Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, Физический факультет
Кафедра небесной механики, астрометрии и гравиметрии

Специальный практикум по небесной механике

Задача №11

Черный Д.М.*, Емельянов Н.В.

ХАОТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ЗАДАЧЕ ТРЁХ ТЕЛ

* Задача и текст подготовлены студентом 5 курса Черным Д.М. в 2026 году.

Содержание

1 Введение

1.1 Теория хаоса

1.1.1 Классический детерминизм

Согласно ньютоновскому детерминизму, если мы знаем уравнения движения и начальные условия, то мы можем абсолютно точно вычислить как прошлое, так и будущее. Н о в XX веке было показано, что это не так. Во-первых, квантовые системы оказались абсолютно недетерминированными, то есть они описываются вероятностными процессами. Во-вторых, в 1960-х годах были обнаружены классические системы, которые, несмотря на то, что они находились первоначально в близких состояниях, могут в итоге оказаться в двух совершенно разных. Явление в популярной науке получило название «эффект бабочки».

1.1.2 Хаос в классической механике

Хаос широко распространён в естественных и технических науках. Известными примерами конкретных задач являются: задача трёх тел в астрономии, моделирование погоды в метеорологии, задача о числе кроликов в биологии.

Согласно Строгацу С.Х., хаос — это апериодическое долгосрочное поведение в детерминированной системе, проявляющее высокую чувствительную зависимость от начальных условий. При этом хаотические системы остаются классическими детерминированными системами, но высокая чувствительность к начальным условиям делает невозможным долгосрочное прогнозирование.

Демонстрацию хаоса в данной задаче предлагается проводить при помощи сечений Пуанкаре в ограниченной круговой задаче трёх тел.

1.2 Задача трёх тел

Задача трёх тел – одна из старейших задач небесной механики.

Общий вид дифференциального уравнения задачи трёх тел:

$$\frac{d^2x_i^{(1)}}{dt^2} = -\frac{\mu_2(x_i^{(2)} - x_i^{(1)})}{r_{12}^2} - \frac{\mu_3(x_i^{(3)} - x_i^{(1)})}{r_{13}^2}, \tag{1а}$$

$$\frac{d^2x_i^{(2)}}{dt^2} = -\frac{\mu_1(x_i^{(1)} - x_i^{(2)})}{r_{12}^2} - \frac{\mu_3(x_i^{(3)} - x_i^{(2)})}{r_{23}^2}, \tag{1б}$$

$$\frac{d^2x_i^{(3)}}{dt^2} = -\frac{\mu_1(x_i^{(1)} - x_i^{(3)})}{r_{13}^2} - \frac{\mu_2(x_i^{(2)} - x_i^{(3)})}{r_{23}^2}, \tag{1в}$$

где $\mu_i = Gm_i$ – гравитационные параметры тел, r_{ij} – расстояние между телами, $x_i^{(k)}$ – координаты k-го тела. Общего аналитического решения для данного уравнения не существует (Зундман получил общее решение в виде невычислимых рядов), однако было получено некоторое количество частных решений. К ним относятся 3 коллинеарных, 2 треугольных, а также, так называемые, периодические решения. Все они в общем случае являются неустойчивыми.

1.2.1 Ограниченная круговая задача трёх тел

Пусть масса третьего тела много меньше масс двух других тел, тогда будем считать, что третье тело притягивается двумя другими, но не притягивает их. Такая задача называется ограниченной задачей трёх тел. Тогда дифференциальное уравнение движения трёх тел приобретает следующий вид:

$$\frac{d^2 x_i^{(1)}}{dt^2} = -\frac{\mu_2 (x_i^{(2)} - x_i^{(1)})}{r_{12}^2}, \tag{2а}$$

$$\frac{d^2 x_i^{(2)}}{dt^2} = -\frac{\mu_1 (x_i^{(1)} - x_i^{(2)})}{r_{12}^2}, \tag{2б}$$

$$\frac{d^2 x_i^{(3)}}{dt^2} = -\frac{\mu_1 (x_i^{(1)} - x_i^{(3)})}{r_{13}^2} - \frac{\mu_2 (x_i^{(2)} - x_i^{(3)})}{r_{23}^2}. \tag{2в}$$

Пусть первое и второе тела движутся по круговым орбитам. Такая задача называется ограниченной круговой задачей трёх тел. Для неё известны все те же точные решения, что и для полноценной задачи трёх тел, называемые точками Лагранжа. Среди них треугольные при некоторых условиях являются устойчивыми.

