя по времени, имеем еще один первый интеграл уравнений Лагранжа

$$W(a, e, i, \omega) = c_w, \quad (10.8)$$

где  $c_w$  — есть еще одна независимая произвольная постоянная, а  $W$  определена формулой (10.5). Соотношение (10.6) является двукратно осредненным видоизменением известного интеграла Якоби круговой ограниченной задачи трех тел.

Отметим, что вывод этих трех первых интегралов в данной задаче впервые выполнен в работе (Моисеев, 1945), а само двукратное осреднение получило название схемы Гаусса.

Из интеграла (10.7) можно выразить наклон  $i$  как функцию от эксцентриситета  $e$  и  $c'_1$ . Подставляя это выражения для наклона в аргумент функции  $W$ , получим соотношение

$$\Phi(e, \omega, a, c'_1, c_w) = 0,$$

задающее при фиксированных постоянных  $a, c'_1, c_w$  эксцентриситет  $e$  как неявную функцию от  $\omega$ , либо  $\omega$  как функцию от  $e$ . Определяя постоянные  $a, c'_1, c_w$  из начальных условий, получим свойства изменения элементов орбиты конкретного спутника под действием притяжения Солнца, однако без привязки ко времени. Поиск зависимости элементов орбиты от времени приводит к квадратурам, обращение которых в известных элементарных или специальных функциях для произвольных значений отношения  $a/a'$  до сих пор не выполнено.

### 10.3.2. Частный случай — задача Хилла

В условиях такой пока нерешенной задачи естественны попытки что-нибудь упростить, заменяя более точные уравнения менее точными. Один из таких путей очевидно обусловливается тем фактом, что для всех спутников планет большие полуоси орбит значительно меньше расстояния планеты от Солнца. Делая обзор орбит спутников, находим, что самая большая величина отношения  $a/a' = 0.036$  оказывается для далекого спутника Юпитера S/2003 J2. Для всех других, открытых к настоящему времени спутников, это отношение значительно меньше.

Далее мы ограничиваем разложение возмущающей функции по степеням отношения больших полуосей так, что оставляем только главный член, который содержит третью степень этого отношения. Такой вариант возмущающей функции называют случаем Хилла. Поскольку в разложении возмущающей функции (10.5) суммирование ведется только по четным значениям индекса  $k$ , то следующий член разложения после главного содержит пятую степень отношения больших полуосей орбит. Таким образом, мы пренебрегаем малой величиной  $(a/a')^2$  по сравнению с единицей. Для спутни-

ка Юпитера S/2003 J2 величина  $(a/a')^2 = 0.0013$ . В итоге, возмущающая функция в случае Хилла имеет вид

$$W_2 = \frac{\mu'}{a} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 F_{2,0,1}(0) X_0^{2,0}(0) \sum_{p=0}^2 F_{20p}(i) X_0^{2,2-2p}(e) \cos[(2-2p)\omega]. \quad (10.9)$$

Подставляя сюда явные выражения для функций наклона и функций эксцентриситета, которые можно взять из Приложения 3, получим

$$W_2 = \frac{\mu'}{a} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 \frac{3}{16} \left[ 2e^2 - \sin^2 i (2 + 3e^2) + 5e^2 \sin^2 i \cos 2\omega + \frac{4}{3} \right]. \quad (10.10)$$

Постоянное слагаемое  $4/3$  в квадратных скобках правой части соотношения (10.10) можно отбросить, поскольку возмущающая функция входит в уравнения только под знаком частных производных по  $e$ ,  $i$ ,  $\omega$ , и это слагаемое при дифференцировании дает нуль.

Перечислим те допущения и предположения, которые были сделаны при выводе возмущающей функции (10.10):

- функция осреднена по средним долготам спутника и Солнца,
- пренебрегаем отношением  $(a/a')^2$  по сравнению с единицей,
- плоскость планетоцентрической круговой орбиты Солнца считаем основной.

При сделанных допущениях остается справедливым первый интеграл уравнений Лагранжа

$$W_2 = c'_2,$$

где  $c'_2$  — независимая произвольная постоянная интегрирования.

### 10.3.3. Анализ семейств возможных изменений эксцентриситета $e$ и аргумента перигея $\omega$ при дважды осредненной возмущающей функции в случае Хилла

Интегралы

$$a = \text{const}, \quad \sqrt{1 - e^2} \cos i = c'_1, \quad W_2 = c'_2$$

впервые и почти одновременно были подвергнуты детальному анализу в работах (Лидов, 1961; Лидов 1962; Kozai, 1962) для описания эволюции орбит, элементы которых удовлетворяют уравнениям Лагранжа (10.6). При этом в работах (Лидов, 1961; Лидов 1962)

изучалась эволюция орбит искусственных спутников Земли, а в работе (Kozai, 1962) интегралы рассматривались по отношению к уравнениям, описывающим эволюцию орбиты астероида под возмущающим влиянием Юпитера с учетом в функции (10.5) слагаемых с  $k = 2, 4, 6, 8$ .

В работе (Лидов, 1961) комбинацией второго и третьего интегралов, было получено соотношение:

$$e^2 \left( \frac{2}{5} - \sin^2 i \sin^2 \omega \right) = c_2, \quad (10.11)$$

где  $c_2$  — независимая произвольная постоянная, а интеграл (10.7) был записан в виде

$$(1 - e^2)(1 - \sin^2 i) = c_1, \quad (10.12)$$

где  $c_1$  — независимая произвольная постоянная.

Первые интегралы уравнений Лагранжа (10.11), (10.12) позволяют выразить две переменных из трех  $e, i, \omega$  через одну. Подставляя их выражения в уравнения, получим дифференциальное уравнение для одной из переменных  $\varepsilon$  вида

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathcal{E}(\varepsilon),$$

где  $\mathcal{E}(\varepsilon)$  — известная функция своего аргумента. Это уравнение приводится к квадратурам, а обращение квадратуры, т.е. выражение функции  $\varepsilon(t)$ , может быть сделано в эллиптических функциях. Кем и как это было сделано, рассмотрим ниже.

Совместно рассматриваемые соотношения (10.11), (10.12) и интеграл

$$a = const$$

позволили вывести ряд интересных свойств эволюции орбит даже без решения уравнений Лагранжа. Это было сделано впервые в обстоятельной работе (Лидов, 1961), посвященной исследованию эволюции орбит ИСЗ под действием лунно-солнечных возмущений. Воспроизведем здесь основные и наиболее интересные результаты этой работы. Воспользуемся также интерпретациями из книги (Shevchenko, 2017).

Прежде всего определим допустимые значения постоянных  $c_1, c_2$ . Очевидно, что  $0 \leq \sin^2 i \sin^2 \omega \leq 1$ , откуда следует, что  $-3/5 \leq$

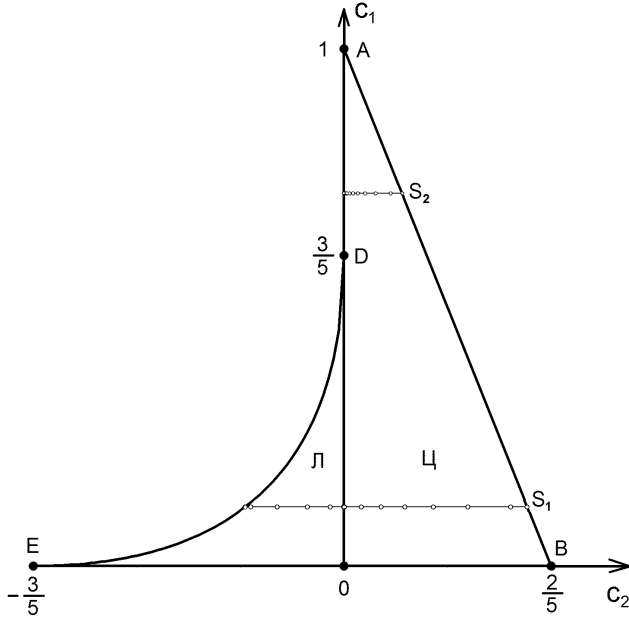


Рис. 10.1. Области возможных значений постоянных  $c_1, c_2$ . Область Л содержит значения постоянных, соответствующие либрационным изменениям элементов орбиты  $e, \omega$ , область Ц соответствует циркуляционному изменению  $\omega$ . Семейства точек  $S_1, S_2$  соответствуют семействам орбит, показанным на следующих рисунках.

$c_2 \leq 2/5$ . Очевидно также, что  $0 \leq c_1 \leq 1$ . Однако соотношения (10.11), (10.12) накладывают более узкие ограничения. Области возможных значений  $c_1, c_2$  показаны на рис. 10.1. Эти области ограничены треугольниками  $0AB$  и  $ED0$ . При этом одна из сторон  $ED$  задана кривой линией — графиком функции

$$c_1 = \frac{5}{3} \left( \frac{3}{5} - \sqrt{-\frac{3}{5}c_2} \right)^2. \quad (10.13)$$

Анализ показывает, что аргумент перигея  $\omega$  может иметь одно из двух свойств изменения во времени: монотонное *циркуляционное изменение* или колебания с ограниченной амплитудой относительно одного из значений 90 или 270 градусов. Такие колебания



называют *либрационным изменением*. Их амплитуда не превышает величины  $\arccos \sqrt{2/5}$ . Впервые существование либрационных изменений аргумента перицентра в данной задаче было обнаружено и изучено в работах (Лидов, 1961) и (Kozai, 1962). Поэтому такие изменения теперь принято называть резонансом Лидова–Козаи.

Среди возможных изменений аргумента перицентра  $\omega$  и эксцентриситета  $e$  встречаются особые случаи, которые мы рассмотрим ниже. Наиболее интересны случаи, соответствующие граничным линиям областей возможных значений  $0 \leq c_1 \leq 1$ ,  $-3/5 \leq c_2 \leq 2/5$ .

Вертикальная линия  $OA$  графика на рис. 10.1 разделяет область либрационных изменений  $\omega$  при  $c_2 < 0$  и область циркуляционных изменений при  $c_2 > 0$ . Либрационные орбиты существуют только при  $0 \leq c_1 \leq 3/5$ . Циркуляционные движения возможны для всего интервала возможных значений  $0 \leq c_1 \leq 1$ .

Кривая  $ED$  соответствует орбитам, у которых  $e$  и  $i$  постоянные, связанные соотношением  $e^2 = 1 - \frac{5}{3} \cos^2 i$ . При этом  $\omega = \pm 90$  градусов. Эти точки равновесия соответствуют центрам так называемого резонанса Лидова–Козаи. Такие орбиты представляют собой неизменные эллипсы, которые прецессируют вокруг оси, перпендикулярной основной плоскости — плоскости орбиты внешнего тела, с постоянным наклоном к ней.

Отрезок  $AB$  соответствует эллиптическим орбитам с постоянным эксцентриситетом. Орбиты лежат в плоскости движения внешнего тела. Наклонение равно нулю или 180 градусов. Линия аписид равномерно вращается с увеличивающейся величиной  $\omega$ . Для этих орбит выполняется соотношение  $2c_1 + 5c_2 = 2$ , откуда, используя выражения для интегралов (10.11), (10.12), выводим

$$(5e^2 \sin^2 \omega + 2 - 2e^2) \sin^2 i = 0.$$

Здесь первый множитель равен нулю только в точке  $B$ , где одновременно  $e = 1$  и  $\sin \omega = 0$ . Кроме точки  $B$ , для всего остального отрезка  $AB$  должно быть  $\sin i = 0$ .

Отрезок  $BE$  соответствует орбитам при  $c_1 = 0$ . Это условие относится либо к полярным орбитам ( $\cos i = 0$ ) либо к прямолинейным ( $e = 1$ ). В случае полярной орбиты при  $c_1 = 0$  связь эксцентриситета  $e$  и аргумента перицентра  $\omega$  описывается соотношением

$$e^2 \left( \frac{2}{5} - \sin^2 \omega \right) = c_2. \quad (10.14)$$

В случае прямолинейной орбиты при  $c_1 = 0$  связь наклона  $i$  и аргумента перицентра  $\omega$  описывается соотношением

$$\frac{2}{5} - \sin^2 i \sin^2 \omega = c_2. \quad (10.15)$$

Графики этих зависимостей приводятся ниже на рис. 10.4, 10.5.

Отрезок  $DA$  ( $c_2 = 0$ ,  $3/5 < c_1 < 1$ ) соответствует круговым орбитам ( $e = 0$ ).

Отрезок  $0D$  ( $c_2 = 0$ ,  $c_1 < 3/5$ ) соответствуют так называемым сепаратрисным решениям, разделяющим области либрационных и циркуляционных изменений аргумента перицентра  $\omega$ . На этих сепаратрисах эксцентриситет асимптотически стремится к нулю, возможно проходя через свое максимальное значение, если начальное значение  $\omega$  меньше 90 градусов. Для этих орбит сохраняется соотношение  $\sin^2 i \sin^2 \omega = 2/5$ .

Точки  $A$ ,  $B$ ,  $E$  определяют следующие возможные изменения. Точка  $A$  ( $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$ ) соответствует круговой экваториальной орбите ( $e = 0$ ,  $\sin i = 0$ ). Точка  $B$  ( $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 2/5$ ) соответствует прямолинейной орбите ( $e = 1$ ) с произвольным наклоном и  $\sin \omega = 0$ . Точка  $E$  ( $c_1 = 0$ ,  $c_2 = -3/5$ ) соответствует полярным орбитам ( $\cos i = 0$ ) с произвольным эксцентриситетом и значением  $\omega$ , удовлетворяющим соотношению  $e^2(5 \sin^2 \omega - 2) = 3$ , причем в случае  $e = 1$  имеем прямолинейную орбиту с  $\sin \omega = \pm 1$ .

Точка  $D$  ( $c_1 = 3/5$ ,  $c_2 = 0$ ) соответствует круговым орбитам ( $e = 0$ ) с критическим наклоном, определяемым соотношением  $\cos^2 i = 3/5$ . Такое значение наклона  $i$  называется критическим из-за того, что точка  $D$  является *точкой бифуркации*, так что при уменьшении  $c_1$  от значения  $3/5$  при  $c_2 < 0$  возникают орбиты с либрационным изменением  $\omega$ .

