

**Кафедра небесной механики, астрометрии и гравиметрии
физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.**

Специальный практикум по небесной механике.

Задача № 2.

Лукьянов Л.Г.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ
И КАЛЕНДАРНЫХ ДАТ ОТПРАВЛЕНИЯ И
ВОЗВРАЩЕНИЯ ЭКСПЕДИЦИИ К ПЛАНЕТЕ**

Содержание

- 2.1.1. Постановка задачи.
- 2.1.2. Характеристическая скорость.
- 2.1.3. Метод склеивания траекторий.
- 2.1.4. Гомановский перелет.
- 2.1.5. Выход из сферы действия планеты.
- 2.2.1. Вычисление энергетических затрат.
- 2.2.2. Радиус сферы действия планеты.
- 2.2.3. Движение вне сферы действия планеты.
- 2.2.4. Движение внутри сферы действия планеты.
- 2.3. Календарные даты старта и возвращения.
- 2.4. Численное интегрирование уравнений движения.

2.1.1. Постановка задачи

Для выполнения *маневров* на борту *космического аппарата* устанавливается ракетный двигатель, позволяющий создавать реактивную силу, определенной величины и направления. С помощью соответствующим образом выбранных маневров можно осуществить *перелет* космического аппарата из окрестности Земли к заранее выбранной планете Солнечной системы. По величине создаваемой двигателем реактивной силы различаются двигатели малой и большой тяги. Далее ограничимся использованием только двигателей большой тяги.

2.1.2. Характеристическая скорость

Для двигателей большой тяги (ЖРД - жидкостные реактивные двигатели или РДТТ - реактивные двигатели твердого топлива) при осуществлении маневров на орбите время работы двигателя является малой величиной по сравнению с временем перелета к планете. Поэтому вводится понятие *импульсного* маневра, при выполнении которого считается, что изменение скорости движения аппарата происходит мгновенно. Скорость движения аппарата $\vec{V}$ при этом изменяется скачком на некоторую конечную величину $\Delta\vec{V}$, называемую *импульсом скорости*.

Для оценки величины импульса скорости, создаваемого реактивным двигателем, рассмотрим уравнения движения ракеты в виде

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{w} \frac{dm}{dt} + \vec{F}, \quad (1)$$

где m — масса ракеты, $\vec{w}$ — относительная скорость истечения "рабочего тела" из сопла двигателя, $\vec{F}$ — равнодействующая внешних сил.

Если положить $\vec{F} = 0$, т.е. рассмотреть движение ракеты в бессиловом поле и, кроме того, считать скорость истечения постоянной $\vec{w} = \text{const}$ и всегда направленной параллельно скорости движения ракеты $\vec{V}$, то уравнение (1) легко интегрируется разделением переменных:

$$\Delta\vec{V} = \vec{V} - \vec{V}_0 = \vec{w} \ln \frac{m}{m_0}. \quad (2)$$

Уравнение (2) называют *формулой Циолковского*. Эта формула связывает изменение скорости космического аппарата с изменением

его массы и, тем самым, определяет импульс скорости $\Delta \vec{V}$ в зависимости от массы выгоревшего топлива $\Delta m = m_0 - m$ при заданной в качестве характеристики двигателя относительной скорости истечения массы $\vec{w}$. Несмотря на весьма грубое предположение $\vec{F} = 0$, формула Циолковского дает достаточно хороший результат в случае малого интервала времени работы двигателя, так как остается малым интеграл $\int_{t_0}^t |\vec{F}| dt$. Поэтому при проектировании космических аппаратов эта формула широко используется. Приращение скорости, определяемое формулой Циолковского, называют *характеристической скоростью*. Эта формула определяет такую величину скорости, которую приобрел бы космический аппарат при отсутствии потерь от многочисленных возмущающих факторов.

2.1.3. Метод склеивания траекторий

Аналитическое определение траектории *межпланетного перелета* является одной из самых трудных задач небесной механики, так как метод малого параметра (основной метод теории возмущений) здесь не применим ввиду отсутствия такого параметра. Поэтому для приближенного определения траектории межпланетного перелета используется метод *склеивания* траекторий задачи двух тел. А именно, около каждой планеты определяется некоторая область, называемая *сферой действия* планеты, внутри которой движение космического аппарата рассчитывается по задаче двух тел "планета - космический аппарат", а вне сферы действия — по другой задаче двух тел "Солнце - космический аппарат". Поэтому внутри сферы действия космический аппарат движется по планетоцентрической гиперболической траектории, а вне сферы действия — по гелиоцентрической эллиптической. Вся траектория состоит из трех "склеенных" частей: двух внутри сфер действия обеих планет и одной вне этих сфер.