Теперь перейдём во вращающуюся систему отсчёта, в которой первое и второе тела неподвижны и расположены в координатах $x_1 = -\mu_2$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = \mu_1$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$. Тогда ускорение в инерциальной системе отсчёта приобретает вид:

$$\ddot{x}^{(3)} = -\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r^3}, \tag{3а}$$

$$\ddot{y}^{(3)} = -\mu_1 \frac{y}{r^3} - \mu_2 \frac{y}{r^3}, \tag{3б}$$

$$\ddot{z}^{(3)} = -\mu_1 \frac{z}{r^3} - \mu_2 \frac{z}{r^3}. \tag{3в}$$

Оно связано с ускорением во вращающейся системе отсчёта следующим соотношением:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{цб}} + \mathbf{a}_{\text{Кор}}, \tag{4}$$

где $\mathbf{a}_{\text{отн}}$ – ускорение во вращающейся системе отсчёта, $\mathbf{a}_{\text{цб}}$ – центробежное ускорение, определяемое следующим соотношением:

$$\mathbf{a}_{\text{цб}} = \omega \times [\omega \times \mathbf{r}], \tag{5}$$

где ω – вектор угловой скорости, равный:

$$\omega = n \mathbf{e}_z, \tag{6}$$

где n – среднее движение. После преобразования итоговый вид формулы для вычисления центробежного ускорения:

$$\mathbf{a}_{\text{цб}} = -n^2(x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y). \tag{7}$$

Третье слагаемое в формуле (4) – сила Кориолиса. Она вычисляется по формуле:

$$\mathbf{a}_{\text{Кор}} = -n(\dot{y}\mathbf{e}_x - \dot{x}\mathbf{e}_y). \tag{8}$$

Подставим все полученные соотношения в формулу (3) и распишем их по компонентам:

$$\ddot{x}^{(3)} = \ddot{x} - n\dot{y} - n^2 x = -\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r^3} - \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r^3}, \tag{9а}$$

$$\ddot{y}^{(3)} = \ddot{y} + n\dot{x} - n^2 y = -\mu_1 \frac{y}{r^3} - \mu_2 \frac{y}{r^3}, \tag{9б}$$

$$\ddot{z}^{(3)} = \ddot{z} = -\mu_1 \frac{z}{r^3} - \mu_2 \frac{z}{r^3}. \tag{9в}$$

Введём потенциал во вращающейся системе отсчёта:

$$U(x,y,z) = \frac{n^2(x^2+y^2)}{2} + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}, \tag{10}$$

где первое слагаемое отвечает за центробежную часть, а последующие за гравитационные потенциалы первого и второго тела. Вычислим частную производную по x:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = n^2 x - \frac{\mu_1(x+\mu_2)}{r_1^3} - \frac{\mu_2(x-\mu_1)}{r_2^3}. \tag{11}$$

С учётом уравнения (9):

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{12}$$

Проведя аналогичные рассуждения для y и z координат, получаем:

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{13}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{14}$$

Домножим каждое уравнение на $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, соответственно, и просуммируем их:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \frac{dU}{dt}. \tag{15}$$

Левая часть уравнения представляет собой полную производную, тогда, интегрируя его, получаем:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = U - C_J, \tag{16}$$

где постоянная интегрирования C_J называется константой Якоби. С учётом определения потенциала в уравнении (10) получаем:

$$C_J = \frac{n^2(x^2+y^2)}{2} + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 \tag{17}$$

Интеграл Якоби является единственным глобальным интегралом движения в ограниченной круговой задаче трёх тел. Он используется для вычисления поверхностей нулевой скорости, определения допустимых областей движения.