Точка  $0$  ( $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ) соответствует орбитам следующих трех типов:

- 1) круговые полярные орбиты ( $e = 0$ ,  $\cos i = 0$ ) с произвольным  $\omega$ ,
- 2) эллиптические полярные орбиты ( $\cos i = 0$ ) с произвольным  $e$  и с постоянным значением  $\omega$  ( $\sin^2 \omega = 2/5$ ),
- 3) прямолинейные ( $e = 1$ ) с произвольным наклоном орбиты при условии  $\sin^2 i \sin^2 \omega = 2/5$ .

Кроме особенностей эволюции орбит на границах областей возможных значений постоянных  $c_1$  и  $c_2$ , имеются другие особые случаи эволюции орбит. Орбиты с наклоном, большим критическо-

го ( $\cos^2 i = 3/5$ ), могут испытывать большие вариации эксцентриситета, особенно большие, если орбита близка к сепаратрисе. Причиной является то, что как раз при наклонах, больших критического, присутствует резонанс Лидова – Козаи. В случае, когда наклон равен  $90$  градусов, эксцентриситет всегда стремится к единице, каково бы ни было его начальное значение. Таким образом, расстояние перицентра стремится к нулю, и такие орбиты существуют лишь конечное время.

Заметим, что все рассмотренные здесь особые и критические случаи свойств изменений элементов орбиты спутника, соответствующие границам возможных значений постоянных  $c_1$  и  $c_2$ , имеют чисто теоретический интерес. Среди существующих реальных спутников и возможных состояний их движения такие ситуации не встречаются.

Соотношения (10.11), (10.12) позволяют построить линии на координатной плоскости ( $\omega, e$ ), описывающие эволюцию орбит. Каждой паре фиксированных значений постоянных  $c_1$  и  $c_2$  соответствует линия на графике. На одном рисунке можно построить семейство кривых для одного значения постоянной  $c_1$  и ряда значений  $c_2$ .

Рассмотрим два примера таких семейств.

На рис. 10.2 показано семейство линий, показывающих изменения  $\omega, e$ . Линии соответствуют значению  $c_1 = 0.114570821$  и ряду  $c_2$  на всем интервале возможных значений. Семейство этих значений постоянных нанесено также на рис. 10.1, где оно обозначено через  $S_1$ . Самая левая точка, лежащая на кривой  $ED$ , соответствует орбите с постоянными элементами  $e = 0.750346703$ ,  $i = 59.2$  градусов и  $c_2 = -0.190195030$ . На рис. 10.2 этой орбите соответствует точка – центр резонанса Лидова – Козаи. Вокруг этой точки концентрическими замкнутыми кривыми показаны либрационные изменения элементов  $\omega, e$  для других орбит семейства. Этим орбитам соответствуют точки семейства  $S_1$  на рис. 10.1, следующие слева направо. Для точки с  $c_2 = 0$  на рис. 10.2 пунктирной линией показана сепаратриса двух типов орбит. Сепаратрисе соответствуют значения  $e = 0.899471307$ ,  $i = 34.608220202$  градусов. Семейство продолжается орбитами с циркуляционным изменением элементов  $\omega, e$ . Наконец, для точки на рис. 10.1, лежащей на границе  $AB$ , с  $c_2 = 0.354171672$  на рис. 10.2 показана горизонтальная линия изменения  $\omega$  с постоянным значением  $e = 0.940972465$ . Это орбита, лежащая в плоскости движения внешнего тела, с  $i = 0$ .

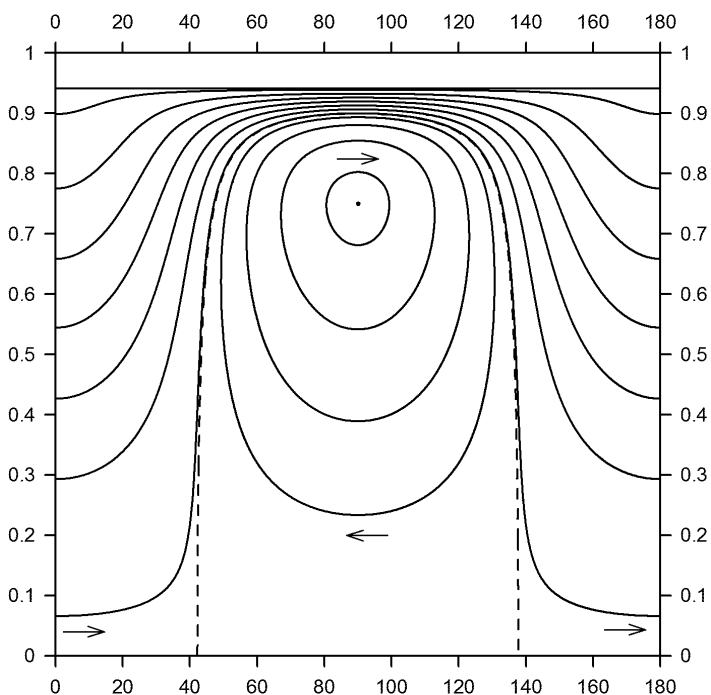


Рис. 10.2. Семейство орбит с  $c_1 = 0.114570821$  и рядом значений  $-0.190195030 \leq c_2 \leq 0.354171672$ . По горизонтальной оси отложены значения  $\omega$  в градусах, по вертикальной — значения эксцентриситета  $e$ . На рис. 10.1 этому семейству соответствуют точки на линии  $S_1$ .

Отметим, что на рис. 10.2 показана лишь половина диапазона изменения угла  $\omega$ . Вторая половина симметрично повторяет первую относительно значения  $\omega = 180$  град.

Другое семейство орбит показано на рис. 10.3. Это исключительно только орбиты с циркуляционным изменением элементов  $\omega$ ,  $e$ . Этому семейству соответствует семейство точек  $S_2$  на рис. 10.1 с  $c_1 = 0.719185573$ . Значению  $c_2 = 0$  соответствует круговая орбита с  $e = 0$ ,  $i = 32.0$  градуса и линия на рис. 10.3, совпадающая с горизонтальной осью. Далее для точек семейства, следующих на рис. 10.1 слева направо, имеем семейство линий на рис. 10.3, следующих снизу вверх. Завершает семейство точка с  $c_2 = 0.112325771$  на линии  $AB$  и горизонтальная линия на рис. 10.3 со значением

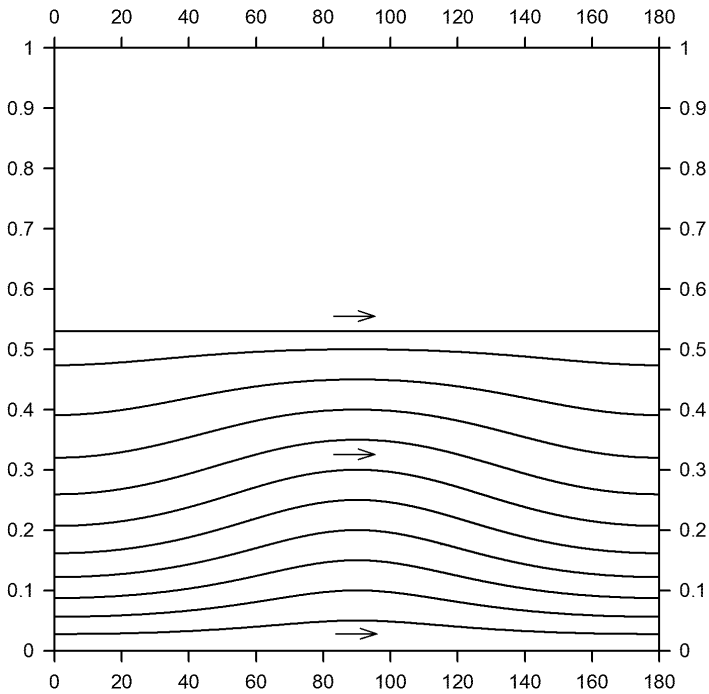


Рис. 10.3. Семейство орбит с  $c_1 = 0.719185573$  и рядом значений  $-0 \leq c_2 \leq 0.112325771$ . По горизонтальной оси отложены значения  $\omega$  в градусах, по вертикальной — значения эксцентриситета  $e$ . На рис. 10.1 этому семейству соответствуют точки на линии  $S_2$ .

$e = 0.529919264$ . Горизонтальные прямые на рис. 10.2, 10.3 отвечают граничным значениям эксцентриситета, равным  $\sqrt{1 - c_1}$ .

На рис. 10.3 показана лишь половина диапазона изменения угла  $\omega$ . Вторая половина симметрично повторяет первую относительно значения  $\omega = 180$  град.

Заметим, что можно подобрать такие начальные условия и соответствующие значения постоянных  $c_1, c_2$ , при которых в процессе эволюции орбиты эксцентриситет  $e$  будет изменяться от весьма малых значений до близких к единице.

Особый случай представляют орбиты с начальными условиями, дающими  $c_1 = 0$ . Это порождает либо полярные орбиты ( $\sin i = 1$ ), либо прямолинейные орбиты ( $e = 1$ ). Связь  $e$  с  $\omega$  в этих особых

случаях дана выше соотношениями (10.14), (10.15). Графики возможных значений  $e$ ,  $\omega$  для полярных орбит при разных значениях  $c_2$  в этом случае показаны на рис. 10.4. Для каждого значения  $c_2$  имеем три графика: один в области между сепаратрисами, другие – от значений 0 и 180 градусов в стороны сепаратрис. Как видно на графиках, все такие полярные орбиты в своей эволюции приходят к значению  $e = 1$ , что приводит к падению спутника на планету за конечное время, независимо от начальных значений  $e$  и  $\omega$ . Это свойство полярных (и околополярных) орбит в литературе носит название «эффект Лидова – Козаи».

Для прямолинейных орбит при  $c_1 = 0$  зависимости  $\sin i$  от  $\omega$  показаны на рис. 10.5. Прямолинейные орбиты спутников не имеют практического смысла. Такие спутники, если бы и были, то уже давно упали бы на свои планеты. Мы здесь взяли случай  $c_1 = 0$  только для полноты рассмотрения данной теории.

Найденные выше зависимости  $e$  от  $\omega$  не дают представления о том, в каком направлении происходит эволюция орбит. Остается выяснить, на каких участках графиков  $\omega$  увеличивается, а на каких уменьшается. Для ответа необходимо привлечь последнее из дифференциальных уравнений (10.6). После подстановки в него вместо функции  $W$  упрощенного выражения этой возмущающей функции (10.10), получим явный вид уравнения для  $\omega$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{15}{4} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n \left[ (e^2 - \sin^2 i) \sin^2 \omega + \frac{2}{5}(1 - e^2) \right], \quad (10.16)$$

где  $\mu = n^2 a^3$ . Учитывая (10.11), это уравнение можно записать в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{15}{4} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n \left[ \frac{c_2}{e^2} + e^2 \left( \sin^2 \omega - \frac{2}{5} \right) \right].$$

Определим теперь величину производной  $\frac{d\omega}{dt}$  при  $\omega = \pi/2$ . Получим

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\omega=\pi/2} = \frac{15}{4} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n \left( \frac{c_2}{e^2} + \frac{3}{5}e^2 \right).$$

Из последнего равенства и из графиков видно, что во всех случаях циркуляционного изменения  $\omega$  ( $c_2 > 0$ ), включая сепаратрису ( $c_2 = 0$ ),  $\omega$  увеличивается. При всех  $c_2 < 0$ , исключая случай (10.13), эксцентриситет  $e$  может принимать два значения: минимальное и максимальное, при которых  $\frac{d\omega}{dt}$  имеет разные знаки.

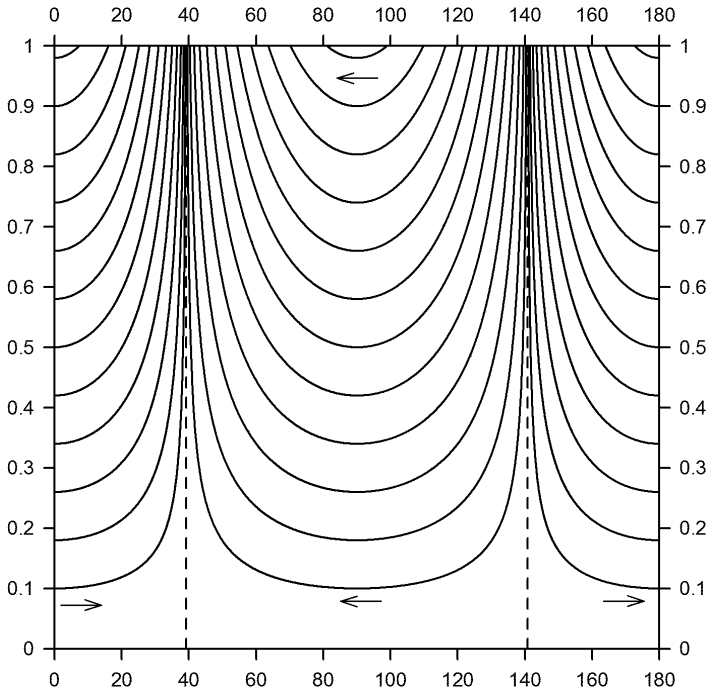


Рис. 10.4. Семейство полярных орбит при  $c_1 = 0$  и разных значениях  $c_2$ . По горизонтальной оси отложены значения  $\omega$  в градусах, по вертикальной — значения эксцентриситета  $e$ . Пунктирной линией показаны сепаратрисы двух семейств.

При минимальном значении эксцентриситета  $\omega$  уменьшается, при максимальном — увеличивается. Все полученные здесь направления изменения  $\omega$  показаны на рис. 10.2, 10.3.

Для особого случая полярных орбит ( $c_1 = 0$ ) имеем  $\sin i = 1$ , и уравнение для  $\omega$  (10.16) принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{15}{4} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n (1 - e^2) \left(\frac{2}{5} - \sin^2 \omega\right).$$

Подставляя сюда последовательно  $\omega = 0$  и  $\omega = \pi/2$ , получаем те направления изменения  $\omega$ , которые показаны на рис. 10.4.