Размеры сфер действия планет малы по сравнению с межпланетными расстояниями, поэтому протяженность траектории движения космического аппарата внутри сферы действия планеты весьма мала по сравнению с протяженностью всей траектории перелета.

Это дает возможность использовать следующую приближенную схему перелета. Весь полет по планетоцентрическим орбитам внутри сфер действия планет отправления и назначения считать происходящим мгновенно (за ничтожно малое время) с мгновенным изменением

скорости аппарата до ее значения $\vec{V}_1$ (или $\vec{V}_2$), вычисленного на границе сферы действия при планетоцентрическом движении аппарата. А всю сферу действия планеты условно считать точечной, расположенной в центре планеты. Вся траектория перелета тогда будет слагаться из двух мгновенных импульсных перелетов по планетоцентрическим орбитам и движения космического аппарата по эллиптической гелиоцентрической орбите, начинающейся в центре планеты отправления с начальной скоростью $\vec{V}_1$ и заканчивающейся в центре планеты назначения с аналогичным образом рассчитанной скоростью $\vec{V}_2$. Величины скоростей $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ определяются в следующем параграфе.

2.1.4. Гомановский перелет

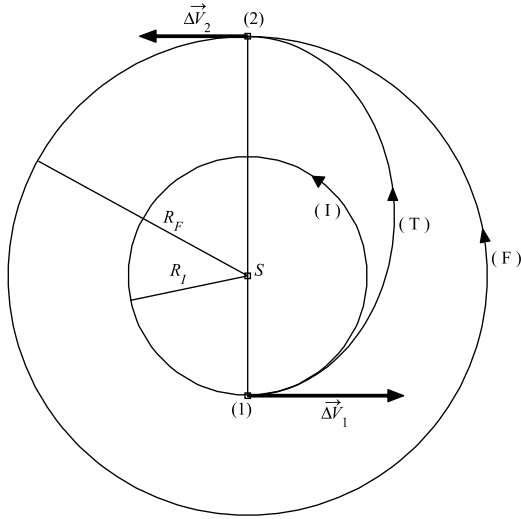
Движение вне сфер действия планет определяется траекторией оптимального двух-импульсного перелета с одной круговой орбиты на другую, а именно, с орбиты *отправления* на орбиту *назначения*. Такой двух-импульсный перелет называют *гомановским* в честь Гомана, предложившего его в 1924 г. для осуществления межпланетных перелетов космических кораблей.

При осуществлении гомановского перелета сначала в некоторой точке (1) начальной круговой орбиты (I) с помощью мгновенно отработавшего двигателя космический аппарат приобретает первый импульс скорости $\Delta\vec{V}_1$, направленный по касательной к орбите, и переходит на эллиптическую орбиту (T) с перицентром, совпадающим с точкой подачи первого импульса скорости. Величина импульса скорости выбирается такой, чтобы в апоцентре (2) эллиптическая орбита (T) соприкасалась с круговой орбитой планеты назначения (F), где подается второй импульс скорости $\Delta\vec{V}_2$ (второе включение двигателя) также по касательной к орбите. Величина второго импульса скорости выбирается равной разности между местной круговой скоростью и скоростью аппарата в апоцентре эллиптической орбиты. В результате аппарат оказывается на круговой орбите назначения.

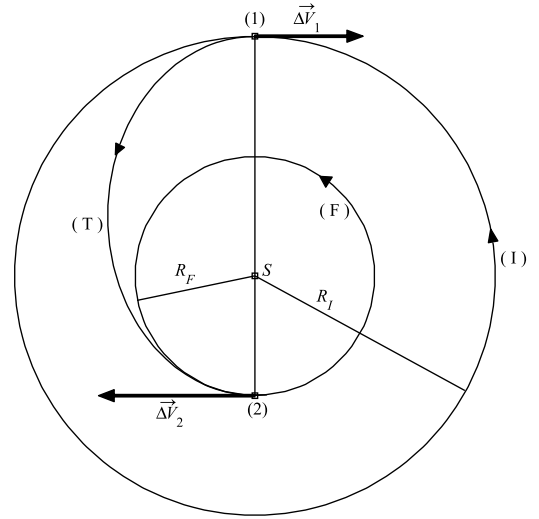
Скорости движения аппарата в начальной $\vec{V}_1$ и конечной $\vec{V}_2$ точках гомановской орбиты определяются значениями

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_I + \Delta\vec{V}_1, \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_F + \Delta\vec{V}_2, \quad (3)$$

где $\vec{V}_I$ и $\vec{V}_F$ — орбитальные скорости гелиоцентрического движения планет отправления и назначения соответственно.