1.2.2 Сечение Пуанкаре

Так как ограниченная круговая задача трёх тел является двумерной проблемой, то из уравнения (9) следует:

$$\ddot{x} - n\dot{y} - n^2 x = -\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r^3} - \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r^3}, \tag{18а}$$

$$\ddot{y} + n\dot{x} - n^2 y = -\mu_1 \frac{y}{r^3} - \mu_2 \frac{y}{r^3}. \tag{18б}$$

В ограниченной круговой задаче трёх тел есть только 2 степени свободы (x, y), которым соответствуют четырёхмерное фазовое пространство $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Константа Якоби в двумерном случае выпажается следующим образом:

$$C_J = \frac{n^2(x^2+y^2)}{2} + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2. \tag{19}$$

Она позволяет уменьшить количество измерений в фазовом пространстве на 1. Таким образом, четырёхмерное фазовое пространство преобразуется в трёхмерное $(x, y, \dot{x})$. Далее рассмотрим случай, когда тело пересекает плоскость $(x, \dot{x})$ при $y = 0$ в определённом направлении. Такой способ называется методом сечений Пуанкаре.

1.2.3 Поведение системы в ограниченной круговой задаче трёх тел

Для начала зафиксируем некоторые значения параметров и начальных условий; в дальнейшем они меняться не будут.

1. Среднее движение $n = 1$,
2. Постоянная Якоби $C_J = 3.07$,
3. Гравитационный параметр второго тела $\mu_2 = 0.001$,
4. Начальные условия для $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

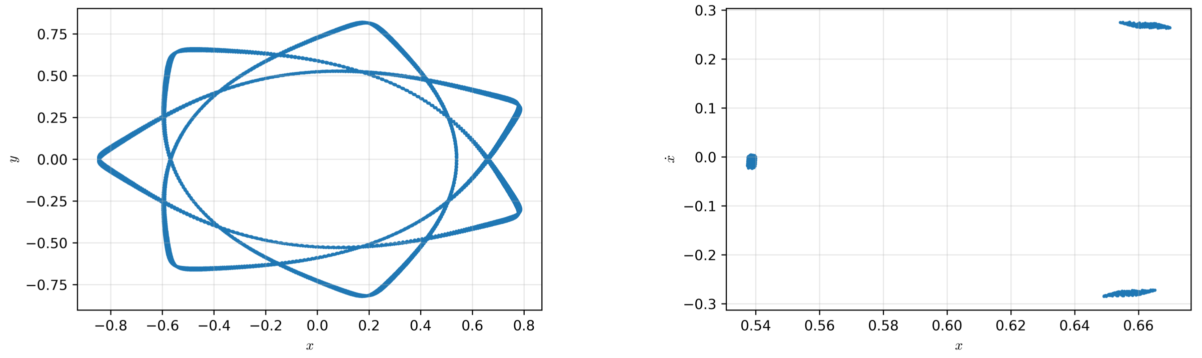
Поведение системы будем рассматривать при различных начальных значениях координаты $x(0)$. Остальные параметры связаны с предыдущими следующими соотношениями:

$$\mu_1 = 1 - \mu_2, \tag{20}$$

$$\dot{y}(0) = \sqrt{\frac{n^2(x^2(0)+y^2(0))}{2} + \frac{\mu_1}{r_1(0)} + \frac{\mu_2}{r_2(0)} - \dot{x}^2(0) - C_J}, \tag{21}$$

где $r_1(0) = x(0) + \mu_2$, $r_2(0) = x(0) - \mu_1$.