Аналогично находится направление изменения  $\omega$  для прямоли-

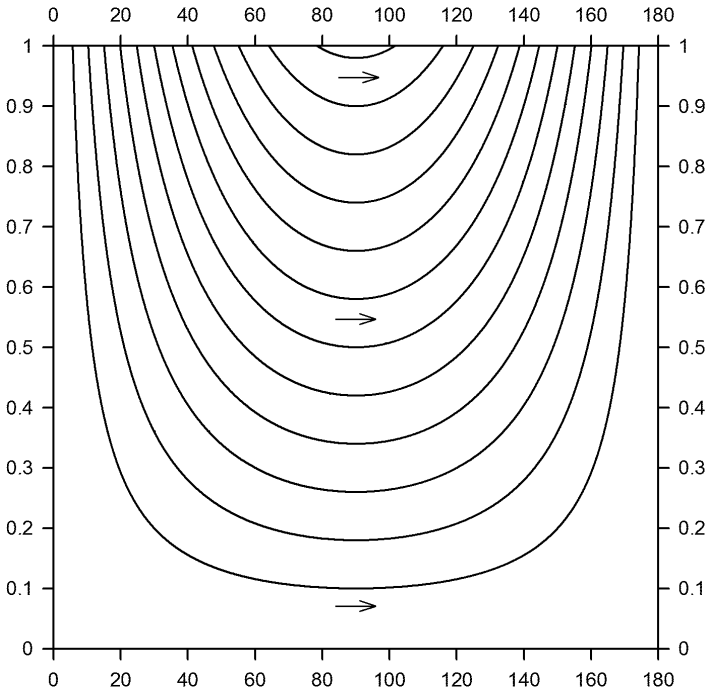


Рис. 10.5. Семейство прямолинейных орбит при  $c_1 = 0$  и разных значениях  $c_2$ . По горизонтальной оси отложены значения  $\omega$  в градусах, по вертикальной — значения  $\sin i$ .

нейных орбит ( $c_1 = 0$ ). Уравнение для  $\omega$  в этом случае ( $e = 1$ ) принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{15}{4} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n (1 - \sin^2 i) \sin^2 \omega > 0.$$

Направление изменения  $\omega$  в этом случае показано на рис. 10.5.

#### 10.3.4. Эволюция орбит во времени при дважды осредненной возмущающей функции в случае Хилла

Рассмотрим теперь, как получить функции, описывающие изменение элементов орбит во времени в условиях данной задачи. Выяснилось, что решение уравнений приводит к квадратурам, обращение которых может быть выполнено только с помощью эллиптические



ских функций. Еще в работе (Kozai, 1962) было продемонстрировано, что решение задачи в приближении Хилла ( $k = 2$ ) может быть выражено через эллиптические функции Вейерштрасса. Для частного случая начальных значений  $\omega = 0, \pm\pi/2$  решение для элементов  $e, i, \omega$  было получено в работе (Гордеева, 1968). Общее решение для всех четырех элементов  $e, i, \omega, \Omega$  было построено в работе (Вашковьяк, 1999) и почти одновременно было опубликовано в работе (Kinoshita, Nakai, 1999).

Воспроизведем здесь результаты работы (Вашковьяк, 1999).

Для получения искомым функций необходимо решить уравнения Лагранжа относительно элементов  $e, i, \omega, \Omega$ . Сделаем упрощающие преобразования. Подставляя выражение для возмущающей функции (10.10) в уравнения (10.6) и делая замену независимой переменной времени  $t$  на безразмерную переменную  $\tau$  по формуле

$$\tau = \frac{3}{16} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 n (t - t_0),$$

где  $\mu = n^2 a^3$ , выведем уравнения относительно элементов оскулирующей орбиты в следующем виде:

$$\frac{de}{d\tau} = 10e\sqrt{1-e^2} \sin^2 i \sin 2\omega, \quad (10.17)$$

$$\frac{di}{d\tau} = -10e^2 \sqrt{1-e^2} \sin i \cos i \sin 2\omega, \quad (10.18)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} [5 \cos^2 i - 1 + e^2 + 5(\sin^2 i - e^2) \cos 2\omega], \quad (10.19)$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = 2 \frac{\cos i}{\sqrt{1-e^2}} (5e^2 \cos 2\omega - 3e^2 - 2). \quad (10.20)$$

Уравнения (10.17), (10.18), (10.19) имеют два интеграла (10.11), (10.12). Исключая с помощью этих интегралов переменные  $i, \omega$  из уравнения (10.17) и вводя новую переменную  $z$  по формуле

$$z = e^2,$$

получаем квадратуру для определения  $\tau$  как функцию от  $z$

$$\tau = \frac{\text{sign}(\sin 2\omega_0)}{8\sqrt{6}} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\sqrt{Q(\zeta)}}, \quad (10.21)$$

где

$$Q(z) = (z_1 - z)(z - z_2)(z - z_3) \geq 0,$$

$z_0$  — начальное значение  $e^2$  при  $\tau = 0$  ( $t = t_0$ ),

$$z_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 - c_3 + \sqrt{(1 + c_3)^2 - (20/3)c_1} \right],$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - c_3 - \sqrt{(1 + c_3)^2 - (20/3)c_1} \right],$$

$$z_3 = \frac{5}{2}c_2,$$

$$c_3 = \frac{5}{3}(c_1 + c_2).$$

Общее решение уравнений (10.17) – (10.20) будет зависеть от четырех произвольных постоянных  $e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0$  — значений соответствующих функций в начальный момент времени  $t_0$  ( $\tau = 0$ ). Три независимые постоянные  $e_0, i_0, \omega_0$  мы заменим далее на другие три независимые постоянные  $z_0, c_1, c_2$ , связанные с первыми соотношениями:

$$z_0 = e_0^2, \quad (10.22)$$

$$(1 - e_0^2)(1 - \sin^2 i_0) = c_1, \quad (10.23)$$

и

$$e_0^2 \left( \frac{2}{5} - \sin^2 i_0 \sin^2 \omega_0 \right) = c_2. \quad (10.24)$$

Постоянные  $z_0, c_1, c_2$  будут использоваться далее в решении.

Обращение квадратуры (10.21) выполняется разными путями в зависимости от значения  $c_2$ .

**Случай**  $0 < c_2 < 2/5$ .

Это случай циркуляционного изменения  $\omega$ . Корни полинома  $Q(z)$  удовлетворяют неравенствам

$$z_2 < 0 < z_3 \leq z(\tau) \leq z_1,$$

где  $z_1$  и  $z_3$  будут соответственно максимум и минимум величины  $e^2$ . Эксцентриситет определится формулой

$$e(\tau) = \sqrt{z(\tau)} = \sqrt{\frac{z_3 - z_2 k^2 \sin^2 u}{1 - k^2 \sin^2 u}}, \quad (10.25)$$

где

$$\begin{aligned}
 u &= 4\sqrt{6(z_1 - z_2)}\tau + u_0, \\
 k^2 &= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} < 1, \\
 u_0 &= \text{sign}(\sin 2\omega_0)F(\varphi_0, k^2), \\
 \sin^2 \varphi_0 &= \frac{(z_1 - z_2)(z_0 - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_0 - z_2)},
 \end{aligned} \tag{10.26}$$

а  $\text{sn } u$  и  $F(\varphi, k^2)$  есть соответственно эллиптический синус Якоби и неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k$ .

Период колебаний эксцентриситета  $e$  дается формулой

$$T_e = \frac{\mathbf{K}(k^2)}{2\sqrt{6(z_1 - z_2)}}, \tag{10.27}$$

где  $\mathbf{K}(k^2)$  есть полный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k$ .

Период циркуляции  $\omega$  в два раза больше периода колебаний эксцентриситета  $e$

$$T_\omega = \frac{\mathbf{K}(k^2)}{\sqrt{6(z_1 - z_2)}}. \tag{10.28}$$

В силу интеграла (10.12) период колебаний наклона  $i$  равен периоду колебаний  $e$ .

**Случай**  $-3/5 < c_2 < 0$ .

Этот случай характеризуется либрационным изменением  $\omega$ . Здесь

$$z_3 < 0 < z_2 \leq z(\tau) \leq z_1,$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — максимум и минимум величины  $e^2$ , соответственно. Эксцентриситет определяется формулой

$$e(\tau) = \sqrt{z(\tau)} = \sqrt{\frac{z_2 - z_3 \kappa^2 \text{sn}^2 u}{1 - \kappa^2 \text{sn}^2 u}}, \tag{10.29}$$

где

$$\begin{aligned}
 u &= 4\sqrt{6(z_1 - z_3)}\tau + u_0, \\
 \kappa^2 &= \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} < 1, \\
 u_0 &= \text{sign}(\sin 2\omega_0)F(\Psi_0, \kappa^2),
 \end{aligned} \tag{10.30}$$

$$\sin^2 \Psi_0 = \frac{(z_1 - z_3)(z_0 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_0 - z_3)}.$$

Здесь модулем эллиптических функций является  $\kappa$ .

Периоды колебаний эксцентриситета  $e$ , наклона  $i$  и аргумента перицентра  $\omega$  совпадают и определяются формулой

$$T_e = T_i = T_\omega = \frac{\mathbf{K}(\kappa^2)}{2\sqrt{6}(z_1 - z_3)}. \quad (10.31)$$

Отметим здесь факт, важный для программирования вычислений. Формулы (10.29) – (10.31) получаются из формул (10.25)–(10.27) заменой  $z_3$  на  $z_2$  и  $z_2$  на  $z_3$ .

**Особый случай**  $c_2 = 0$  и  $c_1 < 3/5$ .

Это пограничный вариант между двумя решениями, рассмотренными выше. Изменение элементов  $e$  и  $\omega$  происходит вдоль сепаратрисы согласно уравнению

$$\frac{2}{5} - \left(1 - \frac{c_1}{1 - e^2}\right) \sin^2 \omega = 0.$$

Максимальное значение эксцентриситета

$$e_{max} = \sqrt{1 - \frac{5}{3}c_1}$$

достигается при углах  $\omega$ , удовлетворяющих соотношению

$$\sin^2 \omega = 1.$$

Когда эксцентриситет достигает нуля, аргумент перицентра имеет одно из значений, удовлетворяющих соотношению

$$\sin^2 \omega = \frac{2}{5}(1 - c_1).$$

Зависимость элементов  $e$ ,  $\omega$ ,  $i$  от времени для этого особого случая получена в работе (Вашковьяк, Лидов, 1990). Воспроизведем здесь результат. Без нарушения общности постановки задачи и для простоты формул примем, что в начальный момент  $t_0$  элементы имеют значения  $e = e_{max}$ ,  $\omega = 90$  градусов и введем параметр:

$$\beta = -\frac{3\sqrt{6}}{4} \frac{\mu'}{na'^3} e_{max} = -\frac{3\sqrt{6}}{4} \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'}\right)^3 e_{max}.$$

Теперь зависимость эксцентриситета от времени для этого особого случая определится формулой

$$e(t) = \frac{e_{max}}{\operatorname{ch}[\beta(t - t_0)]}.$$

Важно определить, в каком направлении изменяется аргумент перицентра  $\omega$  в момент  $t_0$ , когда эксцентриситет достигает максимального значения  $e = e_{max} = \sqrt{1 - \frac{5}{3}c_1}$ . В этот момент  $\omega = 90$  градусов. Подставляя эти значения в уравнение (10.19), получим

$$\frac{d\omega}{dt} = 12\sqrt{\frac{3}{5c_1}} \left(1 - \frac{5}{3}c_1\right) > 0.$$

Следовательно  $\omega$  увеличивается в момент, когда  $e = e_{max}$ . Тогда, как видно на графике сепаратрисы на рис. 10.2,  $\omega$  увеличивается во все моменты времени.

**Особый случай**  $c_1 = 0$ . В этом случае орбита принадлежит к одному из двух типов: полярные ( $\sin i = 1$ ) либо прямолинейные ( $e = 1$ ). Возможные значения элементов при  $c_1 = 0$  и разных значениях  $c_2$  рассмотрены выше на графиках. Движение спутников на всех этих орбитах приводит к падению спутника на планету. Практического интереса такие орбиты не представляют. Поэтому зависимость элементов от времени мы здесь не рассматриваем.

**Другие особые случаи.**

1. Если  $c_2 = 0$  и  $c_1 > 3/5$ , то эксцентриситет постоянно равен нулю, а аргумент перицентра не определен.
2. Если начальные условия таковы, что между постоянными  $c_1$  и  $c_2$  выполняется соотношение

$$c_2 = -\frac{3}{5} \left(1 - \sqrt{\frac{5}{3}c_1}\right)^2,$$

и при этом  $c_1 < 3/5$ , то все три элемента  $e$ ,  $\omega$ ,  $i$  остаются постоянными:  $\omega = \pm 90$  градусов,  $e = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{5}{3}c_1}}$ .

3. Случай  $c_1 = 1$  соответствует круговой орбите, лежащей в плоскости движения внешнего тела.

4. В случае, когда  $c_2 = \frac{2}{5}(1 - c_1)$ , имеем наклон  $i = 0$ , постоянный эксцентриситет, равный  $e_m = \sqrt{1 - c_1}$ , и аргумент перицентра, постоянно возрастающий с угловой скоростью, которая изменяется

в пределах от  $8\sqrt{c_1}$  при  $\omega = k \cdot 180$  градусов до  $20(1 - 3/5c_1)/\sqrt{c_1}$  при  $\omega = 90 + k \cdot 180$  градусов, где  $k$  – любое целое число. Период обращения  $\omega$ , как и в общем случае, находится по формуле (10.28).

На этом этапе изложения мы имеем выражения для  $e(\tau)$  как функции времени при всех возможных значениях постоянных  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $z_0$ . Искомые функции  $i(\tau)$ ,  $\omega(\tau)$  найдутся теперь из соотношений

$$i(\tau) = \arccos \sqrt{\frac{c_1}{1 - e^2(\tau)}},$$

$$\omega(\tau) = \arcsin \sqrt{\frac{\frac{2}{5} - \frac{c_2}{e^2(\tau)}}{\sin^2 i(\tau)}}.$$

Теперь осталось найти функцию  $\Omega(\tau)$ . Продолжим воспроизводить здесь результаты работы (Вашковьяк, 1999).

Сначала выполним действия для случая  $0 < c_2 < 2/5$ .