(a) Перелет на внешнюю орбиту



(b) Перелет на внутреннюю орбиту

Рис. 1: Схема гомановского перелета. Обозначения: (I) — круговая орбита планеты отправления, (F) — круговая орбита планеты назначения, (T) — эллиптическая орбита гомановского перелета с начальной (I) на конечную орбиту (F) , R_I — гелиоцентрический радиус орбиты отправления, R_F — гелиоцентрический радиус орбиты назначения, S — Солнце, (1) и (2) — начальная и конечная точки осуществления гомановского перелета, $\Delta\vec{V}_1$ и $\Delta\vec{V}_2$ — соответственно первый и второй импульсы скорости, необходимые для гомановского перелета.

Строго показано, что гомановский перелет является оптимальным среди всех двухимпульсных перелетов, т. е. для его осуществления требуется минимально возможное количество топлива. Но, энергетические затраты можно уменьшить, если осуществлять трехимпульсный перелет. Далее ограничимся рассмотрением только гомановского перелета. Схема гомановского перелета космического аппарата изображена на рис. 1.

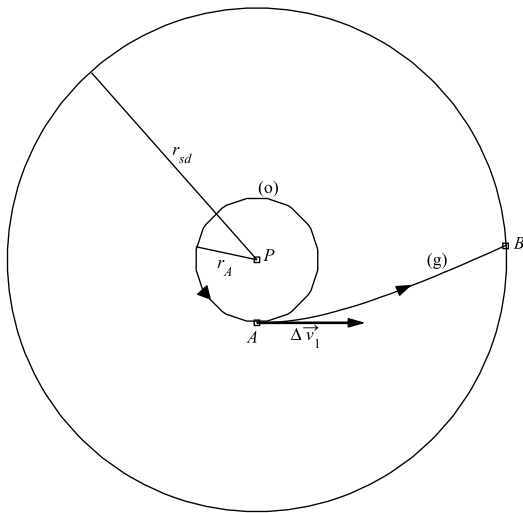
2.1.5. Выход из сферы действия планеты

Внутри сферы действия планеты движение космического аппарата определяется задачей двух тел "планета - космический аппарат". Траекторией движения здесь является планетоцентрическая гипербола. Будем считать, что космический аппарат уже выведен на круговую орбиту искусственного спутника планеты отправления. Мгновенный переход на гиперболическую орбиту осуществляется приложением в некоторой точке исходной круговой орбиты космического аппарата импульса скорости $\Delta\vec{v}_1$. Величина этого импульса подбирается такой, чтобы при достижении сферы действия планеты гелиоцентрическая скорость космического аппарата оказалась равной скорости движения по гомановской орбите $\vec{V}_1$ в точке 1. Аналогично по величине скорости $\vec{V}_2$ определяется второй импульс скорости $\Delta\vec{v}_2$. На рис. 2 изображен общий вид гиперболической траектории внутри сферы действия планеты, иллюстрирующей "склеивание" планетоцентрических орбит вблизи планет отправления и назначения с орбитой гомановского перелета.

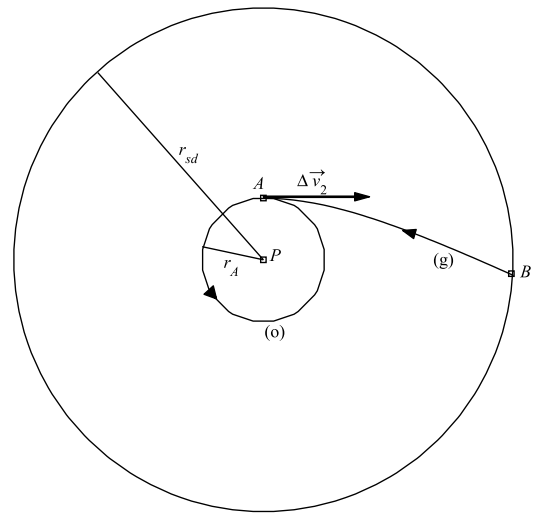
2.2.1. Вычисление энергетических затрат

Для определения энергетических затрат, т.е. суммарной характеристической скорости $|\Delta\vec{v}_\Sigma| = |\Delta\vec{v}_1| + |\Delta\vec{v}_2|$, необходимой для осуществления перелета с круговой орбиты искусственного спутника одной планеты на круговую орбиту искусственного спутника другой планеты, нужно:

- определить радиусы сфер действия планет,
- вычислить начальную V_1 (в точке 1) и конечную V_2 (в точке 2) скорости, необходимые для осуществления гомановского перелета,
- вычислить импульсы скорости $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$, необходимые для осу-



(a) Отлет с круговой орбиты



(b) Прилет на круговую орбиту

Рис. 2: Траектория полета внутри сферы действия планеты. Обозначения: (o) — круговая орбита искусственного спутника планеты, (g) — гиперболическая орбита внутри сферы действия, A — точка подачи импульса скорости, B — точка орбиты, лежащая на сфере действия.