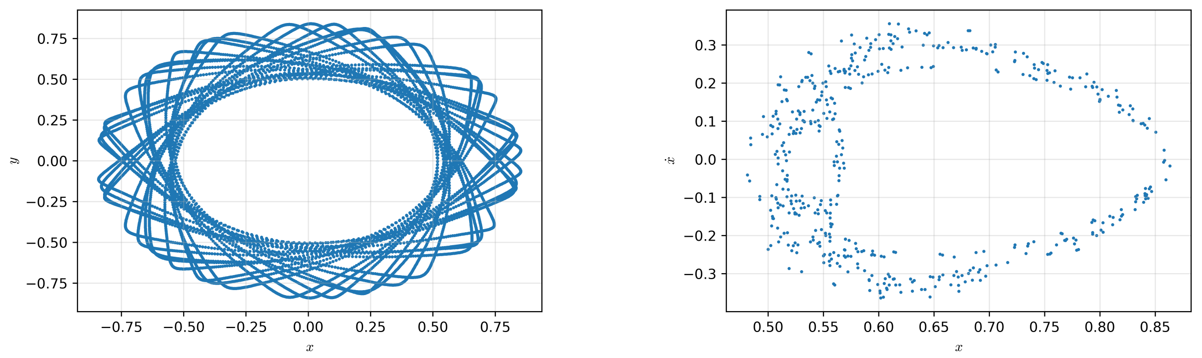
Рассмотрим поведение системы при различных значениях параметра x. Оно представляет из себя чередование упорядоченного и хаотического движений. На рис. 1 приведено упорядоченное поведение системы при $x_0 = 0.54$ с орбитальным резонансом 3:7.



(а) (б)

Рис. 1: а) Поведение системы во вращающейся системе отсчёта, б) сечение Пуанкаре при $x_0 = 0.54$

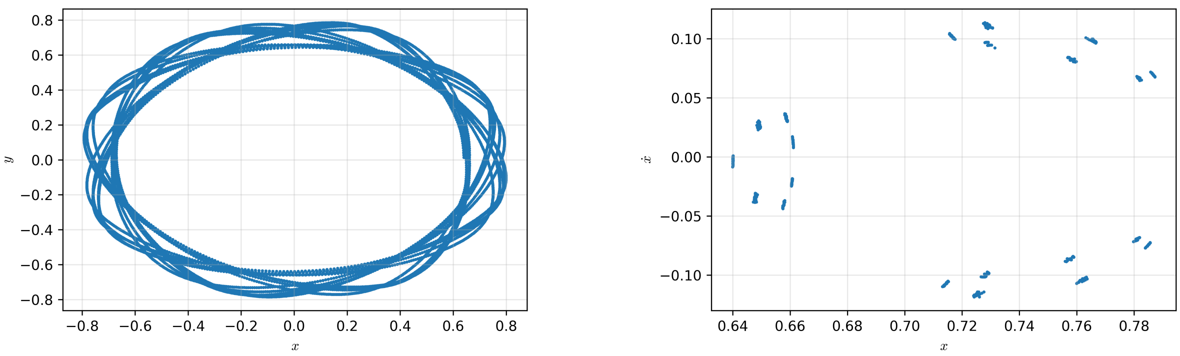
При $x_0 = 0.56$ поведение системы резко меняется. Оно начинает двигаться совершенно хаотично, как это показано на рис. 2.



(а) (б)

Рис. 2: а) Поведение системы во вращающейся системе отсчёта, б) сечение Пуанкаре при $x_0 = 0.56$

При дальнейшем увеличении начального значения координаты x_0 порядок и хаос чередуются.



(а) (б)

Рис. 3: а) Поведение системы во вращающейся системе отсчёта, б) сечение Пуанкаре при $x_0 = 0.64$

1.3 Общее описание алгоритмов численного интегрирования

1.3.1 Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка

Метод Эйлера на практике имеет достаточно низкую точность, поэтому его практически не применяют. Среди более точных алгоритмов применяют методы Рунге-Кутты различных порядков. Наиболее простым из них является метод Рунге-Кутты четвёртого порядка или просто метод Рунге-Кутты.

метод Рунге-Кутты 4-го порядка обладает значительно более высокой точностью .

2 Постановка задачи практикума

2.1 Исследования поведения системы в ограниченной круговой задаче трёх тел

Как было сказано во введении, поведение хаотической системы сильно зависит от начальных условий. Примером такой системы является ограниченная круговая задача трёх тел при некоторых значениях начальных параметров.

Основной задачей практикума является определить поведение системы (хаотическое или упорядоченное) при параметрах, указанных в следующих подразделах. Результат должен быть представлен в виде графиков движения третьего тела во вращающейся системе отсчёта и его сечений Пуанкаре. Для графиков во вращающейся системе отсчёта по осям X и Y должны откладываться координаты третьего тела x и y соответственно. Для сечений Пуанкаре – x и $\dot{x}$.