Воспользуемся формулами (10.26) для определения связи переменной  $u$  с  $\tau$ . Затем определим новую переменную  $\bar{u}$ , полагая  $u = m\mathbf{K}(k^2) + \bar{u}$ , где  $m$  – целое число, ближайшее к  $u/\mathbf{K}(k^2)$ , не превосходящее этого числа. Число  $m$  запомним для дальнейших действий.

Далее вычислим последовательно постоянные

$$l^2 = k^2 \frac{1 - c_1 - z_2}{1 - c_1 - z_3},$$

$$C = \frac{(5c_2 - 2z_2)k^2}{(1 - c_1 - z_3)\mathbf{K}(k^2)}, \quad (10.32)$$

$$\mathbf{I}(l^2, k^2) = \frac{\mathbf{\Pi}(l^2, k^2) - \mathbf{K}(k^2)}{l^2},$$

где  $\mathbf{\Pi}(l^2, k^2)$  – полный эллиптический интеграл третьего рода.

Теперь определим некоторую функцию  $J(x, l^2, k^2)$  от своего аргумента  $x$  следующим образом:

$$J(x, l^2, k^2) = \frac{\mathbf{\Pi}(\varphi, l^2, k^2) - F(\varphi, k^2)}{l^2}, \quad (10.33)$$

где  $\varphi = \arcsin(sn x)$ , где  $\mathbf{\Pi}(\varphi, l^2, k^2)$ ,  $F(\varphi, k^2)$  – неполные эллиптические интегралы третьего и первого рода, соответственно.

Далее определим функцию  $J_m(\bar{u}, l^2, k^2)$ , зависящую от четности числа  $m$ , формулой

$$J_m(\bar{u}, l^2, k^2) = \begin{cases} J(\bar{u}, l^2, k^2), & \text{если } m - \text{четно,} \\ \mathbf{I}(l^2, k^2) - J(\mathbf{K}(k^2) - \bar{u}, l^2, k^2), & \text{если } m - \text{нечетно.} \end{cases} \quad (10.34)$$

Наконец, функция  $\Omega(\tau)$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \Omega(\tau) = & \Omega_0 - 4\sqrt{c_1} \operatorname{sign}[\cos i(\tau)] \{ [1 + C \mathbf{I}(l^2, k^2)] \tau + \\ & + \frac{C}{4\sqrt{6}(z_1 - z_2)} \{ (u_0 - \bar{u}) \mathbf{I}(l^2, k^2) + \\ & [J_m(\bar{u}, l^2, k^2) - J(u_0, l^2, k^2)] \mathbf{K}(k^2) \} \}, \end{aligned} \quad (10.35)$$

где  $\Omega_0$  — еще одна независимая произвольная постоянная.

Можно показать, что в рассматриваемом случае циркуляционного изменения  $\omega$

$$k^2 < l^2 < 1.$$

Период циркуляционного изменения  $\Omega$  определяется приближенной формулой

$$T_\Omega = \frac{\pi}{2\sqrt{c_1}[1 + C\mathbf{I}(l^2, k^2)]}.$$

В случае  $3/5 < c_2 < 0$  (либрация  $\omega$ ) зависимость  $\Omega(\tau)$  определяется формулами (10.32) – (10.35), в которых необходимо  $z_2$  заменить на  $z_1$ ,  $z_3$  на  $z_2$ ,  $k^2$  на  $\kappa^2$ ,  $\varphi_0$  на  $\Psi_0$ , а для связи  $u$  с  $\tau$  использовать соотношения (10.30).

В итоге, найденные зависимости  $e(\tau)$ ,  $i(\tau)$ ,  $\omega(\tau)$ ,  $\Omega(\tau)$  при заданных на начальный момент времени  $t = t_0$  ( $\tau = 0$ ) произвольных постоянных  $e_0$ ,  $i_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\Omega_0$  описывают эволюцию орбиты спутника.

Напомним здесь, какие допущения и предположения были сделаны в данной постановке задачи

- на спутник действуют только возмущения от притяжения Солнца,
- возмущающая функция осреднена по средним долготам спутника и Солнца,
- пренебрегаем отношением  $(a/a')^2$  по сравнению с единицей,
- плоскость планетоцентрической круговой орбиты Солнца считаем основной.

На основе построенной теории Лидовым (1961) было обнаружено важное свойство эволюции спутниковых орбит: при  $c_1 \approx 0$  и  $i \approx \pi/2$  эксцентриситет приблизится к единице, периферическое расстояние станет равным физическому радиусу планеты, а спутник неизбежно упадет на поверхность. Существование главных спутников Урана, которые также подвержены этому эффекту, объяснено Лидовым (1963) стабилизирующим влиянием сжатия планеты (Лидов, 1963).

### **10.3.5. Применения построенной теории эволюции орбит при изучении динамики реальных спутников планет**

Построенная модель эволюции орбит спутников под действием притяжения Солнца может быть испытана на реальных далеких спутниках планет, поскольку оно действительно является доминирующим фактором для этих спутников. Следует учитывать при этом, что построенная модель приближенная, так как использованы некоторые допущения и предположения. Поэтому выводы теории должны проверяться разными методами.

Отметим, что решение задачи определения элементов орбиты спутника как функций времени, выполненное в работе (Вашковьяк, 1999) было применено в этой же работе для исследования эволюции орбит двух далеких спутников Урана, открытых в 1997 году. Позже этим спутникам были присвоены имена U16 Калибан и U17 Сикоракса.

Приложения теории эволюции орбит, рассмотренной выше, были сделаны также в работе (Kinoshita, Nakai, 1999) для далекого спутника Урана U17 Сикоракса и далекого спутника Нептуна Нериды.

В обеих упомянутых работах по значениям элементов орбит, найденных из наблюдений, были определены амплитуды и периоды колебаний эксцентриситетов орбит этих двух спутников. В табл. 10.1 приводятся исходные данные и полученные результаты таких исследований. Начальные значения элементов орбит были взяты из циркуляра МАС (Marsden, 1998). Оказалось, что оба спутника имеют циркуляционное изменение аргумента перигея  $\omega$ . В работе (Вашковьяк, 1999) указывается, что результаты, полученные по аналитической модели эволюции, «практически совпадают» с результатами контрольного численного интегрирования эволюции



онных уравнений (10.17) – (10.20), в которые были добавлены члены, соответствующие влиянию сжатия Урана.

Аналогичные результаты для спутника U17 Сикоракса были получены в работе (Kinoshita, Nakai, 1999). Эти результаты вместе с тем, что получено путем численного интегрирования уравнений, также даны в Табл. 10.1.

В работе (Kinoshita, Nakai, 1999) для далекого спутника Нептуна Нереиды были также получены параметры эволюции орбиты по формулам теории, рассмотренной выше. Спутник Нереида имеет очень большой эксцентриситет орбиты (примерно 0.76). Его движение, кроме возмущений от притяжения Солнца, подвержено также влиянию притяжения близкого массивного спутника Тритон. Полученные параметры эволюции для Нереиды сравнивались с результатами численного интегрирования и с аналитической теорией движения этого спутника, построенной в работе (Mignard, 1981). Эти результаты даны в Табл. 10.2. Орбита Нереиды имеет циркуляционный характер изменения аргумента перигея  $\omega$ .

Позже, после работы (Kinoshita, Nakai, 1999), эволюция орбиты Нереиды была исследована в работе (Вашковьяк, Тесленко, 2010). Авторы этой работы построили более детальную модель эволюции Нереиды с использованием более совершенных методов.

#### **10.4. Уточненные модели эволюции орбит спутников планет. Численно-аналитический метод**

В работе (Вашковьяк, 2005) был разработан численно-аналитический метод моделирования эволюции орбит далеких спутников планет-гигантов. Этот метод предложен довольно давно, и с его помощью были решены многие задачи динамики спутников. Идея метода и соответствующие исследования, выполненные М.Л. Лидовым и его учениками, нашли свое отражение в статье (Лидов, 1978). Суть метода состоит в следующем. Берем дифференциальные уравнения относительно шести элементов кеплеровской орбиты с возмущающей функцией, обусловленной притяжением Солнца. В разложении по степеням отношения больших полуосей спутника и Солнца берем только основной член, то есть приближение Хилла. Прямоугольные координаты Солнца вычисляем по элементам кеплеровской орбиты планеты.

Уравнения для элементов орбиты спутника записывались в ра-

Таблица 10.1. Исходные параметры спутников и полученные результаты по эволюции орбит. Отметка «аналит. теория» означает, что результаты получены по описанной выше модели эволюции орбит.

Параметр	U16 Калибан	U17 Сикоракса
Эпоха элементов	1998, июль 6.0	1998, июль 6.0
Большая полуось, а.е.	0.047921	0.081643
Период обращения, град./сут.	0.047921	0.081643
Эксцентриситет	0.82347	0.509386
Наклон (геоэклипт.), град.	139.6813	152.6686
$\omega$ , град.	339.4621	18.0055
$\Omega$ , град.	174.9928	255.8085
Из работы (Вашковьяк, 1999) аналит. теория		
$e_{min}$	0.07686	0.4964
$e_{max}$	0.2861	0.5848
$i_{min}$ , град.	139.65	151.72
$i_{max}$ , град.	142.47	160.46
$T_\omega$ , лет	8272.1	1239.2
$T_\Omega$ , лет	6577.4	1734.1
Из работы (Kinoshita, Nakai, 1999) аналит. теория		
$e_{max}$	-	0.603
$i_{max}$ , град.	-	160.5
$T_\omega$ , лет	-	1220
$T_\Omega$ , лет	-	1780
Из работы (Kinoshita, Nakai, 1999) числ. интегр.		
$e_{max}$	-	0.605
$i_{max}$ , град.	-	160.8
$T_\omega$ , лет	-	1350
$T_\Omega$ , лет	-	1770

боте (Вашковьяк, 2005) в канонической форме. Исходные уравнения содержали все шесть переменных. Далее применялся метод Цейпеля для исключения из уравнений членов с периодом обращения спутника и периодом обращения Солнца. Поскольку в методе Цейпеля эти короткопериодические слагаемые заранее не отбрасы-

Таблица 10.2. Параметры эволюции орбиты спутника Нептуна Нерейды, полученные в работе (Kinoshita, Nakai, 1999) численным интегрированием уравнений (Числ. интегр.), по аналитической теории движения этого спутника в работе (Mignard, 1981) и по формулам теории эволюции в работе (Kinoshita, Nakai, 1999).

Параметр	Числ. интегр.	Mignard, 1981	K.,N., 1999
$T_\omega$ , лет	13600	13400	13670
$T_\Omega$ , лет	17690	15000	17980
Амплитуда $e$	0.00546	0.0060	0.00548
Амплитуда $i$ , град.	3.123	3.09	3.137

ваются, то в результирующих уравнения возникают члены разных порядков по отношению к малому параметру, характеризующему возмущающий фактор. В вышеуказанной работе использовался малый параметр  $m$ , определяемый соотношением

$$m^2 = \frac{\mu'}{\mu} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 = \left( \frac{n'}{n} \right)^2.$$

После канонических преобразований оказалось, что в новых переменных большая полуось орбиты спутника остается постоянной, а искомым функций остается четыре.

Для Солнца средняя аномалия исчезает из рассмотрения, а большая полуось орбиты принята постоянной. Используется также разложение по степеням малых величин  $e'$ ,  $i'$ . Элементы орбиты Солнца  $e'$ ,  $i'$ ,  $\omega'$ ,  $\Omega'$  считаются некоторыми заданными функциями времени. Эти функции времени находятся из теории Лагранжа вековых возмущений, где используются элементы Лагранжа, связанные с элементами  $e'$ ,  $i'$ ,  $\omega'$ ,  $\Omega'$  соотношениями

$$h' = e' \sin(\omega' + \Omega'), \quad k' = e' \cos(\omega' + \Omega'),$$

$$p' = \sin i' \sin \Omega', \quad q' = \sin i' \cos \Omega'.$$

Для каждого из этих элементов получается сумма тригонометрических функций вида

$$\varepsilon'_j = \sum_{k=1}^N A_k^{(j)} \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} (\nu_k^{(j)} t + \beta_k^{(j)}), \quad (10.36)$$

где  $\varepsilon'_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) — один из элементов Лагранжа,  $N$  — число планет в теории, а  $A_k^{(j)}$ ,  $\nu_k^{(j)}$ ,  $\beta_k^{(j)}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) некоторые числа — постоянные теории движения планет, которые находятся из наблюдений. В формуле (10.36) берется функция синус для элементов  $h'$ ,  $p'$  и косинус для  $k', q'$ .

Полученные таким образом эволюционные уравнения в работе (Вашковьяк, 2005) не приводятся, но говорится, что они решаются затем методом численного интегрирования на интервалах времени в несколько тысяч орбитальных периодов вышеупомянутых спутников.

В силу того, что правые части полученных уравнений для средних элементов не содержат быстро осциллирующих функций, их численное интегрирование выполняется с большим шагом, порядка нескольких орбитальных периодов обращения спутника, т.е. гораздо эффективнее, чем уравнений в прямоугольных координатах или в оскулирующих элементах.

Заметим, что в полученных таким образом уравнениях содержатся разложения по степеням малых параметров. Оставлены члены, пропорциональные следующим комбинациям малых величин:  $m^2$ ,  $m^3$ ,  $m^4$ ,  $m^2 e'$ ,  $m^2 i'$ . Заметим также, что в уравнениях таким образом учены не все члены, пропорциональные  $m^4$ , поскольку в исходном разложении возмущающей функции взят только главный член задачи Хилла.

В вышеуказанной работе и последующих работах, в которых применяется данный метод при численном интегрировании эволюционных уравнений, для представления движения Солнца использовалась теория вековых возмущений планет Брауэра-Вуркома, а численные значения постоянных теории движения планет были взяты из работы (Шараф, Будникова, 1967). Начальные значения элементов орбит спутников в работе (Вашковьяк, 2005) и в последующих работах этого автора брались из публикаций MPECs (Minor Planets Electronic Circulars).

На интервалах времени порядка  $10^5 - 10^6$  лет получены экстремальные значения эксцентриситетов и наклонов ряда далеких спутников больших планет, а также периоды изменения аргументов перицентров и долгот восходящих узлов их орбит.