ществления гиперболического планетоцентрического движения с орбиты (или на орбиту) искусственного спутника планеты до сферы действия планеты, т.е. произвести "склеивание" планетоцентрической гиперболической орбиты, расположенной внутри сферы действия, с гелиоцентрической эллиптической гомановской орбитой, расположенной вне сферы действия.

2.2.2. Радиус сферы действия планеты

Для определения радиуса сферы действия планеты рассмотрим уравнения движения в абсолютной системе координат задачи трех тел: Солнца, планеты и космического аппарата. Учитывая, что масса космического аппарата m ничтожно мала по сравнению с массами планеты m_P и Солнца m_0 , в уравнениях движения можно пренебречь силами притяжения Солнца и планеты космическим аппаратом, т.е. рассматривать ограниченную задачу трех тел. Тогда система дифференциальных уравнений абсолютного движения указанной огра-

ниченной задачи трех тел принимает вид

$$\begin{aligned}
m_0 \ddot{\vec{\rho}}_0 &= f m_0 m_P \frac{\vec{\rho}_P - \vec{\rho}_0}{R_P^3} = f m_0 m_P \frac{\vec{R}_P}{R_P^3}, \\
m_P \ddot{\vec{\rho}}_P &= -f m_0 m_P \frac{\vec{\rho}_P - \vec{\rho}_0}{R_P^3} = -f m_0 m_P \frac{\vec{R}_P}{R_P^3}, \\
m \ddot{\vec{\rho}} &= f m_0 m \frac{\vec{\rho}_0 - \vec{\rho}}{R^3} + f m_P m \frac{\vec{\rho}_P - \vec{\rho}}{r^3} = -f m_0 m \frac{\vec{R}}{R^3} - f m_P m \frac{\vec{r}}{r^3},
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\vec{\rho}_0, \vec{\rho}_P, \vec{\rho}$ — радиусы-векторы Солнца, планеты и космического аппарата в абсолютной системе координат, $\vec{R}_P, \vec{R}$ — гелиоцентрические радиусы-векторы планеты и космического аппарата, $\vec{r}$ — планетоцентрический радиус космического аппарата (см. рис. 3).

Вычитанием первого уравнения системы (4), умноженного на $1/m_0$, из третьего, умноженного на $1/m$, получается уравнение относительного гелиоцентрического движения космического аппарата

$$\ddot{\vec{R}} + \mu_0 \frac{\vec{R}}{R^3} = \mu_P \left(\frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right), \tag{5}$$

а вычитанием второго уравнения системы (4), умноженного на $1/m_P$, из третьего, умноженного на $1/m$, — уравнение относительного планетоцентрического движения космического аппарата

$$\ddot{\vec{r}} + \mu_P \frac{\vec{r}}{r^3} = \mu_0 \left(\frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{R}}{R^3} \right). \tag{6}$$

Центральным телом в уравнении (5) является Солнце, а возмущающим — планета. В уравнении (6), наоборот, центральным телом является планета, а возмущающим — Солнце. Абсолютные величины центрального G_0 и возмущающего F_0 ускорений, действующих на космический аппарат в гелиоцентрическом движении, имеют значения

$$G_0 = \frac{\mu_0}{R^2}, \quad F_0 = \mu_P \left| \frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right|, \tag{7}$$

а аналогичные абсолютные величины центрального G_P и возмущающего F_P ускорений в планетоцентрическом движении — значения

$$G_P = \frac{\mu_P}{r^2}, \quad F_P = \mu_0 \left| \frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{R}}{R^3} \right|. \tag{8}$$