2.2 Исходные данные для задачи

Уравнения движения третьего тела в ограниченной круговой задаче трёх тел:

$$\ddot{x} - n\dot{y} - n^2 x = -\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r^3}, \tag{22а}$$

$$\ddot{y} + n\dot{x} - n^2 y = -\mu_1 \frac{y}{r^3} - \mu_2 \frac{y}{r^3}. \tag{22б}$$

Данное дифференциальное уравнение второго порядка, но так как метод Рунге-Кутты работает только с дифференциальными уравнениями 1-го порядка, то необходимо ввести замены $x_1 = x, x_2 = y, \dot{x} = x_3$, $\dot{y} = x_4$. В итоге система уравнений для разностной схемы приобретает следующий вид:

$$\dot{x}_1 = x_3, \tag{23а}$$

$$\dot{x}_2 = x_4, \tag{23б}$$

$$\dot{x}_3 - n\dot{x}_2 - n^2 x_1 = -\mu_1 \frac{x_1 + \mu_2}{r^3} - \mu_2 \frac{x_1 - \mu_1}{r^3}, \tag{23в}$$

$$\dot{x}_4 + n\dot{x}_1 - n^2 x_2 = -\mu_1 \frac{x_2}{r^3} - \mu_2 \frac{x_2}{r^3}. \tag{23г}$$

Численное интегрирование должно проводиться при следующих начальных условиях:

1. Среднее движение $n = 1$;
2. Гравитационный параметр второго тела $\mu_2 = 0.001$;
3. Константа интегрирования Якоби $C_J = 3.07$;
4. Начальные значения $x = 0.54, 0.56, 0.64$, $\dot{x} = 0$, $y = 0$.

Значение координаты $\dot{y}$ вычисляется по формуле (21), гравитационный параметр первого тела по формуле (20).

2.3 Алгоритм численного решения

Численное интегрирование задачи будем производить методом Рунге-Кутты 4-го порядка, описание которого представлено в задаче практикума по небесной механике №1.

Рассмотрим задачу численного интегрирования систем дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = f(t, x_1, x_2, ..., x_n), \tag{24}$$

с начальными условиями $x_1 = x_1^{(0)}, x_2 = x_2^{(0)}, ..., x_n = x_n^{(0)}$ при $t = t_0$. Теперь введём два вида шагов. Первый, называемый шагом интегрирования H, показывает, с каким шагом производится численное интегрирование. Второй, называемый шагом по фиксации координат ste, будет показывать с каким шагом будут записываться координаты и скорости в массив или файл вывода (для наглядности) и выводиться точки на графике.

После запуска программы численное интегрирование продолжаем до тех пор, пока общее время интегрирования t не достигнет шага по фиксации координат ste. После этого записываем в файл вычисленные координаты и скорости в данный момент времени, затем численное интегрирование возобновляется. Когда третье тело пересекает плоскость $y = 0$ фазового пространства $(x, y, \dot{x})$ в положительном направлении, в файл вывода сечения Пуанкаре записываем координаты x и $\dot{x}$. Данный цикл продолжается до тех пор, пока время интегрирования не достигнет общего времени интегрирования T.

При выполнении задачи необходимо использовать следующие значения вышеуказанных параметров:

- Шаг интегрирования $H = 0.0001$;
- Шаг по фиксации координат $ste = 0.01$;
- Общее время интегрирования $T = 10000$.

2.4 Формат программы и отчёта

Студент представляет отчёт в виде документа и программы для численного интегрирования. Требования к программе:

1. Метод Рунге-Кутты должен быть реализован самостоятельно; Он должен быть реализован в виде отдельной функции или подпрограммы.

В отчёте должны быть представлены:

1. Введение;
2. Постановка задачи;
3. Описание механической модели;
4. Задание начальных условий;
5. Полученные результаты, состоящие из графиков движения третьего тела во вращающейся системе отсчёта и сечений Пуанкаре;
6. Выводы.