На временах порядка периодов циркуляции долгот узлов ( $10^2 - 10^3$  лет) проведено сравнение с результатами численного интегрирования уравнений движения, записанных относительно пря-

моугольных координат спутника и Солнца. При численном интегрировании прямоугольные координаты Солнца вычислялись по средним элементам кеплеровских орбит, выраженных в виде рядов по степеням времени. Сами ряды брались из работы (Bretagnon, Franco, 1988).

Результаты такого моделирования орбит далеких спутников планет опубликованы в работах (Вашковьяк, Тесленко, 2005; Вашковьяк, Тесленко, 2008а; Вашковьяк, Тесленко, 2008б).

В двух работах (Вашковьяк, Тесленко, 2009; Вашковьяк, 2010) аналитический метод был усовершенствован путем учета дополнительных членов разложения возмущающей функции. Кроме основного слагаемого, пропорционального  $m^2$ , учтены также члены, пропорциональные  $m^3$  и  $m^4$ , соответственно.

С использованием предложенного решения получены улучшенные аналитические зависимости от времени для элементов эволюционирующих орбит ряда далеких спутников планет-гигантов по сравнению с решением двукратно осредненной задачи Хилла и тем самым достигнуто их лучшее согласие с результатами численного интегрирования уравнений возмущенного движения спутников в прямоугольных координатах.

## **10.5. Эволюция орбит спутников планет при совместном влиянии различных факторов**

Попытки построить теорию эволюции орбит спутников при совместном влиянии различных факторов приводят к весьма сложной задаче.

Будем рассматривать далее только те спутники, которые движутся по внешним орбитам по отношению к главным спутникам планеты.

В задаче об эволюции орбит таких спутников планет основными факторами являются:

- несферичность планеты (в основном это ее динамические сжатие),
- притяжение Солнца,
- притяжение главных спутников (наиболее массивных спутников, движение которых считается заданным).

Основой для получения эволюционной системы уравнений является вековая часть полной возмущающей функции  $W$ , кото-

рая находится с помощью ее независимого осреднения по всем «быстрым» переменным — средним планетоцентрическим долготам Солнца, главных спутников и исследуемого (пробного — реального или гипотетического) спутника, т.е. исключением короткопериодической части. Таким образом, функция  $W$  зависит только от пяти планетоцентрических кеплеровских элементов орбиты:

$a$  — большой полуоси,

$e$  — эксцентриситета,

$i$  — наклона,

$\omega$  — аргумента перигея

$\Omega$  — долготы восходящего узла.

Как следует из уравнений Лагранжа, в элементах, в силу независимости  $W$  от средней долготы пробного спутника, большая полуось его орбиты остается постоянной, а сама эта функция дает нам первый интеграл эволюционной системы  $W = const$ .

В соответствии с принятыми здесь к рассмотрению возмущающими факторами разобьем полную возмущающую функцию на три слагаемых

$$W = W_0 + W_1 + W_2,$$

где  $W_0$  обусловлена сжатием планеты (вторая зональная гармоника),  $W_1$  — притяжением Солнца, а  $W_2$  — притяжением главных спутников.

В системе координат с основной плоскостью, совпадающей с плоскостью орбиты Солнца либо с плоскостью экватора планеты, слагаемые  $W_0$  и  $W_2$  зависят от пяти элементов орбиты спутника  $a, e, i, \omega, \Omega$ . Поэтому уравнения Лагранжа будут иметь только два первых интеграла  $a = const, W = const$ . Их общее аналитическое решение относительно элементов орбиты при произвольных начальных условиях не найдено.

В работах, посвященных данной задаче, в слагаемом  $W_0$  взят вековой член, зависящий от наклона орбиты спутника к экватору планеты и от ее эксцентриситета. В функции  $W_1$  берется только основной член разложения по степеням отношения большой полуоси спутника к радиусу круговой орбиты Солнца (приближение Хилла). Что касается функции  $W_2$ , то в наиболее продвинутой работе по данной теме (Вашковьяк, Вашковьяк, Емельянов, 2015) используется разложение по степеням отношения большой полуоси орбиты возмущающего главного спутника к большой полуоси спутника, движение которого исследуется.

Из-за сложности задачи и обширности работ по этой теме мы ограничимся здесь только обзором работ, выполненных с 1961 года по настоящее время, и описанием основных результатов.

В работах Лидова (1961) и Kozai (1962) выявлены главные особенности эволюции орбит спутников под влиянием вековых возмущений только от внешней притягивающей точки. Это, в частности, эффект сильного возрастания эксцентриситета орбиты при постоянной большой полуоси с одновременным уменьшением расстояния перицентра, вплоть до падения спутника на поверхность планеты. Этот эффект, получивший название механизма Лидова – Козаи, возникает, когда спутниковая орбита наклонена к плоскости движения возмущающей точки на угол, близкий к 90 градусам. Поскольку орбиты подавляющего большинства известных спутников достаточно далеки от ортогонального расположения относительно плоскости гелиоцентрической орбиты планеты, эффект падения для них проявиться не может. Исключением являются главные и близкие спутники Урана. Почти экваториальные и почти круговые орбиты этих спутников наклонены к плоскости орбиты планеты на углы, отличающиеся от прямого лишь на величину около 8 градусов.

В работе (Лидов, 1963) была рассмотрена задача об эволюции спутниковых орбит при совместном влиянии притяжения Солнца и сжатия планеты. Получены оценки минимального и максимального значений эксцентриситета при наличии обоих возмущающих факторов. Эти значения существенно зависят от соотношения между параметрами, характеризующими влияние сжатия планеты и притяжения внешнего тела. В работе (Лидов, 1963) в качестве примера взят самый удаленный из главных спутников Урана — Оберон. Для этого спутника получилось, что с учетом совместного влияния притяжения Солнца и преобладающего влияния сжатия планеты амплитуда долгопериодических колебаний эксцентриситета составляет примерно  $10^{-5}$ . Сжатие Урана с избытком компенсирует вековые солнечные возмущения.

В работе (Лидов, 1963) замечено, что «существенное изменение характера эволюции при учете нецентральнойности основного поля не является типичным для спутников планет Солнечной системы». Рассмотрен пример гипотетического спутника Земли, подобного Луне, но с наклоном орбиты к плоскости эклиптики 90 градусов. Оценки показывают, что такой спутник мог бы совершить лишь 52 оборота, то есть просуществовал бы на орбите примерно 4

года. В точном решении этой задачи, полученным численным интегрированием уравнений движения, минимальное расстояние орбиты спутника стало меньше радиуса Земли через 55 оборотов.

Исследование эволюции спутниковых орбит при совместном влиянии притяжения Солнца и сжатия планеты продолжалось. В дальнейшем делались попытки найти частные случаи задачи, когда осредненные уравнения могли бы быть проинтегрированы. В работах (Лидов, Ярская, 1974) перечислены все частные случаи интегрируемости уравнений Лагранжа в данной задаче. Сюда включены предельные случаи взаимной ориентации орбиты Солнца, экватора планеты и плоскости орбиты спутника (компланарность, ортогональность). Рассматривался и частный случай круговой орбиты спутника.

Поиски решений при специальных соотношениях между параметрами, характеризующими влияние сжатия планеты и притяжения внешнего тела, продолжались. Указания на публикации по этим исследованиям можно начать с работ (Вашковьяк, 1996; 1998а; 1998б; Вашковьяк, Тесленко, 2001) и продолжить в ссылках, данных в этих работах. Рассмотрены частные случаи соотношений между:

- начальными элементами орбиты спутника,
- углом между плоскостями орбиты Солнца и экватора планеты,
- параметром

$$\gamma = \frac{\mu r_0^2 J_2 a'^3}{\mu' a'^5}.$$

Найдены частные стационарные решения для элементов  $e$ ,  $\omega$ . Найдены семейства периодических изменений этих элементов. Исследована устойчивость этих решений.

Некоторым особенностям спутниковой системы Урана посвящены работы (Вашковьяк, 2001а,в; Вашковьяк, Тесленко, 2002). Учтено совместное влияние притяжения Солнца и сжатия планеты. Выявлены причины отсутствия спутников в экваториальной плоскости в некоторых зонах вокруг планеты. Отмечено, что этими же причинами нельзя объяснить распределение орбит по расстояниям для далеких спутников Юпитера и Сатурна.

В работе (Вашковьяк, Вашковьяк, Емельянов, 2015) получены эволюционные уравнения задачи о вековых возмущениях орбиты спутника при совместном влиянии трех возмущающих факторов (сжатия центральной планеты, притяжения ее главных спутников



и притяжения Солнца), описаны интегрируемые случаи и намечены возможные пути их исследования. В этой новой эволюционной ограниченной задаче многих тел наибольший интерес представляет изучение той области околопланетного пространства, в которой влияние на спутник указанных возмущений попарно или в совокупности сравнимо по величине. На основе полученных теоретических выводов рассмотрена спутниковая система Урана. Для широкого диапазона больших полуосей орбит с помощью полученных приближенных аналитических зависимостей и численных оценок выявлено влияние главных спутников Урана на эволюцию орбит некоторых его реальных и гипотетических спутников.

## **10.6. Классификация орбит далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна по типам и свойствам эволюции орбит**

С началом открытий в 1997 году первых далеких спутников Урана, новых далеких спутников Нептуна, Юпитера и Сатурна начались работы по классификации типов эволюции их орбит. За основу были приняты свойства решений эволюционных уравнений при осредненной возмущающей функции в случае Хилла, т.е. главного слагаемого ее разложения по отношениям больших полуосей орбит спутника и Солнца. Это тот случай, который рассмотрен подробно в разделах 10.3.2–10.3.5.

Сделаем здесь краткий обзор работ и полученных результатов по этой задаче.

После первых применений найденных решений уравнений для элементов  $e$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  в работе (Вашковьяк, 1999) автор этой работы продолжил анализ для вновь открываемых спутников. Анализировалась орбитальная эволюция новых внешних спутников Урана (Вашковьяк, 2001а, 2001в), новых внешних спутников Сатурна (Вашковьяк, 2001б), новых внешних спутников Юпитера (Вашковьяк, 2001г). В работе (Вашковьяк, 2003) выполнен анализ эволюции орбит новых далеких спутников Нептуна. Сделано сравнение орбит либрационного типа для далеких спутников Юпитера, Сатурна и Нептуна. Выявлены интересные особенности эволюции этих орбит. Особенности вековой эволюции орбит гипотетических спутников Урана. описаны в работе (Вашковьяк, 2016).

Кроме деления орбит на два типа эволюции: с либрационным

изменением аргумента перицентра и с его циркуляционным изменением, существуют и другие параметры свойств эволюции. Весьма детальный анализ типов эволюции орбит сделан в работе (Cuk, Burns, 2004). Рассмотрены также приложения этого анализа к задаче о происхождении далеких спутников больших планет.

Особым оказался случай эволюции орбиты для далекого спутника Юпитера J34 Europa. Согласно классификации, основанной на решении уравнений при осредненной возмущающей функции в случае Хилла и круговой орбите Солнца (см. разделы 10.3.2–10.3.5) изменение аргумента перицентра должно иметь циркуляционный характер, поскольку значение постоянной  $c_2$  в интеграле (10.11), вычисленной по известным из наблюдений элементам орбиты, получается положительным. Однако анализ изменений во времени оскулирующего элемента  $\omega$ , полученных из численного интегрирования уравнений движения в прямоугольных координатах, показывает, что на интервале времени 1000 лет этот элемент испытывает колебания относительно значения 90 градусов с амплитудой примерно 20 градусов. В работе (Вашковьяк, Тесленко, 2007) исследован этот случай. Построена модель эволюции орбиты спутника J34 Europa с осреднением возмущающей функции только по средней долготе спутника. Получены зависимости элементов орбиты от средней долготы Солнца. Оказалось, что в элементе  $\omega$ , возмущения, связанные с периодом обращения Солнца вокруг планеты, доминируют. Именно эти периодические возмущения и обнаруживаются в изменении оскулирующего элемента  $\omega$ .

В работе (Brozović, Jacobson, 2017) выполнено уточнение орбит всех известных к настоящему времени далеких спутников Юпитера на основе наблюдений. Моделирование движения проводилось численным интегрированием уравнений движения. Интегрирование выполнено не только для интервала времени наблюдений и времени необходимых эфемерид, но также на интервале времени 1000 лет для определения типов эволюции орбит спутников. Оценены изменения долгот перицентров. Если скорость изменения аргумента перицентра меньше, чем скорость прецессии узла орбиты, то спутник назван обратным циркулятором (reverse circulator — RC). В противоположной ситуации спутник называют прямым циркулятором (direct circulator — DC). Рассматривается соотношение между скоростью изменения долготы перицентра спутника и долготы перицентра планеты. Если эти скорости равны, говорят о ве-

ковом резонансе спутника с планетой. В работах (Cuk, Burns, 2004; Brozovic, Jacobson, 2017) вычисляется также параметр, характеризующий степень близости состояния эволюции орбиты к вековому резонансу. Дана таблица, содержащая для всех далеких спутников Юпитера значения элементов оскулирующих орбит: средние, минимальные, максимальные, а также периоды изменений долгот перицентров и долгот узлов. Отмечен тип эволюции для каждого спутника.

Перечисление всех далеких спутников с указанием типа эволюции было бы слишком объемным для данного изложения. Мы эти данные не приводим. При необходимости их можно найти в цитированных выше работах. Отметим только, что спутники группируются в некоторые «кластеры» со сходными типами эволюции орбит.

## **10.7. Эволюция орбит и сближения далеких спутников планет**

### **10.7.1. Современные знания об эволюции орбит далеких спутников планет**

Изучение орбитальной эволюции и сближений далеких спутников служит цели установления их происхождения. Это важно также для понимания распространения материи на ранних стадиях эволюции Солнечной системы. Взаимное притяжение спутников весьма слабое из-за их малых размеров и масс. Однако на очень больших интервалах времени взаимные сближения могут оказаться достаточно тесными, чтобы значительно изменить орбиты спутников.