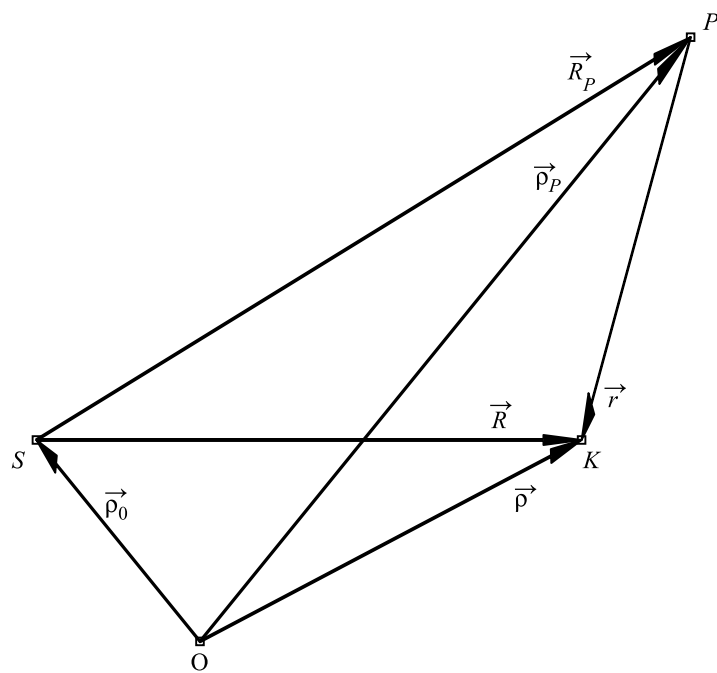


Рис. 3: Используемые радиусы-векторы. Обозначения: O — начало абсолютной системы координат, S — Солнце, P — планета, K — космический аппарат.

Сферой действия планеты называется область вокруг планеты, внутри которой отношение модуля возмущающего ускорения F к центральному G в планетоцентрическом движении не превосходит аналогичного отношения в гелиоцентрическом движении, т.е. сфера действия определяется неравенством

$$\frac{F_0}{G_0} \geq \frac{F_P}{G_P}. \quad (9)$$

Граница сферы действия получается из (9) заменой знака неравенства на знак равенства. Уравнение сферы действия планеты можно упростить, если величины G_0 , G_P , F_0 , F_P выразить через μ_0 , μ_P , r , R_P . При этом делают упрощающие предположения, приближенно выполняющиеся на сфере действия:

$$\vec{R} \approx \vec{R}_P, \quad \frac{r}{R_P} = \varepsilon, \quad (10)$$

где ε — малая величина. Тогда величины G_0 , G_P , F_0 , F_P можно записать

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{\mu_0}{R^2} \approx \frac{\mu_0}{R_P^2}, \quad G_P = \frac{\mu_P}{r^2}, \quad F_0 = \mu_P \left| \frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right| \approx \frac{\mu_P}{r^2}, \\ F_P &= \mu_0 \left| \frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{R} + \vec{r}}{(R_P + r)^3} \right| \approx \mu_0 \left| 0 - \frac{\vec{r}}{(R_P + r)^3} \right| \approx \frac{\mu_0 r}{R_P^3}, \end{aligned} \quad (11)$$

а уравнение сферы действия примет вид

$$\frac{\frac{\mu_P}{r^2}}{\frac{\mu_0}{R_P^2}} = \frac{\frac{\mu_0 r}{R_P^3}}{r^2}. \quad (12)$$

После преобразования отсюда получается радиус сферы действия планеты (обозначенный через r_{sd}) в виде выражения, известного как "закон двух пятых":

$$r_{sd} = R_P \left(\frac{\mu_P}{\mu_0} \right)^{2/5}. \quad (13)$$

Числовые значения радиусов сфер действия планет Солнечной системы приведены в таблице 1.

2.2.3. Движение вне сферы действия планеты

Интеграл энергии для эллиптического движения космического ап-

Планета	r_{sd} $10^6 \cdot \text{км}$	μ_P $\text{км}^3/\text{с}^2$	R_P $10^6 \cdot \text{км}$	n_P гр./сут
Солнце	∞	132712439940	–	
Меркурий	0.11178	22032.080	57.909	4.092
Венера	0.61696	324858.599	108.209	1.602
Земля	0.92482	398600.433	149.598	0.986
Марс	0.57763	42828.314	227.941	0.524
Юпитер	48.141	126712767.858	778.293	0.083
Сатурн	54.774	37940626.061	1429.371	0.034
Уран	51.755	5794549.007	2874.995	0.012
Нептун	86.952	6836534.064	4504.346	0.006
Плутон	35.812	981.601	5911.775	0.004
Луна		4902.801	0.3844	

Планета	V_P км/с	r_P км	$(\lambda_P)_0$ град
Солнце	–	695992	–
Меркурий	47.87	2415	252.2509
Венера	35.02	6035	181.9798
Земля	29.79	6374	100.4664
Марс	24.13	3285	355.4330
Юпитер	13.06	69830	34.3515
Сатурн	9.66	57500	50.0774
Уран	6.80	24150	314.0550
Нептун	5.44	2900	304.3487
Плутон	4.74	6500	
Луна		1738	

Таблица 1: Используемые постоянные Солнца, планет и Луны. Для Луны приведены постоянные, связанные с Землей. Средняя долгота $(\lambda_P)_0$ определена в эпоху $t_0 = J2000.0$, ($JD = 2451545.0$).