Движение далеких спутников планет вызывает большой интерес из-за ряда особенностей их орбит. Орбитальное движение далеких спутников подвержено сильному влиянию притяжения Солнца. Плоскости орбит этих спутников, непрерывно меняя своё положение в пространстве, не ассоциируются ни с плоскостью экватора, ни с плоскостью орбиты планеты. Большинство из этих спутников движутся вокруг планеты в обратном направлении по отношению к ее орбитальному движению. Эксцентриситеты орбит значительны и, вдобавок, претерпевают заметные изменения. Перечисленные свойства позволяют предположить, что далекие спутники появились вследствие их захвата планетой с гелиоцентрических орбит. В рамках модели задачи трех тел (Солнце – планета – спутник) такой

захват может быть только временным. Поэтому для подтверждения гипотезы о захвате необходимо найти причину перехода этих тел из состояния временного захвата к стабильному состоянию. В работе (Gray, Bauer, 2007) упоминаются, по крайней мере, пять процессов, которые могли привести к такому переходу.

Первая возможная причина — столкновение временно захваченного тела с другим, уже существующим спутником планеты. Вторая — захват, обусловленный увеличением массы планеты. Третья причина — тормозящее влияние межпланетного газа или газового облака вокруг планеты. Четвертая возможная причина — захват одновременно двух взаимно гравитирующих тел. Пятая причина — захват во время прохождения состояния резонанса орбитального движения спутника с орбитальным движением планеты.

В ряде работ, выполненных в последние годы, исследованы различные конкретные механизмы захвата. В том числе, механизм захвата в рамках проблемы четырёх тел — Солнце, планета, двойной астероид (Gaspar, Winter, Vieira Neto, 2011), захвата в модели трёх тел при дополнительном влиянии сопротивления газа (McGleam, Hamilton, Agnor, 2007) либо при изменении массы планеты (de Oliveira et al., 2007), захвата с учётом приливного разрушения меньшего тела (Philpott, Hamilton, Agnor, 2010), захвата в результате взаимных столкновений малых тел непосредственно после образования регулярных спутников (Ma, Zheng, Shen, 2009), захвата во время прохождения резонанса (Cuk, Gladman, 2006), захвата объектов из планетозимального диска во время близких прохождений планет юпитерианской группы (Nesvorny, Vokrouhlicky, Morbidelli, 2007a,b), захвата объектов кометного типа на ранних этапах формирования больших планет Солнечной системы (Jewitt, Haghighipour, 2007).

Здесь мы не ставим своей задачей составление исчерпывающего и подробного обзора работ, связанных с орбитальной динамикой нерегулярных спутников планет-гигантов, но считали бы целесообразным обозначить некоторые направления подобных исследований. В работе (Cuk, Burns, 2004) была предложена новая модель вековой эволюции нерегулярных спутников Сатурна, а работа (Burns et al., 2004) посвящена эволюции орбит, близких к апсидально-либрационной орбите спутника Сатурна S24 (Kiviuk). Укажем и на обстоятельную работу (Nesvorny et al., 2003), в которой, в основном численными методами, исследована «орбиталь-

ная и столкновительная эволюция» 60 тысяч фиктивных спутников планет-гигантов, а также 50 реальных далеких спутников. С помощью расчетов, выполненных на интервале времени 108 лет, в частности, выявлены области устойчивости орбит нерегулярных спутников, а также их отдельные группы, аналогичные семействам астероидов. В ряде работ исследованы небесно-механические аспекты движения нерегулярных спутников, в том числе, орбитальные и вековые резонансы (Beauge, Nesvorny, 2007; Correa et al., 2010), а также наличие областей фазового пространства с периодическими, условно-периодическими и хаотическими движениями (Hinse et al., 2010; Frouard, Fouchard, Vienne, 2009, 2010; Tsirogiannis, Perdios, Markellos, 2009).

Аналитическим методам исследования эволюции орбит нерегулярных спутников посвящены работы, уточняющие известную (Лидов, 1961; Lidov 1962, 1963; Kozai, 1962) модель двукратно осредненной задачи Хилла учетом слагаемых третьего порядка относительно малого параметра — отношения средних движений планеты и спутника (Kovalevsky, 1964; Орлов, 1965; Orlov, 1965; Beauge et al., 2006; Вашковьяк, Тесленко, 2009). Укажем, что для исследования эволюции орбит «сверхдалеких» спутников, таких как, например, спутники Нептуна N10 (Psamathe) и N13 (Neso), предложен нестандартный «конструктивно-аналитический» метод четвертого порядка (Вашковьяк, 2010).

Отметим также исследования орбитальной неустойчивости спутников в промежуточных областях околопланетного пространства между орбитой наиболее далекого из регулярных спутников и орбитой наиболее близкого из нерегулярных. В этих областях времена жизни гипотетических спутников, хотя и меняются в зависимости от эксцентриситетов и наклонов их орбит, однако космогонически весьма малы (Вашковьяк, 2001в; Вашковьяк, Тесленко, 2002; Nighipour, Jewitt, 2006). В дополнение укажем еще и обзорно-библиографическое исследование по динамике естественных спутников планет (Уральская, 2003).

Две из пяти ранее указанных причин постоянного захвата связаны с взаимным гравитационным притяжением спутников. Поскольку массы этих тел весьма малы, существенное изменение свойств движения может происходить только вследствие достаточно тесных взаимных сближений спутников. Можно рассматривать движение спутника как движение по оскулирующей кеплеровской ор-

бите. Из-за сильного влияния притяжения Солнца значительно изменяются эксцентриситет и ориентация оскулирующей орбиты в пространстве. Это может приводить к сближению и даже к пересечению траекторий движения разных спутников. Чтобы их обнаружить, необходимо моделирование движения спутников на весьма длительных интервалах времени.

Из-за ограниченной точности наблюдений и весьма малых временных интервалов наблюдений большинства далеких спутников планет оказывается невозможным вычислять эфемериды на больших интервалах времени с точностью, необходимой для достоверного детектирования сближений спутников. Это подтверждается анализом точности эфемерид далеких спутников, выполненным в работе (Emelyanov, 2010). Однако ориентация эллиптической оскулирующей орбиты в пространстве, ее эксцентриситет и большая полуось могут быть определены с приемлемой точностью на длительных интервалах времени. При этом положение спутника на планетоцентрической орбите может быть известно с точностью до 180 градусов. Поэтому моделировать на больших интервалах времени можно только размеры, форму и ориентацию орбит. Можно изучать только эволюцию орбит, не задавая вопроса о том, где на орбите находится сам спутник. Тогда в задаче о сближении спутников можно определять только минимальные расстояния между орбитами, принимая во внимание, что сближения спутников имеют место только на «сближающихся орбитах». Сближения самих спутников можно рассматривать только как случайный процесс.

Орбиты многих далеких спутников определены на столь коротких интервалах времени, что достоверность конфигураций их орбит, моделируемых на больших интервалах времени, может быть столь же низкой, как и точность вычисляемых положений спутников на орбите. В таких случаях сближения самих орбит можно также рассматривать как случайный процесс и оценивать лишь его вероятностные характеристики. Можно рассчитывать также на повышение достоверности описания конфигураций орбит при появлении новых наблюдений далеких спутников планет.

На больших интервалах времени факты сближений спутников безусловно также влияют на эволюцию конфигураций орбит. Изучение этих процессов представляет собой особую задачу.

Картину эволюции орбит спутников планет необходимо постоянно уточнять. До подтверждения гипотез еще далеко.

### 10.7.2. Задача предвычисления и детектирования сближения далеких спутников планет

Изложенные выше обстоятельства порождают актуальную задачу изучения эволюции орбит и возможных сближений далеких спутников планет. В работе (Емельянов, Вашковьяк, 2012) сделана попытка решения этой задачи. В частности, разработан метод и вычислительные программы, позволяющие предвычислять взаимные парные «сближения орбит» далеких спутников планет на больших интервалах времени.

Решение сформулированной задачи состояло из следующих этапов. Сначала из наблюдений нужно определить параметры движения спутников или начальные условия для решения уравнений движения. Затем по найденным параметрам нужно провести численное интегрирование уравнений движения спутников на интервале времени, приемлемом для решения задачи. Далее нужно подобрать подходящие достаточно простые аналитические функции, которые будут представлять результаты численного интегрирования и давать возможность вычислять параметры орбит на любые моменты времени на длительном интервале. И, наконец, нужно разработать метод, позволяющий вычислять минимальные расстояния между орбитами на любые моменты времени. Эти средства можно будет применять для поиска моментов «сближений» орбит далеких спутников планет и вероятных сближений спутников.

Первый этап выполнен ранее в работах (Emelyanov, 2005; Емельянов, Кантер, 2005) для всех 107 далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Найденные начальные условия для решения уравнений движения спутников размещены на сайте сервера эфемерид спутников планет MULTI-SAT (Emel'yanov, Arlot, 2008) по адресу <http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/multisat/index.html>. Чтобы найти эти данные, нужно последовательно пройти по ссылкам «инструкции», «источники», «Оригинальные численные модели движения далеких спутников планет», «Начальные условия интегрирования...». Заметим, что параметры орбит спутников регулярно обновляются по мере появления новых наблюдений. Была взята последняя версию этих данных на момент подготовки статьи (Емельянов, Вашковьяк, 2012).

Изменения элементов орбит далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна на интервалах времени несколько тысяч лет найдены численным интегрированием уравнений движения в рабо-

тах (Вашковьяк, Тесленко, 2008а,б). В этих работах эволюция орбит спутников изучена также аналитическим и полуаналитическим методами. Ввиду небольших расхождений результатов, полученных тремя различными методами, нам представляется целесообразным использовать результаты численного интегрирования. Поскольку после публикации указанных работ начальные условия движения ряда спутников были перевычислены, в работе (Емельянов, Вашковьяк, 2012) выполнено независимое численное интегрирование уравнений движения по новым значениям начальных условий.

По результатам численного интегрирования были составлены таблицы значений пяти элементов оскулирующих орбит всех 107 далёких спутников на интервалах от 300 до 15000 лет (для спутников разных планет) с постоянным шагом по времени. Интервал времени и шаг в таблицах выбирался так, чтобы на каждый период обращения спутника попадало по крайней мере несколько табличных моментов, а весь интервал заключал в себе один или более периодов движения линии узла и линии асид орбиты. В составленных таблицах содержатся следующие элементы кеплеровской оскулирующей орбиты: большая полуось, эксцентриситет, наклон к плоскости эклиптики, долгота восходящего узла и угловое расстояние перицентра от восходящего узла в эклиптической системе координат.

### **10.7.3. Аналитическое описание эволюции орбит спутников**

Из теории движения далёких спутников планет следует, что изменения рассматриваемых оскулирующих элементов орбиты во времени могут быть представлены тригонометрическими рядами. Члены этих рядов мы называем «гармониками». Частоты гармоник являются линейными комбинациями с целочисленными коэффициентами конечного набора порождающих частот. Эти частоты происходят от вековых и периодических изменений средних долгот, долгот узлов и долгот перицентров орбит спутников, планеты и других тел, возмущающих движение спутников. Среди гармоник разложений оскулирующих элементов орбит спутников имеется небольшое число доминирующих и множество других гармоник, имеющих меньшие амплитуды, но примерно одного и того же порядка. Зависимости от времени долгот восходящих узлов и аргументов перицентров в эклиптической системе координат, как правило, имеют вековые члены. Интересно отметить, что в достаточно многочисленном ансамбле далёких спутниковых орбит планет-гигантов из-



вестно лишь несколько орбит с либрационным изменением аргументов перицентров. Первые выявленные омега-либраторы — это спутники Сатурна S24 (Kiviuq) и S22 (Ijiraq).

Характер изменений оскулирующих элементов орбит далеких спутников планет не позволяет практически представить все частоты гармоник как комбинации порождающих частот. Широко применяемый метод Фурье-анализа в этом случае не дает приемлемого результата. Поэтому в работе (Емельянов, Вашковьяк, 2012) была предпринята попытка разработать метод построения функций, аппроксимирующих изменения элементов орбит, в виде тригонометрических сумм с различными, не связанными между собой частотами. Такой метод был разработан, алгоритмизирован и применен.

Фактически в этой работе был предложен новый оригинальный метод частотного анализа. Этот метод обладает существенной особенностью. В тех случаях, когда в исследуемом сигнале присутствует ряд гармоник с точно выраженными частотами и амплитудами, эти гармоники распознаются совершенно точно. Их частоты и амплитуды вычисляются с точностью представления чисел в компьютере.

#### **10.7.4. Определение минимальных расстояний между орбитами далеких спутников планет**

Описанным выше методом частотного анализа были найдены аппроксимирующие функции пяти элементов оскулирующих орбит всех 107 далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Эти функции можно использовать для изучения эволюции орбит спутников на больших интервалах времени. Остается неизученным вопрос о точности представления элементов оскулирующих орбит за пределами интервала времени исходной последовательности значений, по которой делалась аппроксимация. Мы ограничимся лишь замечанием о том, что точность медленно ухудшается с удалением от границ этого интервала.

Одним из применений найденных функций может быть изучение обстоятельств взаимных сближений спутников. Эти сближения могут происходить весьма редко, однако на очень больших интервалах времени накапливается много сближений, они могут определять картину эволюции орбит, в частности, превращать временный захват спутника (с гелиоцентрической орбиты на планетоцентрическую) в постоянный.

Поскольку положение спутников на орбитах на больших интервалах времени не может быть вычислено достаточно точно, чтобы выделить их сближение, то остается довольствоваться установлением фактов пересечения или «сближения» орбит.

Если оскулирующие орбиты двух спутников в какой-то момент времени имеют участки, которые близки в пространстве, то существует возможность тесного сближения самих спутников. Представляет интерес задача установления всех фактов «сближения» или пересечения орбит пар спутников на некотором достаточно большом интервале времени. Так мы приходим к задаче вычисления минимального расстояния в пространстве между двумя софокусными эллипсами, заданными пятью параметрами. В литературе для обозначения этой величины установился англоязычный термин Minimum Orbital Intersection Distance (MOID).

Алгоритм приближенного вычисления искомого минимального расстояния может быть очень простым. Следует разметить равномерно каждую орбиту точками и вычислить расстояния между всеми парами точек на двух разных эллипсах. Затем выбрать минимальное из полученных значений. Ясно, что такой способ потребует значительного времени вычислений и даст ограниченный по точности результат.

Задача определения MOID рассмотрена в работе (Valuev, Kholshchevnikov, 2005). Авторами этой работы показано, что решение задачи сводится к поиску действительных корней тригонометрического полинома восьмой степени. Для практического решения задачи была использована вычислительная программа, любезно предоставленная авторами работы (Valuev, Kholshchevnikov, 2005). В качестве входных данных программы для каждого из двух спутников задаются элементы их кеплеровских орбит: большая полуось  $a$ , эксцентриситет  $e$ , наклон  $i$ , угловое расстояние перицентра от восходящего узла  $\omega$ , долгота восходящего узла  $\Omega$ . Результатом работы программы оказываются значения истинных аномалий для точек каждой орбиты, между которыми достигается минимальное расстояние и само вычисленное значение этого расстояния.

С помощью указанной вычислительной программы была составлена процедура определения минимального расстояния между орбитами пар спутников для последовательности моментов времени с заданным шагом на заданном интервале. Элементы орбит вычисляются по найденным аппроксимирующим функциям, как это опи-

сано выше. Процедура также выделяет случаи, когда между двумя последовательными моментами времени происходили пересечения орбит, как двух линий в пространстве.

### **10.7.5. Предлагаемый интернет-ресурс исследования эволюции орбит и сближений далеких спутников планет**

Все описанные выше методики и процедуры реализованы в виде вычислительной программы, пользование которой организовано через Интернет. Интерфейс с программой устроен на страницах специального сайта в Интернете. Пользователю после выбора системы спутников по имени планеты предлагаются следующие действия.

1. Вывод на экран на отдельной странице параметров тригонометрических полиномов, аппроксимирующих изменение пяти элементов кеплеровской оскулирующей орбиты одного далекого спутника планеты, выбранного из предлагаемого списка. Кроме коэффициентов и частот, выдаются некоторые сопутствующие данные.

2. Вывод на экран на отдельной странице таблицы значений всех пяти элементов кеплеровской оскулирующей орбиты выбранного спутника с заданным шагом по времени на заданном интервале. По желанию пользователя, вместо элементов  $e, i, \omega, \Omega$ , могут выдаваться функции элементов  $e \sin \omega, e \cos \omega, \sin i \sin \Omega, \sin i \cos \Omega$ . В конце таблицы выводятся также минимальное, среднее и максимальное значения большой полуоси, эксцентриситета.

3. Вывод на экран на отдельной странице таблицы значений минимального расстояния между орбитами (MOID) двух выбранных спутников с заданным шагом по времени на заданном интервале. В таблице выдаются также значения взаимного наклона двух орбит. После этой таблицы выдается список моментов всех пересечений двух орбит, случившихся на заданном интервале времени. Эти моменты вычисляются с точностью до шага по времени в таблице значений минимальных расстояний.

Предлагаемый интернет-ресурс доступен в «Службе естественных спутников планет» по адресу <http://www.sai.msu.ru/neb/nss/html/multisat/index.html> Нужно пройти по ссылке «Outer Natural Satellites Orbits Ephemerides» в конце страницы.

### 10.7.6. Примеры вычисления минимальных расстояний между орбитами спутников

Рассмотрим теперь пример вычисления зависимости от времени минимального расстояния между орбитами двух спутников. Для пары спутников J6 (Himalia) и J7 (Elara) эта зависимость показана на рис. 10.6, а для спутников J6 (Himalia) и J8 (Pasiphae) — на рис. 10.7. Точками на оси времени показаны моменты пересечений орбит.

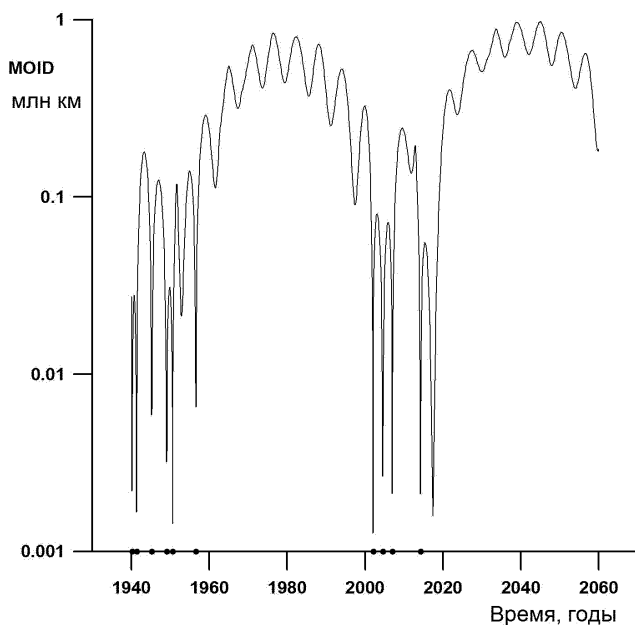


Рис. 10.6. Изменение минимального расстояния между орбитами (MOID) спутников J6 (Himalia) и J7 (Elara). Точками показаны моменты пересечений двух орбит. Линии графиков не достигают нулевых значений из-за дискретности опорных точек графика.

Заметим, что спутники J6 (Himalia) и J8 (Pasiphae) принадлежат к разным семействам орбит далеких спутников Юпитера. Большие полуоси их орбит отличаются примерно вдвое. Оказывается, что пересечения орбит этих спутников случаются так же часто, как и пересечения орбит двух спутников J6 (Himalia) и J7 (Elara), при-

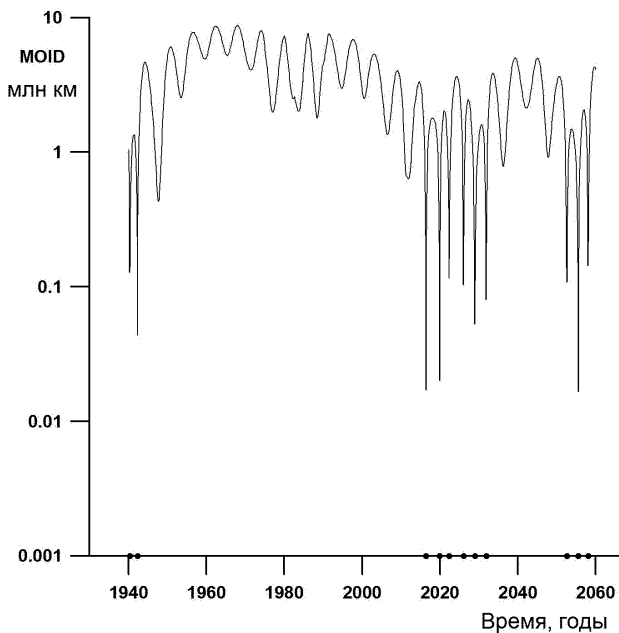


Рис. 10.7. Изменение минимального расстояния между орбитами (MOID) спутников J6 (Himalia) и J8 (Pasiphae). Точками показаны моменты пересечений двух орбит. Линии графиков не достигают нулевых значений из-за дискретности опорных точек графика.

надлежащих к одной группе и имеющих примерно равные большие полуоси орбит.

Для всех 54 открытых далеких спутников Юпитера были выполнены вычисления взаимных расстояний и моментов пересечений орбит по всем 1431 комбинациям пар спутников на интервале времени тысячу лет с 2010 по 3010 год. Только для 155 из 1431 комбинаций пар спутников не случилось ни одного пересечения орбит на этом интервале времени. Для остальных пар случилось от 2 до 330 пересечений. Максимальное количество пересечений 330 оказалось у орбит спутников J33 (Euanthe) и J40 (Mneme). Экстремальные значения элементов эволюционирующих орбит этих спутников, а также периоды циркуляции узлов и аргументов перицентров весьма близки между собой, как это можно видеть из данных, приведенных, в частности, в работе (Вашковьяк, Тесленко, 2008а). Для всех рассмотренных пар спутников были вычислены также суммарные

промежутки времени, в течение которых взаимные расстояния между орбитами не превышали 100 тыс. км. Только в 214 парах из 1431 орбиты спутников не приближались друг к другу ближе 100 тыс. км на рассматриваемом интервале в тысячу лет. В остальных парах орбиты находились на более близком расстоянии в течение суммарного времени от 2 до 313 лет. Максимальное суммарное время сближений на расстояния менее 100 тыс. км оказалось 313 лет для пары J23 (Kalyke) и S/2003 J9. Для этой пары достаточно близкими оказываются экстремальные значения наклонов, а также периоды циркуляции узлов и аргументов перицентров:  $160^\circ \leq i \leq 168^\circ$ , 87.4 года,  $158^\circ \leq i \leq 167^\circ$ , 86.8 года, 76.6 года, соответственно.

Аналогичные вычисления на том же интервале времени в тысячу лет были сделаны для 38 далеких спутников Сатурна. В 703 комбинациях пар спутников только 46 не имели пересечений орбит. Максимальное число пересечений — 124 имели орбиты спутников S19 (Ymir) и S/2007 S3. Для этой пары достаточно близкими оказываются лишь экстремальные значения наклонов:  $169^\circ \leq i \leq 176^\circ$  и  $171^\circ \leq i \leq 177^\circ$  соответственно (Вашковьяк, Тесленко, 2008b). В 41 паре орбиты не сближались на расстояния меньше 100 тыс. км. Максимальное суммарное время сближений орбит — 149 лет оказалось у пары спутников S/2004 S12 и S/2004 S13.

Аналогичный анализ для 9 далеких спутников Урана следует делать на большем интервале времени, поскольку периоды обращения линий узлов и линий апсид орбит этих спутников значительно больше, чем у орбит спутников Юпитера и Сатурна. Мы взяли интервал времени 4 тыс. лет, начиная с 2010 года. Из 36 комбинаций пар спутников только для 10 пар орбиты не пересекались и не «сближались» на расстояние менее 100 тыс. км. Максимальное число пересечений — 91 имели орбиты спутников U19 (Setebos) и U21 (Trinculo). Интересно отметить, что экстремальные значения большой полуоси орбиты спутника U19 более чем вдвое превышают соответствующие значения для U21. По-видимому, максимальное для системы Урана число пересечений орбит этой пары обусловлено возможностью заметного возрастания эксцентриситета орбиты U19 до значения, примерно равного 0.7. Максимальное суммарное время сближений орбит 485 лет на исследуемом интервале в 4 тыс. лет оказалось у пары спутников U16 (Caliban) и U21 (Trinculo).

Гораздо меньше пересечений и сближений испытывают орбиты

6 далеких спутников Нептуна, включая N2 (Nereid). Исследования были проведены на интервале времени 8 тыс. лет, поскольку периоды обращений линий узлов и линий апсид орбит далеких спутников Нептуна весьма велики. С орбитой Nereid было 6 пересечений только орбиты спутника N9 (Halimede). Орбиты остальных 5 далеких спутников имели взаимные пересечения и «сближения» на расстоянии менее 100 тыс. км. Максимальное число пересечений — 73 на интервале времени 8 тыс. лет имели спутники N10 (Psamathe) и N13 (Neso). Это наиболее удалённые от Нептуна спутники, для которых солнечные возмущения приводят к весьма заметной эволюции их орбит и, в частности, к возрастанию эксцентриситетов до величин, примерно равных 0.87. Отметим, что орбита спутника N13 обладает либрационным изменением аргумента перицентра, находясь в условиях известного резонанса Лидова – Козаи. Напротив, аргумент перицентра орбиты спутника N10 изменяется циркуляционно. По-видимому, подобное качественное различие в эволюции данных орбит вместе с возможностью их сильного «вытягивания» способствует относительно частым орбитальным пересечениям этой пары. Максимальное время «сближений» — 167 лет, на расстоянии менее 100 тыс. км было у орбит спутников N9 (Halimede) и N12 (Laomedeia). Интересно отметить, что в отличие от всех вышеуказанных пар спутников с обратными движениями, один из спутников этой пары N12 движется по орбите с наклоном, меньшим  $90^\circ$ . Это приводит к «встречному» движению узлов орбит, что, по-видимому, также способствует их частым пересечениям в процессе эволюции.

Таким образом, разработанный метод и вычислительные программы позволяют производить разнообразные и обширные исследования взаимных пространственных перемещений, а также изменений размеров и формы эволюционирующих орбит далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Приведенные примеры только демонстрируют возможности предлагаемых средств.

### 10.7.7. Заключение

Эволюция орбит далеких спутников планет определяется значительными возмущениями в их движении со стороны Солнца. Эти возмущения вызывают существенные изменения элементов оскулирующих кеплеровских орбит. Однако изменения эксцентриситетов и наклонов орбит ограничены известными пределами. Взаим-

ное притяжение спутников весьма мало в силу их малых размеров и масс. Однако на очень больших интервалах времени взаимные сближения спутников могут быть настолько тесными, что их орбиты могут претерпеть большие изменения. Сближения могут повлиять на статус такого небесного тела как спутника планеты. Детектирование сближений спутников весьма затруднено ввиду невозможности достаточно точного вычисления их положений на очень длительных интервалах времени. Перспективным путем исследований в этом направлении может быть предвычисление взаимных конфигураций орбит далеких спутников планет. Разработанные и предлагаемые в данной работе методы и средства вычислений призваны помочь в продвижении на этом пути.

По крайней мере, уже сейчас можно заключить, что орбиты ансамбля далеких спутников на интервалах времени в несколько тысяч лет имеют многократные пересечения и «сближения», при которых могут сближаться и сами спутники.

Классификация спутников по отдельным группам непосредственно не связана с возможными сближениями спутников, принадлежащих разным группам.

Рассматриваемая эволюционная задача требует более детальных исследований, чтобы можно было проверить существующие гипотезы о происхождении далеких спутников планет.

## **10.8. Уточнение теории вековых возмущений Лапласа – Лагранжа**

В работе (Никончук, 2012) разработан метод вычисления вековых возмущений в задаче движения системы малых тел вокруг массивного центрального тела. По сравнению с классической теорией Лапласа – Лагранжа, основанной на линейных уравнениях, учтены члены третьей степени относительно эксцентриситетов и наклонов орбит. Соответствующее уточнение решения оказывается существенным при изучении эволюции орбит на больших интервалах времени. Предложенный метод был применен для исследования движения главных спутников Урана. Показано, что на интервалах времени больше 100 лет вклад полученных дополнительных вековых возмущений для спутника Миранда имеет порядок величины эксцентриситета орбиты, что в линейной мере составляет несколько тысяч километров. Для других спутников эффект учета нелиней-



ных членов оказывается меньшим. Очевидно, что при построении общей аналитической теории движения главных спутников Урана необходимо учитывать нелинейные члены в уравнениях для вековых возмущений. Соответствующий метод построен, исследован и предложен в работе (Никончук, 2012).