парата по гомановской перелетной орбите записывается в виде

$$V^2 - \frac{2\mu_0}{R} = -\frac{\mu_0}{a_T}, \quad (14)$$

где V — гелиоцентрическая скорость движения космического аппарата, R — его гелиоцентрический радиус, $a_T = (R_I + R_F)/2$ — большая полуось гомановской перелетной орбиты, R_I — радиус начальной орбиты, R_F — радиус конечной орбиты $\mu_0 = f \cdot m_0$, f — универсальная гравитационная постоянная, m_0 — масса Солнца (см. также рис. 1).

Из формулы (14) определяются скорости движения космического аппарата в перигелии V_π и афелии V_α орбиты

$$V_\pi = \sqrt{\frac{2\mu_0}{R_I} - \frac{\mu_0}{a_T}}, \quad V_\alpha = \sqrt{\frac{2\mu_0}{R_F} - \frac{\mu_0}{a_T}}. \quad (15)$$

При перелете от Земли E к планете P индексы в этих формулах следует положить $I = E$ и $F = P$, а при перелете в обратном направлении, наоборот, $I = P$ и $F = E$. Для перелета на внешнюю орбиту скорость в перигелии V_π определяет скорость $V_1 = V_\pi$, а в афелии $V_2 = V_\alpha$. При перелете на внутреннюю орбиту, наоборот: $V_1 = V_\alpha$ и $V_2 = V_\pi$.

Время τ перелета по гомановскому полу-эллипсу равно

$$\tau = \frac{\pi}{n_T}, \quad n_T = \sqrt{\frac{\mu_0}{a_T^{3/2}}}, \quad (16)$$

где n_T — среднее движение по гомановской орбите.

2.2.4. Движение внутри сферы действия планеты

Интеграл энергии уравнений движения внутри сферы действия планеты записывается в виде

$$v_A^2 - \frac{2\mu_P}{r_A} = v_B^2 - \frac{2\mu_P}{r_B}, \quad (17)$$

где $r_A = r_P + H$ — планетоцентрический радиус начальной круговой орбиты космического аппарата, r_P — средний радиус поверхности планеты, H — высота круговой орбиты космического аппарата над поверхностью планеты, $r_B = r_{sd}$ — радиус сферы действия планеты, $v_A = \sqrt{\mu_P/r_A} + \Delta v_1$ — планетоцентрическая скорость движения

аппарата в момент его схода с начальной круговой орбиты, $\sqrt{\mu_P/r_A}$ — круговая скорость на начальной орбите искусственного спутника планеты, Δv_1 — первый импульс скорости, создаваемый двигателем, v_B — планетоцентрическая скорость движения аппарата в момент достижения им сферы действия планеты, $\mu_P = f m_P$ — гравитационный параметр планеты, m_P — масса планеты. Обозначения некоторых величин приведены также на рис. 2.

Планетоцентрическая скорость v_B определяется по уже найденной скорости в перигелии (или афелии) гомановской орбиты $V_B = V_\pi$ (или $V_B = V_\alpha$) и орбитальной скорости движения планеты V_P :

$$v_B = V_B - V_P, \quad (18)$$

где $V_P = \sqrt{(\mu_0 + \mu_P)/R_P}$ — переносная скорость движения планеты относительно Солнца.

Полагая $P = E$, из формул (17) и (18) определяется величина первого импульса скорости Δv_1 , обеспечивающего переход с круговой орбиты искусственного спутника Земли на гиперболическую перелетную орбиту,

$$\Delta v_1 = v_A - \sqrt{\frac{\mu_E}{r_E + H}} = \sqrt{\frac{2\mu_E}{r_E + H} + (V_B - V_E)^2} - \frac{2\mu_E}{r_B} - \sqrt{\frac{\mu_E}{r_E + H}}, \quad (19)$$

где $V_B = V_\pi$ при полете к внешней планете, и $V_B = V_\alpha$ — при полете к внутренней планете, $V_E = \sqrt{(\mu_0 + \mu_E)/R_E}$.

Таким же путем определяется и второй импульс скорости Δv_2 , обеспечивающий перелет с гиперболической орбиты в сфере действия планеты назначения на круговую орбиту искусственного спутника этой планеты:

$$\Delta v_2 = v_A - \sqrt{\frac{\mu_P}{r_P + H}} = \sqrt{\frac{2\mu_P}{r_P + H} + (V_B - V_P)^2} - \frac{2\mu_P}{r_B} - \sqrt{\frac{\mu_P}{r_P + H}}, \quad (20)$$

где $V_B = V_\alpha$ для внешней планеты, и $V_B = V_\pi$ для внутренней планеты.