## Литература к Главе 10

- Аксенов Е. П.* Один вид дифференциальных уравнений движения спутника. Труды ГАИШ. 1966. Т. 35. С. 44–58.
- Брумберг В. А.* Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. Бюллетень ИТА. 1967. Т. 11. № 2. С. 73–83.
- Вашковьяк М. А., Лидов М. Л.* Об эволюции некоторых типов орбит ИСЗ. Космические исследования. 1990. Т. 28. Вып. 6. С. 803–807.
- Вашковьяк М. А.* О специальных частных решениях двукратно осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты. Письма в Астрономический журнал. 1996. Т. 22. № 3. С. 231–240.
- Вашковьяк М. А.* О семействах периодически эволюционирующих орбит в осредненной задаче Хилла с учетом сжатия центральной планеты. Письма в Астрономический журнал. 1998а. Т. 24. № 3. С. 226–233.
- Вашковьяк М. А.* Об устойчивости стационарных решений двукратно осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты. Письма в Астрономический журнал. 1998б. Т. 24. № 9-10. С. 791–800.
- Вашковьяк М. А.* Эволюция орбит далеких спутников Урана. Письма в Астрономический журнал. 1999. Т. 25. № 7. С. 554–560.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Об устойчивости периодических решений для осредненной задачи Хилла с учетом сжатия планеты. Письма в Астрономический журнал. 2001. Т. 27. № 3. С. 232–240.
- Вашковьяк М. А.* Об эволюции орбит новых внешних спутников

- Урана. Письма в астрономический журнал. 2001а. Т. 27. № 6. С. 470–475.
- Вашковьяк М. А.* Эволюция орбит новых внешних спутников Сатурна и их классификация. Письма в астрономический журнал. 2001б. Т. 27. № 7. С. 533–542.
- Вашковьяк М. А.* Некоторые небесно-механические особенности системы спутников Урана. Письма в астрономический журнал. 2001в. Т. 27. № 7. С. 543–548.
- Вашковьяк М. А.* Об эволюции орбит новых внешних спутников Юпитера. Письма в астрономический журнал. 2001г. Т. 27. № 10. С. 788–794.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Об особенностях спутниковой системы Урана. Письма в астрономический журнал. 2002. Т. 28. № 9. С. 711–720.
- Вашковьяк М. А.* Эволюция орбит новых далеких спутников Нептуна и  $\omega$ -либраторы в системах Сатурна и Юпитера. Письма в Астрономический журнал. 2003. Т. 29. № 10. С. 782–791.
- Вашковьяк М. А.* Численно-аналитический метод исследования эволюции орбит далеких спутников планет. Письма в Астрономический журнал. 2005. Т. 31. № 1. С. 66–75.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Об эволюции орбит некоторых далеких спутников планет-гигантов. Письма в Астрономический журнал. 2005. Т. 31. № 2. С. 154–160.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Некоторые особенности эволюции орбиты спутника Юпитера J34 (Europa). Письма в Астрономический журнал. 2007. Т. 33. № 11. С. 873–880.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Эволюционные характеристики орбит внешних спутников Юпитера. Астрономический вестник. 2008а. Т. 42. № 4. С. 301–316.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Эволюционные характеристики орбит внешних спутников Сатурна, Урана и Нептуна. Астрономический вестник. 2008б. Т. 42. № 6. С. 521–537.
- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Уточненная модель эволюции далеких спутниковых орбит. Письма в астрономический журнал. 2009. Т. 35. № 12. С. 934–950.

- Вашковьяк М. А., Тесленко Н. М.* Об эволюции орбиты Нерейды. *Астрономический вестник*. 2010. Т. 44. № 1. С. 48–58.
- Вашковьяк М. А.* Конструктивно-аналитическое решение эволюционной задачи Хилла. *Астрономический вестник*. 2010. Т. 44. № 6. С. 560–573.
- Вашковьяк М. А., Вашковьяк С. Н., Емельянов Н. В.* Об эволюции спутниковых орбит под действием сжатия планеты, притяжения ее массивных спутников и Солнца. *Астрономический вестник*. 2015. Т. 49. № 4. С. 283–299.
- Вашковьяк М. А.* Особенности вековой эволюции орбит гипотетических спутников Урана. *Астрономический вестник*. 2016. Т. 50. № 6. С. 412–424.
- Гордеева Ю. Ф.* Зависимость элементов от времени в долгопериодических колебаниях в ограниченной задаче трех тел. *Космические исследования*. 1968. Т. 6. Вып. 4. С. 536–540.
- Емельянов Н.В., Кантер А.А.* Орбиты новых внешних спутников планет из наблюдений. *Астрономический вестник*. 2005. Т. 39. № 2. С. 128–140.
- Емельянов Н. В., Вашковьяк М. А.* Эволюция орбит и сближения далеких спутников планет. Средства изучения и примеры. *Астрономический вестник*. 2012. Т. 46. № 6. С. 460–473.
- Емельянов Н. В.* Возмущенное движение при малых эксцентриситетах. *Астрономический вестник*. 2015. Т. 49. № 5. С. 380–394.
- Лидов М. Л.* Эволюция орбит небесных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. Искусственные спутники Земли. М. АН СССР. 1961. Вып. 8. С. 5–45.
- Лидов М. Л.* О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников. Проблемы движения искусственных небесных тел. М.: Изд. АН СССР. 1963. С. 119–134.
- Лидов М. Л., Ярская М. В.* Интегрируемые случаи в задаче об эволюции орбиты спутника при совместном влиянии внешнего тела и нецентральности поля планеты. *Космические исследования*. 1974. Т. 12. Вып. 2. С. 155–170.

- Лидов М. Л.* Полуаналитические методы расчета движения спутников. Труды Института теоретической астрономии. 1978. Т. 17. С. 54–61.
- Моисеев Н. Д.* О некоторых основных упрощенных схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трех точек. 2. Об осредненных вариантах пространственной ограниченной круговой проблемы трех точек. Труды ГАИШ. 1945. Т. 15. С. 100–117.
- Никончук Д. В.* Нелинейная теория вековых возмущений спутников сжатой планеты. Письма в *Астрономический журнал*. 2012. Т. 38. № 12. С. 904–920.
- Орлов А. А.* Приближенное аналитическое представление пространственных движений в задаче Хилла. *Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР*. 1965. Т. 10. № 5(118). С. 360–378.
- Уральская В. С.* Динамика спутников планет в Солнечной системе. *Астрономический вестник*. 2003. Т. 37. № 5. С. 371–399.
- Шараф Ш. Г., Будникова Н. А.* О вековых изменениях элементов орбиты Земли, влияющих на климаты геологического прошлого. *Бюллетень ИТА АН СССР*. 1967. Т. 11. № 4. С. 231.
- Valuev R. V., Kholshchikov K. V.* Distance between two arbitrary unperturbed orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2005. V. 91. P. 287–300.
- Beauge C., Nesvorný D., Dones L.* A High-Order Analytical Model for the Secular Dynamics of Irregular Satellites. *Astronomical Journal*. 2006. V. 131. Issue 4. P. 2299–2313.
- Beauge C., Nesvorný D.* Proper Elements and Secular Resonances for Irregular Satellites. *Astronomical Journal*. 2007. V. 133. Issue 6. P. 2537–2558.
- Bretagnon P., Francou G.* Planetary theories in rectangular and spherical variables – VSOP 87 solutions. *Astronomy and Astrophysics*. 1988. V. 202. P. 309–315.
- Brozovic M., Jacobson R. A.* The Orbits of Jupiter’s Irregular Satellites. *Astronomical Journal*. 2017. V. 153. Article id. 147, 10 pp.

- Burns J. A., Carruba V., Nesvorny D., Cuk M., Tsiganis K.* Chaos and Effects of Planetary Migration for the Saturnian Satellite Kiviuq. American Astronomical Society, DDA meeting № 35, № 07.06. 2004. Bulletin of the American Astronomical Society. V. 36. P. 860–860.
- Correa Otto J., Leiva A. M., Giuppone C. A., Beauge C.* Mapping the  $\nu_{solar}$  secular resonance for retrograde irregular satellites. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2010. V. 402. Issue 3. P. 1959–1968.
- Cuk M., Burns J. A.* On the Secular Behavior of Irregular Satellites. Astronomical Journal. 2004. V. 128. P. 2518–2541.
- Cuk M., Gladman B. J.* Irregular satellite capture during planetary resonance passage. Icarus. 2006. V. 183. P. 362–372.
- de Oliveira D. S., Winter O. C., Neto E. V., de Felipe G.* Irregular Satellites of Jupiter: a study of the capture direction. Earth, Moon, and Planets. 2007. V. 100. № 3–4. P. 233–239.
- Emelyanov N. V.* Ephemerides of the outer Jovian satellites. Astronomy and Astrophysics. 2005. V. 435. P. 1173–1179.
- Emel'yanov N. V., Arlot J.-E.* The natural satellites ephemerides facility MULTI-SAT. Astronomy and Astrophysics. 2008. V. 487. P. 759–765.
- Emelyanov N.V.* Precision of the ephemerides of outer planetary satellites. Planetary and Space Science. 2010. V. 58. P. 411–420.
- Frouard J., Fouchard M., Vienne, A.* Chaoticity of the Jovian Irregular Satellites. American Astronomical Society. 2009. DPS meeting № 41, № 38.08.
- Frouard J., Fouchard M., Vienne, A.* The Long-term Evolution of the Jovian Irregular Satellites. American Astronomical Society. 2010. DDA meeting № 41, № 9.11. Bulletin of the American Astronomical Society. V. 41. P. 936–936.
- Gaspar H. S., Winter O. C., Vieira Neto E.* Irregular satellites of Jupiter: Capture configurations of binary-asteroids. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2011. V. 415. P. 1999–2008.
- Grav T., Bauer J.* A deeper look at the colors of the saturnian irregular satellites. Icarus. 2007. V. 191. P. 267–285.

- Haghighipour N., Jewitt D.* Stability of Jovian Irregular Satellites Between Callisto and Themisto. American Astronomical Society. 2006. DPS meeting № 38, № 64.09. Bulletin of the American Astronomical Society. 2006. V. 38. P. 613–613.
- Hinse T. C., Christou A. A., Alvarellos J. L. A., Gozdziewski K.* Application of the MEGNO technique to the dynamics of Jovian irregular satellites. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2010. V. 404. P. 837–857.
- Jewitt D., Haghighipour N.* Irregular Satellites of the Planets: Products of Capture in the Early Solar System. Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 2007. V. 45. № 1. P. 261–295.
- Kovalevsky J.* Sur la theorie du mouvement d'un satellite a fortes inclinaison et excentricite. 1964. The Theory of Orbits in the Solar System and in Stellar Systems. Proceedings from Symposium no. 25 held in Thessaloniki, August 17–22, 1964. Edited by Georgios Ioannou Kontopoulos. International Astronomical Union. Symposium no. 25, Academic Press, London, p. 326.
- Kozai Y.* Secular perturbations of asteroids with the high inclination and eccentricities. Astronomical Journal. 1962. V. 67. P. 591–598.
- Kinoshita H., Nakai H.* Analytical Solution of the Kozai Resonance and its Application. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1999. V. 75. Issue 2. P. 125–147.
- Lidov M. L.* The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. Planetary and Space Science. 1962. V. 9. P. 719–759.
- Lidov M. L.* On the approximated analysis of the orbit evolution of artificial satellites. In M. Roy (ed.) «Dynamics of satellites». 1963. Symposium Paris. May 28–30. 1962. Springer-Verlag. Berlin. P. 168–179.
- Ma Y., Zheng J., Shen X.* On the Origin of Retrograde Orbit Satellites around Saturn and Jupiter. 2009. Icy Bodies of the Solar System. Proceedings of the Int. Astron. Union. IAU Symposium. 2009. V. 263. P. 157–160.
- Marsden B.G.* Central Bureau for Astronomical Telegrams. 1998. No. 6869, 6870.

- McGleam C., Hamilton D. P., Agnor C. B.* Three-Body Capture of Irregular Satellites. American Astronomical Society. 2007. DDA meeting № 38, № 3.01.
- Mignard, F.* The mean elements of Nereid. *Astronomical Journal*. 1981. V. 86. P. 1728–1729.
- Nesvorny D., Alvarellos J. L. A., Dones L., Levison H. E.* Orbital and Collisional Evolution of the Irregular Satellites. *Astronomical Journal*. 2003. V. 126. P. 398–429.
- Nesvorny D., Vokrouhlicky D., Morbidelli A.* Capture Of Irregular Satellites During Planetary Encounters. American Astronomical Society. 2007a, DPS meeting № 39, № 32.11. *Bulletin of the American Astronomical Society*. V. 39. P. 475.
- Nesvorny D., Vokrouhlicky D., Morbidelli A.* Capture of Irregular Satellites during Planetary Encounters. *Astronomical Journal*. 2007b. V. 133. P. 1962–1976.
- Orlov A. A.* Luni-solar perturbations in the moving of the artificial Earth satellites. (In Proc. of 15th Intern. Congr. on Astronaut. Paris: Gautier-Villard). Warszawa: PWN-Polish Sci. Publ. 1965. V. 1. P. 141–157.
- Philpott C. M., Hamilton D. P., Agnor C. B.* Three-body capture of irregular satellites: Application to Jupiter. *Icarus*. 2010. V. 208. № 2. P. 824–836.
- Shevchenko I. I.* The Lidov – Kozai Effect – Applications in Exoplanet Research and Dynamical Astronomy. *Astrophysics and Space Science Library*. 2017. V. 441. ISBN 978-3-319-43520-6. Springer International Publishing Switzerland, 2017.
- Tsirogiannis G. A., Perdios E. A., Markellos V. V.* Improved grid search method: an efficient tool for global computation of periodic orbits. Application to Hill's problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2009. V. 103. № 1, P. 49–78.