Суммарная характеристическая скорость, необходимая для осуществления перелета "планета отправления — планета назначения" оказывается равной

$$\Delta v_\Sigma = \Delta v_1 + \Delta v_2, \quad (21)$$

а характеристическая скорость, требующаяся для всей миссии (с учетом перелета в обратном направлении) просто удвоится — $2\Delta v_{\Sigma}$.

2.3. Календарные даты старта и возвращения

При осуществлении перелета к планете назначения дату старта нужно выбирать таким образом, чтобы в момент попадания космического аппарата на орбиту планеты назначения (точка 2 на рис. 1) сама планета P также оказалась в этой точке. Для этого в момент старта космического аппарата планета назначения должна находиться на некотором вполне определенном угловом расстоянии $\Delta\lambda$ по долготе от планеты отправления, опережая ее (при перелете к внешней планете) или отставая (при полете к внутренней планете), как это изображено на рис. 4. Зная время гомановского перелета τ от точки 1 до точки 2, величину $\Delta\lambda$ можно вычислить по формуле

$$\Delta\lambda = \pm(\pi - n_F\tau), \quad (22)$$

где верхний знак перед скобкой берется при перелете на внешнюю (по отношению к орбите отправления) орбиту, а нижний — при перелете на внутреннюю орбиту, $n_F = \sqrt{\mu_0 + \mu_P}/R_P^{3/2}$ — среднее движение планеты назначения.

Средние долготы планеты отправления λ_I и планеты назначения λ_F можно определить по формулам

$$\lambda_I = (\lambda_I)_0 + n_I(t - t_0), \quad \lambda_F = (\lambda_F)_0 + n_F(t - t_0), \quad (23)$$

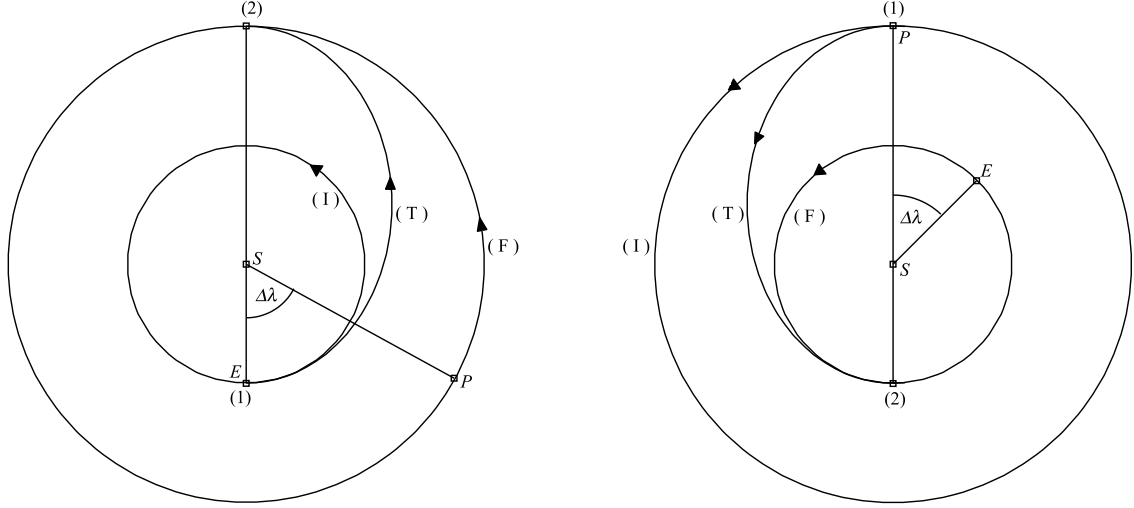
где $(\lambda_I)_0$ и $(\lambda_F)_0$ — значения средних долгот в начальную эпоху t_0 планет отправления и назначения соответственно, n_I и n_F — средние движения этих планет вокруг Солнца.

Составляя разность

$$\lambda_F - \lambda_I = (\lambda_F)_0 - (\lambda_I)_0 + (n_F - n_I)(t - t_0), \quad (24)$$

и приравнивая ее величине $\Delta\lambda + 2j\pi$, ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), получаем уравнение для определения всех возможных моментов старта t_{st1} космического аппарата с орбиты отправления в виде

$$t_{st1} = t_0 + \frac{\Delta\lambda - \lambda_F + \lambda_I}{n_F - n_I} + \frac{2j\pi}{n_F - n_I}, \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (25)$$



(a) Перелет на внешнюю орбиту

(b) Перелет на внутреннюю орбиту

Рис. 4: Схема необходимого взаимного расположения планеты отправления E и планеты назначения P в момент старта космического аппарата.

где величина $\tau_{EP} = 2\pi/(n_F - n_I)$ определяет период повторяемости взаимных расположений планет, сохраняющих разность средних долгот, равной $\Delta\lambda$.

Знание величины $\Delta\lambda$ при возвращении космического аппарата на Землю позволяет вычислить время ожидания ближайшего благоприятного момента t_{st2} для старта с орбиты планеты. Для этого нужно воспользоваться формулой (25), определяя в ней минимальное значение величины j , удовлетворяющей неравенству $t_{st2} > t_{st1} + j\tau_{EP}$.

2.4. Численное интегрирование уравнений движения

Для оценки точности проведенных вычислений траектории движения космического аппарата с использованием сфер действия планет можно провести численное интегрирование следующих уравнений гелиоцентрического движения аппарата

$$\ddot{\vec{R}} + \mu_0 \frac{\vec{R}}{R^3} = \mu_E \left(\frac{\vec{R}_E}{R_E^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right) + \mu_P \left(\frac{\vec{R}_P}{R_P^3} - \frac{\vec{r}_P}{r_P^3} \right), \quad (26)$$

где $\vec{R} = \vec{R}_E + \vec{r} = \vec{R}_P + \vec{r}_P = \{X, Y\}$, $\vec{r} = \{x, y\}$ и $\vec{r}_P = \{x_P, y_P\}$

— соответственно гелиоцентрические, геоцентрические и планетоцентрические координаты космического аппарата, индекс E определяет параметры Земли, а P — планеты.

Радиусы-векторы планет

$$\vec{R}_E = \{X_E, Y_E\}, \quad \vec{R}_P = \{X_P, Y_P\}, \quad (27)$$

считаются известными, их координаты определяются по формулам

$$\begin{aligned} X_E &= R_E \cos(\lambda_E), & Y_E &= R_E \sin(\lambda_E), \\ X_P &= R_P \cos(\lambda_P), & Y_P &= R_P \sin(\lambda_P), \end{aligned} \quad (28)$$

где средние долготы планет задаются равенствами

$$\lambda_E = (\lambda_E)_0 + n_E(t - t_0), \quad \lambda_P = (\lambda_P)_0 + n_P(t - t_0), \quad (29)$$

а $(\lambda_E)_0$ и $(\lambda_P)_0$ — средние долготы планет в начальную эпоху $t_0 = J2000.0$ ($JD = 2451545.0$).

Уравнения (26) тогда можно записать в скалярной форме

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \mu_0 \frac{X}{R^3} &= \mu_E \left(\frac{X_E}{R_E^3} - \frac{x}{r^3} \right) + \mu_P \left(\frac{X_P}{R_P^3} - \frac{x_P}{r_P^3} \right), \\ \ddot{Y} + \mu_0 \frac{Y}{R^3} &= \mu_E \left(\frac{Y_E}{R_E^3} - \frac{y}{r^3} \right) + \mu_P \left(\frac{Y_P}{R_P^3} - \frac{y_P}{r_P^3} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

Систему уравнений (30) необходимо проинтегрировать численно с начальными условиями при $t = t_i = t_{st1}$ и $\lambda = \lambda_i = \lambda(t_i)$:

$$\begin{aligned} X_i &= (X_E)_i + x_i = R_E \cos \lambda_i + r \cos \lambda_i, & Y_i &= R_E \sin \lambda_i + r \sin \lambda_i, \\ \dot{X}_i &= -R_E n_E \sin \lambda_i - r n_E \sin \lambda_i - \Delta v_1 \sin \lambda_i, \\ \dot{Y}_i &= R_E n_E \cos \lambda_i + r n_E \cos \lambda_i + \Delta v_1 \cos \lambda_i. \end{aligned} \quad (31)$$

Численным интегрированием необходимо получить значения координат и скоростей в момент времени $t_k = t_i + \tau$ и сравнить их с координатами и скоростями, полученными при гомановском перелете и вычислить значение импульса скорости Δv_1 .

Литература

1. Эскобал П. Методы астродинамики. М. Изд. Мир. 1971.
2. Суханов А.А. Астродинамика. М. Ротапринт ИКИ РАН. 2009.
3. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н.Дубошина. М. Наука. 1976.
4. Сайт отдела небесной механики ГАИШ:
<http://lnfm1.sai.msu.ru/neb/rw/cmd-cont.htm>